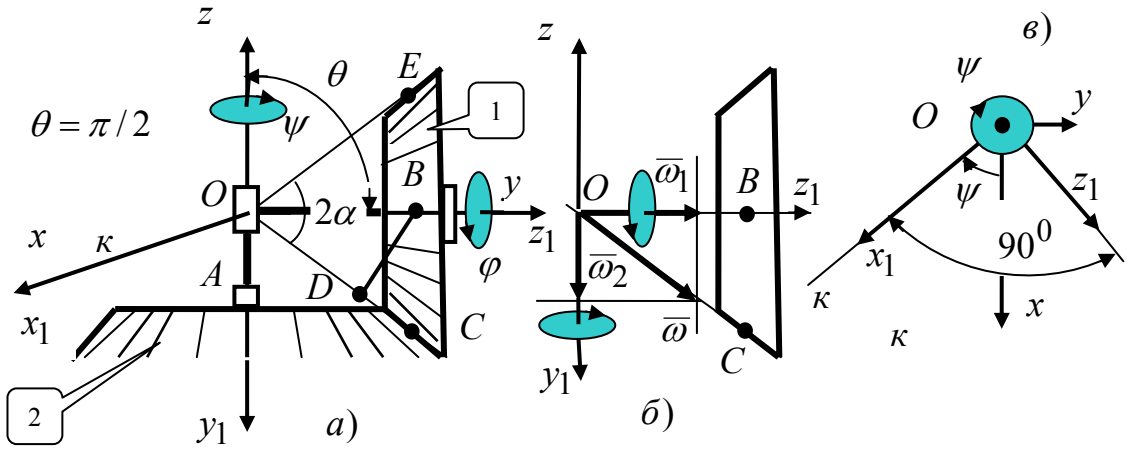
Ф.Г. Шигабутдинов, А.Ф. Шигабутдинов

КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Часть 2. КИНЕМАТИКА

Учебное пособие



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ф.Г. Шигабутдинов, А.Ф. Шигабутдинов

КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Часть 2. КИНЕМАТИКА

Учебное пособие

Рекомендовано Научно-методическим советом по теоретической механике при Министерстве образования и науки России в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Строительство»

Казань
2012

УДК 531.8
ББК 538.0
Ш55

Шигабутдинов Ф.Г., Шигабутдинов А.Ф

Ш55 Краткий курс теоретической механики. Ч.2. Кинематика: учеб. пособие.\ Ф.Г. Шигабутдинов, А.Ф. Шигабутдинов. – Казань: Изд.-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2012. – 175 с.

ISBN 978-5-7829-0376-3

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Учебное пособие предназначено для студентов инженерных вузов, изучающих теоретическую механику в объеме до 200–250 часов. В пособии достаточно полно изложена вторая часть курса – кинематика. Теоретическое изложение материала сопровождается разбором большого числа задач. Приведены задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. В конце пособия даны сведения из математики, необходимые для решения задач.

Ил. 211; табл. 2; библиогр. 9 наимен.

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики КНИТУ-КАИ им А.Н. Туполева **Г.В. Голубев**

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов и основ теории упругости Казанского государственного архитектурно-строительного университета **Р.А. Каюмов**

УДК 531.8
ББК 538.0

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2012

ISBN 978-5-7829-0376-3

© Шигабутдинов Ф.Г., Шигабутдинов А.Ф., 2012

От авторов

Всю инженерную составляющую образования объединяет дисциплина «Теоретическая механика». Своими выводами, идеями, методами и принципами она не только описывает самую распространенную форму движения материи – механическую, но и дает студенту универсальные методы математического моделирования, одинаково применимые в различных отраслях инженерной практики. Более того, по объему часов, выделяемых на теоретическую механику в учебных планах, легко судить о степени «элитности» инженерного вуза, о будущих возможностях его выпускников для работы в инновационной промышленности. Это одна из немногих дисциплин, которая позволяет реально реализовать принцип «образование через всю жизнь», ибо её выводы, методы, принципы универсальны, и не зависят ни от партийной принадлежности специалиста, ни от области и способов материального производства, ни от общественного строя страны, ни от географического места применения. Традиционно для Российского образования, преподавание теоретической механики условно разбивается на три части: статику, кинематику и динамику. Статике была посвящена первая книга авторов, вышедшая в 2009году. В данном пособии излагается материал второй части – кинематики. Авторы пытались учесть реальные изменения, которые произошли в области планирования учебного процесса, реальное сокращение аудиторных занятий и сдвиг в сторону самостоятельной работы, расширение заочной формы обучения, появление дистанционного образования и большого числа людей, получающих второе высшее образование. Пособие насыщено большим числом примеров, решенных задач и задач для самостоятельного решения с ответами. В приложении приведены сведения из математики. Пособие поддерживается видео курсом на DVD дисках, на которых сняты реальные лекции и практические занятия первого из авторов. Часть задач составлены и решены авторами. Другая часть задач заимствована из хорошо известных источников, прошедших испытание временем в советской и российской высшей школе, чтобы не нарушить годами выработанные «стандарты» требований к знаниям обучающихся.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам пособия– д.ф.-м.н., проф. Г.В. Голубеву и д.ф.-м.н., проф. Р.А. Каюмову. Авторы осознают, что в пособии есть недостатки. Мы будем благодарны всем, кто отметит положительные стороны пособия и выявит недочеты. Замечания и пожелания просим присылать по адресу: 420043, Казань-43, ул. Зеленая, дом 1. Казанский государственный архитектурно-строительный университет. Кафедра теоретической механики. E-mail: shigfg@mail.ru.

ГЛАВА 1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 1.1. Основные понятия и определения. Задачи кинематики

1.1. Раздел механики, в котором изучается механическое движение точек и тел без учета их массы и действующих на них сил, называется кинематикой.

Изучение кинематики обычно начинается с изучения движения точки как простейшего объекта, не имеющего размеров.

1.2. Материальные частицы бесконечно малых размеров, из которых состоят абсолютно твердые тела, называются в механике материальными точками.

За материальные точки часто принимаются и тела конечных размеров, если их размерами в решаемой задаче можно пренебречь. Но об этом позже.

Кинематическая точка не отличается от точки геометрической. Она не обязательно должна принадлежать какому–либо телу. В кинематике можно, например, рассматривать движение светового луча на экране или точек движущейся тени. Но, чтобы отличать движущуюся точку от точек трехмерного пространства, в которые она попадает в процессе движения, будем иногда называть ее кинематической или материальной точкой.

1.3. Механическим движением точки или твердого тела называется изменение с течением времени положения точки или тела в пространстве по отношению к другому телу.

Экспериментально положение тела в пространстве может быть определено только относительно другого тела, которое называется телом отсчета. Для того чтобы можно было проводить какие-либо измерения, с телом отсчета жестко связывают систему координат.

1.4. Тело отсчета и неизменно связанная с ним система координат образуют систему отсчета.

При решении задач часто говорят «система координат», не забывая, что она связана с выбранным телом отсчета. В качестве тела отсчета чаще всего принимается Земля или другое тело, с ней жестко связанное. При этом с точностью, достаточной для технических измерений и вычислений, Землю можно считать неподвижным телом. Те случаи, когда приходится учитывать движение Земли, будем оговаривать отдельно.

Движение происходит в пространстве и во времени. В механике Ньютона, элементы которой здесь излагаются, рассматривается трехмерное евклидово пространство. Метрические свойства пространства считаются не зависящими от движущейся в нем материи и все измерения в

нем можно производить на основании методов евклидовой геометрии (которая изучается в школах и технических университетах). В Международной системе измерений (СИ) за единицу длины при вычислении расстояний принимается один метр, за единицу времени–одна секунда. Время в механике универсально, оно считается одинаково протекающим во всех точках пространства и на любых движущихся в пространстве телах. В кинематике время является аргументом заданных или искомых функций.

Отсчет времени ведется с некоторого начального времени (начального момента времени), выбор которого каждый раз при решении задач оговаривается. Время – величина скалярная. *Под фразой «момент времени» нужно понимать время, прошедшее с начального момента времени до настоящего момента времени. Разность между двумя последовательными моментами времени называется промежутком времени, интервалом времени или приращением времени.* Промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$. Другими словами, каждый следующий момент времени всегда больше предыдущего. «В прошлое вернуться не возможно».

Движение точки или тела в кинематике чаще всего задается. Фраза «задать движение» означает, что положение точки с течением времени каким-либо способом определено. Это делается с помощью математических функций.

1.5.Совокупность математических функций, которые единственным образом определяют положение точки или тела в пространстве в принятой системе отсчета в любой момент времени (говорят, задают движение точки или тела в пространстве), называется уравнениями движения точки.

1.6. Непрерывная кривая, которую описывает точка в процессе движения, называется траекторией точки.

1.7. Если траекторией точки является кривая, то движение точки называется криволинейным. Если траекторией точки является прямая линия, то движение точки называется прямолинейным.

1.8. Движение точки в кинематике характеризуется траекторией точки, скоростью точки, ускорением точки.

Все эти механические понятия называются кинематическими характеристиками движения точки.

1.9. Основными задачами кинематики точки и твердого тела, как науки, являются следующие две проблемы:

1) определение способов задания движения точки или тела;

2)определение кинематических характеристик движения свободной точки, тела и точек тела по известным уравнениям движения точки.

Рассмотрим три способа задания движения точки – **векторный, координатный и естественный.**

§ 1.2. Векторный способ задания движения

При векторном способе задания движения положение точки M определяется радиус-вектором $\bar{r}(t)$ (рис.1.1).

$$\boxed{\bar{r} = r(t)\ .} \qquad (1.1)$$

Начало радиус-вектора совпадает с началом системы координат. Конец радиус-вектора $\bar{r}(t)$ упирается в движущуюся точку M (рис.1.1а). Конец радиус-вектора $\bar{r}(t)$, следуя в пространстве за точкой M, описывает, в общем случае, пространственную кривую, которая называется годографом радиус-вектора $\bar{r}(t)$. Эта кривая и есть траектория точки (рис.1.1а). Таким образом, годограф радиус-вектора $\bar{r}(t)$ имеет четкий механический смысл.

1.10. При векторном способе задания движения траекторией движения точки является годограф радиус-вектора $\bar{r}(t)$**.**

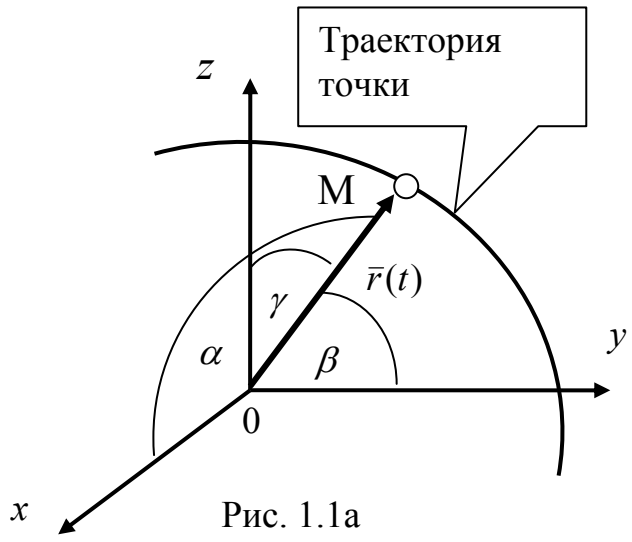


Рис. 1.1а

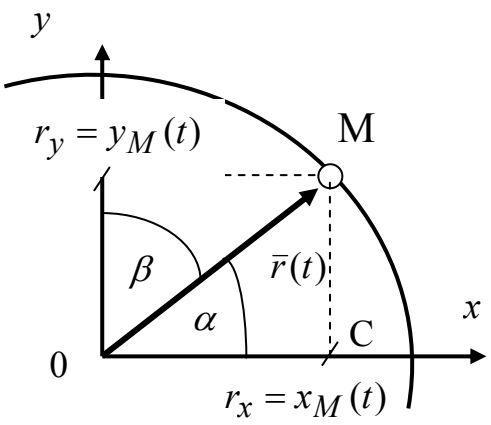


Рис.1.1б

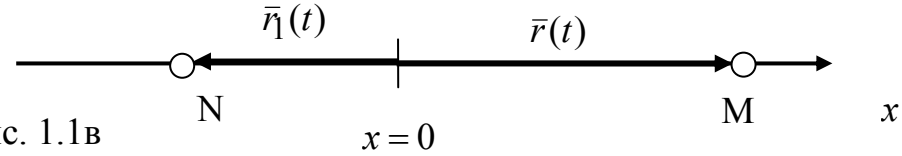


Рис. 1.1в

На рис. 1.1а, б, в показаны три возможных случая движения точки: *пространственное криволинейное движение точки, криволинейное движение точки в плоскости и прямолинейное движение двух точек.*

Изменение радиус-вектора $\bar{r}(t)$ с течением времени проявляется в том, что с течением времени меняется его длина (модуль) и направление в пространстве или на плоскости (меняются углы между направлением вектора и положительными направлениями осей). При прямолинейном движении точки меняются модуль и направление на прямой (для точки *M* вектор направлен вправо, для точки *N* – влево).

Что стоит за краткой и красивой формулой (1.1)? Фразу «вектор $\bar{r}(t)$ известен» нужно понимать так, что мы можем вычислить его длину (модуль вектора) и определить его направление в пространстве или на плоскости в любой момент времени. Это можно проделать двумя способами.

Пусть траекторией точки является пространственная кривая – радиус вектор расположен в трехмерном пространстве (рис. 1.1а).

1. Задать векторную функцию скалярного аргумента $\bar{r} = r(t)$ в трехмерном пространстве равносильно тому, чтобы задать четыре скалярные функции

$$\boxed{|\bar{r}(t)| = f_1(t),\ \ Cos\alpha(t) = f_2(t),\ \ \ Cos\beta(t) = f_3(t),\ \ \ Cos\gamma(t) = f_4(t).} \quad (1.2)$$

Здесь первая функция дает закон изменения длины радиус-вектора, три другие называются направляющими косинусами радиус-вектор $\bar{r}(t)$**.** Они определяют направление радиус-вектора в пространстве.

$$Cos\alpha(t) = Cos(\bar{r},^{\wedge} Ox);\ \ Cos\beta(t) = Cos(\bar{r},^{\wedge} Oy);\ \ Cos\gamma(t) = Cos(\bar{r},^{\wedge} Oz).$$

Известно, что из трех направляющих косинусов независимыми являются только два, так как существует основное тригонометрическое тождество, и третий косинус может быть в каждый момент времени вычислен по известным двум другим:

$$\boxed{Cos^2\alpha(t) + Cos^2\beta(t) + Cos^2\gamma(t) = 1.} \quad (1.3)$$

Таким образом, для пространственной траектории «вектор $\bar{r}(t)$ известен», если известны три скалярные функции, например, $|\bar{r}(t)| = f_1(t)$, $Cos\alpha(t) = f_2(t)$, $Cos\beta(t) = f_3(t)$.

2.Задать векторную функцию скалярного аргумента $\bar{r} = r(t)$ в трехмерном пространстве равносильно тому, чтобы задать три скалярные функции времени–координаты вектора $r_x,\ r_y,\ r_z$. Тогда $\bar{r}(t) = r_x(t)\cdot\bar{i} + r_y(t)\cdot\bar{j} + r_z(t)\cdot\bar{k}$, где $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – единичные векторы осей.

Зная $r_x(t),\ r_y(t),\ r_z(t)$, можно построить вектор в любой момент времени:

$$\boxed{|\bar{r}(t)| = f_1(t) = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}\ ,} \tag{1.4}$$

$$\boxed{Cos\alpha(t) = f_2(t) = r_x / |\bar{r}(t)|, \qquad Cos\beta(t) = f_3(t) = r_y / |\bar{r}(t)|,} \tag{1.5}$$

$$\boxed{Cos\gamma(t) = f_4(t) = r_z / |\bar{r}(t)|.} \tag{1.6}$$

Пусть траекторией точки является плоская кривая. Радиус-вектор лежит в плоскости рис. 1.1б. Ось *Oz* образует с плоскостью *Oxy* прямой угол, следовательно, $r_z = r_z(t) = 0$, $\gamma = 90^o$ и $Cos\gamma(t) = 0$ в любой момент времени. Система соотношений (1.2) – (1.6) упрощается и принимает вид:

$$\boxed{|\bar{r}(t)| = f_1(t), Cos\alpha(t) = f_2(t),\ Cos\beta(t) = f_3(t).} \tag{1.7}$$

$$\boxed{Cos^2\alpha(t) + Cos^2\beta(t) = 1.} \tag{1.8}$$

$$\boxed{|\bar{r}(t)| = f_1(t) = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{x_M^2(t) + y_M^2(t)}.} \tag{1.9}$$

$$\boxed{Cos\alpha(t) = f_2(t) = r_x / |\bar{r}(t)|, \qquad Cos\beta(t) = f_3(t) = r_y / |\bar{r}(t)|.} \tag{1.10}$$

Таким образом, если точка движется в известной плоскости, то высказывание «вектор $\bar{r}(t)$ известен» означает, что известны две скалярные функции, например, $|\bar{r}(t)| = f_1(t)$, $Cos\alpha(t) = f_2(t)$. Второй направляющий $Cos\beta(t) = f_3(t)$ может быть определен из тождества (1.8).

Замечание. По рис.1.1б видно, что $\alpha = 90^o - \beta$. С учетом этого тождество (1.8) принимает привычный «школьный» вид:

$$Sin^2\alpha + Cos^2\alpha = 1. \tag{1.11}$$

§ 1.3. Вектор перемещения, вектор скорости и вектор ускорения точки

Важнейшей характеристикой движения является понятие скорости и ускорения (или замедления). В механике даются точные определения этих понятий, которые затем используются не только для механической формы движения, но для любых других форм движения. Например, говорят о скорости роста или старения биологических объектов, скорости протекания химических реакций, скорости увеличения информации, скорости старения используемых технологий, скорости роста валового

национального продукта, скорости роста благосостояния народа и так далее. На бытовом языке можно было бы сказать, что ***скорость – это «быстрота» происходящего движения. Ускорение – это «быстрота» изменения самой скорости, то есть – это уже скорость изменения самой скорости.*** Для инженерных расчетов этих определений, конечно, недостаточно. Ниже дается математически строгое определение этих понятий.

Вектор перемещения точки при прямолинейном движении

1.11. Движение точки называется прямолинейным, если она движется по прямолинейной траектории.

Положение движущейся точки M на траектории в разные моменты времени $t = t_0, t = t_1, \ldots$ будем обозначать той же буквой *M*, но с разными индексами. Например, M_0, M_1 и т.д. Положение точки на траектории в *произвольный момент* времени t будем обозначать буквой M. Пусть за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ точка *M* переместилась из положения M в последующее положение M_1. В начальный момент времени t_0 положение точки M_0 определяется радиус-вектором $\bar{r}(t_0)$, положение точки M_1 определяется радиус-вектором $\bar{r}(t_1)$. Положение точки в произвольный момент времени определяется радиус-вектором $\bar{r}(t)$. Радиус-вектор $\bar{r}(t)$ точки M получает приращение $\Delta\bar{r}(t)$ (рис.1.2). При этом

$$\bar{r}(t_1) = \bar{r}(t) + \Delta\bar{r}(t).$$

Если точка, двигаясь в положительном направлении оси *Ox* (рис.1.2а), перемещается вправо из точки M в точку M_1, то радиус-вектор $\bar{r}(t)$ получает приращение $\Delta\bar{r}(t) = \overline{MM_1}$. При этом вектор $\Delta\bar{r}(t)$ направлен в ту же сторону, что и $\bar{r}(t)$ (по направлению движения).

Если точка двигалась в отрицательном направлении оси *Ox* (рис.1.2б) и переместилась влево из точки M в точку M_1, то и вектор приращения $\Delta\bar{r}(t)$ радиус-вектора $\bar{r}(t)$ направлен в отрицательном направлении оси *Ox* (то есть пять по направлению движения). Все векторы должны лежать на оси *Ox*, некоторые из них показаны в стороне от оси для большей наглядности.

1.12. Перемещением точки M, которое произошло за время Δt, из положения M в положение M_1 называется вектор $\overline{MM_1}$, равный приращению радиус-вектора точки $\Delta\bar{r}(t)$ и направленный по направлению движения точки из положения M в положение M_1.

С понятием перемещение точки тесно переплетается и понятие «путь, пройденный точкой». Рассмотрим два возможных варианта движения:

1) точка M движется только в одном направлении, удаляясь или приближаясь к началу координат. На рис. 1.2а точка M удаляется от начала координат, а на рис. 1.2б. приближается к началу координат. В этом случае путь L, пройденный точкой, будет равен модулю вектора перемещения, то есть длине отрезка MM_1.

$$L = MM_1 = \left|\Delta\bar{r}(t)\right|;$$

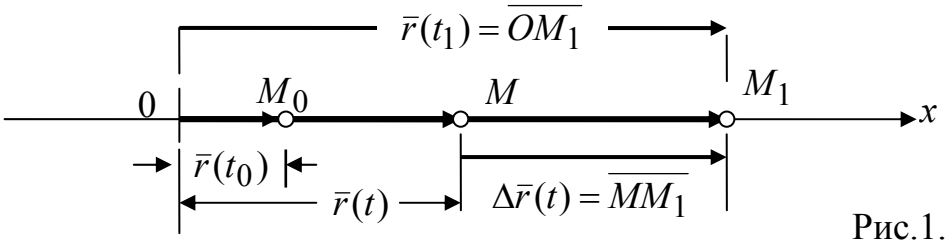


Рис.1.2а

$$\bar{r}(t_1) = \bar{r}(t) + \Delta\bar{r}(t), \qquad \Delta\bar{r}(t) = \bar{r}(t_1) - \bar{r}(t)$$

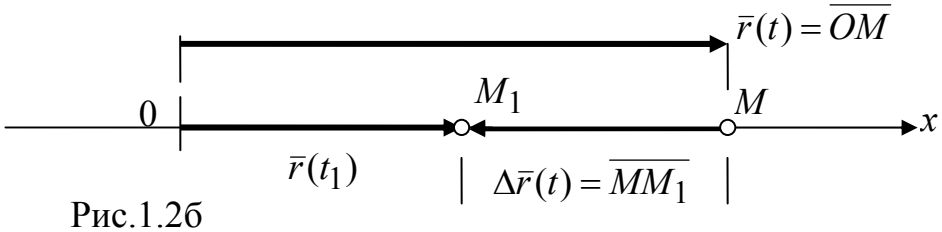


Рис.1.2б

2) точка M с момента времени t некоторое время $\Delta_1 t = t_1 - t$ движется вправо от точки M к точке M_1 оси Ox. Радиус-вектор $\bar{r}(t)$ получает приращение $\Delta\bar{r}(t)$. Точка останавливается в точке M_1 и продолжает движение в обратном направлении от точки M_1 к точке M (см. рис. 1.2в). При $t = t_2$ точка вновь оказывается в точке M оси Ox. Радиус-вектор точки $\bar{r}(t)$ получает приращение $(-\Delta\bar{r}(t))$. Обратный путь точка проделывает за время $\Delta_2 t = t_2 - t_1$. Полное время движения точки $\Delta t = \Delta_1 t + \Delta_2 t = t_1 - t + t_2 - t_1 = t_2 - t$. Вектор полного перемещения точки за время движения точки $\Delta t = t_2 - t$ обозначим $\Delta\bar{U}(t)$ (см. рис.1.2в). Полное перемещение точки $\Delta\bar{U}$ складывается из перемещений точки в одну и в другую стороны.

$$\Delta\bar{U} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M} = \Delta\bar{r}(t) + (-\Delta\bar{r}(t)) = 0.$$

Путь L, пройденный точкой за рассматриваемый промежуток времени, в нашем примере будет равен:

$$L = \left|\overline{MM_1}\right| + \left|\overline{M_1M}\right| = 2MM_1.$$

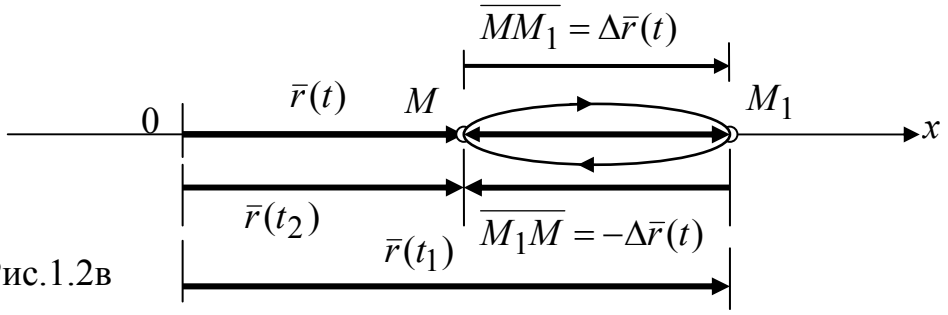


Рис.1.2в

В рассматриваемом примере вектор полного перемещения точки $\Delta\overline{U}$ оказывается равным нулю, в других случаях он отличен от нуля. Равенство нулю вектора полного перемещения точки $\Delta\overline{U}$ может означать, что: *1) точка в течение рассматриваемого промежутка времени пребывала в покое; 2) в течение рассматриваемого промежутка времени движение точки происходило так, что к концу промежутка времени точка M вернулась в своем первоначальном положении M_0.*

Как видно из приведенного примера, путь, пройденный точкой, в общем случае не может быть вычислен только по приращению векторной координаты точки $\bar{r}(t)$ (по вектору полного перемещения $\Delta\overline{U}$). Необходимо знать «историю» движения за промежуток времени Δt.

1.13. Таким образом, путь L, пройденный точкой за время Δt, является сугубо положительной величиной и равен сумме длин участков траектории, по которым двигалась точка в течение времени Δt. В основных единицах системы СИ путь L измеряется в метрах.

Вектор перемещения точки при криволинейном движении

Определение 1.12 справедливо и в этом случае. Отличие состоит в том, что теперь вектор перемещения $\overline{MM_1} = \Delta\bar{r}(t)$ направлен по хорде дуги MM_1 в направлении движения точки M (рис.1.3).

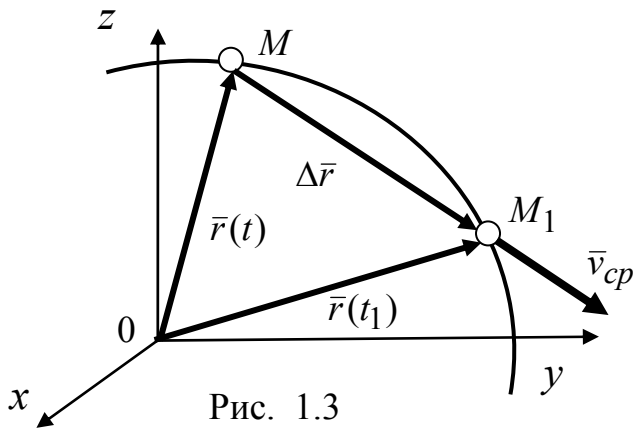


Рис. 1.3

Путь, пройденный точкой, в этом случае определяется не длиной отрезка, а длиной дуги MM_1, которая охватывает хорду MM_1 (рис. 1.3).

Вектор средней скорости точки за промежуток времени Δt

1.14. Вектором средней скорости точки за промежуток времени Δt называется векторная величина $\bar{v}_{cp}$, равная отношению вектора перемещения точки к промежутку времени, за которое это перемещение произошло.

$$\boxed{\bar{v}_{cp} = \frac{\Delta \bar{r}(t)}{\Delta t}\ .} \qquad (1.12)$$

Так как деление вектора перемещения точки $\Delta \bar{r}$ на положительное число Δt не меняет направление вектора $\Delta \bar{r}$ на обратное, то из формулы (1.12) видно, **что вектор средней скорости направлен так же, как и вектор перемещения точки (рис. 1.3).** При прямолинейном движении вектор $\bar{v}_{cp}$ лежит на траектории, при криволинейном движении (рис.1.3) вектор средней скорости $\bar{v}_{cp}$ направлен по хорде траектории MM_1 в ту же сторону, что и вектор перемещения $\overline{MM_1} = \Delta \bar{r}(t)$. В основных единицах системы СИ величина средней скорости v_{cp} измеряется в *м/сек*.

Пример 1.1. Мостовой кран за одну минуту перемещается на расстояние *80 м.* Принимая кран за точку, определить его среднюю скорость в $м/с$ и $км/час$.

Решение. В данной задаче речь идет о прямолинейном движении точки. Полагая $t = t_0 = 0$ в момент начала движения крана, $\Delta t = t_1 - t_0 = t_1 = 60$ *с*. Модуль вектора перемещения крана равен пройденному пути (рис.1.2а). Тогда

$$v_{cp} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{L}{t_1} = \frac{80}{60} = 1{,}33 м/с = \frac{1{,}33 \cdot 3600}{1000} = 4{,}8 \ км/час.$$

Замечание. Очевидно, что кран имел некоторые участки разгона и торможения, где его скорость в отдельные моменты времени не равнялась вычисленной нами средней скорости. Но для проектирования технологических процессов, например, для расчета среднего времени погрузки изделий на заводах железобетонных конструкций, знаний о средней скорости движения крана часто бывает достаточным.

Вектор скорости точки в данный момент времени

Будем вычислять среднюю скорость точки на убывающих интервалах времени $\Delta t \to 0$. Другими словами, перейдем к пределу в отношении (1.12), устремив Δt к нулю.

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}.$$

Итак, $$\boxed{\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.} \qquad (1.13)$$

При $\Delta t \to 0, M \to M_1$. Следовательно, вектор $\bar{v}_{cp}$ будет вращаться относительно точки M, и в пределе он стремится занять положение касательной к траектории в точке M (рис.1.4а). На рис.1.4б показаны оба вектора скоростей точки. На рис.1.4в показан случай прямолинейного движения точки.

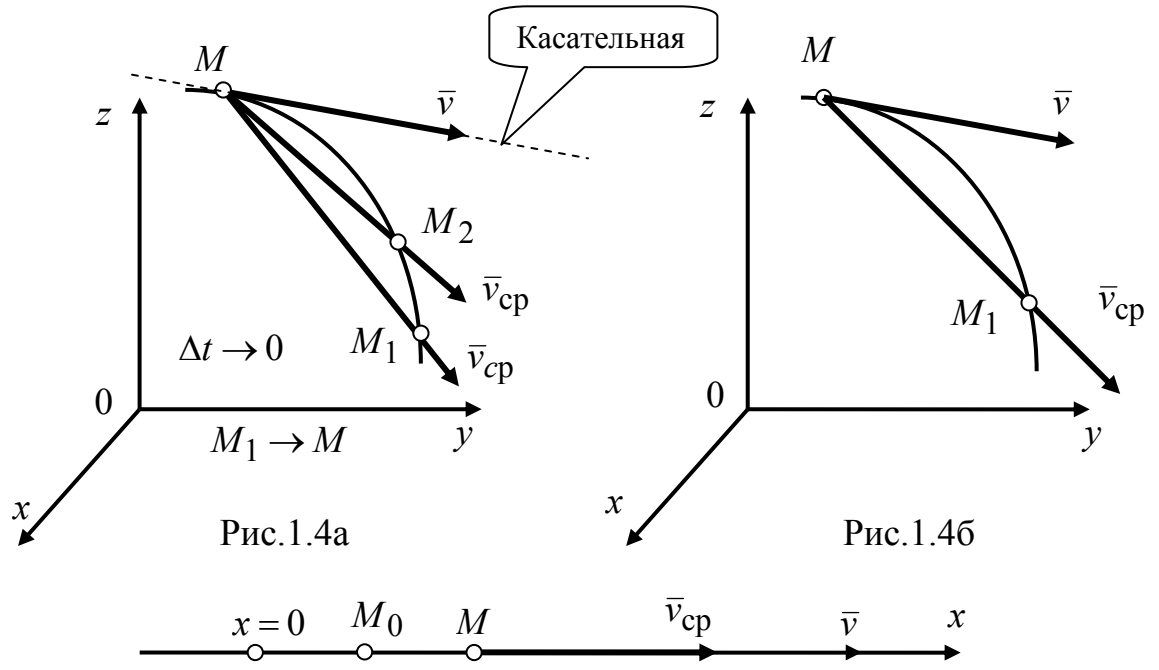


Рис.1.4а Рис.1.4б

Рис.1.4в

Поскольку касательная к прямой в любой ее точке совпадает с самой прямой, то при прямолинейном движении оба вектора $\bar{v}_{cp}$ *и* $\bar{v}$ *направлены по траектории движения точки (рис.1.4.в).*

1.15. Вектором скорости точки в некоторый момент времени t ***называется вектор*** $\bar{v}$***, приложенный своим началом к движущейся точке, направленный по касательной к траектории в этой точке в сторону перемещения точки. Он равен первой производной по времени от радиус-вектора точки (1.13).***

Основной единицей измерения скорости в системе *СИ* является $1\ м/с$. Точка над вектором $\dot{\bar{r}}(t)$ означает дифференцирование радиус-вектора $\bar{r}(t)$ по времени.

Вектор среднего ускорения точки, вектор ускорения точки

По аналогии с векторами скорости вводятся понятия вектора среднего ускорения точки и вектор ускорения точки в данный момент

времени. Они характеризуют изменение соответствующих векторов скорости или за промежуток времени Δt, или в данный момент времени.

1.16. Вектором среднего ускорения $\bar{a}_{cp}$ точки за промежуток времени Δt называется отношение приращение вектора скорости, произошедшее за данный промежуток времени, к самому промежутку времени.

$$\boxed{\bar{a}_{cp}=\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}\ .} \qquad (1.14)$$

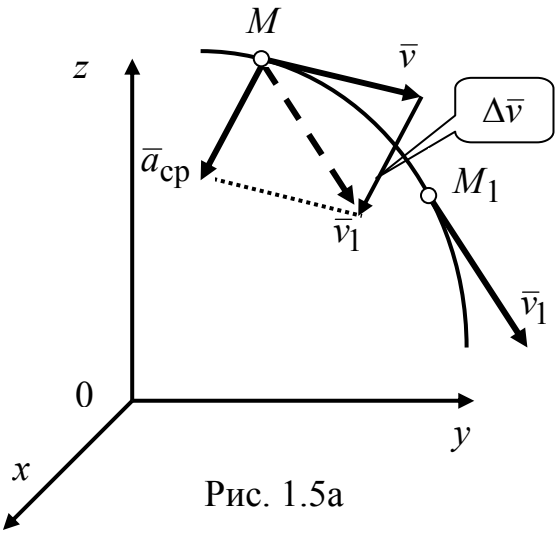


Рис. 1.5а

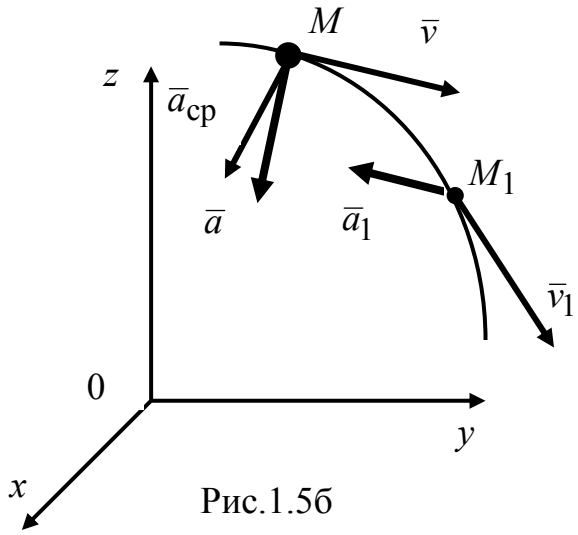


Рис.1.5б

Из формулы (1.14) следует, что вектор среднего ускорения $\bar{a}_{cp}$ параллелен вектору приращения скорости $\Delta\bar{v}=\bar{v}_1-\bar{v}$, где $\bar{v}_1$–вектор скорости точки в M_1, $\bar{v}$– вектор скорость в точке траектории M. Этот вектор, построенные по правилу параллелограмма, показан на рис.1.5а.

Переходя к пределу в формуле (1.14), получим формулу для вычисления вектора ускорения точки в данный момент времени:

$$\bar{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{a}_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\dot{\bar{v}}\ .$$

$$\boxed{\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}.} \qquad (1.15)$$

1.17. Вектором ускорения точки в некоторый момент времени t называется приложенный своим началом к точке и направленный в сторону вогнутости траектории вектор $\bar{a}$, равный первой производной по времени от вектора скорости точки.

В Международной системы *СИ,* как видно по формулам (1.14),(1.15), величина ускорения измеряются в $(1м/с)/с=1\ \ м/с^2$.

На рисунке 1.5б векторы ускорения показаны в двух точках траектории. В точке M векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$ «сонаправлены» – точка движется ускоренно (модуль вектора скорости увеличивается). В точке M_1 векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}_1$ «не сонаправлены» – точка движется замедленно (модуль вектора скорости уменьшается).

Учитывая, что сам вектор скорости вычисляется по формуле (1.13), формулу (1.15) можно переписать еще в другом виде:

$$\boxed{\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\ .} \qquad (1.16)$$

Следовательно, можно дать второе определение вектора ускорения.

1.18. Вектором ускорения точки в некоторый момент времени t называется приложенный своим началом к точке и направленный в сторону вогнутости траектории вектор $\bar{a}$, равный первой производной по времени от вектора скорости или второй производной по времени от радиуса вектора точки.

В подробных курсах доказывается, что вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости к траектории (надо вспомнить геометрию пространственных кривых). Если движение точки M происходит в плоскости, то ее траекторией является плоская кривая. Для плоских кривых соприкасающаяся плоскость – это плоскось самого рисунка.

§ 1.4. Координатный способ задания движения

При координатном способе задания движения положение материальной точки М в пространстве задается ее координатами (рис.1.6б) как функциями времени.

$$x_M = x_M(t),\ \ y_M = y_M(t),\ \ z_M = z_M(t)\ . \qquad (1.17)$$

1.19. Уравнения (1.17) называются уравнениями движения точки при координатном способе задания движения в декартовой прямоугольной системе координат.

Зная функции (1.17), можно вычислить координаты точки в любой момент времени и, следовательно, определить ее местоположение.

Если точка M движется в известной плоскости (1.6а), то оси Ox и Oy обычно выбираются в этой плоскости. Тогда в процессе движения точки координата $z=0$, а уравнения движения (1.17) принимают вид:

$$x_M = x_M(t),\ \ y_M = y_M(t)\,. \qquad (1.17а)$$

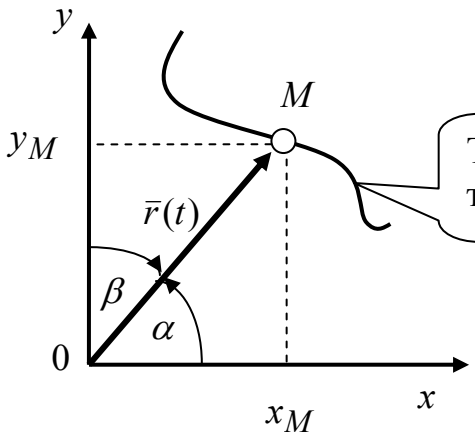


Рис.1.6а

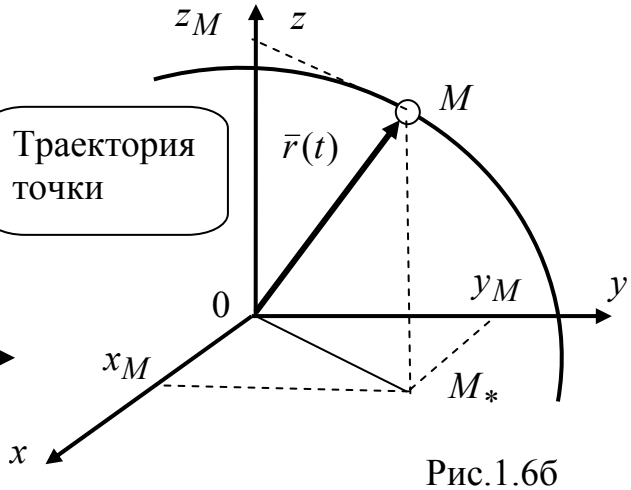


Рис.1.6б

Уравнение траектории при координатном способе задания движения

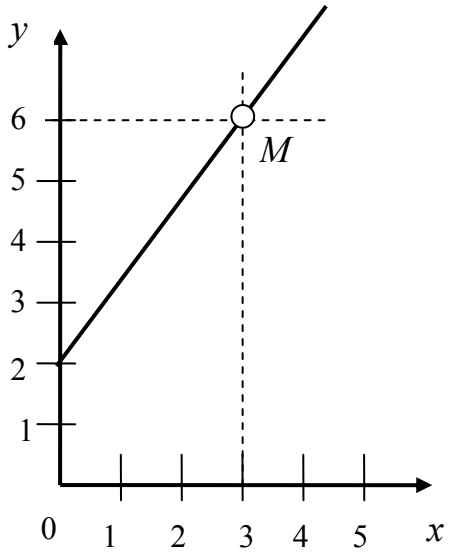


Рис. к примеру 1.2

Как известно, система функции (1.17) уже является параметрической формой уравнения пространственной кривой, которая может быть построена по точкам. Но функции (1.17) позволяют получить и каноническую форму уравнения траектории точки.

1.20. Чтобы определить уравнение траектории точки в заданной системе отсчета при координатном способе задания движения, необходимо исключить время t в уравнениях движения.

Пример 1.2. Точка M движется в плоскости Oxy согласно уравнениям: $x = 3t,\ y = 4t + 2$ (x, y – в метрах). Определить уравнение траектории точки и найти ее положение на траектории в момент времени $t_1 = 1$с.

Решение. Выразим параметр времени из первого уравнения и подставим во второе уравнение. Тогда $t = x/3$, а уравнение траектории примет вид:

$$y = \frac{4}{3}x + 2. \qquad (*)$$

Видим, что траектория точки – прямая линия (рис. к примеру 1.2). Если посмотреть на уравнения движения, то увидим, что точка движется так, что в любой момент времени должны выполняться условия $x \geq 0,\ y > 0$, так как $t \geq 0$ всегда.

Отсюда делаем вывод, что траекторией точки является только та часть прямой, которая лежит в первой четверти координат. Она и показана на рисунке к задаче. В момент времени $t_1 = 1c$ точка имеет координаты $x = 3\text{м},\ \ y = 6\text{м}$. Проверим, лежит ли эта точка на траектории. Для этого подставим $x = 3\text{м},\ \ y = 6\text{м}$ в уравнении траектории (*). Получаем $6 = \frac{4}{3}\cdot 3 + 2 = 6$. **Ответ.** Траектория определена верно и задается уравнением (*). В момент времени $t_1 = 1c$ точка M находится в точке плоскости с координатами $x = 3\text{м},\ \ y = 6\text{м}$.

§1.5. Связь между координатным и векторным способами задания движения

Законы природы, в том числе законы механического движения, носят объективный характер. Они не зависят от методов научного познания, которыми пользуется человек. Поэтому между различными способами задания движения должны существовать связи и взаимные переходы.

Сформулируем и укажем путь решения следующих двух задач.

Прямая задача. Пусть движение точки M задано координатным способом, то есть известны функции (1.17). Требуется построить вектор $\bar{r}(t)$**,** который задавал бы движение точки векторным способом. Поскольку рассматривается движение единственной точки, индекс M у функций (1.17) будем опускать.

1.Точка движется в плоскости. Найдем координаты $r_x(t),\ r_y(t)$ радиус-вектора $\bar{r}(t)$. Радиус-вектор точки может быть записан через свои проекции в виде:

$$\bar{r}(t) = r_x(t)\cdot\bar{i} + r_y(t)\cdot\bar{j}\,. \qquad (1.18)$$

Из рис.1.1 легко увидеть, что проекции радиус - вектора $r_x(t),\ r_y(t)$ на оси координат совпадают с координатами точки, заданными по формулам (1.17).

$$r_x(t) = x(t),\ \ r_y(t) = y(t)\,. \qquad (1.19)$$

Другими словами, когда заданы функции $x(t),\ y(t)$, радиус-вектор $\bar{r}(t)$ определяется без дополнительных вычислений

$$\bar{r}(t) = x(t)\cdot\bar{i} + y(t)\cdot\bar{j}\,.$$

Тогда

$$\boxed{|\bar{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}.} \qquad (1.20)$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x(t)}{|\bar{r}(t)|}, \qquad \cos\beta = \frac{y(t)}{|\bar{r}(t)|}\ .} \qquad (1.21)$$

Здесь α, β – углы между направлением найденного радиус-вектора на плоскости и положительными направлениями осей Ox, Oy, соответственно.

При этом имеет место основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1. \qquad (1.22)$$

2. Точка движется в трехмерном пространстве. В этом случае:

$$r_x(t) = x(t), \ \ r_y(t) = y(t), \ \ r_z(t) = z(t). \qquad (1.23)$$

$$\boxed{|\bar{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}, \qquad (1.24)$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x(t)}{|\bar{r}(t)|}, \qquad \cos\beta = \frac{y(t)}{|\bar{r}(t)|}\ , \quad \cos\gamma = \frac{z(t)}{|\bar{r}(t)|},} \qquad (1.25)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (1.26)$$

Обратная задача. Здесь заданным или известным принимается радиус-вектор точки $\bar{r}(t)$. По заданному (известному) радиус-вектору $\bar{r}(t)$ нужно построить функции типа (1.17), которые определяли бы движение точки координатным способом. Выкладки проведем только для случая движения точки в пространстве. Если точка движется в плоскости, надо будет просто пробросить (обнулить) функции с индексом « *z* ».

а) Радиус-вектор $\bar{r}(t)$ задан своими координатами $r_x(t), \ r_y(t), \ r_z(t)$.

$$\bar{r}(t) = r_x(t)\cdot\bar{i} + r_y(t)\cdot\bar{j} + r_z(t)\cdot\bar{k}. \qquad (1.27)$$

Тогда сразу получаем закон движения, заданный координатным способом:

$$x(t) = r_x(t), \quad y(t) = r_y(t), \quad z(t) = r_z(t). \qquad (1.28)$$

б) Радиус-вектор точки $\bar{r}(t)$ задан своим модулем $|\bar{r}(t)|$ и направляющими косинусами углов $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Тогда (см. рис.1.6) получим:

$$x(t) = |\bar{r}(t)|\cdot\cos\alpha, \quad y(t) = |\bar{r}(t)|\cdot\cos\beta, \quad z(t) = |\bar{r}(t)|\cdot\cos\gamma. \qquad (1.29)$$

То есть движение вновь определилось координатным способом.

Пример 1.3. Движение точки в плоскости Oxy задано векторным способом $\bar{r}(t) = \mathrm{t}^2 \cdot \bar{i} + 2t \cdot \bar{j}$. Задать это движения координатным способом. Изобразить уравнение траектории точки и показать на рисунке данный радиус-вектор в момент времени $t_1 = 1c$.

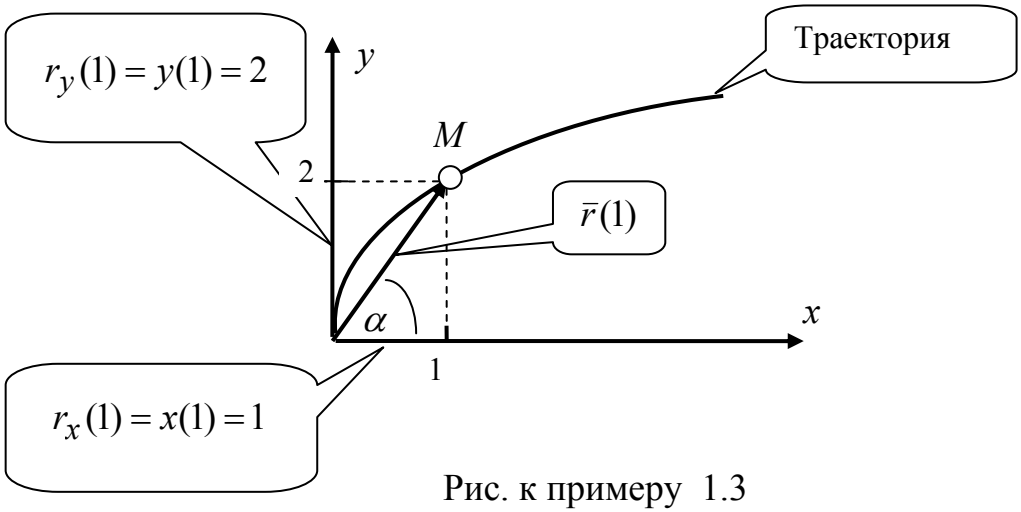


Рис. к примеру 1.3

Решение. Проекции радиус-вектор точки $r_x(t),\ r_y(t)$. $r_x(t) = x(t) = t^2$, $r_y(t) = y(t) = 2t$. При координатном способе движение задается уравнениями $x(t) = t^2$, $y(t) = 2t$. Найдем траекторию. Из второго уравнения выразим время: $t = y/2$. Подставим это t в первое уравнение движения. Получим уравнение траектории: $x = t^2 = y^2/4$. Это верхняя часть параболы (так как уравнения движения дают $x > 0, \mathrm{y} > 0$) с ветвями вытянутыми вдоль оси Ox. При $t = 1\mathrm{c}$ точка имеет координаты $x(1) = 1, y(1) = 2$. Эти же значения определяют значения проекций радиус-вектора $r_x(t),\ r_y(t)$ для момента времени $t = 1\mathrm{c}$. По значениям проекций радиус-вектора $\bar{r}(t)$ для каждого момента времени строится сам вектор для конкретных моментов времени, как показано на рисунке. Тангенс угла наклона α радиус-вектора к оси Ox равен: $tg\alpha = 2/1 = 2$.

§ 1.6. Скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения

Скорость точки при координатном способе задания движения

Обозначим через v_x, v_y, v_z – проекции вектор скорости $\bar{v}$ на оси выбранной системы координат $Oxyz$. Тогда

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}\,. \qquad (1.30)$$

Радиус-вектор точки может быть представлен через свои проекции по формулам:

$$\bar{r}(t) = r_x(t)\cdot\bar{i} + r_y(t)\cdot\bar{j} + r_z(t)\cdot\bar{k} = x(t)\cdot\bar{i} + y(t)\cdot\bar{j} + z(t)\cdot\bar{k}\,, \qquad (1.31)$$

где $x(t), y(t), z(t)$ – функции из уравнений движения точки (1.17). По (1.13) с учетом (1.30) и (1.31) имеем:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{x}(t)\bar{i} + \dot{y}(t)\bar{j} + \dot{z}(t)\bar{k} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}\,. \qquad (1.32)$$

Два вектора равны, если их одноименный проекции на оси одной и той же системы координат равны. Тогда из равенства (1.32) получим:

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\,, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}\,, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\,.} \qquad (1.33)$$

Точки над функциями $x(t), y(t), z(t)$ означают дифференцирование по времени.

1.20. Итак, проекции вектора скорости v_x, v_y, v_z ***равны первым производным по времени от соответствующих функций*** $x(t), y(t), z(t)$ ***закона движения точки.***

По проекциям вектора скорости (1.33) определяется его модуль $|\bar{v}|$.

$$\boxed{|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\,.} \qquad (1.34)$$

С осями координат *Ox, Oy, Oz* вектор скорости $\bar{v}$ образует, соответственно, углы α_1, β_1, γ_1, косинусы которых определяются по формулам :

$$\boxed{\cos\alpha_1 = v_x / |\bar{v}|;\quad \cos\beta_1 = v_y / |\bar{v}|;\quad \cos\gamma_1 = v_z / |\bar{v}|\,.} \qquad (1.35)$$

Для направляющих косинусов вектора скорости имеет место равенство:

$$\boxed{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1.} \qquad (1.36)$$

Ускорение точки при координатном способе задания движения

Обозначим через a_x, a_y, a_z – проекции вектор ускорения $\bar{a}$ на соответствующие оси произвольно выбранной системы координат $Oxyz$.

Вектор ускорения $\bar{a}$ можно записать через его проекции

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \,. \tag{1.37}$$

Тогда из (1.15) с учетом формул (1.30), (1.31), (1.33) получим:

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z,} \tag{1.38}$$

или

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.} \tag{1.39}$$

Здесь две точки над функциями $x(t), y(t), z(t)$ означают вторую производную по времени от соответствующих функций, одна точка над функциями v_x, v_y, v_z означает первую производную по времени от соответствующих функций.

1.21. Итак, проекции вектора ускорения a_x, a_y, a_z ***равны первым производным по времени от соответствующих проекций вектора скорости*** v_x, v_y, v_z ***или вторым производным по времени от соответствующих функций*** $x(t), y(t), z(t)$ ***закона движения.***

По известным проекциям a_x, a_y, a_z вектора $\bar{a}$ определяются его модуль и направляющие косинусы.

$$\boxed{\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}\,.} \tag{1.40}$$

Обозначая углы, которые образует вектор $\bar{a}$ с положительными направлениями осей *Ox, Oy, Oz* через α_2, β_2, γ_2, для направляющих косинусов получаем формулы:

$$\boxed{\cos\,\alpha_2 = a_x / |\,\bar{a}\,|; \quad \cos\,\beta_2 = a_y / |\,\bar{a}\,|; \quad \cos\,\gamma_2 = a_z / |\,\bar{a}\,|,} \tag{1.41}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1.} \tag{1.42}$$

Движение точки в плоскости

Если точка М движется в некоторой плоскости, то соответствующие формулы (1.30)–(1.41) упрощаются**.** Связав с этой плоскостью систему координат *Oxy*, будем иметь:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} + \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad , \tag{1.43}$$

$$\cos\alpha_1 = v_x / |\bar{v}|; \quad \cos\beta_1 = v_y / |\bar{v}|, \tag{1.44}$$

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 = 1. \tag{1.45}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} + \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}, \tag{1.46}$$

$$\cos\ \alpha_2 = a_x / |\ \bar{a}\ |; \quad \cos\ \beta_2 = a_y / |\ \bar{a}\ |, \tag{1.47}$$

$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 = 1. \tag{1.48}$$

Вектор скорости $\bar{v}$, его проекции на оси координат v_x, v_y и углы α_1, β_1, образованные с осями координат, для случая, когда точка движется в плоскости, показаны на рис.1.7а.

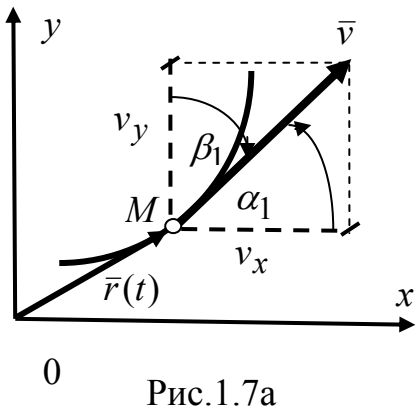


Рис.1.7а

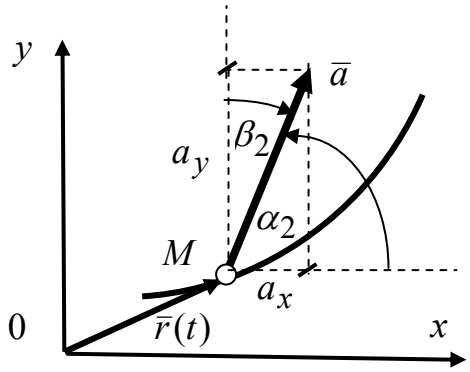


Рис.1.7б

Вектор ускорения $\bar{a}$, его проекции a_x, a_y и углы α_2, β_2, образованные с осями координат для случая, когда точка движется в плоскости, показаны на рис.1.7б. На рис.1.7а и 1.7б построения векторов выполнены так, чтобы выполнялись равенства: $\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} = \bar{v}_x + \bar{v}_y$, $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} = \bar{a}_x + \bar{a}_y$.

Проекции векторов скорости и ускорения на оси координат суть величины алгебраические. По модулю проекции вектора скорости $|v_x|$, например, можно судить о скорости перемещения точки вдоль оси *Ox*. По знаку проекции можно судить о направлении перемещения (если

$v_x > 0$, то точка движется в положительном направлении оси *Ox,* если $v_x < 0$, то точка движется в обратную сторону**).**

1.22.Проекции вектора скорости v_x, v_y являются алгебраическими величинами. По ним определяется и «быстрота» перемещения и направление перемещения по соответствующим осям.

По проекциям вектора ускорения определяется вектор ускорения и характер движения (ускоренное или замедленное).

Если $v_x \cdot a_x > 0$, то точка вдоль оси *Ox* движется ускоренно. При этом, если $v_x > 0$, то точка движется в положительном направлении оси *Ox,* если $v_x < 0$, то точка движется в обратную сторону.

Если $v_x \cdot a_x < 0$ (проекции векторов скорости и ускорения точки имеют разные знаки), то точка в направлении оси *Ox* движется замедленно (модуль проекци v_x убывает). При этом, если $v_x > 0$, то точка движется в положительном направлении оси *Ox,* если $v_x < 0$, то точка движется в обратную сторону.

Прямолинейное движение точки вдоль одной оси

Итак, пусть траектория точки – прямая линия. Выберем на этой прямой произвольную точку *O* и примем ее за начало одномерной системы координат *Ox.* В этой системе координат положение точки *M* будет определяться только одой координатой $x(t)$. Все соотношения упрощаются, и мы будем иметь:

$$\bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i}\,, \qquad |\bar{r}(t)| = |x(t)|\,. \tag{1.49}$$

$$\bar{v} = \dot{x}(t) \cdot \bar{i}\,, \ |\bar{v}(t)| = |\dot{x}(t)|\,, \qquad \bar{a} = \ddot{x}(t) \cdot \bar{i}\,, \qquad |\bar{a}(t)| = |\ddot{x}(t)|\,. \tag{1.50}$$

В этом случае отпадает необходимость в индексах, так как ось одна единственная. Проекции векторов скорости и ускорения $v_x = v$, $a_x = a$.

Пример 1.4. Покажем некоторые возможные варианты прямолинейного движения точки.

1 $\qquad v > 0,\ a > 0,\ v \cdot a > 0$

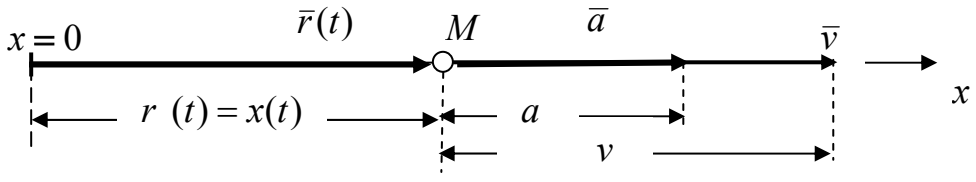


Рис. к примеру 1.4.–1. Ускоренное движение точки вправо

1. На рис.1 показано **ускоренное** прямолинейное движение точки по правой полуоси ($x > 0$) в положительном направлении оси координат.

2. На рис. 2 показано прямолинейное **замедленное** движение по правой полуоси в положительном направлении оси координат. Точка, находясь правее начала координат, движется в положительном направлении оси координат замедленно (как бы стремится к покою). Но это не означает, что точка в следующий момент времени остановится – есть только тенденция к «останову», проявившаяся только в данный, показанный на рисунке, момент времени.

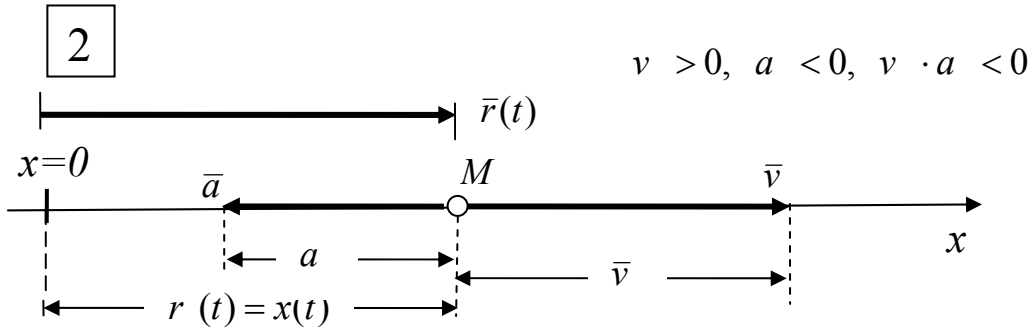


Рис. к примеру 1.4.–2. Замедленное движение точки вправо

3. На рис. 3 показано прямолинейное ***ускоренное*** движение по правой полуоси в отрицательном направлении оси координат. Точка движется к началу координат. При этом $x > 0,\ v < 0,\ a < 0$. Точка находится справа от начала координат, движется к началу координат.

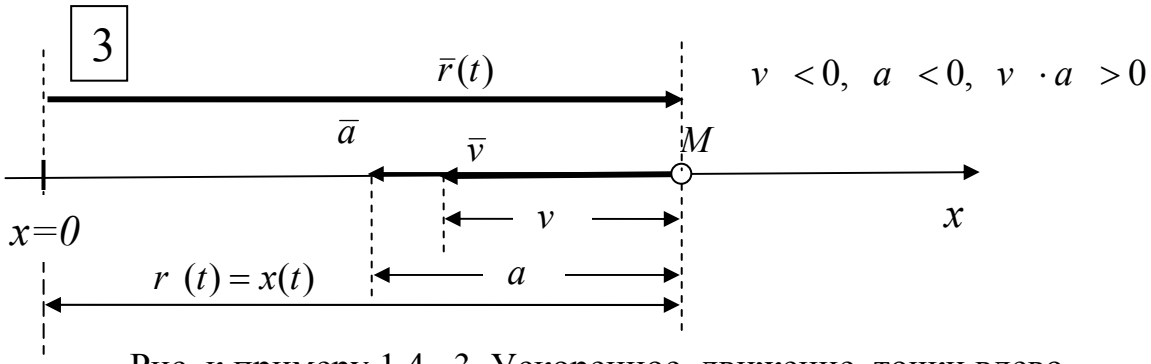


Рис. к примеру 1.4.–3. Ускоренное движение точки влево

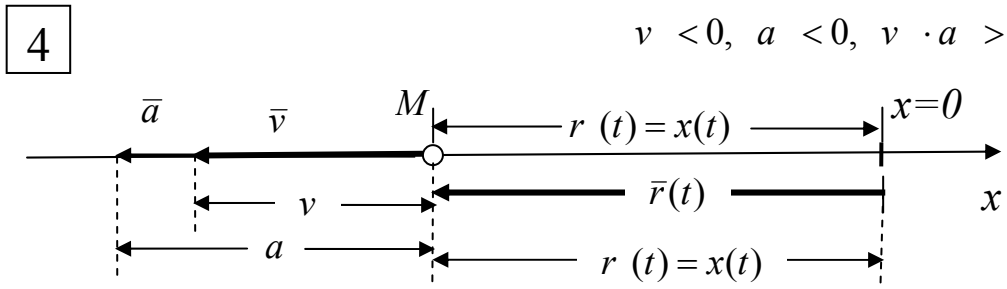


Рис. к примеру 1. 4.–4. Ускоренное движение влево

4. На рис.4 показано прямолинейное ***ускоренное*** движение по левой полуоси ($x < 0$) в отрицательном направлении оси координат. Точка движется от начал

координат в отрицательном направлении – влево. Другие возможные ситуации предлагается рассмотреть самостоятельно.

§ 1.7. Задачи с решениями на исследование движения точки при векторном и координатном способах задания движения

Задача 1.1. Уравнение движения точки (рис. к задаче 1.1) задано векторным способом и имеет вид: $\bar{r}(t) = 6t \cdot \bar{i} + 8t \cdot \bar{j}$. Линейные размеры заданы в метрах, время в секундах. Определить траекторию движения точки и координату y точки в тот момент времени, когда модуль радиус-вектора $|\bar{r}(t)| = 10м$.

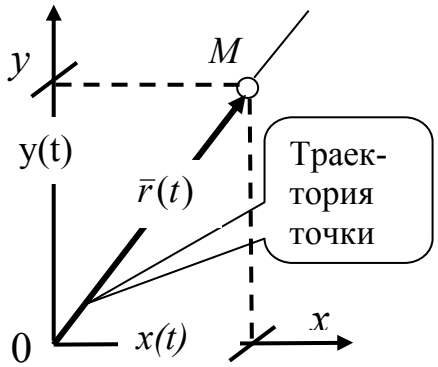


Рис. к задаче 1.1

Решение. Для решения задачи перейдем к координатному способу задания движения. При заданном в плоскости Oxy радиус-векторе $\bar{r}(t) = 6t \cdot \bar{i} + 8t \cdot \bar{j}$, уравнения движения точки M будут иметь вид: $x(t) = 6t(м), \quad y(t) = 8t(м)$.

1. *Траектория точки.* ***При координатной форме задания движения для определения уравнения траектории точки необходимо выразить параметр времени t из одного уравнения движения и подставить его в другое уравнение движения.*** Выразим, например, параметр t из закона изменения координаты x и подставим его в закон изменения координаты y. Имеем $x(t) = 6t(м)$. Отсюда $t = x/6$. Подставим последнее равенство во второе уравнение движения $y(t) = 8t(м)$ и получим уравнение траектории в виде $y = 4x/3$. Траектория – прямая линия, а точка совершает прямолинейное движение. Траектория – эта прямая. Она совпадает с радиус-вектором $\bar{r}(t)$. Это следует, в частности, из того, что при прямолинейном движении радиус-вектор точки $\bar{r}(t)$ всегда лежит на траектории движения (см. еще примеры на прямолинейное движение из предыдущего параграфа).

2. Модуль радиус-вектора вычисляется по формуле:

$$\left|\bar{r}(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right| = \sqrt{36t^2 + 64t^2} = 10t \ . \qquad (а)$$

Геометрический смысл модуля радиус-вектора точки состоит в том, что он является кратчайшим расстоянием от точки *M* до начала координат. Он равен длине отрезка *OM*. По равенству (а) можно определить модуль радиуса вектора точки в любой момент времени. Но по условию задачи требуется найти его величину в некоторый момент времени $t = t_1$, когда $|\bar{r}(t_1)| = 10м$. Тогда с учетом (а) можно составить уравнение: $|\bar{r}(t_1)| = 10t_1 = 10(м)$. Отсюда $t_1 = 1c$. Следовательно, момент времени, при котором модуль радиус - вектора примет заданное в условии задачи значение, будет

равен $t_1 = 1c$. Искомое значение координаты y определится по закону движения точки, а именно при $t_1 = 1c$ координата $y(t_1) = 8t_1 = 8(м)$.

Ответ: 1) траектория – прямая $y = 4x/3$; 2) $y(t_1) = 8(м)$.

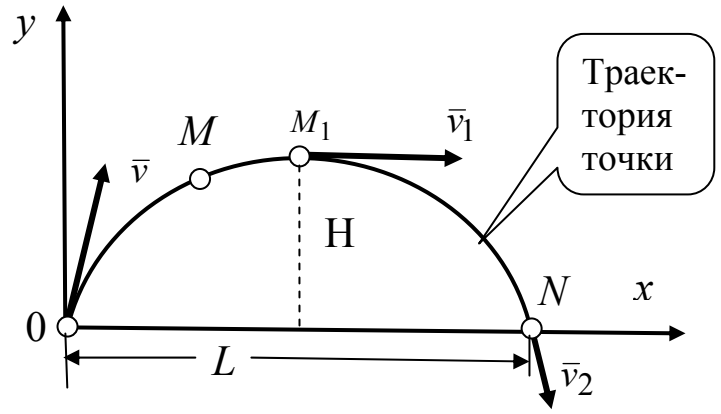


Рис.1 к задаче 1.2

Задача 1.2. Движение снаряда (точки) задано координатным способом по уравнениям:

$$x = 400t(м),$$

$$y = -5t^2 + 400t(м). \quad \text{(а)}$$

Время t измеряется в секундах. Время движения точки меняется в пределах $0 \le t \le t_2$, где t_2 – момент времени падения снаряда на Землю. Пока снаряд не упадет на Землю $x \ge 0, y \ge 0$. **Определить:** 1) уравнение траектории; 2) полное время движения снаряда; 3) дальность полета снаряда L; 4) максимальную высоту траектории H; 5) модуль вектора скорости v_1 в наивысшей точке траектории и модуль вектора скорости v_2 в момент падения снаряда на Землю.

Решение. Движение снаряда будем рассматривать как движение точки.

1. Траектория точки. Чтобы определить уравнение траектории движения снаряда, выразим параметр времени из первого уравнения движения и подставим во второе уравнение движения (а). Тогда получим:

$$t = \frac{x}{400}, \quad t^2 = \frac{x^2}{160\ 000}, \quad y = -5t^2 + 400t = -\frac{5x^2}{160\ 000} + x.$$

Уравнением траектории снаряда служит парабола, уравнение которой имеет вид:

$$y = -\frac{x^2}{32\ 000} + x \quad \text{(б)} \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{32000}(x - 16000)^2 + 8000. \quad \text{(в)}$$

По уравнению параболы (в) видим, что ось параболы параллельна оси Oy, ветви параболы направлены вниз (перед скобкой стоит знак минус), а вершина параболы (точка M_1 траектории) имеет координаты $x = L/2 = 16000(м), y = H = 8000(м)$. Траекторией точки является только та часть параболы, которая проходит через начало координат и лежит выше оси Ox (снаряд должен двигаться над Землей) и правее оси Oy ($x \ge 0, \quad y \ge 0$ – стрельба ведется вправо).

Для проверки правильности определения уравнения траектории подставим координаты точки x, y, заданные уравнениями движения (а), в уравнение траектории (в). Получим:

$$-5t^2 + 400t = -\frac{1}{32000}(400 \cdot t - 16000)^2 + 8000 = -5t^2 + 400t.$$

Видим, что уравнение траектории удовлетворяется, следовательно, оно найдено верно.

2. Полное время движения снаряда (точки) t_2**.** Как уже отмечалось, $x \geq 0, \quad y \geq 0$.

Судя по уравнениям движения (а), первое условие выполняется при любых t ($x = 400t > 0$), а для выполнения второго условия потребуем, чтобы

$y = -5t^2 + 400t \geq 0$. Отсюда $t(400 - 5t) \geq 0$ и $0 \leq t \leq 80(c)$, $(t_0 \leq t \leq t_2)$.

Знаки равенства в предыдущих соотношениях дают моменты времени, в которые снаряд находился на Земле ($y = 0,$ см. систему координат на рисунках к задаче). Левая граница последнего неравенства указывает на момент начала движения $t_0 = 0$, правая граница указывает момент времени $t_2 = 80(c)$, при котором происходит столкновение снаряда с Землей (то есть вновь $y = 0$). Итак, снаряд будет находиться в движении $T = t_2 = 80$ (с).

3. Дальность полета снаряда. Судя по траектории, она пересекает ось *Ox* в двух точках плоскости, для которых ордината $y = 0$. Подставляя значение $y = 0$ в уравнение траектории (б), для определения координат x этих точек, в которых снаряд соприкасался с Землей, получим квадратное уравнение, которое имеет два корня:

$$0 = -\frac{x^2}{32\ 000} + x, \qquad \text{откуда} \quad x_1 = 0 \ \text{ и } \ x_2 = 32000(м).$$

Первый корень соответствует точке с координатами x=0(*м*), y=0(*м*). Из этой точки снаряд начинал движение. В точке с координатами x=32000(*м*), y=0(*м*) снаряд упал на Землю. Очевидно, что дальность полета снаряда $L = x_2 = 32000(м) = 32(км)$. Этот же результат можно получить, если вспомнить, что в полете снаряд находился до момента времени $t_2 = 80(c)$. Подставляя значение t_2 в первое из уравнений движения (а), получим:

$$L = x(t_2) = 400t_2 = 400 \cdot 80(м) = 32000(м) = 32(км).$$

4. Наибольшая высота подъема траектории. Для определения наибольшей высоты подъема траектории $H = y_{\max} = y_{M_1}$, можно поступить тремя способами:

а) найти экстремум функции *y(x)* из уравнения (б) или уравнения (в) (в нашем случае это будет максимум);

б) воспользоваться школьными знаниями о координатах вершины параболы, что определяется по уравнению (в). Тогда наибольшей высотой подъема траектории будет вертикальная координата вершины параболы–точки M_1 (рис.3 к задаче 1.2): $H = y_{M_1} = 8000(м) = 8(км)$;

в) воспользоваться свойством симметричности параболы. Осью симметрии нашей параболы является прямая, проходящая через вершину параболы параллельно оси Oy. Искомую высоту легко найти из уравнения траектории (в), подставив в него значение координаты x_{M_1}.

$$x_{M_1} = \frac{L}{2} = \frac{32000}{2} = 16000 \ \ (м),$$

$$H = y_{M_1} = 16000 - \frac{(16000)^2}{32\ 000} = 8000 \ \ (м) = 8\,(км).$$

Это полностью совпадает с полученным в предыдущем пункте значением.

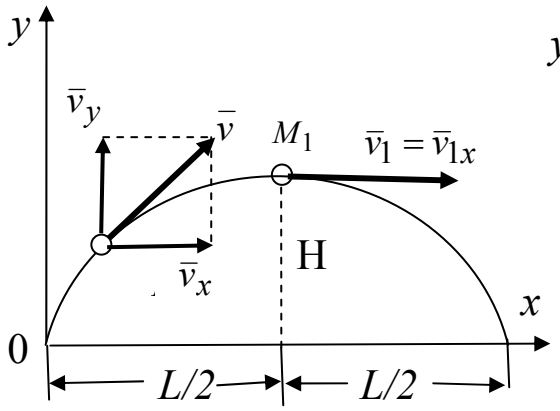


Рис. 2. к задаче 1.2

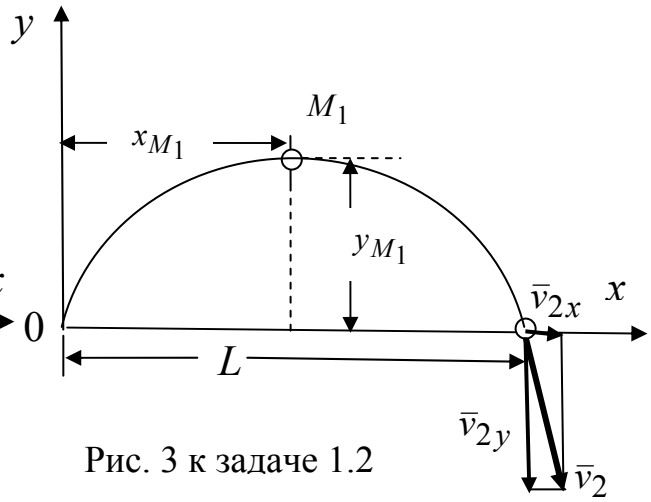


Рис. 3 к задаче 1.2

5. Вектор скорости. Вектор скорости точки $\bar{v}$ всегда направлен по касательной к траектории и в разные моменты времени показан на рис.2 и на рис.3 к задаче. Вектор скорости $\bar{v}$ показывает мгновенное (то есть для данного момента времени) направление движения точки M. Обозначим через $\bar{v}_1 = \bar{v}(t_1)$ и $\bar{v}_2 = \bar{v}(t_2)$ векторы скорости точки M в моменты времени $t = t_1 = 40(c)$ u $t = t_2 = 80(c)$ соответственно. Вектор $\bar{v}$ можно построить по его проекциям v_x, v_y.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left(400\,t\right)^{\bullet} = 400\,(м/с), \qquad (г)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \left(-5t^2 + 400\,t\right)^{\bullet} = \left(-10\,t + 400\right)(м/с). \qquad (д)$$

Видим, что проекция вектора скорости v_x – постоянная положительная величина, а проекция v_y – линейно зависит от времени (аргумент t в первой степени). Следовательно, снаряд движется в положительном направлении оси Ox с постоянной скоростью $v_x = 400(м/с)$. В направлении вертикальной оси точка (снаряд) движется с переменной скоростью, величина скорости в этом направлении изменяется по закону $v_y = -10t + 400$ $(м/с)$ (рис.2,3) до тех пор, пока проекция вектора скорости $v_y > 0$, точка движется вверх. Соответствующий интервал времени находится из уравнения $-10t + 400 \geq 0$. Получаем $t \leq 40(c)$. Другими словами, высота полета снаряда будет возрастать в интервале времени $0 \leq t \leq 40(c)$. В наивысшей точке траектории при $t = t_1 = 40(c)$ имеем $v_y(t_1) = 0$ (но $v_x = 400(м/с) \neq 0$, по-прежнему). Точка как бы останавливается в своем движении вверх, на мгновение зависает и начинает двигаться вниз. Следовательно, в этот момент времени вектор полной скорости точки $\bar{v}(t_1) = \bar{v}_x(t_1) + \bar{v}_y(t_1) = \bar{v}_x(t_1) = \bar{v}_1$ будет параллелен оси *Ox* (рис.2), а его модуль $\left|\bar{v}\right| = \left|v_x\right| = 400(м/с)$.

Для определения числового значения вектора скорости $\bar{v}_2$ (рис.3) в момент t_2 падения снаряда на Землю, необходимо знать время полета снаряда. В этой задаче ранее нашли $t_2 = 80c$. Вычислим проекции вектора скорости v_x, v_y для момента времени $t = t_2 = 80(c)$. Подставляя значение $t_2 = 80(c)$ в равенства (г) и (д), для проекций вектора скорости снаряда находим (рис.3): $v_{2x} = 400(м/с)$, $v_{2y} = (-10 \cdot 80 + 400) = -400(м/с)$. Модуль вектора скорости в этот момент времени $v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{400^2 + 400^2} = 10^2\sqrt{32} = 565{,}68(м/с).$

Ответ: 1) уравнение траектории точки парабола $y = -\frac{1}{32000}(x - 16000)^2 + 8000$; 2) полное время движения снаряда $T = 80(c)$; 3) дальность полета снаряда $L = 32(км)$; 4) максимальную высоту траектории $H = 8(км)$; 5) модуль вектора скорости в наивысшей точке траектории $v_1 = 400(м/с)$ и модуль вектора скорости в момент падения снаряда на Землю $v_2 = 564(м/с)$.

Задача 1.3. Частица M грунта, сбрасываемого с ленты горизонтального транспортера, расположенного над поверхностью Земли на высоте $H = 2{,}45м$, движется согласно уравнениям $x = 2t(м), y = 9{,}8t^2(м)$. Время t измеряется в секундах. Начало системы координат, в которой даны уравнения движения точки M, расположено в точке сброса частицы, ось Ox направлена горизонтально вправо, ось Oy направлена вниз. **Найти:** 1) траекторию частицы M грунта; 2) дальность полета частицы L; 3) время T движения частицы до Земли.

Решение. Размерами частицы будем пренебрегать, принимая ее за точку. Начало координат поместим в точке, где частица отделяется от ленты транспортера.

1) Траектория точки. Уравнения движения точки в принятой системе координат заданы в виде: $x(t) = 2t, \quad y(t) = 9{,}8t^2$. (а)

Для определения траектории точки, как и ранее, исключаем из уравнений движения время t. Из первого уравнения (а) находим $t = x/2$. Подставляя это значение t во второе уравнение движения, получим уравнение траектории точки:

$$y = 9{,}8\,t^2 = 9{,}8\,\frac{x^2}{4} \quad \text{или} \quad y = 2{,}45x^2. \qquad (б)$$

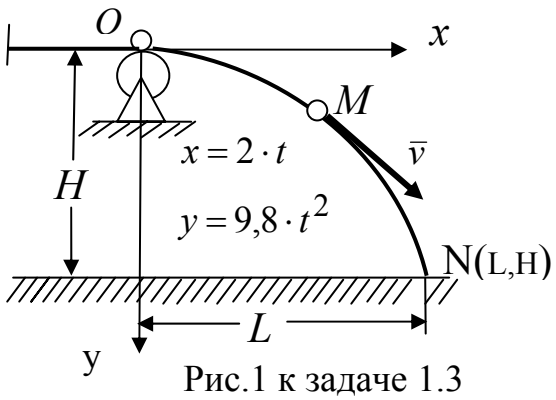


Рис.1 к задаче 1.3

Искомой траекторией точки является правая ветвь параболы $x \geq, y \geq 0$ с вершиной в точке O и симметричной относительно оси Oy. Указанная ветвь параболы направлена вниз, так как вниз направлена ось Oy. Найденному уравнению траектории должны, конечно, удовлетворять координаты падающей частицы (точки) грунта во все моменты времени движения.

Действительно, подставим заданные уравнения движения точки (а) в уравнение траектории и увидим, что они удовлетворяются

$$9{,}8 \cdot t^2 = 2{,}45 \cdot 4t^2 = 9{,}8t^2.$$

2) Дальность полета частицы L**.** Траектория падающей точки пересекается с поверхностью Земли в точке N. Координатами точки N в принятой системе координат являются: дальность ее падения $x_N = L(м)$ и $y_N = H(м)$ – высота точки O сброса частицы над уровнем Земли. Искомую дальность падения L можно определить, подставляя в уравнение траектории $x = x_N = L(м)$ и $y = y_N = H(м) = 2{,}45(м)$. Для определения дальности из уравнения траектории получим следующее равнение: $2{,}45 = 2{,}45L^2$. Отсюда дальность полета точки $L = 1(м)$. Этот корень уравнения не противоречит механике явления. Второй корень, равный (-1), не может в силу отрицательности определять положительную величину длины L.

3) Время T **движения частицы до Земли.** Время падения частицы T определяется из первого уравнения движения $x = 2t$. Подставляя в него $x = L = 1(м)$ и $t = T$, получим $T = 0{,}5(c)$. **Ответ:** 1) уравнение траектории $y = 2{,}45x^2$ – парабола; 2) дальность полета частицы $L = 1(м)$; 3) время движения частицы до Земли $T = 0{,}5(c)$.

§ 1.8. Естественный способ задания движения точки

Если траектория движения точки известна, то движение по траектории можно определить и «естественным» способом.

1.23. Чтобы задать движение точки естественным способом, необходимо произвести следующие действия:

1) на траектории точки выбрать начало координат O_1 ***и ввести криволинейную систему координат*** O_1s ***так, чтобы ось*** O_1s ***полностью совпала с траекторией;***

2) задать уравнение движения точки M по траектории в виде функции s = s(t) (рис.1.8). Функция s = s(t) в каждый момент времени определяет криволинейную координату точки на известной траектории.

Алгебраическое значение скорости (понятие вводится для естественного способа задания движения)

Когда движение задано естественным способом, вектор скорости и вектор ускорения точки M определяются по проекциям этих векторов на оси естественного трехгранника $M\tau nb$, имеющего начало в точке M и движущегося вместе с ней. На рис. 1.8, 1.9 показаны три ортогональных единичных вектора $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$, соответствующих трем осям естественного (его еще называют сопровождающим) трехгранника. Естественными осями

координат называются: ось $M\tau$, направленая по касательной к кривой в точке M в сторону возрастания координаты s; ось Mn (главная нормаль), направленная по линии пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей, в сторону вогнутости траектории; ось Mb, направленная по линии пересечения нормальной и спрямляющей плоскостей так, что оси $M\tau$, Mn, Mb образует правую тройку осей координат в точке M. Более подробно об этих осях и соответствующих плоскостях можно прочитать в геометрии в разделе «Пространственные кривые».

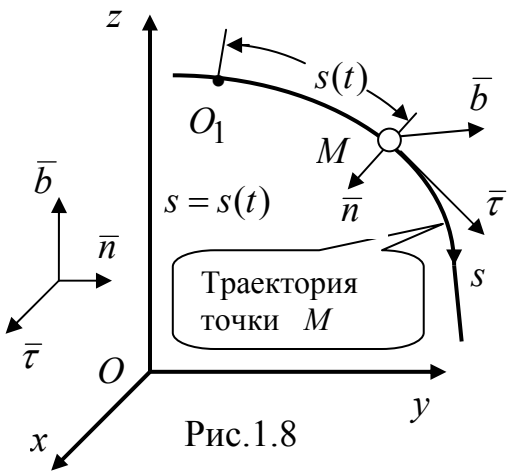


Рис.1.8

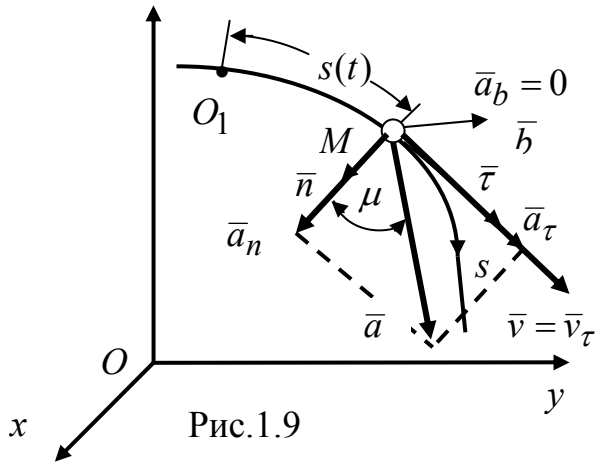


Рис.1.9

1.24. Вектор скорости $\bar{v}$ точки M направлен по касательной к траектории. Поэтому в осях естественного трехгранника $M\tau nb$ вектор скорости $\bar{v}$ определяется лишь одной проекцией v_τ, называемой алгебраическим значением вектора скорости (v_n, $v_b = 0$).

1.25. Алгебраическое значение скорости точки v в данный момент времени равно первой производной по времени от функции s(t).

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}.} \qquad (1.51)$$

По знаку алгебраического значения скорости v легко судить о направлении движения точки по траектории. Знак v зависит только от знака ds , так как $dt > 0$ всегда.

1.26. Если в данный момент времени алгебраическое значение скорости $v > 0$, вектор скорости $\bar{v}$ направлен в положительном направлении оси s и сама точка движется в этом (положительном) направлении (как на рис. 1.9).

1.27. Если в данный момент времени алгебраическое значение скорости $v < 0$, вектор скорости $\bar{v}$ направлен в отрицательном

направлении оси s и сама точка движется в отрицательном направлении.

Ускорения при естественном способе задания движения

Как было уже сказано при обсуждении векторного способа задания движения, вектор ускорения точки $\bar{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости. Это означает, что в осях естественного трехгранника $M\tau nb$ вектор ускорения расположен в координатной плоскости $M\tau n$, перпендикулярной к оси Mb (см. рис. 1.13). Поэтому вектор ускорения точки (говорят, вектор полного ускорения точки) может в общем случае проецироваться только на оси $M\tau$, Mn, а проекция на бинормаль $a_b = 0$. Если движение точки происходит в плоскости, то траекторией точки будет плоская кривая, лежащая в этой плоскости, которая и будет соприкасающейся плоскостью, одной и той же во всех точках траектории.

Итак, вектор полного ускорения точки M при естественном способе задания движения представляется следующим образом (рис.1.9):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n}\,. \qquad (1.52)$$

Векторы $\bar{a}_\tau, \bar{a}_n$ называются касательной и нормальной составляющими вектора полного ускорения $\bar{a}$. Алгебраические величины a_τ, a_n – это касательная и нормальная проекции вектора полного ускорения $\bar{a}$ (часто a_τ, a_n называют касательным и нормальным ускорениями точки, не забывая, что речь идет фактически о проекциях вектора полного ускорения $\bar{a}$). Они вычисляются по формулам:

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho},} \qquad (1.53)$$

где алгебраическое значение скорости v определяется при известном законе движения $s = s(t)$ по формуле (1.51), а ρ – радиус кривизны траектории в точке M. Из (1.53) видим, что проекция a_n вектора полного ускорения $\bar{a}$ на ось Mn (нормальное ускорение точки) всегда положительна. Следовательно, вектор нормального ускорения $\bar{a}_n$ всегда направлен к центру кривизны траектории в точке M, как показано на рис.1.9. Касательное ускорение точки может быть положительным, отрицательным и равным нулю, как производная от функции $s(t)$. Следовательно, направление самого вектора $\bar{a}_\tau$ может совпадать с направлением вектора скорости $\bar{v}$ (как на рисунке 1.9) или не совпадать. В первом случае движение точки M будет ускоренным (модуль вектора

скорости увеличивается – говорят, скорость растет), во втором случае – замедленным (модуль вектора скорости уменьшается – говорят, скорость уменьшается).

1.28. Движение точки M по траектории будет ускоренным, если векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}_\tau$ направлены по касательной к траектории в одну сторону, и движение точки будет замедленным в противном случае.

1.29. Движение точки M по траектории будет ускоренным, если произведение $v \cdot a_\tau > 0$, и движение точки по траектории будет замедленны, если $v \cdot a_\tau < 0$.

Действительно, если, например, $v \cdot a_\tau > 0$, то это означает, что одновременно $v > 0$ и $a_\tau > 0$ или $v < 0$ и $a_\tau < 0$. В первом случае точка M движется ускоренно (рис.1.9) в положительном направлении оси $O_1 s$ (направление движения точки всегда определяется или по направлению вектора скорости $\bar{v}$, или по знаку величины алгебраической скорости v). Во втором случае точка движется ускоренно в отрицательном направлении оси $O_1 s$. Если $v \cdot a_\tau < 0$, то это означает, что в один и тот же момент времени v и a_τ имеют разные знаки, а точка M движется замедленно в положительном направлении оси $O_1 s$, если $v > 0$, и в отрицательном направлении оси $O_1 s$, если $v < 0$.

Модуль вектора ускорения при естественном способе задания движения определяется по формуле:

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ ,} \qquad (1.54)$$

где a_τ, a_n вычисляются по формулам (1.53).

Тангенс угла отклонения μ вектора полного ускорения точки $\bar{a}$ от направления *Mn* (рис.1.9) вычисляется по формуле

$$\boxed{tg\ \mu = \frac{a_\tau}{a_n},} \qquad (1.55)$$

$tg\mu > 0$, если $a_\tau > 0$ и $tg\mu < 0$, если $a_\tau < 0$, так как a_n – всегда больше нуля. Другими словами, при $tg\mu > 0$ $(\mu > 0)$ вектор полного ускорения точки $\bar{a}$ отклоняется в сторону оси $M\tau$ (рис. 1.3) или в сторону положительного направления оси $O_1 s$. Рассмотрим пример.

Пример 1.5. Точка движется по криволинейной траектории согласно закону $s(t) = 2\sin \pi t$ *(м)* (здесь t – в секундах). Определить модуль и направление вектора скорости в момент времени $t = 3c$.

Решение. Итак, по условию задачи траектория считается известной. Пусть она имеет вид, показанный на рис. 1 к примеру. На траектории зададимся началом криволинейной системы координат, где будет $s=0$, и положительным направлением оси Os. Точка движется по траектории по закону $s(t)=2\sin\pi t$. Чтобы представить себе закон движения этой точки, надо знать элементарные функции и их графики. Для функции $s(t)=2\sin\pi t$ график представлен на рис. 2. Во-первых, график функции $s(t)$ показан только для значений аргумента (времени) $t\geq 0$, так как параметр времени не может принимать отрицательные значения.

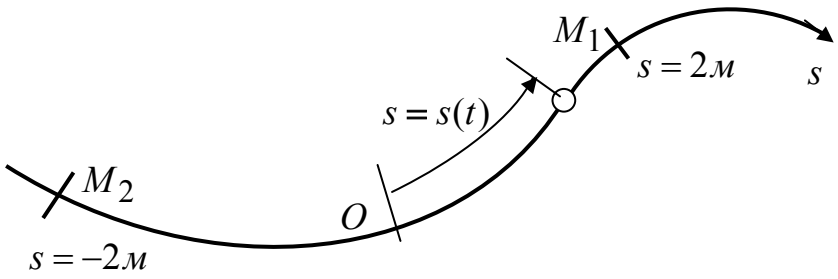


Рис.1 к примеру 1.5

При $t=0$ точка находится в начале координат $s(0)=2\sin\pi 0=0$. Во-вторых, по графику функции $s(t)=2\sin\pi t$ видим (рис.2), что координата точки сначала растет в положительном направлении до значения $s=2м$. Это соответствует промежутку времени $o\leq t\leq 0{,}5c$ (при $t=0{,}5c$, как известно, функция $\sin(0{,}5\pi)=1$). Это означает (рис.1), что в промежутке $0\leq t\leq 0{,}5c$ точка удаляется от начала координат на расстояние $OM_1=s(0{,}5)=2м$. Что происходит дальше? Вернемся опять к графику закона движения $s(t)=2\sin\pi t$ (рис.2). По графику видим, что координаты точки $s(t)$ убывают в промежутке времени $0{,}5\leq t\leq 1{,}5c$ сначала до нуля, а при $1{,}0\leq t\leq 1{,}5c$ координаты точки становятся даже отрицательными. Другими словами, в промежутке времени $0{,}5\leq t\leq 1{,}5c$ материальная точка из положения M_1 движется в отрицательном направлении оси, сначала к началу координат O (рис.1) и далее точка M от точки O продолжает движение к точке M_2 траектории. Максимальное удаление точки в отрицательную сторону $OM_2=2м$. А координата точки траектории M_2, в которую приходит материальная точка M в момент времени $t=1{,}5c$ будет $s=-2м$. Далее, как видно по графику уравнения движения (рис. 2), все будет повторяться. Такие повторяющиеся движения, которые описываются периодическими функциями синусов или косинусов, принято называть колебательными движениями. Таким образом, движение материальной точки M является колебательным движением около начала координат с амплитудой $OM_1=OM_2=2м$. Заметим, что амплитуда колебательного движения «2» является коэффициентом в уравнении движения точки $s(t)=2\sin\pi t$.

Закон изменения скорости точки определим по (1.51):

$$v=\frac{ds}{dt}=2\pi\cos\pi t\ \ (м/c)=6{,}28\cos\pi t\,.$$

Отсюда видим, что алгебраическое значение скорости тоже описывается периодической функцией. График этой функции представлен на рис.3. По графику (рис.3) видим, что модуль скорости меняется с течением времени от нуля до 6,28 (*м/с*). Величина скорости равна нулю в моменты времени $t = 0{,}5c;\ 1{,}5c;\ 2{,}5c$ и т.д.

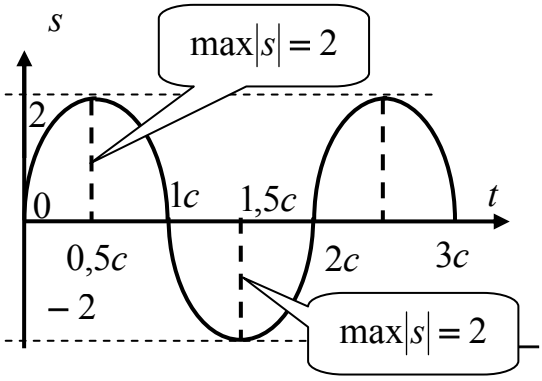


Рис.2 к примеру 1.5

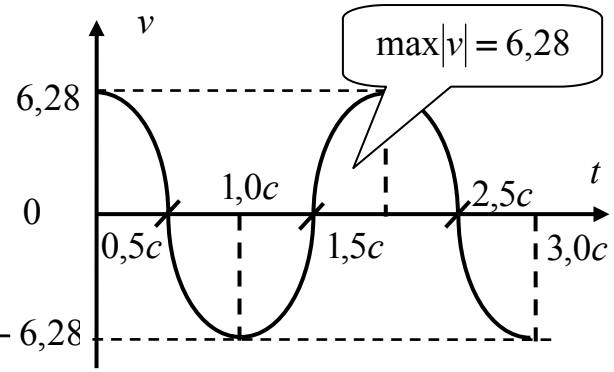


Рис. 3 к примеру 1.5

В указанные моменты времени (см. рис.2) материальная точка M имела координаты $s = \pm 2м$ (точка M_1 или M_2 траектории). Другими словами, в точках M_1, M_2 траектории материальная точка M имеет на некоторое мгновение скорости равные нулю (мгновенный покой). В этих точках (M_1 и M_2) движущаяся материальная точка M меняет направление движения на обратное (следовательно, и вектор скорости $\bar{v}$ меняет направление на обратное). Не остановившись, нельзя изменить направление движения на обратное. Направление вектора скорости при естественном способе задания движения определяется по знаку алгебраического значения скорости. При $t = 3c$ получаем: $s(0) = 2\sin(\pi 0) = 0$. Другими словами, точка находится в начале координат (точка O на рис.1 и рис.4). При $t = 3c$ получим

$$v(3) = \frac{ds}{dt} = 2\pi \cos 3\pi \ \ (м/с) = -6{,}28\,(м/с).$$

$|v(3)| = 6{,}28(м/с)$

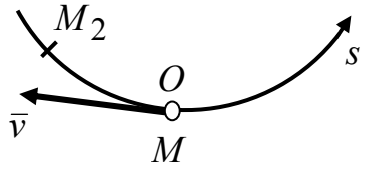


Рис. 4 к примеру 1.5

Знак минус у алгебраического значения скорости (у производной ds/dt) говорит о том, что точка в данный момент времени движется в отрицательном направлении оси Os, то есть от точки O к точке M_2. Следовательно, вектор скорости направлен в точке O по касательной к траектории в сторону точки M_2. Модуль вектора скорости равен модулю алгебраического значения скорости $|\bar{v}(3)| = |v(3)| = 6{,}28(м/с)$. **Ответ.** Модуль скорости точки равен $|v(3)| = 6{,}28(м/с)$, а вектор скорости направлен по касательной к траектории в отрицательном направлении оси Os (рис.4 к примеру).

§ 1.9. Связь между координатным и естественным способами задания движения

На рис. 1.10 показана точка M и функции $\bar{r}(t)$; $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $s = s(t)$, которые задают её движение при трех изученных выше способах задания движения. Начало прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ расположено в некоторой точке O.

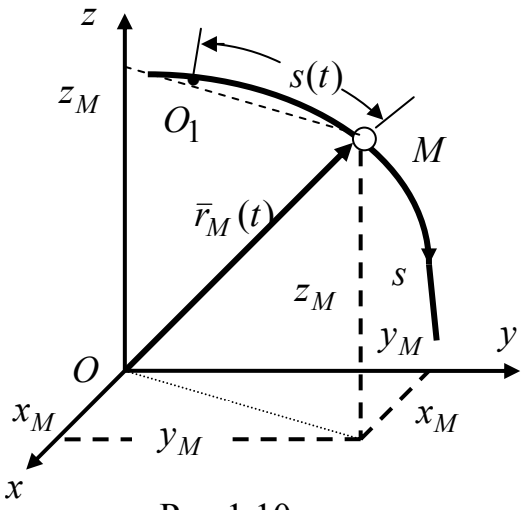


Рис.1.10

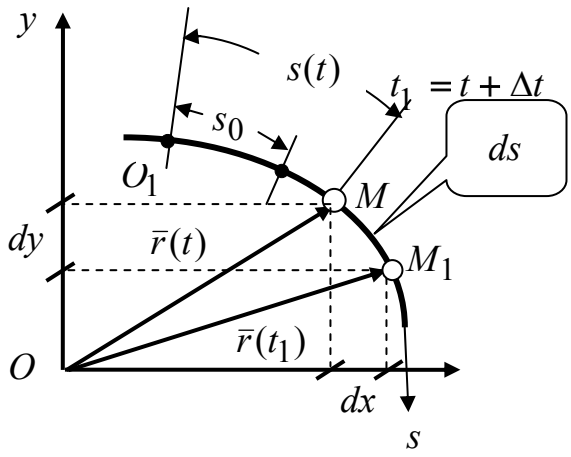


Рис. 1.11

На траектории введена криволинейная система координат $O_1 s$ с началом в точке O_1 (рис. 1.10). *Требуется, зная закон движения точки* $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ *в прямоугольной системе координат найти закон движения точки* $s = s(t)$ *в криволинейной системе координат* $O_1 s$. На рис.1.11 показано движение точки в плоскости.

Пусть точка движется в плоскости и движение задано координатным способом (рис.1.11).

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{1.56}$$

Требуется определить движение естественным способом.

1. Траектория точки. Чтобы определить траекторию движения точки, необходимо выразить параметр времени t из одного уравнения движения и подставить во второе уравнение движения (см. приведенные выше примеры). В дальнейшем считаем, что траектория точки определена.

2. Закон движения точки $s = s(t)$ по найденной траектории. Рассмотрим два близких положения точки (рис. 1.11). При перемещении точки M в положение M_1 за малый промежуток времени Δt функция

$s = s(t)$ получает приращение Δs, равное длине дуги MM_1. С точностью до бесконечно малых величин $\Delta s = ds$, где ds – дифференциал функции $s = s(t)$. Отрезок прямой MM_1 является хордой элемента криволинейной траектории длиной ds. Причем, как известно, предел отношения длины малой хорды к длине дуги, охватывающей эту хорду, равен единице. Другими словами, длина хорды $MM_1 = \Delta s = ds$.

С другой стороны, координаты $x = x(t), y = y(t)$ точки M при ее перемещении получают приращения $\Delta x = dx, \Delta y = dy$ (рис.1.11). Так как координаты точки $x = x(t), y = y(t)$ сами являются функциями времени, то $dx = (\dot{x}dt)$, $dy = (\dot{y}dt)$. Теперь, с учетом вышесказанного, по теореме Пифагора можно записать (см. рис.1.11) цепочку равенств:

$$(MM_1)^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 = (\dot{x}dt)^2 + (\dot{y}dt)^2.$$

Отсюда

$$\boxed{ds = (\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})dt\ .} \qquad (1.57)$$

Проинтегрируем выражение (1.57). Тогда

$$\int ds = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt. \qquad s(t) = C + \int (\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2})dt.$$

где C – постоянная интегрирования. Для ее определения воспользуемся начальными условиями. Пусть точка M в начальный момент времени движения, то есть при $t = 0$, находилась в точке траектории с координатой $s(0) = s_0$. Тогда $C = s(0) = s_0$. Окончательно закон криволинейного движения точки по плоской траектории в системе координат $O_1 s$ будет иметь вид:

$$\boxed{s(t) = s_0 + \int (\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2})dt,} \qquad (1.58)$$

где $x = x(t), y = y(t)$ – известные функции, задающие движение точки координатным способом.

3. Алгебраическое значение скорости v теперь можно определить по формуле (1.51).

4. Ускорения и модули векторов скорости и ускорения. Зная закон движения точки (1.58), можно по (1.53) вычислить алгебраическую величину касательного ускорения $a_\tau = d^2 s / dt^2 = dv / dt$. Хотя уравнение траектории уже известно (пункт 1), величину нормального ускорения

$a_n = v^2/\rho$ пока нельзя вычислить, так как неизвестна величина радиуса кривизны траектории в разных точках $\rho = \rho(s)$. Только для некоторых видов траекторий (читай кривых) радиус кривизны определяется сразу. Например, для окружности радиуса R ($R = const$) можно сразу для всех точек окружности написать $\rho = R = const$, а $a_n = v^2/R$. Если траектория есть прямая линия, то $\rho = \infty = const$, а $a_n = v^2/\rho$=0. Чтобы получить величины касательного и нормального ускорений, вычислить радиус кривизны траектории, пользуясь только кинематическими понятиями (то есть не привлекая знания из дифференциальной геометрии кривых), по известным уравнениям движения (1.56) вычислим проекции вектора скорости и ускорения.

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ \ v_y = \frac{dy}{dt},\ \ a_x = \frac{dv_x}{dt},\ \ a_y = \frac{dv_y}{dt}\ . \qquad (1.59)$$

Тогда

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\ , \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ .} \qquad (1.60)$$

Касательное ускорение может быть найдено по формуле (1.53). Укажем еще один способ определения касательного ускорения, удобный в тех случаях, когда проекции векторов скорости и ускорения уже вычислены по формулам (1.59). Возведем в квадрат выражение для модуля вектора скорости из (1.60) и продифференцируем полученное выражение по времени:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2. \qquad 2v\frac{dv}{dt} = 2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt} \ = \ 2v_x a_x + 2v_y a_y\,.$$

Отсюда

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} = (v_x a_x + v_y a_y)/v\,.} \qquad (1.61)$$

5. Нормальное ускорение точки и кривизна траектории в точке определяются по формулам:

$$\boxed{a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\ , \qquad \rho = v^2/a_n\ .} \qquad (1.62)$$

Здесь величина модуля $|\bar{a}|$ вектора полного ускорения $\bar{a}$ определена по формуле (1.60). Все кинематические характеристики для естественного способа задания движения точки определены.

Пусть точка движется в пространстве. Выпишем соответствующие формулы. Закон движения точки имеет вид: $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)$.

1. Траектория точки. Выразим параметр t, например, из первого уравнения и подставим в два других. Получим уравнение пространственной кривой – траектории:

$$t = \varphi(x),\ \ y = y\left[\varphi(x)\right]\ ,\ \ z = z\left[\varphi(x)\right]\ . \tag{1.63}$$

2. Закон движения точки по известной траектории по аналогии с (1.58) принимает вид:

$$\boxed{s(t) = s_0 + \int (\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2})dt.} \tag{1.64}$$

3. Алгебраическое значение скорости определяется по формуле (1.51), но теперь с использованием функции $s(t)$, которая получится из (1.64).

4. Проекции векторов скорости и ускорения и их модули имеют вид (по аналогии с (1.59)):

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ \ v_y = \frac{dy}{dt},\ \ v_z = \frac{dz}{dt},\ \ a_x = \frac{dv_x}{dt},\ \ a_y = \frac{dv_y}{dt},\ \ a_z = \frac{dv_z}{dt}\ . \tag{1.65}$$

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ ,\qquad\qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .} \tag{1.66}$$

5. Алгебраические величины ускорений (по аналогии с (1.62)).

5а) Величина касательного ускорения вычисляется по формуле:

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} = (v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z)/v\ .} \tag{1.67}$$

5б) Величина нормального ускорения и радиус кривизны траектории вычисляются по формулам, которые по форме совпадают с (1.62):

$$\boxed{a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\ ,\qquad\qquad \rho = v^2 / a_n\ .} \tag{1.68}$$

При вычислении нормального ускорения a_n по формулам (1.68) используются формулы (1.66), (1.67).

В заключении данного параграфа рассмотрим примеры.

Пример 1.6. Точка движется в плоскости согласно уравнениям:

$$x = a \cdot \sin kt\,,\quad y = a \cdot \cos kt\,. \qquad \text{(а)}$$

Здесь x, y, a измеряются в метрах, величина k измеряется в c^{-1} (1/сек), t измеряется в секундах. Текущее время t может принимать любые значения из области значений $t \geq 0$. **Найти** траекторию точки, закон движения точки по траектории $s = s(t)$, величины скорости и ускорений точки.

Решение. 1.Определим траекторию движения точки. Чтобы определить траекторию точки, необходимо избавиться от параметра t в уравнениях движения (а). Для этого возведем уравнения движения в квадрат и сложим.

$$x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t\,. \quad \text{Или} \quad x^2 + y^2 = a^2\,. \qquad \text{(б)}$$

Уравнение траектории – окружность с радиусом $R = a(м)$. 2. Изобразим траекторию на рис. 1 к примеру 1.6.

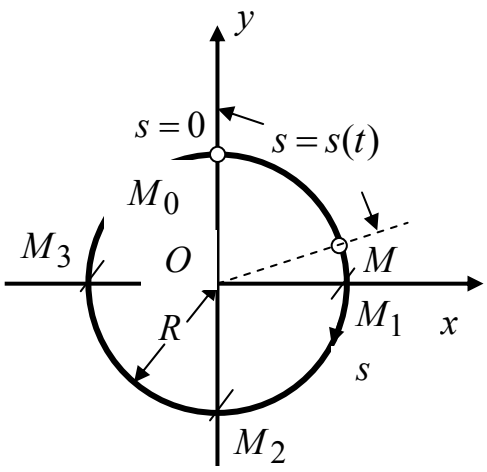


Рис.1 к примеру 1.6

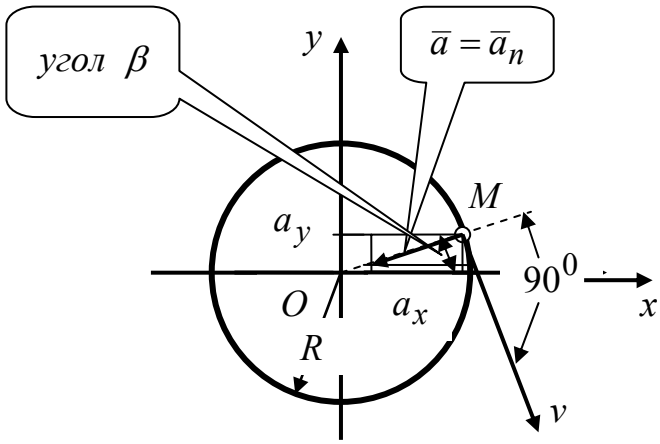


Рис.2 к примеру 1.6

2. Определим положение точки M на траектории в начальный момент времени. Для этого подставим значение $t = t_0 = 0$ в уравнения движения. Получим: $x(t) = a \cdot \sin kt\,,\quad x(t_0) = x(0) = a \cdot \sin(k \cdot 0) = 0.\quad y(t) = a \cdot \cos kt,\quad y(t_0) = y(0).$ $y(t_0) = a \cdot \cos(k \cdot 0) = a$. Другими словами, в начальный момент времени (в начале процесса движения), когда было $t = 0$, точка находилась в точке плоскости с координатами $x = 0$, $y = a(м)$. Это вершина траектории. Начальное положение точки обозначено на рисунке точкой M_0 (рис. 1 к примеру 1.6). В этой же точке поместим начало криволинейной системы координат $M_0 s$. Тогда $s(0) = s_0 = 0$ при $t = 0$.

3. Определим направление движения точки по траектории в окрестности момента времени $t = 0$. Для этого надо проанализировать уравнения движения (а). Графики функций $x = a \cdot \sin kt\,,\ y = a \cdot \cos kt$ показаны на рис. 2 и 3 к примеру 1.5. Из них, в частности, следует, что в интервале времени $0 \leq t \leq \pi / 2k$ (с) координата x возрастает до величины $x = a$, координата y уменьшается до значения $y = 0$. Другими словами, при заданном законе движения точка M движется по дуге

окружности M_0M_1 от точки M_0 к точке M_1. Движущаяся точка M достигает точки траектории M_1 в момент времени $t = t_1 = \pi / 2k$. С учетом сказанного, направление положительного отсчета координат $s(t)$ выбрано в направлении движения точки (чтобы работать с положительными числами-координатами точки M), что показано на рис.1 к примеру 1.6. На том же рисунке показано произвольное положение точки M и функция $s(t)$, которая определяет её координату.

4. Определим закон движения точки $s = s(t)$ при естественном способе задания движения. По формуле (1.57) получаем: $ds = (\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})dt =$

$= (\sqrt{a^2k^2\cos^2(kt) + a^2k^2\sin^2(kt)})dt = ak \cdot dt$. Или $ds = ak \cdot dt$. Тогда по (1.58) имеем $s(t) = s_0 + \int akdt = s_0 + ak \cdot t$. Оси координат были выбраны в начальном положении точки M_0, то есть при $t = 0$ имели $s(0) = s_0 = 0$. С учетом последнего надо положить $s_0 = 0$, и закон движения точки по траектории $s = s(t)$ окончательно принимает в этом примере вид:

$$s(t) = ak \cdot t. \qquad \text{(в)}$$

Итак, точка движется по окружности радиуса $R = a$, уравнение которой задано соотношением (б). То, как точка движется по траектории, описывается уравнением $s(t) = ak \cdot t$. Алгебраическое значение скорости точки вычисляется при естественном способе задания движения по формуле (1.51) $v = ds / dt = \dot{s}$. В рассматриваемом примере:

$$v = ak = const. \qquad \text{(г)}$$

По формуле (г) видно, что точка по траектории движется с постоянной по величине скоростью в положительном направлении оси M_0s. Такое движение называется равномерным. Движущаяся точка от точки M_0 траектории минуя точки M_1, M_2, M_3 снова к точке M_0. При равномерном движении за равные промежутки времени точка проходит равные расстояния.

Кроме того, из уравнения (в) и по форме траектории (замкнутая кривая) видно, что, если процесс движения точки рассматривается на больших интервалах времени, то точка M будет неоднократно оказываться в одних и тех же точках траектории. Полная длина траектории L вычисляется как длина окружности с радиусом $R = a$. $L = 2\pi R = 2\pi a(м)$. Найдем время t_*, за которое точка один раз «обежит» окружность и опять вернется в точку M_0. Это будет тогда, когда координата точки $s(t_*) = L$. Отсюда $akt_* = 2\pi a$ и $t_* = 2\pi / k$ (*сек.*). Принимая во внимание равномерность движения, можно утверждать, что в дальнейшем точка будет проходить точку траектории M_0 в моменты времени $t_{*n} = nt_* = 2\pi n / k$ (*сек.*), где $n = 1,2,3,...$

Отметим попутно одну особенность естественного способа задания движения, которая проявилась в этом частном примере. Точка начала двигаться из точки M_0, где $s = 0$. В момент времени $t_* = 2\pi / k$ она опять оказывается в этой точке, но

координата точки $s(t_*) = ak \cdot t_* = ak \cdot 2\pi / k = 2\pi a = L$. Кинематическая точка может попасть в эту геометрическую точку еще много раз. Но координаты её будут каждый раз другими: $s(t_{*n}) = ak \cdot t_* \cdot n = ak \cdot 2\pi n / k = 2\pi an = nL$. Это надо учитывать при анализе движения тоски M. В отличие от сказанного, при координатном способе задания движения координаты движущейся точки M всегда совпадают с геометрическими координатами соответствующих точек траектории. Действительно, $x = a \cdot \sin kt$, $y = a \cdot \cos kt$. В момент времени $t = 0$ имели $x = 0$, $y = a(м)$. И в другие моменты времени $t_{*n} = 2\pi n / k$ получаем: $x(t_{*n}) = a \cdot \sin kt_{*n} = a \cdot \sin 2\pi nk / k = 0$. $y(t_{*n}) = a \cdot \cos kt_* = a \cdot \cos 2\pi nk / k = a$ ($n -$ целое положительное число). Другими словами, если, например, вычислять координаты точки M только в моменты времени $t_{*n} = 2\pi n / k$, всегда получалось бы $x(t_{*n}) = x(0)$, $y(t_{*n}) = y(0)$. В итоге может сложиться впечатление, что точка неподвижна, но это не так. Это говорит о том, что нужно проводить полный анализ движения точки.

Далее, в точку траектории M_1 при первом пробеге точка M попадет в момент времени $t_1 = t_* / 4$ или $t_1 = 0{,}25t_* = 2\pi / 4k = \pi / 2k$ (*сек.*), а в последующем она будет проходить эту точку в моменты времени $t_{1n} = t_{*n} + t_1 - t_*$. Отсюда $t_{1n} = (2\pi n / k) + (\pi / 2k) - (2\pi / k)$ или $t_{1n} = (4n - 3)\pi / 2k$ (*сек.*). В точке $M_2 -$ при первом пробеге точка M попадает в момент времени $t_2 = t_* / 2$ или $t_2 = 0{,}5t_* = 2\pi / 2k = \pi / k$ (*сек.*), а в последующем–в моменты времени $t_{2n} = (2n - 1)\pi / k$ (*сек.*). В точке $M_3 -$ при первом пробеге в момент времени $t_3 = (3/4)t_* = 3\pi / 2k$ (*сек.*), а в последующем - в моменты времени $t_{3n} = (4n - 1)\pi / 2k$. Во всех формулах этого примера $n = 1,2,3,...$

5. Определим касательное и нормальное ускорения точки a_τ, a_n, модуль полного ускорения точки и направление вектора полного ускорения точки. По (1.53): $a_\tau = dv / dt$, $a_n = v^2 / \rho$. Тогда, с учетом (г) имеем:

$$a_\tau = 0, \quad a_n = (ak)^2 / a = ak^2 (м / с^2). \qquad (д)$$

Другими словами, так как $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = a_n$, то при $a_\tau = 0$ модуль вектора полного ускорения

$$a = a_n = ak^2 (м / с^2). \qquad (е)$$

Для траектории в виде окружности, как это имеет место в рассматриваемом примере, вектор нормального ускорения $\bar{a}_n$ в каждой точке траектории направлен перпендикулярно к касательной к траектории. Следовательно, вектор полного ускорения $\bar{a} = \bar{a}_n$ направлен в каждой точке траектории (в каждый момент времени) по радиусу к центру окружности – к точке *O*.

6. Определим модуль вектора полного ускорения точки M при координатном способе задания движения. Вектор полного ускорения точки $\bar{a}$ по своей физической природе не должен зависеть от способов его определения (от

способов задания движения и систем координат). Во всех системах координат он должен иметь одно и то же значение.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,.$$

С одной стороны, $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = ak^2 (м/с^2)$. Вектор полного ускорения точки $\bar{a}$ в данном примере направлен, как вектор $\bar{a}_n$, то есть по радиусу окружности к ее центру O (рис.2 к примеру 1.6). С другой стороны, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. Здесь $a_x = \ddot{x},\ \ a_y = \ddot{y}$. С учетом (а) $a_x = \ddot{x} = -ak^2 \sin kt$. $a_y = \ddot{y} = -ak^2 \cos kt$. Тогда, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(ak^2)^2 \cdot (\sin^2 kt + \cos^2 kt)} = ak^2 (м/с^2)$, что совпадает с (е). Определим направление вектора $\bar{a}$, пользуясь координатным способом задания движения. Заметим, что тангенс угла наклона радиус- вектора точки $\overline{OM}$ к оси Ox: $tg\beta = y_M / x_M = a\cos kt / a\sin kt = ctgkt$. С другой стороны, как видно по рис.2 к примеру 1.6 тангенс угла наклона вектора полного ускорения $\bar{a}$ к Ox равен: $tg\beta = a_y / a_x = ak^2 \cos kt / ak^2 \sin kt = ctgkt$. Это означает, что вектор полного ускорения $\bar{a}$ направлен по радиусу окружности (траектории) в точке *M*. Этот же результат получили, пользуясь естественным способом задания движения.

Пример 1.7. Уравнение движения точки в трехмерном пространстве задано координатным способом:

$$x(t) = -b\sin\omega t,\ \ y(t) = b\cos\omega t,\ \ z(t) = kt\,. \qquad (а)$$

Здесь x, y, z, b измеряются в метрах, величина k измеряется в $м/сек$, t – в секундах. Текущее время t может принимать любые значения из области значений $t \geq 0$. Требуется определить траекторию точки, закон движения точки по траектории, определить вектора скорости и ускорения точки при координатном и естественном способах задания движения.

Решение. Сначала кинематические характеристики определим координатным способом, затем перейдем к естественному способу задания движения и найдем те же кинематические характеристики движения.

1. Определим траекторию движения точки. Выразим параметр времени из третьего уравнения ($t = z/k$) и подставим в два первых. Получим пространственную кривую:

$$x = -b\sin\frac{\omega \cdot z}{k}, \qquad y = b\cos\frac{\omega \cdot z}{k}\ . \qquad (б)$$

Проанализируем эту кривую. Уравнения (а) уже являлись уравнениями траектории в параметрической форме. Из них видно, что кривая (а) отбрасывает на плоскость Oxy тень (проецируется) в виде окружности радиуса a. Действительно, возводя в квадрат первые два из уравнений (а) и складывая, получим уравнение проекции траектории точки M на плоскость Oxy в виде $x^2 + y^2 = b^2$. Это уравнение окружности на плоскости Oxy с центром в начале координат, Оно же – уравнение круговой цилиндрической поверхности с осью Oz (см. рис.1 к примеру).

Другими словами, точка M движется по цилиндрической поверхности, и ее траектория проецируется на плоскость Oxy в виде окружности.

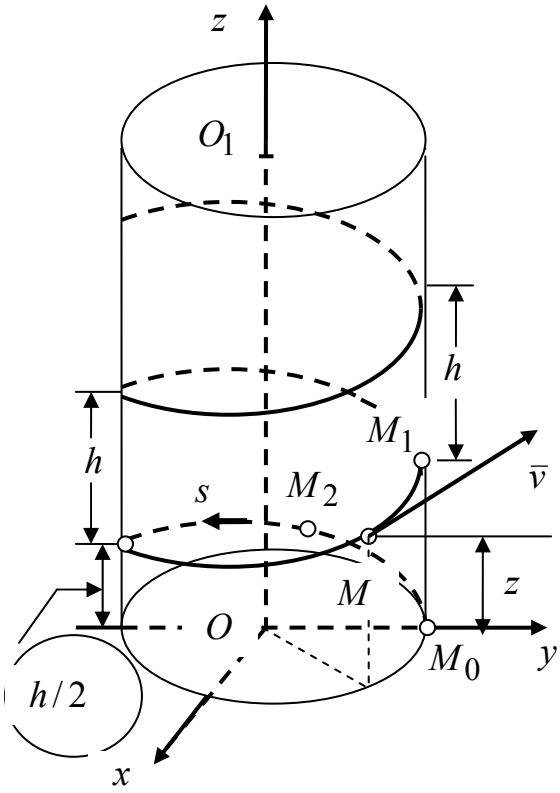


Рис. 1 к примеру 1.7

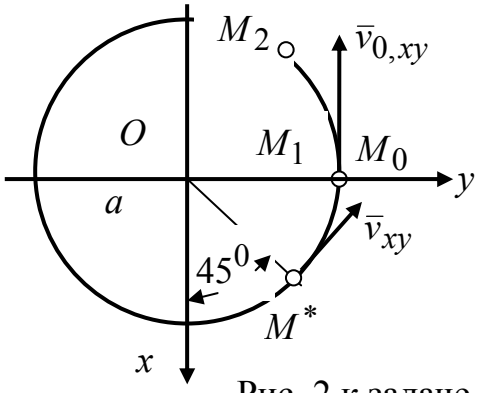


Рис. 2 к задаче 1.7

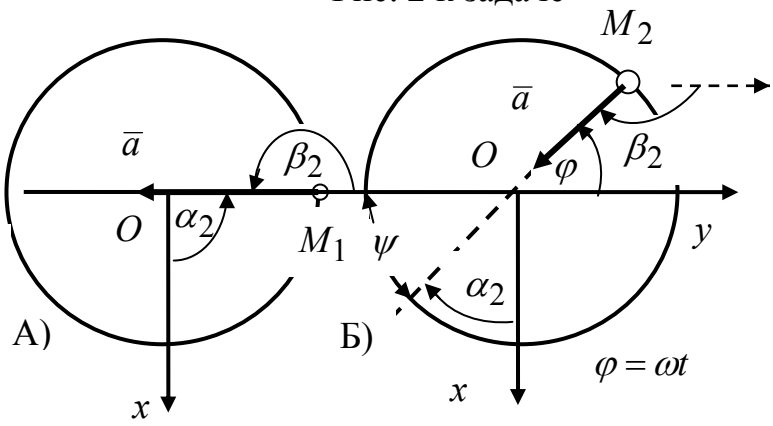


Рис. 3 к примеру 1.7

Далее нужно определить, как точка движется по найденной поверхности. Обратимся опять к уравнениям движения (а). Как известно, функции $cost$, $\sin t$ имеют период 2π (*сек).* Функции $x(t) = -b\sin\omega t$, $y(t) = b\cos\omega t$ будут иметь период $T = 2\pi/\omega$ (*сек).* Следовательно, через каждые T *сек* координаты $x(t), y(t)$ точки M будут повторяться. Другими словами, за каждый промежуток времени $\Delta t = T$ *сек* точка M один раз обегает цилиндрическую поверхность. Одновременно меняется и координата $z(t) = kt > 0$. Точка при этом движется вверх (в положительном направлении оси Oz). Так как функция $z(t) = kt$ зависит линейно от параметра времени, то за равные промежутки времени $\Delta t = T = 2\pi/\omega$ (*сек*) точка поднимается на одну и ту же высоту h. Для первого витка траектории имеем $h = z(T) = kT = k \cdot 2\pi/\omega$.

Пространственная кривая, которая задается уравнениями типа (а) или (б), называется винтовой линией.

Величина h, равная расстоянию между двумя соседними витками траектории, называется шагом винтовой линии (рис.1).

Ось цилиндра, на поверхности которого лежит винтовая линия, может называться осью винтовой линии.

Если взять кольцо, разрезать его в одном месте и в точке разреза поднять одно сечение над другим, можно получить один виток винтовой линии. Кроме того, если коэффициент k в уравнениях (б) выразить через величину h, получим еще одну форму записи траектории точки:

$$x = -b\sin\frac{2\pi\cdot z}{h}, \qquad y = b\cos\frac{2\pi\cdot z}{h} \quad . \tag{в}$$

Итак, траекторией точки является винтовая линия с шагом $h = k\cdot 2\pi/\omega$.

2. Определим начальное положение точки на траектории. Подставим значение $t=0$ в уравнения движения (а). Получим $x(0)=0,\ \ y(0)=b,\ \ z(0)=0$. Другими словами, точка M начинает движение из точки M_0 (рис. 1).

3. Определим вектор скорости точки. Скорость точки определим через проекции вектора скорости точки. С учетом уравнений (а) по формулам (1.33) имеем:

$$v_x = \dot{x} = -b\omega\cos\omega t,\ v_y = \dot{y} = -b\omega\sin\omega t,\ v_z = \dot{z} = k. \tag{г}$$

Или (см. уравнения движения (а)):

$$v_x(t) = -b\omega\cos\omega t = -\omega\cdot y(t),\ \ v_y(t) = -b\omega\sin\omega t = \omega\cdot x(t),\ \ v_z = \dot{z} = k, \tag{д}$$

где $x^2 + y^2 = b^2$. Тогда модуль вектора скорости будет равен (1.34):

$$|\bar{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\omega^2(x^2+y^2)+k^2} = \sqrt{b^2\omega^2 + k^2}\ . \tag{е}$$

Видим, что при заданном законе движения точки (а) точка M движется по траектории с постоянной по величине скоростью (рис.1 к задаче). Однако вектор скорости $\bar{v}$ (рис.1) не является постоянным вектором. Будучи направленным по касательной к траектории в каждой точке, он меняет свое направление в пространстве с течением времени. Проекция вектора скорости $\bar{v}$ на плоскость Oxy обозначена $\bar{v}_{xy}$. На рис.2 вектор $\bar{v}_{xy}$ показан в моменты времени $t=0$ и $t=\frac{7}{8}T(сек)$. Пусть, как и раньше, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ –углы, которые вектор скорости образует с положительными направлениями соответствующих осей Ox, Oy, Oz. По формулам (1.35) будем иметь:

$$\cos\ \alpha_1 = v_x / |\bar{v}|;\ \ \cos\ \beta_1 = v_y / |\bar{v}|;\ \ \cos\ \gamma_1 = v_z / |\bar{v}|.$$

Учитывая равенство $|\bar{v}| = v = \sqrt{b^2\omega^2 + k^2}$, легко получаем:

$$\cos\ \alpha_1 = \frac{-b\omega\cdot\cos\ \omega t}{\sqrt{b^2\omega^2 + k^2}} = \frac{-\omega\cdot y(t)}{v},$$

$$\cos\ \beta_1 = \frac{-b\omega\cdot\sin(\ \omega t)}{\sqrt{b^2\omega^2 + k^2}} = \frac{\omega\cdot x(t)}{v}, \tag{ж}$$

$$\cos\ \gamma_1 = \frac{k}{\sqrt{b^2\omega^2 + k^2}} = \frac{k}{v}.$$

Интересно отметить, что угол наклона вектора скорости $\bar{v}$ к оси Oz (читай к образующей цилиндра) γ_1 постоянен и не зависит от времени (третья из формул (ж)).

Следовательно, вектор скорости точки и касательная к траектории точки пересекают образующие цилиндра под одним и тем же углом γ_1. **Угол γ_1 называется углом наклона винтовой линии.** Если имеется таблица значений функций $x(t), y(t), z(t)$ для разных моментов времени, то по формулам (г) – (ж) легко можно вычислить величины v_x, v_y, v_z, $|\bar{v}|$, $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ в те же моменты времени, необходимые для построения вектора скорости $\bar{v}$.

4. Определим вектор ускорения точки $\bar{a}$. Ускорение точки определим через проекции вектора ускорения точки a_x, a_y, a_z. По формулам (1.38) имеем:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},\ a_y = \frac{dv_y}{dt},\ a_z = \frac{dv_z}{dt},\qquad |\bar{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = b\omega^2 \sin\omega t,\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -b\omega^2\cos\omega t,\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0. \qquad (з)$$

Или (см. уравнения движения (а)):

$$a_x = b\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x(t),\ a_y = -b\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 y(t),\ a_z = 0. \qquad (и)$$

При этом $x^2 + y^2 = b^2$. Тогда $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\omega^4(x^2+y^2)} =$

$= \sqrt{b^2\omega^4(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = \sqrt{b^2\omega^4} = b\omega^2$. Окончательно получаем:

$$a = b\omega^2\ . \qquad (е)$$

Пусть, как и раньше, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ – углы, которые вектор полного ускорения образует с положительными направлениями соответствующих осей Ox, Oy, Oz. По формулам (1.41) с учетом (з) и (е) имеем:

$$\cos\alpha_2 = a_x / |\bar{a}| = \sin\omega t = -x(t)/b\ ,$$
$$\cos\beta_2 = a_y / |\bar{a}| = -\cos\omega t = -y(t)/b\ , \qquad (к)$$
$$\cos\gamma_2 = a_z / |\bar{a}| = 0\ .$$

Таким образом, вектор полного ускорения определен, как по величине (формула (е)), так и по направлению (формулы (к)). Теперь о направлении вектора $\bar{a}$. Во-первых, так как $a_z = 0$, можно утверждать, что в процессе движения точки вектор полного ускорения $\bar{a}$ всегда лежит в плоскостях, параллельных координатной плоскости Oxy. Определим направление вектора $\bar{a}$ в указанных плоскостях. Пусть t принимает одно из следующих значений $t_n = 2\pi n/\omega$. Здесь целое $n = 0,1,2,...$ Другими словами, рассмотрим моменты времени, кратные времени $T = 2\pi/\omega$ движения точки по одному витку траектории. При $n = 0$ имеем $t_0 = 0$ и точка M находится в своем начальном на траектории положении M_0. При $n = 1$ получим $t_1 = T$. Точка M пробежит один виток траектории и окажется в точке траектории M_1 строго над точкой M_0 (см. рис.1 к примеру). Величина (модуль) вектора полного ускорения $a = b\omega^2 = const$. В эти моменты времени $\cos\alpha_2 = 0$, $\cos\beta_2 = -1$ $(\alpha_2, \beta_2 \geq 0)$. Следовательно, $\alpha_2 = \pi/2$, $\beta_2 = \pi$. Последние два равенства определяют

направление одного и того же вектора полного ускорения $\bar{a}$. **Угол α_2 отсчитывается от положительного направления оси Ox, угол β_2 – от положительного направления оси Oy.** Другими словами, вектор ускорения $\bar{a}$ направлен к оси цилиндра, на поверхности которого лежит траектория – винтовая линия (рис.3а к примеру). В качестве примера рассмотрим еще один момент времени t^*. Пусть $\varphi = \omega t^* < \pi/2$, то есть $0 < t^* < \pi/2\omega$. Для определенности примем $\varphi = \omega \cdot t^* = \pi/4$. Положение точки M на траектории обозначим точкой M_2. Направление вектора $\bar{a}$ в точке M_2 определяется соотношениями (к): $\cos\alpha_2 = \sin\omega t^* = \sqrt{2}/2$, $\cos\beta_2 = -\cos\omega t^* = -\sqrt{2}/2$. Так как $0 < \omega t^* < \pi/2$, то $\cos\alpha_2 > 0$, $\cos\beta_2 < 0$. Отсюда $0 < \alpha_2 < \pi/2$, $\pi/2 < \beta_2 < 3\pi/2$. Следовательно, как и нужно было ожидать, вектор $\bar{a}$ направлен в сторону вогнутости траектории. Но из этого пока не следует, что вектор $\bar{a}$ направлен строго к оси винтовой линии. Введем в рассмотрение угол ψ (рис. 3Б к примеру). Тогда $\alpha_2 = 3\pi/2 + \psi$, $\beta_2 = \pi + \psi$. По формулам приведения будем иметь:

$$\cos\alpha_2 = \cos(3\pi/2 + \psi) = \sin\psi = \sin\omega t = \sin\varphi .$$

Аналогично

$$\cos\beta_2 = \cos(\pi + \psi) = -\cos\psi = -\cos\omega t = -\cos\varphi .$$

Следовательно, $\psi = \varphi = \omega t^*$. Другими словами (см. рис. 3б к примеру), вектор полного ускорения $\bar{a}$ направлен к оси винтовой линии.

5. Определим вектор касательного ускорения точки. Величину касательного ускорения точки в нашем случае можно определить прямо по формуле (1.67), не зная еще закона движения точки по траектории $s = s(t)$. $a_\tau = (v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z)/v =$

$= ((-b\omega\cos\omega t)(b\omega^2\sin\omega t) + (-b\omega\sin\omega t)(-b\omega^2\cos\omega t) + 0)/v = 0$. Итак, величина касательного ускорения $a_\tau = 0$. Следовательно, и сам вектор касательного ускорения равен нулю $\bar{a}_\tau = 0$.

6. Определим вектор нормального ускорения точки. Так как вектор полного ускорения $\bar{a}$ при разных способах задания движения точки представляется как $\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$, то с учетом равенства $\bar{a}_\tau = 0$ получаем $\bar{a} = \bar{a}_n$. Другими словами, вектор полного ускорения точки $\bar{a}$ равен вектору нормального ускорения точки $\bar{a}_n$. Следовательно, вектор $\bar{a}_n$ направлен так же, как вектор полного ускорения $\bar{a}$, к оси винтовой линии и равен $a_n = a = b\omega^2$.

7. Определим радиус кривизны траектории ρ. Радиус кривизны траектории можно определить исходя из кинематических соображений, не привлекая геометрию пространственных кривых. Действительно, из формулы (1.55) имеем:

$$\rho = v^2/a_n = (b^2\omega^2 + k^2)/b\omega^2 = b + k/b\omega^2 = const . \qquad (1)$$

Из формулы (1) видим, что радиус кривизны ρ винтовой линии во всех ее точках один и тот же.

8. Определим закон движения точки $s = s(t)$ по траектории (это нужно при естественном способе задания движения). По (1.64) и с учетом (е) имеем:

$$s(t) = s_0 + \int (\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2})dt = s_0 + \int (\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2})dt =$$

$$= s_0 + \int v dt = s_0 + \sqrt{b^2\omega^2 + k^2} \int dt = s_0 + (\sqrt{b^2\omega^2 + k^2})t .$$

Итак, $s(t) = s_0 + (\sqrt{b^2\omega^2 + k^2})t$.

В рассматриваемом примере в момент времени $t = 0$ точка M находилась в точке траектории, обозначенной буквой M_0 ($x = 0, y = b$, см. рис.1 к примеру). Пусть начало криволинейной системы координат принято в той же точке M_0, направление положительного отсчета криволинейных координат s пусть совпадает с направлением движения точки (рис.1 к примеру). Тогда в системе координат $M_0 s$ при $t = 0$ должны иметь: $s(0) = 0 = s_0 + (\sqrt{b^2\omega^2 + k^2}) \cdot 0$. Отсюда $s_0 = 0$ и закон криволинейного движения в рассматриваемом примере принимает вид: $s(t) = t \cdot \sqrt{b^2\omega^2 + k^2}$. Или

$$s(t) = t \cdot v . \qquad \text{(м)}$$

Итак, движение точки исследовано двумя способами.

§1.10. Законы равномерного и равнопеременного движений точки

1. Прямолинейное равномерное движение точки

1.30.Движение точки называется прямолинейным, если траектория точки – прямая линия.

1.31. Прямолинейное движение точки будет еще и равномерным, если точка движется с постоянной скоростью.

Для прямолинейного равномерного движения радиус кривизны траектории постоянен и равен бесконечности ($\rho = \infty$). $\bar{v} = const$, $\bar{a}_n = 0$ (так как $a_n = v^2 / \rho = 0$), $\bar{a}_\tau = 0$ (так как $a_\tau = dv/dt = 0$) и, как следствие, вектор полного ускорения $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n = 0$. При прямолинейном движении вектор скорости точки направлен параллельно траектории движения (лежит на траектории) в сторону движения точки, координатный и естественный способы задания движения полностью совпадают. Направим ось Ox по траектории в направлении движения точки (рис.1.12). Положение точки определяется одной координатой и, следовательно, закон движения по прямой задается одной функцией $x = x(t)$. Пусть в начальный момент времени $t = 0$, точка M находилась в точке прямой с координатой $x(0) = x_0$ (рис.1.12). Необходимость в индексе x отпадает, так как движение точки происходит только вдоль одной оси Ox. Тогда $v_x = v = const$, $v_y = v_z = 0$, $a_x = a = 0$

(это следует из условия прямолинейности и равномерности движения), $a_y = a_z = 0$ (это следует из условия прямолинейности движения). Алгебраическое значение скорости вычисляется, как известно, по формуле $v = dx/dt$.

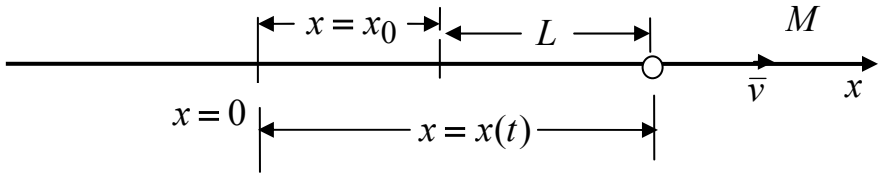


Рис.1.12

Проинтегрируем это равенство при условии равномерности движения $v_x = v = const$.

$$v = dx/dt, \qquad dx = vdt, \qquad \int dx = \int vdt, \qquad x = vt + C,$$

где C – постоянная интегрирования. Для определения константы интегрирования воспользуемся начальным условием: при $t = 0$, $x(0) = x_0$. Это приводит к уравнению $x(0) = x_0 = v \cdot 0 + C$. Отсюда $C = x_0$. Отсюда же следует и механический смысл константы интегрирования C – это начальная координата точки M.

Окончательно уравнение равномерного прямолинейного движения точки и закон изменения скорости этой точки принимают вид:

$$\boxed{x = x_0 + vt, \qquad v = (x - x_0)/t.} \tag{1.69}$$

Напомним, что в (1.69) величина скорости v может быть положительна ($v > 0$, точка движется в положительном направлении оси Ox) или отрицательна ($v < 0$, точка движется в отрицательном направлении оси Ox). Если обозначить $L = |x - x_0|$ – путь, пройденный точкой в одном направлении за рассматриваемый промежуток времени, то модуль вектора скорости точки можно вычислить по формуле $|v| = L/t$.

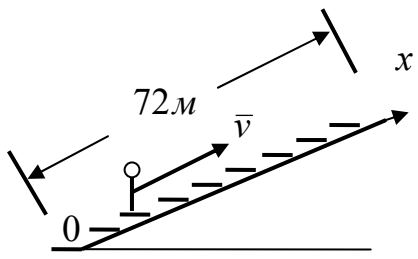


Рис. к примеру 1.8

Пример 1.8. Скорость движения эскалатора метрополитена равна $3{,}6км/час$. Определить скорость движения в $м/сек$ и время, за которое эскалатор с пассажиром переместиться на расстояние $L = 72м$.

Решение. Точки эскалатора совершают одинаковые прямолинейные равномерные движения. Поэтому достаточно рассмотреть движение любой ступеньки с пассажиром. Систему координат выберем так, как показано на рисунке к примеру. Тогда:

$$v = 3{,}6км/час = \frac{3{,}6 \cdot 1000}{3600} = 1м/сек.$$

$$t = \frac{x - x_0}{v} = \frac{L}{v} = \frac{72}{1} = 72сек.$$

2.Равнопеременное прямолинейное движение точки

1.32. Равнопеременным прямолинейным ($\rho = \infty$, $a_n = v^2/\rho = 0$) ***движением точки называется такое движение точки, при котором модуль величины касательного ускорения*** a_τ ***постоянен*** ($a_\tau = const$)**.**

Пусть ось Ox совпадает с траекторией движения (рис. 1.12). Координатный и естественный способы задания движения полностью совпадают. Тогда $a_\tau = a_x = a = const$. Другими словами, вектор полного ускорения точки $\bar{a}$ направлен по траектории движения точки (по оси Ox) и в данном случае равен своим составляющим $\bar{a} = \bar{a}_\tau = \bar{a}_x$. Потребность в индексе x опять отпадает. Определим закон изменения величины скорости точки и закон движения точки. Пусть при $t = 0$, $x(0) = x_0$, $v(0) = v_x(0) = v_0$. Здесь постоянные x_0, v_0 – координата точки траектории, с которой началось движение материальной точки M, и скорость, с которой точка M начала движение, соответственно. Касательное ускорение точки $dv/dt = a_\tau = a$. Проинтегрируем один раз это уравнение с учетом начальных условий.

$dv = a \cdot dt$, $\int dv = \int a \cdot dt$. После вычисления интеграла и определения константы интегрирования окончательно получим:

$$\boxed{v = a \cdot t + v_0, \qquad (a = const,\ v_0 = const).} \tag{1.70}$$

Итак, при равнопеременном прямолинейном движении алгебраическое значение скорости определяется по формуле (1.70). В этой формуле v, a, v_0 – алгебраические величины, то есть они могут быть положительными или отрицательными. Интегрируя полученное равенство (1.70) еще один раз с учетом равенства $v = dx/dt$, получим уравнение движения: $v = dx/dt$, $dx/dt = v = at + v_0$,

$$dx = at \cdot dt + v_0 \cdot dt, \quad \int dx = \int atdt + \int v_0 dt, \quad x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0 \cdot$$

При интегрировании равенства (1.70) было учтено, что $a = const$ и, что при $t = 0$, $x(0) = x_0$, $v(0) = v_x(0) = v_0$. Окончательно для прямолинейного равнопеременного движения получаем закон изменения скорости и закон движения:

$$\boxed{v = a \cdot t + v_0, \qquad (a = const,\ v_0 = const).} \tag{1.71}$$

$$\boxed{x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0 \cdot} \tag{1.72}$$

Итак, при равнопеременном ($a = const$) прямолинейном движении закон движения точки определяется параболической функцией (1.72), а закон изменения скорости определяется линейной функцией (1.71).

3. Равномерное криволинейное движение точки

1.33. Равномерным криволинейным движением точки называется такое движение точки, при котором точка движется по криволинейной траектории так, что алгебраическое значение скорости v все время остается постоянным.

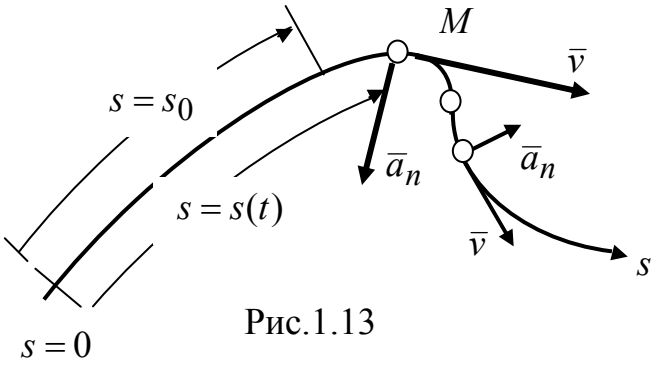


Рис.1.13

На траектории введем криволинейную систему координат Os, ось которой полностью повторяет форму траектории. Так как $a_\tau = dv/dt$, а $v = const$ по определению, то при этом способе движения $a_\tau = 0$. Величина нормального ускорения отлична от нуля $a_n = v^2/\rho$. Интегрируя уравнение $v = ds/dt$ при начальных условиях $t = 0,\ s(0) = s_0$, получим: $s = s_0 + vt$, $v = (s - s_0)/t$.

При прямолинейном равномерном движении было $v = const,\ a = a_x = 0$. Следовательно, вектор полного ускорения $\bar{a} = 0$. Тогда вектор скорости точки $\bar{v} = const$. Другими словами, вектор скорости всегда имеет одну и ту же длину (модуль) и, будучи направлен по касательной к прямолинейной траектории, не меняет своего направления (лежит на самой траектории). При криволинейном равномерном движении точки алгебраическое значение скорости по-прежнему не меняется ($v = const, a_\tau = 0$), но вектор полного ускорения $\bar{a} = \bar{a}_n \neq 0$. Здесь $a_n = v^2/\rho \neq 0$. Следовательно, $\bar{v} \neq const$, так как $\bar{a} = d\bar{v}/dt$. Переменность вектора скорости в данном случае проявляется в том, что он, будучи при

движении точки направленным по касательной к траектории и имея все время одну и ту же длину ($|\bar{v}| = const$), все время меняет свое направление, как показано на рис. 1.13 для двух точек траектории (для двух моментов времени движения). Отсюда следует вывод, что нормальная составляющая вектора полного ускорения точки $\bar{a}_n$ влияет на изменение направления вектора скорости $\bar{v}$. Окончательно, для равномерного криволинейного движения имеем:

$$\boxed{s = s_0 + vt, \quad v = const, \quad v = (s - s_0)/t.} \tag{1.73}$$

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a = a_{n.}, \ \bar{a} = \bar{a}_n, \ \bar{v} \neq const\ .} \tag{1.74}$$

Здесь формулы (1.73) определяют закон движения точки и закон изменения алгебраического значения скорости точки. При этом вектор скорости направлен по касательной к траектории в точке, а вектор полного ускорения направлен по нормали к траектории в точке, то есть перпендикулярно к вектору скорости.

4. Равнопеременное криволинейное движение точки

1.34. Равнопеременным криволинейным движением точки называется движение, при котором модуль вектора касательного ускорения точки $|\bar{a}_\tau|$ остается постоянным в процессе движения ($|\bar{a}_\tau| = const$).

Пусть на некотором промежутке времени $t_0 \le t \le t_1$ точка совершает равнопеременное криволинейное движение. Предполагается, что на траектории задана криволинейная система координат Os и закон движения по траектории $s = s(t)$. Из определения следует, что на этом промежутке времени алгебраическая величина касательного ускорения $a_\tau > 0$ или $a_\tau < 0$. Тогда: $a_\tau = dv/dt$ или $a_\tau = d^2s/dt^2$, так как $v = ds/dt$.

Интегрируя первое равенство при начальных условиях $t_0 = 0, \ v(0) = v_0$, получим закон изменения алгебраической величины скорости $v = v_0 + a_\tau t$. Отсюда видим, что величина скорости v в данном случае меняется по линейному закону, так как $v_0 = const, a_\tau = const$. С другой стороны, видим, что a_τ влияет на величину скорости движения точки. Подставим в равенство $v = v_0 + a_\tau t$ выражение $v = ds/dt$ и проинтегрируем полученное равенство еще один раз при начальных

условиях $t_0 = 0,\ s(0) = s_0$. Тогда, $v = v_0 + a_\tau t$, $ds/dt = v_0 + a_\tau t$,

$ds = v_0 dt + a_\tau t dt$, $\int ds = \int v_0 dt + \int a_\tau dt$, $s = s_0 + v_0 t + a_\tau t^2/2$.

Отсюда видим, что координата точки s в данном случае меняется по параболическому закону, так как $s_0 = const, v_0 = const, a_\tau = const$.

Таким образом, закон движения точки и закон изменения алгебраической величины ее скорости при равнопеременном криволинейном движении имеют вид:

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + a_\tau t^2/2} \tag{1.75}$$

$$\boxed{v = v_0 + a_\tau t} \tag{1.76}$$

В этих формулах s_0, v_0 – координата начального положения точки и начальная алгебраическая величина скорости, соответственно.

1.35. Если при движении точки $v \cdot a_\tau > 0$, то движение будет ускоренным. В этом случае вектор скорости и вектор касательного ускорения направлены в одну сторону (сонаправлены) и модуль скорости возрастает.

1.36. Если при движении точки $v \cdot a_\tau < 0$, то движение называется замедленным. В этом случае вектор скорости и вектор касательного ускорения направлены в противоположные стороны (не сонаправлены) и модуль вектора скорости убывает.

§ 1.11. Свободное прямолинейное движение точки по вертикали

Рассмотрим два очень важных и часто встречающихся вида движения твердых тел – свободное падение тела с некоторой высоты без учета сил сопротивления воздуха и движение тела, брошенного вертикально вверх без учета сопротивления воздуха. В тех случаях, когда тело конечных размеров можно принимать за точку, оба эти случая можно рассмотреть с позиций теории равнопеременного движения точки при $\bar{a} = \bar{g}$. Здесь $\bar{g}$ – вектор ускорения свободного падения точки. Тогда, по (1.75) и (1.76) при прямолинейном вертикальном свободном падении для принятой системы координат с заменой оси x на ось z имеем:

$$z = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + z_0, \qquad v = gt + v_0.$$

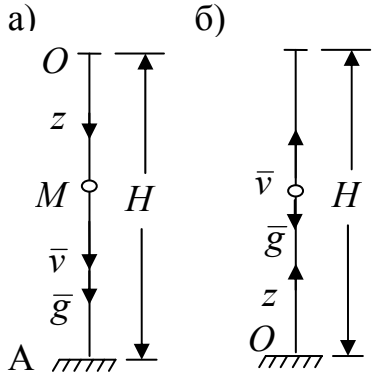


Рис. 1.14

Если тело падает без начальной скорости и из начала координат, то $v_0 = 0,\ z_0 = 0$ и тогда $z = \frac{gt^2}{2}$, $v = gt$. Если тело падает с высоты H, эти формулы принимают вид $H = \frac{gt_1^2}{2}$, $v = gt_1$, где t_1 – полное время падения тела с высоты H до плоскости A. Выражая t_1 из второго равенства и подставляя в первое, для значения вектора скорости в момент падения на плоскость A (см. рис.1.14) получим формулу:

$$v = \sqrt{2gH}, \tag{1.77}$$

которая носит имя Галилео Галилея (1564–1642гг.).

Если тело брошено вертикально вверх со скоростью v_0, то для принятой системы координат (когда ось Oz направлена вверх, см. 1.14 б) законы изменения скорости точки и закон движения точки при $v(0) = v_0\ \ u\ \ z(0) = z_0 = 0$ имеют вид:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t, \quad v = -gt + v_0.$$

Когда точка достигает максимальной высоты подъема $z = H$, скорость $v = 0$ и из второго соотношения получаем $t = v_0 / g$. Тогда первое равенство дает:

$$H = -\frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g^2} + v_0 \cdot \frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

То есть максимальная высота подъема тела H, брошенного вертикально вверх со скоростью v_0, вычисляется по формуле:

$$H = \frac{v_0^2}{2g}. \tag{1.78}$$

С другой стороны, чтобы достичь заданной высоты подъема (см. (1.78)), тело надо бросить вертикально вверх со скоростью

$$v_0 = \sqrt{2gH}\ . \tag{1.79}$$

Последняя формула совпадает с формулой (1.77). Практическое применение формул (1.77)–(1.79) возможно только при движениях в

пределах небольших высот H, так как влияние сопротивления воздуха на скорость движения тела при получении этих формул не учитывалось.

§ 1.12. Задачи по кинематике точки для самостоятельного решения

Во всех задачах рекомендуется правая система координат. В плоской правой системе координат на рисунках ось Ox направлена вправо, а ось Oy – вверх. В правой пространственной системе координат на рисунках ось Ox направлена на наблюдателя, ось Oy – вправо, ось Oz – вверх. В ответах все кинематические характеристики даются в основных единицах системы СИ (*м, сек*).

Задача 1.4. Подъемный кран поднимает груз на высоту $20м$ за одну минуту. Определить среднюю скорость подъема груза, принимая его за точку. **Ответ:** $0{,}33м/с$**.**

Задача 1.5. Поезд метрополитена проходит расстояние в $5км$ между двумя станциями за $6мин.$ Определить среднюю скорость поезда на этом отрезке пути в *м/с* и в *км/час*. **Ответ:** $13{,}889м/с(50км/час)$.

Задача 1.6. Автомобиль по улицам города двигался $10мин$ со скоростью $24км/час$, еще $30мин$ он двигался со скоростью $40км/час$, еще $5мин$ он двигался со скоростью $60км/час$ и $15мин$ простоял на светофорах. Определить среднюю скорость автомобиля в *м/с* и в *км/час* за все время нахождения в пути. **Ответ:** $8{,}056м/с(29км/час)$**.**

Задача 1.7. Самолет совершает подъем в вертикальной плоскости Oxy под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту с постоянной по величине скоростью $270км/час$. В момент начала наблюдения самолет имел координаты $x_0 = 100м, y_0 = 300м$. Описать движение самолета координатным способом. Какой высоты достигнет самолет за $20с$ подъема. **Ответ:** 1) $x = 100 + 75t\cos\alpha, y = 300 + 75t\sin\alpha$**,** 2)*1050м.*

Задача 1.8. Картонная коробка с товаром при разгрузке скользит строго вниз по наклонной плоскости, установленной под углом 45^0 к горизонту. Вектор скорости центра тяжести коробки постоянен по направлению и имеет в некоторый момент времени величину $1{,}5м/с$. Найти модули горизонтальной и вертикальной составляющих вектора скорости в данный момент времени, принимая коробку за точку. **Ответ:** $|\bar{v}_x| = |\bar{v}_y| = 1{,}061м/с.$

Задача1.9. Радиус-вектор точки определяется выражением $\bar{r}(t) = 5t^2\bar{i} + 12t^2\bar{j} + 5\bar{k}$. Записать закон движения точки координатным способом. Определить траекторию точки, модуль вектора перемещения точки и путь, пройденный точкой за $5с$. **Ответ:** **1)** $x = 5t^2, y = 12t^2, z = 5$ (точка движется в плоскости $z = 5(м)$, параллельной координатной плоскости Oxy). **2)** Траектория точки – прямая $y = 12x/5$. **3)** $|\Delta\bar{r}| = 325м$. 4) $s = 325м.$

Задача 1.10. Движение точки задано координатным способом $x = 3t(м), y = 4t^2(м)$. Построить траекторию точки, найти положение точки на траектории, модуль радиус-вектора точки, модули векторов скорости и ускорения

точки в момент времени $t = 1c$. **Ответ: 1)** траектория точки – правая ветвь параболы $y = 4x^2/9$; **2)** $x(1) = 3(м),\ y(1) = 4(м)$. **3)** $|\bar{v}(1)| = \sqrt{73}(м/с)$, **4)** $|\bar{a}(1)| = 8(м/с^2)$.

Задача 1.11. Уравнение движения точки задано векторным способом $\bar{r}(t) = \bar{i} \cdot 3\sin \pi t + \bar{j} \cdot 4\cos \pi t$. Определить движение точки координатным способом, траекторию точки, положение точки на траектории в начальный момент времени и в момент времени $t = 0{,}5c$, модуль и направление вектора скорости в момент времени $t = 0{,}5c$. **Ответ: 1)** $x = 3\sin \pi t, y = 4\cos \pi t$. **2)** Траектория точки – эллипс $x^2/3^2 + y^2/4^2 = 1$. **3)** $x(0) = 0(м), y(0) = 4(м)$; $x(0{,}5) = 3(м), y(0{,}5) = 0(м)$. **4)** $|\bar{v}(0{,}5)| = 4\pi(м/с)$, $\cos\alpha_1 = 0, \cos\beta_1 = -1$, $\alpha_1 = \pi/2, \beta_1 = \pi$.

Задача 1.12. Уравнение движения снаряда – свободной точки, «брошенной» под углом α к горизонту, когда не учитываются силы сопротивления, задается в виде $x = tv_0 \cos\alpha + x_o$, $y = y_0 + v_0 t \sin\alpha - gt^2/2$. Требуется определить, под каким углом α к горизонту необходимо установить ствол орудия, чтобы поразить цель на расстоянии *L=12000м.,* если снаряд вылетает из ствола со скоростью $v_0 = 520м/с$. В расчетах принять $g = 9{,}81м/с^2$. **Ответ:** $\alpha_1 = 12{,}91^0, \alpha_2 = 77{,}09^0$.

Задача 1.13. Точка M движется по окружности $x^2 + y^2 = 9$ согласно уравнению $s(t) = 3\pi t^2 (м)$. В начальный момент времени точка имела координаты $x(0) = 3(м), y(0) = 0(м)$. Направление отсчета криволинейных координат точки выбрано так, что значения $s > 0$ соответствуют обходу траектории против часовой стрелки. Определить и изобразить положение точки на траектории, векторы скорости, нормального, касательного и полного ускорений точки в момент времени $t = 1c$. **Ответ:** при $t = 0$ получим **1)** $s = 3\pi(м)$, $x = -3(м), y = 0(м)$; **2)** алгебраическое значение скорости $v = 6\pi(м/с)$, вектор скорости перпендикулярен к оси Ox и направлен так, что $v_y = -6\pi < 0$; **3)** $a_n = 12\pi^2(м/с^2)$, вектор нормального ускорения $\bar{a}_n$ направлен к центру окружности по оси Ox; **4)** $a_\tau = 6\pi(м/с^2)$ и направлен так же, как и вектор $\bar{v}$; **5)** $a = 6\pi\sqrt{1 + 4\pi^2}$, вектор полного ускорения $\bar{a}$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\bar{a}_\tau$ и $\bar{a}_n$.

Задача 1.14. Движение точки задано координатным способом $x = tgt; y = \cos^2 t$ $(0 \le t \le \pi/2)$. Определить траекторию точки, положение точки на траектории, величину вектора скорости и вектора полного ускорения в момент времени $t_0 = 0$. **Ответ: 1.** Траектория точки – «локон» Марии Аньези $y = 1/(1 + x^2)(м)$, где $0 \le x < \infty$. **2.** $x(0) = 0(м), y(0) = 1(м)$; $v = 1(м/с)$; $a = 2(м/с^2)$.

Задача 1.15. По заданному закону изменения алгебраической скорости $v(t)$ вычислить величину касательного ускорения точки $a_\tau(t_1)$, определить закон движения точки естественным способом $s(t)$, вычислить координату точки $s(t_1)$ и путь $L(t_1)$, пройденный точкой к моменту времени $t = t_1$ для следующих вариантов: 1) $v = 3(м/с)$, $t_1 = 2c$; 2) $v(t) = (1 - t)(м/с)$, $t_1 = 2c$; 3) $v(t) = 2\pi\cos\pi t(м/с)$, $t_1 = 1c$; 4)

$v(t)=4t^3(м/с)$, $t_1=4c.$ **Ответ: 1)** $a_\tau(2)=0м/с,$ $s(t)=3t(м),$ $s(2)=6(м),$ $L(2)=6(м)$; **2)** $a_\tau(2)=-1(м/с^2)$, $s(t)=(t-0{,}5t^2)(м),$ $s(2)=0(м),$ $L(2)=1(м);$ **3)** $a_\tau(1)=0(м/с^2),$ $s(t)=2\sin\pi t(м),$ $s(1)=0(м),$ $L(1)=4(м);$ **4)** $a_\tau=192(м/с^2)$, $s(t)=t^4(м)$, $s(4)=1086(м)$, $L(4)=1086(м)$.

Задача 1.16. Уравнения движения точки заданы координатным способом. Найти и изобразить на рисунке траекторию точки, представить движение точки по траектории естественным способом $s=s(t)$. Начало криволинейных координат, где $s=0$, расположить в начальном положении точки, где $x=0, y=0$, а криволинейную ось O_1s направить в сторону начального движения точки (по направлению вектора скорости $\bar{v}(t_1)$, где t_1 – бесконечно малый момент времени в окрестности момента времени $t=0$). **1)** $x=-3t+4(м), y=4t+5(м);$ **2)** $x=2{,}5t^2+8(м), y=6t^2(м);$ **3)** $x=e^t\cos t(м),\ y=e^t\sin t(м)$; **4)** $x(t)=3b\cos^2 kt(м), y(t)=4b\sin^2 kt(м)$.

Ответ: 1) траектория точки прямая $y=-4x/3+31/3,$ $x(0)=4(м), y(0)=5(м),$ $s(t)=5t(м)$; **2)**траектория точки прямая $x=2{,}5y/6+8,$ $x(0)=8(м), y(0)=0(м),$ $s(t)=6{,}5t^2(м)$; **3)** траектория точки логарифмическая спираль $x^2+y^2=e^{2t}$, $x(0)=1(м), y(0)=0(м),$ $s(t)=\sqrt{2}(e^t-1)$; **4)** траектория точки прямая $y=-4x/3+4b$, $x(0)=3b(м), y(0)=0(м),$ $s(t)=5bk\sin 2kt$.

Задача 1.17. Уравнение движения снаряда – свободной точки в отсутствие сил сопротивления координатным способом задано в виде: $x=116{,}18t(м)$, $y=506{,}86t-4{,}905t^2(м),$ t $(сек)$. **Найти: 1)** траекторию точки; **2)** время полета $t_2=T$ и дальность полета $x(t_2)=L$ снаряда; **3)** время движения снаряда до высшей точки траектории t_1 и максимальную высоту траектории H; **4)** закон изменения проекций векторов скорости и ускорения точки; **5)** модули векторов полной скорости и полного ускорения точки в начальный момент времени и в момент времени падения снаряда на Землю; **6)** величину касательного ускорения a_τ в начальной точке траектории, в наивысшей точке траектории и в точке падения снаряда на Землю; **7)** радиусы кривизны траектории ρ_0,ρ_1,ρ_2 в начальной точке траектории, в наивысшей точке траектории и в точке падения снаряда на Землю. **Ответ:** 1) $y=-b(x-2a/b)^2+a^2/4b$, $a=4{,}362713, b=363393\cdot10^{-9}(1/м)$; **2)** $T=103{,}335(c)$, $L=12005{,}5(м)$; **3)** $t_1=T/2=51{,}668(c)$, $H=13094(м)$; **4)** $v_x=116{,}18(м/с),$ $v_y=506{,}86-9{,}81t(м/с),$ $a_x=0(м/с^2),$ $a_y=-9{,}81(м/с^2)$; **5)** $v_0=v(0)=520(м/с), a_0=a(0)=9{,}81(м/с^2),$ $v_2=v(T)=520(м/с)$, $a_2=a(T)=9{,}81(м/с^2)$; **6)** $a_\tau(0)=9{,}56(м/с^2)$, $a_\tau(t_1)=0(м/с^2)$, $a_\tau(t_2)=9{,}56(м/с^2)$; **7)** $\rho_0=\rho_2=122909{,}1(м)\approx122{,}91(км)$, $\rho_1=1375{,}9(м)=1{,}38(км)$.

Задача 1.18. Тормозной путь современного исправного легкового автомобиля, движущегося на скорости *100 км/час,* на ровном сухом участке пути не должен превышать *37 метров*. Определить время торможения и ускорение (замедление)

автомобиля, предполагая, что при торможении движение можно считать прямолинейным равнопеременным, а автомобиль можно принимать за точку.

Ответ: $t = 2{,}664c$, $a = 10{,}427м/с^2$.

Задача 1.19. Молот механического копра для забивки свай поднимается на высоту 3м и свободно падает, ударяя по свае. За сколько секунд после удара он занимает свое верхнее положение, если по свае производится *12* ударов в минуту.

Ответ: *4,218с.*

Задача 1.20. Определить высоту здания, если известно, что оторвавшийся от крыши кусочек льда достигает Земли за *2,5с.* ? **Ответ:** *H=30,656м.*

Задача 1.21. Какой путь проходит свободно падающая точка в первую, вторую и пятую секунды своего падения. Ускорение свободного падения принять равным *9, 81м/с.* **Ответ:** *4,91м, 14,72м, 44,15м.*

Задача 1.22. Нарезная часть ствола автомата Калашникова имеет длину *0,415м.* Скорость вылета пули из ствола равна *715м/с.* Считая, что пулю можно принять за точку и что пуля в стволе движется равноускоренно, определить ее ускорение при движении в стволе автомата. **Ответ:** *615933,73м/с (или 615, 934км/час).*

Задача 1.23. Кран поднимает железобетонную балку, которая при подъеме остается параллельной самой себе. Первые *3* секунды балка движется с ускорением *0,6м/с,* следующие 10с. балка движется равномерно, а последние *2с*. балка движется равнозамедленно с ускорением *-0,9 м/с.* Определить высоту подъема балки принимая ее за точку. **Ответ:** *H=22,5 м.*

Вопросы для самоконтроля к главе 1

1. Что изучает кинематика точки?

2. Что называется движением? Что называется телом отсчета и системой отсчета?

3.Что называется моментом времени, промежутком времени, начальным моментом времени?

4. Опишите понятие «кинематическая точка».

5. Опишите три способа задания движения.

6. Векторный способ задания движения. Вектор средней скорости точки, вектор скорости точки, вектор среднего ускорения точки, вектор ускорения точки.

7. Радиус-вектор точки изменяется: а) только по модулю, б) только по направлению. Как при этом движется точка?

8. Движение точки задано координатным способом $x = 2t(м), y = t + 1(м)$. Определить и изобразить на рисунке траекторию точки и положение точки на траектории в момент времени $t_1 = 2c$.

9. Движение точки задано координатным способом $x = t^2(м), y = 2t^2 + 1(м)$. В момент времени $t_1 = 2c$ вычислить проекции вектора скорости и вектора ускорения точки.

10. Как вычисляется модуль вектора скорости точки и модуль вектора ускорения точки, если известны проекции указанных векторов $v_x, v_y, v_z, a_x, a_y, a_z$?

11. Вычислить модуль вектора скорости и модуль вектора ускорения точки в момент времени $t = 1c$, если $v_x = 3t(м), v_y = \sin(\pi t/2)(м), v_z = \exp(t)(м)$.

11. Как движется точка, если в любой момент времени $v_x \neq v_y \neq 0, v_z = 0$?

12. Опишите переход от координатного способа задания движения к векторному способу задания движения и наоборот.

13. Как направлены оси естественного трехгранника $M\tau, Mn, Mb$, построенные в точке M траектории?

14. Опишите естественный способ задания движения. Чему равны проекции вектора скорости v_τ, v_n, v_b на оси естественного трехгранника?

15. Как при естественном способе задания движения называется проекция вектора скорости v_τ на касательную $M\tau$ к траектории в точке M ?

16. Как вычисляются проекции вектора ускорения a_τ, a_n на оси естественного трехгранника?

17. Какое движение точки называется ускоренным, а какое движение – замедленным?

18. Как движется точка, если $a_\tau v > 0$, $a_\tau v < 0$?

19. Как перейти от координатного способа задания движения к естественному способу задания движения?

20. Какое движение называется прямолинейным?

21. Пусть движение точки задано координатным способом: $x = x(t), y = y(t)$. По какой формуле можно найти величину касательного ускорения a_τ ?

22.Движение точки задано координатным способом: $x = t(м), y = t^2(м)$. Определить траекторию точки и найти ее радиус кривизны $\rho(м)$ в точке $x = y = 0$.

24. Дайте понятия равномерного и равнопеременного движений. Запишите основные уравнения этих движений.

25. По какой траектории движется точка, если $a_\tau = 0, a_n = const$?

ГЛАВА 2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В первой главе изучили кинематику точки – то есть движение объекта, который не имеет ни формы, ни размеров и не был связан с телами конечных размеров. Переходим к кинематике твердого тела, то есть к изучению различных видов движения твердых тел. Изучив движение тела, всегда будем переходить к определению кинематических характеристик движения отдельных точек этого тела.

§ 2.1. Поступательное движение твердого тела

2.1. Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая AB, мысленно проведенная в этом теле, движется, оставаясь параллельной своему начальному направлению (рис.2.1).

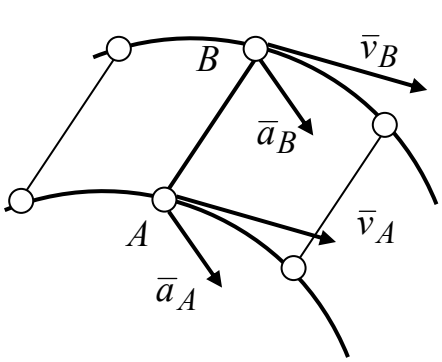


Рис. 2.1

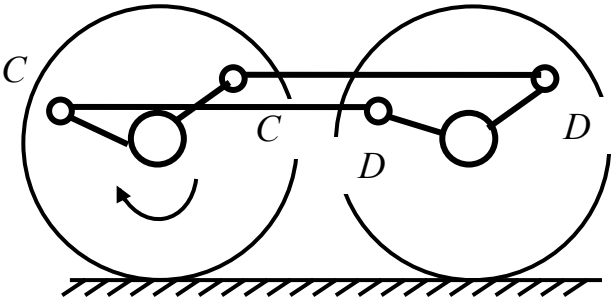


Рис. 2.2

Классическим примером тела, совершающего поступательное движение, является спарник паровоза. На фото 1 спарники показаны стрелками. Они параллельны рельсам. На рис. 2.2 спарник схематично изображен стержнем CD. Спарник блокирует колеса тепловоза и при вращении колес остается параллельным самому себе, то есть движется поступательно. Точки спарника C и D, равно как и все другие точки спарника, описывают одинаковые по форме траектории в виде циклоиды.

Еще одним примером поступательного движения является движение кабин «колес обозрения». Принципиальная схема движения всех, даже самых знаменитых колес обозрения мира, одинакова. На фото 2 показано детское колесо обозрения, которое приводится в движение людьми. На фотографии четко видна параллельность всех сидений в разных их положениях. Само колесо вращается, а сидения для детей движутся поступательно.

2.2. Основная теорема поступательного движения. При поступательном движении все точки тела описывают

тождественные параллельные траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые векторы скорости и ускорения $\bar{v}_A = \bar{v}_B$, $\bar{a}_A = \bar{a}_B$. A *и* B – две произвольные точки тела (рис.2.3).

Фото 1

Фото 2

Примечание. Две кривые называются **тождественными**, если они совпадают при наложении. Совпадающие точки тождественных кривых называются

соответствующими. Две тождественные кривые называются **параллельными**, **если касательные** к ним, проведенные в соответствующих точках, **параллельны**.

Доказательство. Рассмотрим поступательное движение твердого тела в некоторой неподвижной системе отсчета $Oxyz$ (рис.2.3). На теле выберем две произвольные точки A и B. Эти точки вместе с телом совершают движение. Законы движения этих точек зададим векторным способом: $\bar{r}_A = \bar{r}_A(t), \bar{r}_B = \bar{r}_B(t)$. В точке A с телом жестко свяжем подвижную систему координат $Ax_1y_1z_1$, оси которой параллельны осям неподвижной системы координат $Oxyz$. Система координат $Ax_1y_1z_1$ вместе с телом будет совершать поступательное движение. Положение точки B в подвижной системе координат $Ax_1y_1z_1$ определяется радиус - вектором $\overline{AB}$. Вектор $\overline{AB}$ – постоянный вектор, так как длина его постоянна в силу принятой гипотезы об абсолютно твердом теле, а направление его в пространстве не изменяется в силу поступательности движения, совершаемого телом. Тогда, применяя правило треугольника для сложения векторов, получаем (см. рис. 2.3а):

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}. \qquad (*)$$

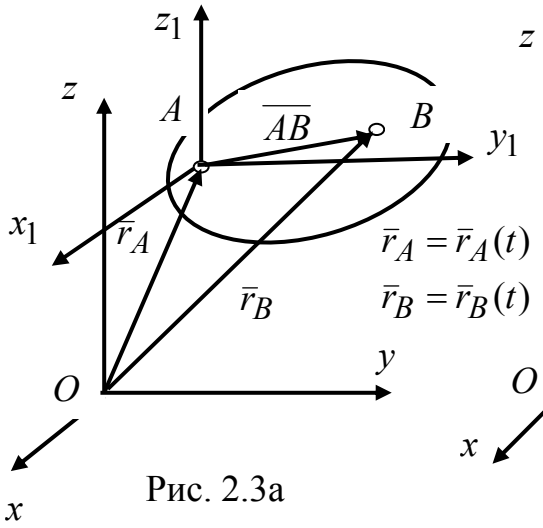


Рис. 2.3а

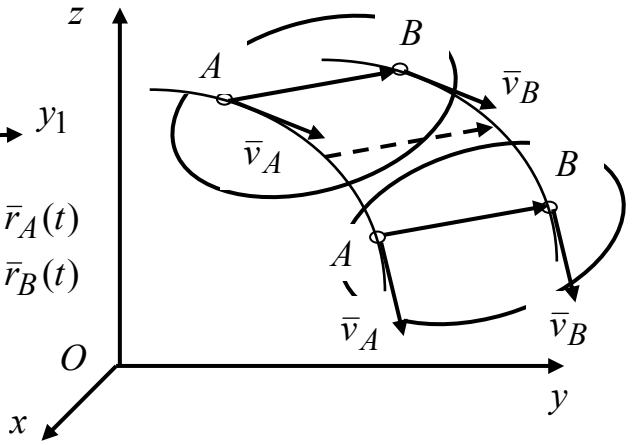


Рис. 2.3б

Продифференцируем по времени равенство (*). С учетом $d(\overline{AB})/dt = 0$ (так как $\overline{AB} = \overline{const}$), получаем:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt}.$$

Последнее равенство с учетом (1.13) можем записать:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A. \qquad (**)$$

Другими словами, векторы скоростей двух произвольных точек тела, совершающего поступательное движение, равны. Следовательно, векторы скоростей всех точек тела равны. Чтобы доказать равенство векторов

ускорений точек, продифференцируем еще раз равенство (**). Имеем:

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt}.$$

С учетом формулы (1.15) получим:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A.$$

Следовательно, в силу произвольности выбора точек A и B, векторы полных ускорений всех точек тела тоже равны.

Тождественность траекторий точек A и B тела следует из того, что эти траектории, при необходимости, можно получить одну из другой параллельным смещением одной из них на величину $\left|\overline{AB}\right|$. Следовательно, в силу произвольности выбора точек A и B, можно утверждать, что и траектории всех точек тела тождественны и параллельны. Теорема доказана.

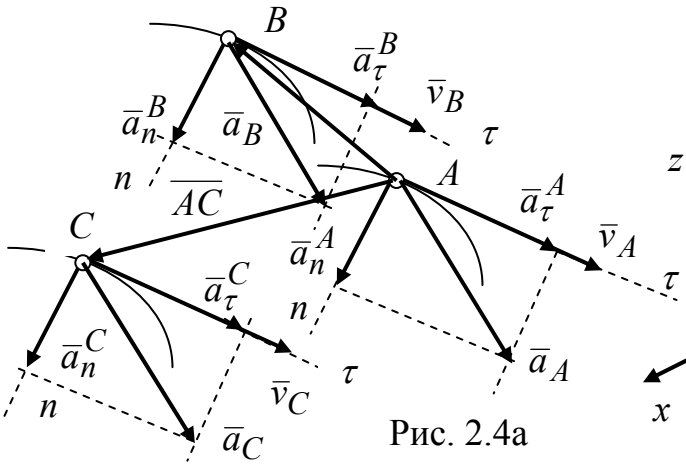


Рис. 2.4а

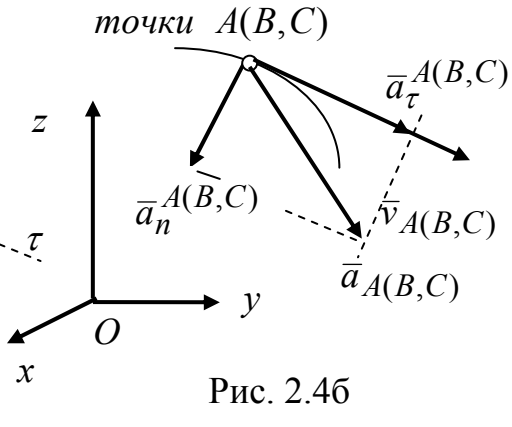


Рис. 2.4б

Рисунок 2.4 иллюстрирует качественную картину расположения векторов скоростей и ускорений трех точек твердого тела (само тело не показано – оно может иметь произвольную форму и размеры), совершающего **в некоторый момент времени** поступательное движение. Из теоремы, в частности, следует, что одинаковыми по величине и параллельными оказываются и векторы касательных $\bar{a}_\tau$ и нормальных $\bar{a}_n$ ускорений различных точек тела, так как вектор полного ускорения $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$, а траектории точек тождественны и параллельны.

Уравнения поступательного движения твердого тела

Из основной теоремы поступательного движения следует, что положение тела в пространстве в любой момент времени при поступательном движении можно определить, зная закон движения одной

его точки. Например, точки A (см. рис.2.4). Тогда при координатном способе задания движения точки (§ 1.4.) эти уравнения будут иметь вид:

$$\boxed{x_A = x_A(t),\ \ y_A = y_A(t),\ \ z_A = z_A(t).} \qquad (2.1)$$

Если уравнения (2.1) известны, то уравнение траектории точки A в канонической форме определится исключением параметра времени в уравнениях (2.1). Чтобы получить траекторию точки C (рис. 2.4а), надо будет просто траекторию точки A параллельно самой себе переместить в направлении вектора $\overline{AC}$.

Проекции векторов скорости и ускорения точки A, следовательно, и всех других точек тела на оси неподвижной системы координат, вычисляются по формулам (1.33), (1.38) .

$$v_x = \dot{x}_A,\ \ v_y = \dot{y}_A,\ \ v_z = \dot{z}_A, \qquad a_x = \ddot{x}_A,\ \ a_y = \ddot{y}_A,\ \ a_z = \ddot{z}_A,$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ , \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Если известна траектория какой-либо точки тела, совершающего поступательное движение, то движение этой точки A можно задать и естественным способом:

$$\boxed{s_A = s_A(t)\,.} \qquad (2.2)$$

Величины алгебраической скорости, касательного и нормального ускорений точек тела находятся теперь по формулам (1.53), (1.55).

2.3. Уравнения (2.1), (2.2) называются уравнениями поступательного движения твердого тела.

Пример 2.1. Кривошипный механизм $OABD$ состоит из двух вращающихся параллельных невесомых стержней (кривошипов) OA и DB, соединенных с неподвижным основанием с помощью цилиндрических шарниров в точках O и D. В точках A и B кривошипы с помощью подвижных цилиндрических шарниров соединены с невесомым стержнем AB, на котором с помощью цилиндрических шарниров установлены стержни AC и BC. Треугольник ABC – прямоугольный, причем $AC = BC = 0{,}9м$. Длины $OA = DB = 1{,}5м$. Вектор скорости точки A образует с кривошипом OA угол в 90^0 и равен по величине $v_A = 3м/с$. В показанном на рисунке 1 к примеру 2.1 положении механизма определить: 1) Величину и направление вектора скорости $\overline{v}_C$ точки C. 2) Угол α, который образует вектор $\overline{v}_C$ со стороной треугольника AC. 3) Траекторию точки C. 4) Радиус кривизны траектории точки C. 5) Величину и направление вектора нормального ускорения $\overline{a}_C^n$.

Решение. На рис. 1 дано условие задачи. Рис.2 сопровождает решение задачи. Заметим, что в процессе движения всего механизма параллелограмм $OABD$ остается

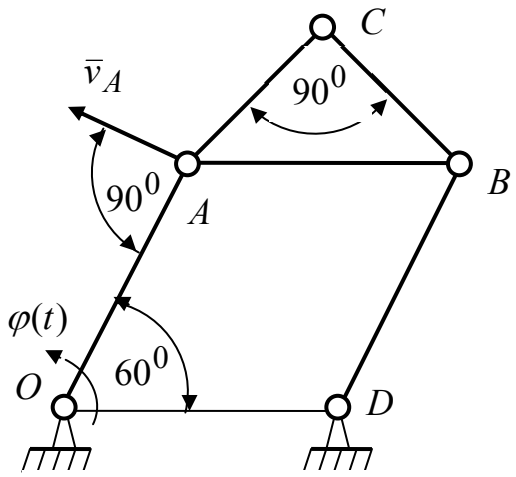


Рис. 1 к примеру 2.1

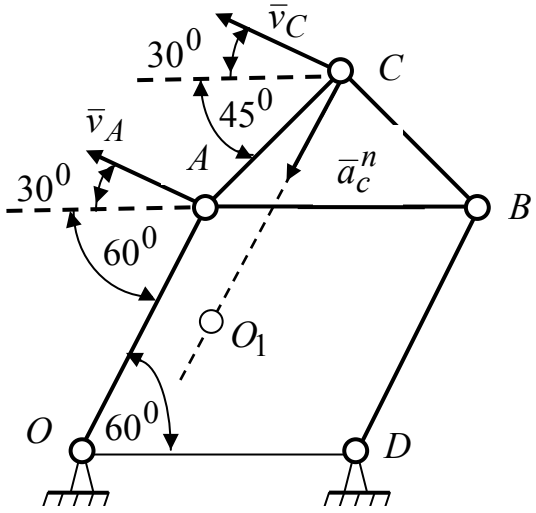


Рис. 2 к примеру 2.1

параллелограммом. Следовательно, сторона AB остается параллельной стороне OD. Но стержень AB одновременно принадлежит и параллелограмму $OABD$, и треугольнику ABC. Тогда при движении механизма сторона AB треугольника все время будет оставаться параллельной самой себе, а жесткая фигура треугольника ABC движется поступательно. По основной теореме поступательного движения утверждаем, что $\bar{v}_C = \bar{v}_A$. Эти векторы параллельны и модули их равны, что показано на рис. 2. $v_c = 3м/с$. Чтобы определить угол α между вектором $\bar{v}_C$ и стороной треугольника AC, проведем через точки A и C две штрихпунктирные прямые, параллельные прямой OD (или AB). С учетом того, что $\angle CAB = \angle CBA = 45^0$, найдем у узлов A и C углы, показанные на рис.2. Между вектором $\bar{v}_C$ и стороной AC образуется угол $\alpha = 30^0 + 45^0 = 75^0$. Траектории точек A и C по основной теореме поступательного движения тоже одинаковы. Из рисунков видно, что точка A движется по окружности с центром в точке O, так как $OA = const$ в любой момент времени. Радиус кривизны окружности $\rho = R = OA = 1{,}5м$. Точка C движется по окружности того же радиуса. Где центр этой окружности O_1. Известно, что вектор скорости любой точки направлен по касательной к траектории в каждый момент времени. Радиус кривизны кривой в точке перпендикулярен касательной, проведенной в этой же точке. То есть перпендикулярен вектору скорости, если он известен. В этой задаче известен вектор $\bar{v}_C$. Восстановим в точке C перпендикуляр к вектору $\bar{v}_C$ и, отложив на нем отрезок $CO_1 = OA = 1{,}5м$, находим центр окружности O_1, по которой движется точка C. Вектор нормального ускорения $\bar{a}_c^n$ направлен по радиусу кривизны траектории, то есть по линии CO_1 и равен по величине $a_c^n = v_c^2 / \rho = v_c^2 / CO_1 = 9/1{,}5 = 6м/с^2$.

§ 2.2. Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси

Вращательное движение (вращение) вообще – одно из самых часто встречающихся движений твердых тел. Оно встречается и в «чистом» виде, когда ось

вращения тела неподвижна, и может быть одной из составляющих более сложного движения. Вращаются, например, роторы турбин электростанций, коленчатый вал двигателя, карданный вал и шестерни коробки передач автомобиля, лопасти вентилятора, ротор генератора, вращается пуля в полете. При работе вращаются башенные краны, отдельные части экскаваторов, отдельные части стационарных бетономешалок и «миксеров», развозящих готовый бетон, кузов самосвала, многие части ручного электроинструмента, шпиндели металлообрабатывающих станков и так далее и тому подобное.

2.4. Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси будем называть такое его движение, при котором хотя бы две точки тела остаются в покое (рис.2.5).

2.5. Прямая, проходящая через две неподвижные точки вращающегося тела, называется осью вращения.

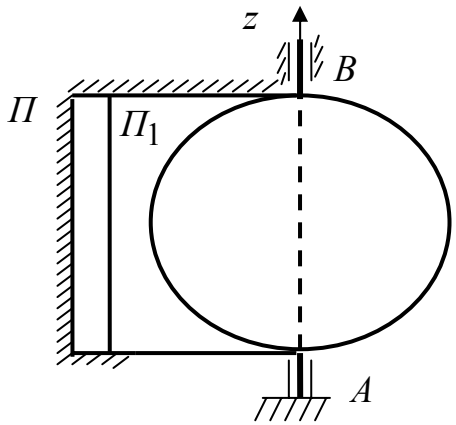


Рис.2.5а

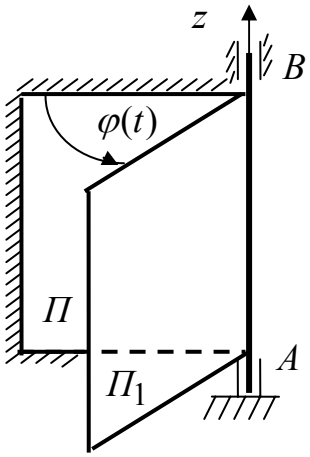


Рис.2.5б

Из этих определений следует, что прямая линия, являющаяся осью вращения, может и не содержать точек тела.

Например, двери крепятся обычно с помощью двух подпятников (в быту они часто называются петлями). Осью вращения является прямая, которая проходит и через точки подпятников, и в пустоте между подпятниками.

Ось полого цилиндра вообще не содержит материальных точек.

На фотографиях 3 – 4 показано вращение крана относительно неподвижной вертикальной оси, помеченной стрелкой. Неподвижность оси видна по положению оси относительно неподвижного тела – строящегося здания. На фото 2 показано вращающееся колесо обозрения. Колесо вращается относительно неподвижной горизонтальной оси. «Кабинки», где сидят дети, движутся поступательно.

Фото 3

.

Фото 4

Уравнение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

Пусть в начальный момент времени тело, форма и размеры которого известны, было в покое. Ось тела закрепим с помощью подпятника в точке A и подшипника в точке B (рис. 2.5а). Через ось вращения мысленно проведем две плоскости $П$ и $П_1$, совпадающие в начальный момент времени. Одну из плоскостей $П$ жестко закрепим (например, в

положении, совпадающем с плоскостью рисунка), а вторую плоскость $П_1$ жестко соединим с телом. Тогда плоскость $П_1$ будет вращаться вместе с телом (на рис. 2.5б тело уже не показано), образуя некоторый угол с плоскостью $П$. Положение плоскости $П_1$ можно определить одной функцией изменения угла.

$$\boxed{\varphi = \varphi(t).} \qquad (2.3)$$

2.6. Уравнение (2.3) называется уравнением вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

2.7. Угол $\varphi = \varphi(t)$ считается положительным, если при наблюдении с положительного конца оси Az вращение тела наблюдается происходящим против часовой стрелки. В противном случае угол считается отрицательным.

Как видим, правило знаков для функции $\varphi = \varphi(t)$ полностью совпадает с правилом знаков для моментов силы относительно оси, которые рассматривались в статике. Угол $\varphi = \varphi(t)$ в уравнении (2.3) измеряется в радианах (см. приложение), то есть в безразмерных величинах. Направление вращения тела принято условно показывать дуговой стрелкой (см. рис.2.5б).

2.8. Кинематическими характеристиками вращающегося тела являются угол поворота $\varphi = \varphi(t)$, угловая скорость $\omega = \omega(t)$ и угловое ускорение $\varepsilon = \varepsilon(t)$.

Средняя угловая скорость. По аналогии со средней (линейной) скоростью $\bar{v}_{ср}$, вычисляемой по (1.12), вводится понятие средней угловой скорости $\omega_{ср}$. Пусть за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$. Тогда

$$\boxed{\omega_{ср} = \Delta\varphi / \Delta t.} \qquad (2.4)$$

2.9. Средней угловой скоростью тела называется алгебраическая величина, равная отношению приращения угла поворота тела $\Delta\varphi$ к приращению времени Δt, за которое оно произошло. Если тело вращается против часовой стрелки, $\omega_{ср} > 0$, если тело вращается по часовой стрелке, $\omega_{ср} < 0$.

Пример 2.2. Автомобиль, двигаясь прямолинейно, начал торможение и остановился через 4с, пройдя путь $L = 25м$. Определить среднюю угловую скорость колес автомобиля за время торможения, если их радиус $R = 0{,}75м$.

Решение. Полагая $t=0, \varphi=0$ в момент начала торможения, по (2.4) можно записать: $\omega_{cp}=\varphi_1/t_1=2\pi n/t_1=\frac{2\pi}{t_1}\cdot\frac{L}{2\pi R}=\frac{L}{t_1 R}(c^{-1})$.

Здесь φ_1 – полный угол поворота колес на пути торможения в $L=25м$, 2π – угол поворота колеса при одном его обороте, n – число оборотов колес на пути торможения, $t_1=4c$ – время торможения. Подставляя исходные данные, получим $\omega_{cp}=8{,}33(c^{-1})$. **Ответ:** $\omega_{cp}=8{,}33(c^{-1})$.

Угловая скорость. Переходя к пределу в формуле (2.4) при $\Delta t\to 0$ по аналогии с формулами для линейных скоростей точки (1.13), (1.33), (1.53), которые обсуждались в первой главе, можно записать:

$$\boxed{\omega=\frac{d\varphi}{dt}.} \qquad (2.5)$$

2.10. Угловой скоростью тела ω называется алгебраическая величина, равная первой производной по времени от функции угла поворота тела $\varphi(t)$.

В основных единицах системы СИ угловые скорости ω_{cp} или ω вычисляются в *рад/сек* (пишут еще так: *рад/с* или c^{-1}). Угловая скорость – величина алгебраическая, то есть она может быть положительной, отрицательной и равной нулю. Зная правило знаков для функции углов поворота $\varphi=\varphi(t)$, получаем следующее правило знаков для функции угловой скорости ω.

2.11. Если тело вращается против часовой стрелки, угловая скорость $\omega>0$, если тело вращается по часовой стрелке, $\omega<0$.

Направление угловой скорости ω принято условно показывать дуговой стрелкой (рис. к примерам 2.3, 2.4). Как и в случае с вектором линейной скорости точки, который всегда направлен в сторону движения точки (глава 1), направление дуговой стрелки ω всегда совпадает с направлением вращения тела.

Пример 2.3. Закон вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси задан функцией $\varphi=2\pi\cdot t^2\,(рад)$. Определить угол поворота и угловую скорость тела в момент времени $t_1=2c$.

Решение. При $t=0\,c$ имеем $\varphi=0$ *(рад)*. Вычисляем угол поворота тела за 2с $\varphi(2)=4\cdot 2\pi=8\pi\,(рад)$. Если учесть, что один полный оборот тела соответствует изменению угла на $2\pi=6{,}28\,(рад)$, можно заключить, что тело за 2с повернулось вокруг оси вращения против направления движения часовой стрелки четыре раза. Угловая скорость $\omega=\dot{\varphi}=4\pi t$. В момент времени $t_1=2c$. имеем $\omega(2)=8\pi(рад/с)=8\pi(c^{-1})>0$. Дуговые стрелки для φ и ω должны быть направлены по направлению вращения тел (в этой задаче в положительном направлении), как показано на рис. к примеру 2.3.

Пример 2.4. Закон вращательного движения твердого тела в форме прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ относительно неподвижной оси OO_1 задан функцией $\varphi = -\pi \cdot t^2/9\,(рад)$. В начальный момент времени $t = 0$ положение параллелепипеда показано на рис. 1 к примеру 2.4 (фронтальная грань $ABCD$ параллельна плоскости рисунка). Определить угол поворота и угловую скорость тела в момент времени $t_1 = 3c$. За какое время тело сделает один полный оборот вокруг своей оси?

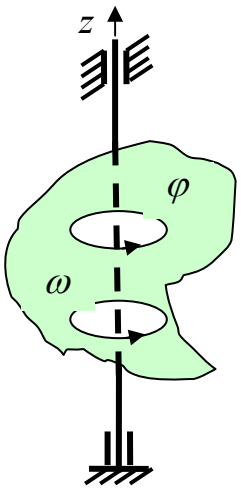


Рис. к примеру 2.3

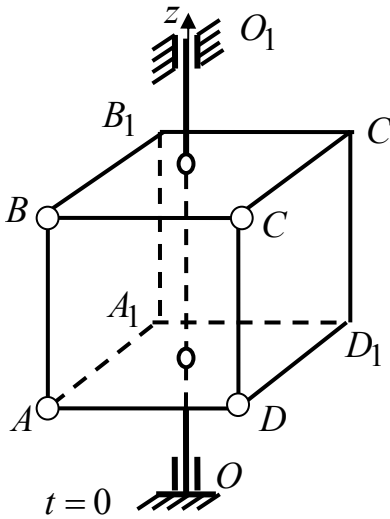


Рис. 1 к примеру 2.4

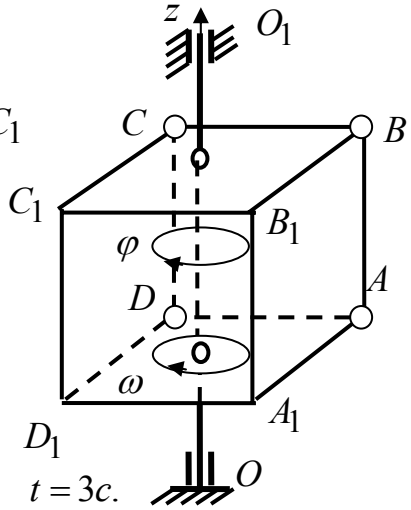


Рис.2 к примеру 2. 4

Решение. Подставляя значение $t = 0$ в закон вращения тела, получим $\varphi = -\pi \cdot 0/9 = 0$. Поэтому угол будем отсчитывать от плоскости, в которой в начальный момент времени лежит грань $ABCD$. Кроме того, замечаем, что угол $\varphi \le 0$ при любых значениях t. Следовательно, тело вращается по часовой стрелке, как показано на рис.2 к примеру 2.4. При $t = t_1 = 3c$ тело повернется на отрицательный угол $\varphi = -\pi \cdot 3^2/9 = -\pi(рад)$. То есть тело сделало пол-оборота по часовой стрелке. К этому моменту времени передняя и задняя грани параллелепипеда поменяются местами. Параллелепипед займет положение, показанное на рис. 2 к примеру. Угловая скорость вращения параллелепипеда определяется формулой (2.5). В нашем случае $\omega = \dot{\varphi} = -2\pi \cdot t/9\,(рад/с)$. В момент времени $t = t_1 = 3c$ получим $\omega = \dot{\varphi} = -2\pi \cdot 3/9 = -2\pi/3\,(рад/с)$. Направление ω совпадает с направлением «угловой координаты» φ, что показано на рис. 2 к примеру. Интересно отметить, что для того чтобы сделать еще пол-оборота, телу потребуется времени меньше трех секунд. Это видно из того, что модуль угловой скорости тела все время растет пропорционально времени $|\omega| = |\dot{\varphi}| = 2\pi \cdot t/9\,(рад/с)$. С другой стороны, путем непосредственных вычислений найдем время t_2 одного полного оборота: $\varphi = -\pi \cdot t_2^2/9 = -2\pi$. Отсюда время одного полного оборота $t_2 = \sqrt{18} = 4{,}24c$. Следовательно, вторые пол -оборота произойдут за промежуток времени $\Delta t = 4{,}24 - 3 = 1{,}24\,(c)$.

Угловое ускорение. По аналогии с формулами для линейных ускорений точки (1.15), (1.38), (1.55), которые обсуждались в первой главе, можно записать выражение для среднего углового ускорения ($\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$):

$$\boxed{\varepsilon_{ср} = \Delta\omega / \Delta t.} \qquad (2.6)$$

2.12.Средним угловым ускорением тела называется алгебраическая величина, равная отношению приращения угловой скорости к приращению времени Δt, за которое оно произошло.

Переходя к пределу в (2.6) при $\Delta t \to 0$, получим

$$\boxed{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.} \qquad \textit{или} \qquad \boxed{\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.} \qquad (2.7)$$

2.13.Угловым ускорением тела, вращающегося относительно неподвижной оси, называется алгебраическая величина, равная первой производной по времени от функции угловой скорости тела или второй производной от функции угла поворота.

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости с течением времени. В основных единицах системы СИ угловое ускорение вычисляется в $рад/сек^2$ (пишут еще $рад/с^2$ или $с^{-2}$). Угловое ускорение – величина алгебраическая, то есть она может быть положительной, отрицательной и равной нулю. Угловое ускорение тела тоже принято изображать дуговой стрелкой, приписывая ей определенное направление.

2.14. Если знаки угловой скорости ω и углового ускорения ε совпадают ($\omega \cdot \varepsilon > 0$), то дуговые стрелки, изображающие ω **и** ***ε*****, направлены в одну сторону.** ***Если знаки ω*** **и** ***ε*** **не совпадают ($\omega \cdot \varepsilon < 0$),** ***то дуговые стрелки, изображающие ω*** **и** ***ε*****, направлены в разные стороны.**

§ 2.3. Законы равномерного и равнопеременного вращений

Уравнение вращательного движения в общем виде записано в форме (2.3). В этом параграфе будут получены явные выражения для функции $\varphi(t)$ для описания очень часто встречающихся на практике вращательных движений.

Равномерное вращение

2.15. Вращение тела на промежутке времени $\Delta t = t_2 - t_1$ называется равномерным, если угловая скорость тела в этом промежутке времени постоянна ($\omega = const$).

Из (2.5) следует: $d\varphi = \omega dt$. Проинтегрируем это равенство при ω = *const.* Получим:

$$\int d\varphi = \int \omega \cdot dt \,. \qquad \text{Отсюда} \qquad \varphi = \omega \cdot \int dt = \omega \cdot t + C \,. \qquad (*)$$

Для определения постоянной интегрирования C примем начальные условия в виде: $t = 0,\ \varphi(0) = \varphi_0$, где φ_0 – заданный начальный угол поворота. Тогда уравнение $(*)$ при $t = 0$ принимает вид: $\varphi_0 = \omega \cdot 0 + C$. Находим $C = \varphi_0$. Видим, что механический смысл постоянной интегрирования C – это начальный угол, с которого началось вращение тела. Окончательно, из $(*)$ получаем:

$$\boxed{\varphi(t) = \omega \cdot t + \varphi_0 \,.} \qquad (2.8)$$

2.16. Уравнение (2.8) называется законом равномерного вращения твердого тела относительно неподвижной оси.

Если известными являются значения углов поворота тела в два момента времени, например, $\varphi(t_1) = \varphi_1$ и $\varphi(t_2) = \varphi_2$, то из (2.8) можно найти постоянную величину угловой скорости ω в промежутке времени $\Delta t = t_2 - t_1 \ \ (t_2 > t_1)$.

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta t} \,.} \qquad (2.9)$$

В технике для равномерно вращающегося тела угловая скорость задается количеством полных оборотов $n(об/мин)$, происходящим за одну минуту. Так как один полный оборот соответствует углу $\varphi = 2\pi$ *рад*, то угловая скорость ω, вычисленная в $рад/сек$, получиться после простых преобразований:

$$\omega = 2\pi n \left(\frac{рад}{мин} \right) = \frac{2\pi n}{60} \left(\frac{рад}{сек} \right) = \frac{\pi n}{30} \left(\frac{рад}{с} \right) .$$

Итак (если n в $об/мин$),

$$\boxed{\omega = \frac{\pi n}{30} (с^{-1}) \approx 0{,}1 n (с^{-1}) \ .} \qquad (2.10)$$

Пример 2.5. Стрела башенного крана при повороте из состояния покоя делает $n = 0{,}9$ об/мин (фото 3-4). Записать уравнение равномерного вращения стрелы и вычислить ее угловую скорость.

Решение. По формуле (2.10) получим:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}(c^{-1}) = \pi\frac{0{,}9}{30} = 0{,}03\pi(c^{-1}).$$

Отсчитывая углы поворота стрелы крана от ее положения в состоянии покоя (фото 3) и полагая тогда $\varphi_0 = 0$, по (2.8) получим закон вращения стрелы:

$$\varphi(t) = 0{,}03\pi \cdot t.$$

Равнопеременное вращение

2.17. Вращательное движение твердого тела на промежутке времени $\Delta t = t_2 - t_1$ называется равнопеременным, если угловое ускорение в этом промежутке времени постоянно($\varepsilon = const$).

Интегрируя один раз первую из формул (2.7) при $\varepsilon = const$ и начальных условиях $t = 0,\ \omega(0) = \omega_0 = const$, где ω_0 – начальная угловая скорость, получаем:

$$\boxed{\omega(t) = \varepsilon t + \omega_0.} \qquad (2.11)$$

2.18. Уравнение (2.11) называется законом изменения угловой скорости при равнопеременном вращательном движении твердого тела.

2.19. Из формулы (2.11) видим, что, если при вращательном движении на промежутке времени $\Delta t = t_2 - t_1$ модуль угловой скорости возрастает, то движение будет ускоренным ($\omega \cdot \varepsilon > 0$, ω и ε имеют одинаковые знаки), в противном случае – замедленным ($\omega \cdot \varepsilon < 0$, ω и ε имеют разные знаки).

Если известна угловая скорость тела в два момента времени, например, $\omega(t_1) = \omega_1$ и $\omega(t_2) = \omega_2$, то из (2.11) можно найти постоянное угловое ускорение ε в промежутке времени $\Delta t = t_2 - t_1$ $(t_2 > t_1)$.

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}.} \qquad (2.12)$$

Интегрируя уравнение (2.11), при начальных условиях $t = 0,\ \varphi(0) = \varphi_0 = const,\ \omega(0) = \omega_0 = const$, где φ_0, ω_0 – начальные угол поворота и угловая скорость соответственно, получаем:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}} \qquad (2.13)$$

2.20. Уравнение (2.13) называется законом равнопеременного вращения твердого тела.

Пример 2.6. Якорь электродвигателя вращается, делая $n = 3000$ *об/мин*. После выключения двигателя он остановился, сделав $m = 1710$ *оборотов*. Считая его вращение после выключения двигателя равнопеременным (равнозамедленным), определить модуль углового ускорения якоря.

Решение. Положим $t=0, \varphi_0=0$ в момент выключения двигателя. Тогда $\omega(0)=\omega_0=\pi n/30(c^{-1})=100\pi(c^{-1})$. Такую угловую скорость имел якорь в момент выключения двигателя. Пусть якорь остановился в момент времени $t=t_1$, следовательно, $\omega(t_1)=0$, $\varphi(t_1)=2\pi\cdot m$. Уравнения (2.11), (2.13) для момента времени $t=t_1$ при равнозамедленном движении принимают вид:

$$0=-\varepsilon t_1+\omega_0, \qquad 2\pi\cdot m=\omega_0 t_1-\frac{\varepsilon t_1^2}{2}.$$

Из первого уравнения имеем: $t_1=\omega_0/\varepsilon$. Подставим значение t_1 во второе уравнение, имеем: $2\pi\cdot m=\omega_0\frac{\omega_0}{\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\omega_0^2}{\varepsilon^2}=\frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}$.

Тогда:

$$\varepsilon=\frac{\omega_0^2}{4\pi n}=\frac{10000\cdot\pi^2}{4\pi\cdot 1710}=4{,}6(c^{-2}).$$

Ответ. Угловое ускорение $\varepsilon=4{,}6\,рад/сек^2$.

Пример 2.7. Первоначально покоившееся тело, вращаясь равноускоренно, приобретает за первые *15с* угловую скорость ω, равную *45 рад/с*. Сколько оборотов сделало тело за *15с*?

Решение. Пусть в начальном положении тела $\varphi_0=0\,рад.$ По условию задачи, начальная угловая скорость тела $\omega_0=0\,рад/с$. Так как тело вращается равноускоренно, то его угловое ускорение ε и угол поворота φ за первые $15c$, вычисленные по формулам (2.12) и (2.13), соответственно равны: $\varepsilon=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\frac{45}{15}=3\,рад/сек^2$ и $\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{\varepsilon\cdot t^2}{2}$. В нашем случае $\varphi=\frac{\varepsilon\cdot t^2}{2}=\frac{3\cdot 15^2}{2}=337{,}5\,рад$. Зная угол поворота φ, по формуле $\varphi=2\pi n$ определяется соответствующее ему число оборотов тела n: $n=\varphi/2\pi=337{,}5/6{,}28=53{,}74$ *оборота*. **Ответ.** Тело сделало $n=53{,}74$ *оборота*.

§ 2.4. Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Переходим к определению скоростей и ускорений отдельных точек вращающегося тела. Пусть тело вращается ускоренно в положительном направлении с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε. Простейшие наблюдения показывают, что все точки вращающегося тела движутся по окружностям, лежащим в параллельных плоскостях, перпендикулярных к оси вращения. Следовательно, вектор скорости $\bar{v}_M$ точки M перпендикулярен плоскости Π_1 и направлен по касательной к траектории (перпендикулярно к радиусу окружности) в сторону вращения тела (рис. 2.6а, 2.6б). Кроме того, прямая линия, проходящая через любую точку тела M параллельно оси вращения, движется поступательно.

Следовательно, все точки тела, лежащие на этой прямой и равноудаленные от оси вращения, движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями. Точка тела M и вид ее траектории сверху показаны на рис. 2.6б.

Определим величины скоростей и ускорений произвольной точки M вращающегося тела, отстоящей на расстоянии h от оси вращения. Так как

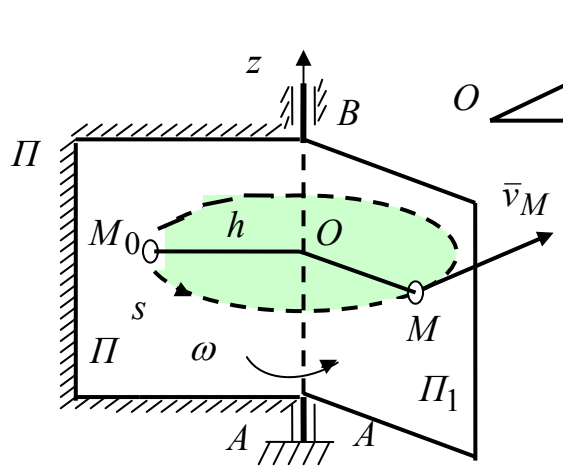


Рис.2.6а

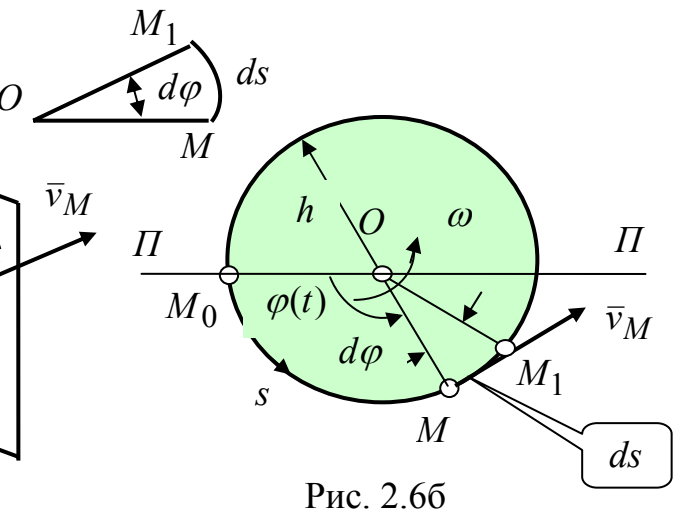


Рис. 2.6б

траектория точки известна, будем предполагать, что движение задано естественным способом $s = s(t)$. Начало криволинейной системы координат и положительное направление оси можно выбрать произвольно. В нашем случае начало принято на неподвижной плоскости $П$, а положительное направление оси $M_0 s$ совпадает с направлением движения точки (рис.2.6). Тогда, по известному соотношению $ds = h \cdot d\varphi$ с учетом формулы для алгебраического значения скорости (1.53) и с учетом (2.5), получаем:

$$v = ds/dt = h \cdot d\varphi/dt = h\frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot h.$$

Окончательно,

$$\boxed{v = \omega \cdot h} \qquad (2.14)$$

2.21. Алгебраическая величина скорости точки v равна произведению угловой скорости тела ω на расстояние h от точки тела до оси вращения.

2.22. Вектор скорости точки $\bar{v}$ вращающегося тела лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения и направлен перпендикулярно к радиусу траектории точки h по касательной к окружности в сторону вращения тела (рис. 2.6 а,б).

Из формулы (2.14) видно, что скорости точек линейно возрастают при удалении от оси вращения (рис. 2.8а).

Величины касательного a_τ и нормального a_n ускорений точек тела определим по формулам (1.55) с учетом формул (2.7), (2.14):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = h\frac{d\omega}{dt} = h \cdot \varepsilon,$$

Или

$$\boxed{a_\tau = \varepsilon \cdot h\,.} \qquad (2.15)$$

2.23. Алгебраическая величина касательного ускорения точки a_τ равна произведению углового ускорения ε тела на расстояние h от точки тела до оси вращения.

2.24. Вектор касательного ускорения точки $\bar{a}_\tau$ вращающегося тела лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения и направлен перпендикулярно к радиусу траектории точки h (по касательной к окружности) в направлении, соответствующем алгебраической величине углового ускорения ε (рис. 2.7б).

$$a_n = v^2/\rho = v^2/h = \omega^2 h^2/h = \omega^2 h\,,$$

$$\boxed{a_n = \omega^2 h\,.} \qquad (2.16)$$

2.25.Величина нормального ускорения точки a_n равна произведению квадрата угловой скорости вращающегося тела ω на расстояние h от точки тела до оси вращения.

2.26. Вектор нормального ускорения точки $\bar{a}_n$ вращающегося тела лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, и направлен по радиусу траектории точки h к оси вращения – центру кривизны траектории точки (рис. 2.7б).

На рис. 2.8а, 2.8б, 2.8в показаны законы изменения линейных скорости точки $\bar{v}$, касательного ускорения точки $\bar{a}_\tau$ и нормального ускорения точки $\bar{a}_n$ в зависимости от расстояния h, соответственно. Направления векторов соответствуют картине вращения, представленной на рис. 2.7.

Вектор полного ускорения $\bar{a}$ можем построить по известным векторам касательного $\bar{a}_\tau$ и нормального $\bar{a}_n$ ускорений (рис.2.7б), пользуясь правилом параллелограмма, который в рассматриваемом случае переходит в прямоугольник. Модуль вектора полного ускорения с учетом (2.15), (2.16) вычисляется по следующей формуле:

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\quad .} \qquad (2.17)$$

Тангенс угла отклонения вектора полного ускорения $\bar{a}$ от направления вектора нормального ускорения $\bar{a}_n$ вычисляется с учетом (1.57) по формуле:

$$\boxed{tg\,\mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}\ .} \qquad (2.18)$$

Отсюда видно, что $tg\mu > 0$, если $a_\tau > 0$. Другими словами, при $\mu > 0$ вектор полного ускорения точки тела, вращающегося относительно неподвижной оси, отклоняется от вектора $\bar{a}_n$ в направлении отсчет положительных углов вращения $\varphi(t)$.

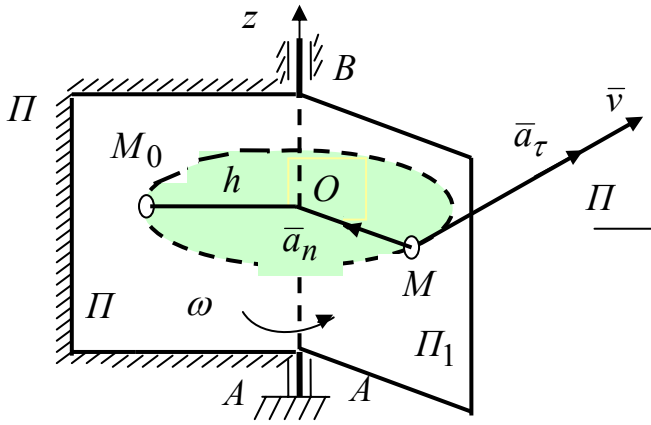


Рис.2.7а

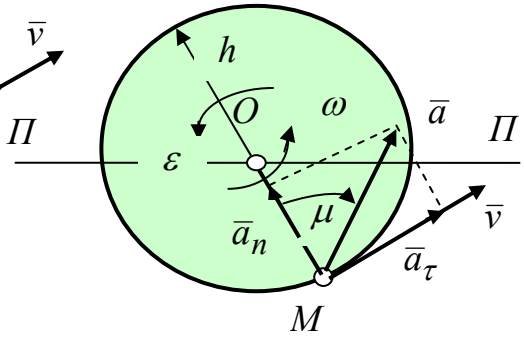


Рис. 2.7б

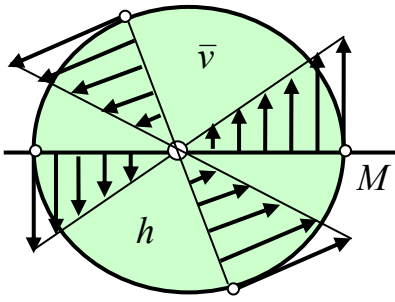


Рис. 2.8а

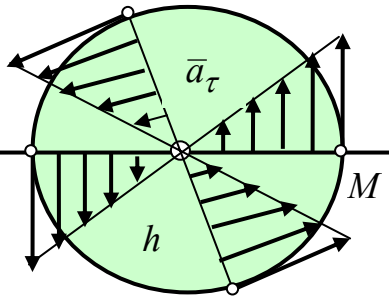


Рис. 2.8б

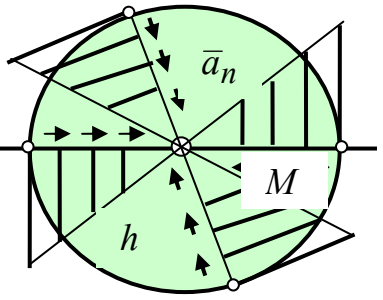


Рис. 2.8в

§ 2.5. Векторное представление угла поворота, угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела

Пусть твердое тело вращается относительно неподвижной оси Oz. Пусть $\bar{k}$ – единичный вектор этой оси, направленный в положительное направление оси. Введем три вектора скалярного аргумента по формулам:

$$\bar{\varphi}(t)=\varphi(t)\bar{k}\,,\qquad \bar{\omega}(t)=\omega(t)\bar{k}=\dot{\varphi}(t)\bar{k}\,,\qquad \bar{\varepsilon}(t)=\varepsilon(t)\bar{k}=\ddot{\varphi}(t)\bar{k}\,. \qquad (2.19)$$

Здесь под проекциями векторов на ось Oz, как это видно из формул (2.19), понимаются функции, заданные или вычисленные по (2.3), (2.5), (2.7). Кроме того, как видно из определения (2.19), имеют место дифференциальные зависимости:

$$\bar{\omega}(t)=d\bar{\varphi}/dt \qquad \text{и} \qquad \bar{\varepsilon}(t)=d\bar{\omega}/dt=d^2\bar{\varphi}/dt^2\,. \qquad (2.20)$$

2.27. Итак, за вектор угла поворота тела $\bar{\varphi}=\bar{\varphi}(t)$ принимается вектор, длина (модуль) которого в некотором масштабе равна модулю функции $\varphi(t)$, заданной по формуле (2.3), приложенный в любой точке оси вращения и направленный по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно, происходящим против часовой стрелки.

2.28. За вектор угловой скорости тела $\bar{\omega}$ принимается вектор, длина (модуль) которого в некотором масштабе равна модулю функции $\omega(t)$, вычисленной по формуле (2.5), приложенный в любой точке оси вращения и направленный по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно, происходящим против часовой стрелки.

Векторы $\bar{\varphi}$ и $\bar{\omega}$ определяют: 1) ось вращения, 2) направление вращения и величину углового перемещения (угла поворота), 3) числовое значение угловой скорости. При графическом изображении эти вектора изображаются в некоторых, возможно в разных, масштабах.

2.29. За вектор углового ускорения тела $\bar{\varepsilon}$ принимается вектор, длина (модуль) которого в некотором масштабе равен модулю функции $\varepsilon(t)$, вычисленной по формуле (2.7), приложенный в любой точке оси вращения и направленный по оси вращения.

2.30. Направления векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ совпадают при ускоренном вращении и не совпадают при замедленном. Другими словами, направление векторов $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\omega}$ совпадают, если модуль вектора угловой скорости растет (см. 2.15), и они взаимно противоположны, если модуль угловой скорости убывает.

Пример 2.8. На рисунке к примеру 2.8 изображены десять вариантов вращательного движения тела. Направление вращения на рисунках показаны дуговыми стрелками ω. Направление вращения можно определить и по вектору $\bar{\omega}$, пользуясь правилом 2.28. На практике, чтобы по вектору $\bar{\omega}$ определить направление вращения тела, сделайте так : 1) сожмите правую руку в кулак, 2) отогните большой палец правой руки (так люди показывают, что дела у них идут отлично), 3) направьте большой палец по направлению вектора $\bar{\omega}$, 4) направление согнутых пальцев правой руки покажут направление вращения твердого тела. Обратно, если надо по известному направлению вращения (то есть по дуговой стрелочке ω) определить направление вектора $\bar{\omega}$, то согнутые пальцы правой руки нужно расположить по направлению вращения, а отогнутый большой палец укажет направление вектора $\bar{\omega}$.

Тело вращается против часовой стрелки, если положительное направление оси z *совпадает с направлением вектора* $\bar{\omega}$. По рис. к примеру 2.8 видим:

а) тело вращается против часовой стрелки, ускоренно;

б) тело вращается по часовой стрелке, ускоренно;

в) тело вращается против часовой стрелки, замедленно;

г) тело вращается по часовой стрелке, замедленно;

д) тело вращается относительно наклонной оси против часовой стрелки, ускоренно;

е) тело вращается относительно наклонной оси по часовой стрелке, замедленно;

ж) тело вращается относительно горизонтальной оси против часовой стрелки, ускоренно;

з) тело вращается относительно горизонтальной оси против часовой стрелки, замедленно;

и) тело вращается относительно горизонтальной оси против часовой стрелки, равномерно ($\varepsilon = 0$);

к) тело вращается относительно горизонтальной оси по часовой стрелке, равномерно.

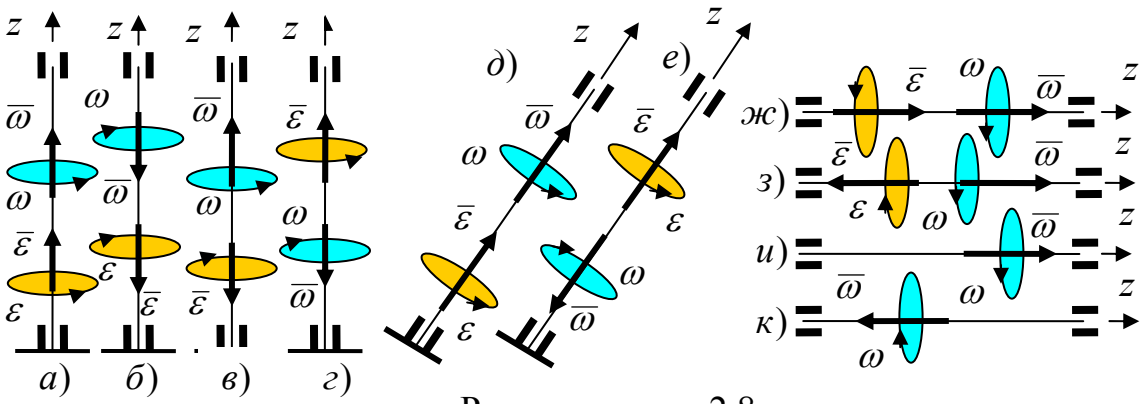


Рис. к примеру 2.8

§ 2.6. Векторы скорости и ускорения точки вращающегося тела

Обратимся к рис. 2.9, на котором показаны ось вращения тела (само тело не показано, оно может быть любой формы), координатная плоскость $П$, от которой откладывается угол вращения тела $\varphi(t)$ – угол между плоскостью $П$ и подвижной плоскостью $П_1$, проходящей через точку M.

2.31. Вектор скорости $\bar{v}$ ***произвольной точки тела, вращающегося относительно неподвижной оси, равен векторному произведению вектора угловой скорости тела*** $\bar{\omega}$ ***и радиуса-вектора*** $\bar{r}$ ***этой же точки.***

$$\boxed{\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}\,.} \qquad (2.21)$$

Формула (2.21) называется формулой Эйлера. Утверждение 2.31 будет доказано, если будет доказано, что полученный по формуле (2.21) вектор $\bar{v}$ направлен в сторону вращения тела по касательной к траектории точки, а модуль вектора $|\bar{v}|$ равен модулю величины скорости $|v| = |\omega| \cdot h$,

вычисленной по формуле (2.14). Покажем, что это действительно так. Положение точки M определим радиус-вектором $\bar{r}$, начало которого лежит на оси вращения тела, а конец упирается в точку M.

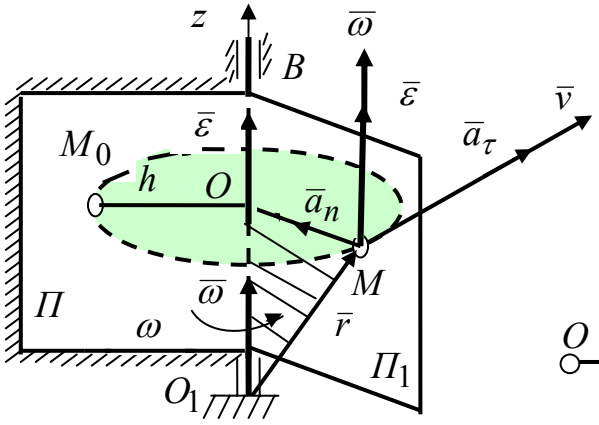


Рис.2.9а

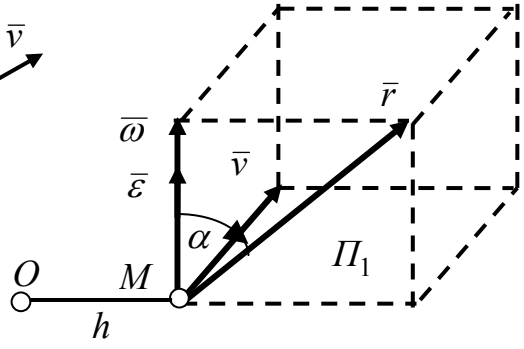


Рис. 2.9б

Следовательно, радиус-вектор точки M лежит в плоскости Π_1. Вектор $\bar{\omega}$ направлен по оси вращения по правилу 2.28. В нашем случае вектор $\bar{\omega}$ показан на рис.2.9а. Чтобы найти направление вектора $\bar{v}$, векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$ не меняя их направлений, мысленно перенесем в точку M, как показано на рис.2.9а и 2.9б. Принимая во внимание определение векторного произведения, вектор скорости $\bar{v}$, вычисленный по формуле (2.21), должен быть направлен перпендикулярно заштрихованной плоскости, то есть плоскости Π_1, в которой лежат векторы сомножители $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$, в ту сторону, откуда кратчайший поворот от первого сомножителя $\bar{\omega}$ ко второму сомножителю $\bar{r}$ наблюдается происходящим против часовой стрелки. Следовательно, вектор скорости $\bar{v}$ направлен в направлении вращения тела, как показано на рис. 2.9а и 2.9б. Это в точности совпадает с направлением вектора скорости, которое определилось бы из (2.14). Определим модуль вектора скорости по (2.21). По правилам векторной алгебры имеем для модуля векторного произведения: $|\bar{v}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{r}| \cdot \sin\alpha = |\bar{\omega}| \cdot OM = |\bar{\omega}| \cdot h$, где $|\bar{r}| \cdot \sin\alpha = OM = h$ (рис.2.9а). То есть модуль вектора $\bar{v}$, полученного по формуле (2.21) в точности совпадает с модулем алгебраического значения скорости, полученным из (2.14). Что и требовалось доказать. Формула (2.21) действительно определяет вектор скорости точки тела, вращающегося относительно неподвижной оси, и по направлению, и по величине.

Вектор полного ускорения точки в неподвижной системе отсчета вычисляется по формуле (1.15) . С учетом (2.21), (2.7), (1.13) получим:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = (\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}) = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \bar{v}) .$$

Пользуясь рассуждениями, с помощью которых был установлен механический смысл векторного произведения (2.21) можно доказать, что

$$\boxed{\bar{a}_\tau = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r})} \qquad (2.22)$$

$$\boxed{\bar{a}_n = (\bar{\omega} \times \bar{v})} \qquad (2.23)$$

2.32. Вектор касательного ускорения $\bar{a}_\tau$ произвольной точки тела, вращающегося относительно неподвижной оси, равен векторному произведению вектора углового ускорения тела $\bar{\varepsilon}$ и радиуса – вектора этой же точки $\bar{r}$.

2.33. Вектор нормального ускорения $\bar{a}_n$ произвольной точки тела, вращающегося относительно неподвижной оси, равен векторному произведению вектора угловой скорости тела $\bar{\omega}$ и вектора скорости этой же точки $\bar{v}$.

Действительно (см. рис.2.9), вектор $(\bar{\varepsilon} \times \bar{r})$ направлен так же, как вектор $\bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}$ или в противоположную сторону, так как вектор $\bar{r}$ – общий вектор для обеих формул, а вектор $\bar{\omega}$ и вектор $\bar{\varepsilon}$ лежат на одной и той же прямой – оси вращения и могут лишь быть направлены в одну сторону, или в разные стороны. Другими словами, вектор $(\bar{\varepsilon} \times \bar{r})$, в зависимости от направления вектора $\bar{\varepsilon}$, будет направлен, как показано на рис.2.9, или в обратную сторону, но всегда по касательной к траектории. Модуль вектора $\left|(\bar{\varepsilon} \times \bar{r})\right| = \left|\bar{\varepsilon}\right| \cdot \left|\bar{r}\right| \cdot \sin\alpha = \left|\bar{\varepsilon}\right| \cdot h$. Эта величина равна модулю касательного ускорения из формулы (2.15). Здесь и угол α, и расстояние h от точки до оси вращения те же самые, что были вычислены при обсуждении формулы (2.21). Следовательно, равенство (2.22) определяет вектор касательного ускорения точки вращающегося тела. Аналогично проанализировав векторное произведение (2.23), приходим к выводу, что это – вектор нормального ускорения точки (доказательство рекомендуется проделать самостоятельно).

§ 2.7. Задачи с решениями на поступательное и вращательное движения твердого тела

Задача 2.1. Автомобиль, двигаясь равноускоренно и прямолинейно из состояния покоя по горизонтальному участку пути, за первые десять секунд набрал скорость $v = 100 км/час$. Определить величину ускорений точек кузова.

Решение. Прямолинейное движение твердого тела является частным случаем поступательного движения тела. Следовательно, движение кузова автомобиля можно отождествить с движением любой его точки, совершающей прямолинейное движение. В начальный момент времени кузов автомобиля находился в покое ($v_0 = 0$). Тогда по формуле (1.72) можно получить величину ускорений точек при прямолинейном движении: $a = \dfrac{v - v_0}{t} = \dfrac{v}{t} = \dfrac{100 \cdot 1000}{3600 \cdot 10} = \dfrac{100}{36} = 2{,}78 м/с^2$. **Ответ:** $a = 2{,}78 \ м/с^2$.

Задача 2.2. Кривошип OB с помощью ползуна 1 приводит в движение кулису 2. Длина кривошипа $OB = R = 0{,}25 м$. Кривошип вращается относительно точки O по

закону $\varphi(t)=\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{2}$. Определить модуль вектора перемещения и модуль вектора скорости точки А кулисы в момент времени $t_1=1c$.

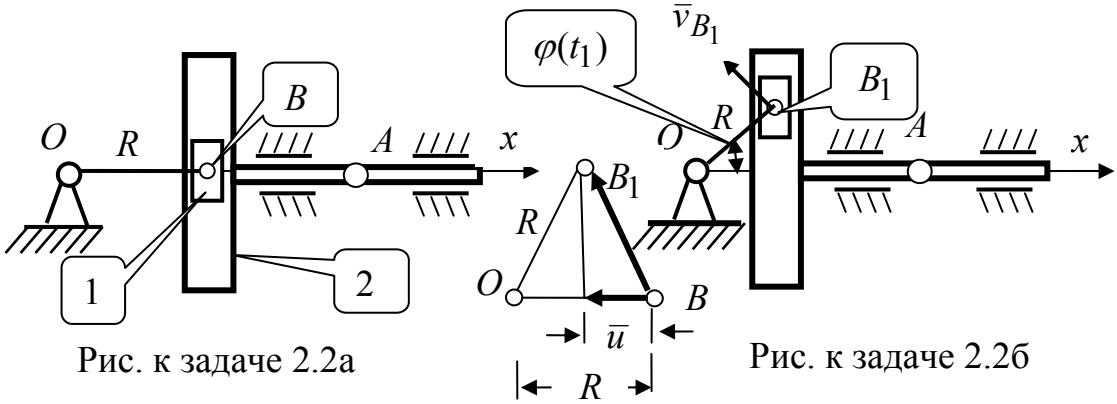


Рис. к задаче 2.2а

Рис. к задаче 2.2б

Решение. На рис.2.2 механизм показан в двух положениях – в начальном положении и в положении, для которого надо определить перемещение точки A кулисы. В движение кулису 2 приводит кривошип OB. Кривошип OB совершает вращательное движение относительно точки O по заданному в условии задачи закону. Кулиса движется поступательно, так как все ее контурные линии при движении кулисы остаются параллельными сами себе. Следовательно, по основной теореме поступательного движения (п. 2.2 настоящей главы), все точки кулисы движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями, по одинаковым траекториям и имеют одинаковые перемещения. Механизмы создаются так, что движение любой точки одной части механизма сразу «отзывается» движениями точек других частей механизма. По рисунку к задаче видно, что точка B одновременно участвует во вращении кривошипа OB и поступательном движении кулисы 2. Перемещение точки B кривошипа (и ползуна) за промежуток времени $\Delta t=t_1=1c$ изображается вектором $\overline{BB_1}$, а перемещение точки B кулисы изображено вектором $\bar{u}$. В момент времени $t=t_1=1(c)$ имеем угол $\varphi(t_1)=(\pi/3)\sin(\pi\cdot 1/2)=\pi/3=60^0$. Тогда модуль перемещения точки B кулисы u будет равен $u=BB_1\cdot\cos 60^0=R\cdot\cos 60^0$, так как треугольник OBB_1 – равносторонний. Следовательно, $u=0{,}25\cdot 0{,}5=0{,}125(м)$. Модуль перемещения точки A кулисы равен модулю перемещения точки B кулисы и равен u. Вектор скорости точки B, как точки вращающегося тела (кривошипа OB), в любой момент времени перпендикулярен кривошипу OB и равен по величине $v=\omega\cdot OB=\dot{\varphi}(t)\cdot OB=OB\cdot(\pi^2/6)\cdot\cos(\pi t/2)$. В момент времени $t=t_1=1c$ точка B находится в точке B_1 и движется со скоростью $v_{B1}=\omega\cdot OB_1=R\cdot(\pi^2/6)\cdot\cos(\pi\cdot 1/2)=0$. То есть в данный момент времени кулиса и кривошип находятся в покое. **Ответ.** Модуль перемещения точки A $u_A=0{,}125(м)$, скорость точки A равна нулю.

Задача 2.3. Тело вращается относительно неподвижной оси по закону $\varphi = t^2 - 4t$ $(рад)$. Исследовать вращение тела при $0 \le t < \infty$ и определить угол поворота тела, его угловую скорость и угловое ускорение в момент времени $t_3 = 5c$.

Решение. Заданное в условии задачи уравнение движения приведем к каноническому виду: $\varphi = t^2 - 4t = t^2 - 4t + 4 - 4 = [(t-2)^2 - 4](рад)$. График этой функции показан на рис.1 к примеру. Механический смысл имеет только та часть кривой, которая лежит в области $t \ge 0$. В начальный момент времени $t = 0$ угол поворота тела $\varphi = 0$. Это положение тела принимается за начальное положение. Форма тела при этом не имеет значения, поэтому на рисунках и не показано. В промежутке времени $0 < t \le t_1 = 2(c)$ угол φ возрастал по модулю, но был отрицательным. То есть тело вращалось по часовой стрелке, как показано на рис. 2 к примеру. При $t > t_1 = 2(c)$ тело вращается против часовой стрелки, при этом, как видно по графику, в момент времени $t = t_2 = 4(c)$ угол поворота опять $\varphi = 0$. В этот момент времени тело занимает свое первоначальное положение, то есть то, в котором оно находилось в начальный момент времени $t = 0$. В отрицательном направлении (по часовой стрелке) тело поворачивается на угол $\varphi(2) = 4 - 4 \cdot 2 = -4 рад.$ (это примерно $57 \cdot 4 = 228^0$). Полученные результаты позволяют обратить внимание еще раз на то, что угол φ, который задается законом вращения – это фактически «угловая координата», отсчитываемая от некоторой произвольно выбранной плоскости. А «угловой путь», пройденный телом от положения $\varphi(0) = 0$ до того же положения $\varphi(4) = 0$, составлял $\psi = 4 + 4 = 8(рад)$. Если это не понимать и судить о вращении только по значениям $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(4) = 0$, можно было бы заключить, что тело находилось в покое.

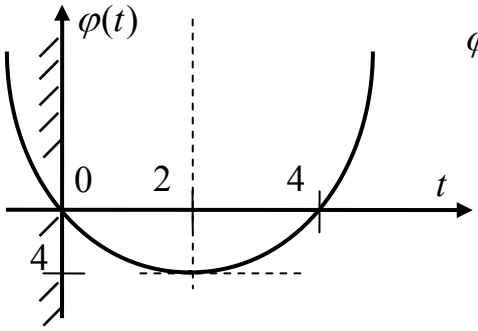


Рис.1 к задаче 2.3

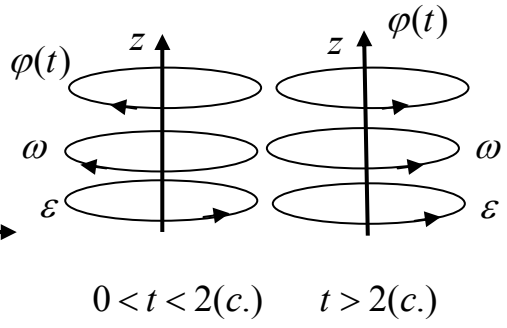


Рис. 2 к задаче 2.3

Исследуем угловую скорость тела. Угловая скорость $\omega = \dot{\varphi}(t) = 2t - 4$ $(рад/с)$. В начальный момент времени при $t = 0$ имеем $\omega(0) = \dot{\varphi}(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$ $(рад/с)$. Это означает, что тело начинает вращение в исследуемом промежутке времени при начальной угловой скорости $\omega(0) = \omega_0 = -4(рад/сек)$ – по часовой стрелке. В момент времени $t_1 = 2c$ угловая скорость $\omega = 0$ ($\omega(t_1) = 2t_1 - 4 = 0$, тогда $t_1 = 2c$). Это момент мгновенного покоя тела, после которого вращение происходит в обратную сторону. Обратите внимание, что при вращении по направлению часовой стрелки (до $t = t_1 = 2c$) угловая скорость $\omega < 0$. Когда тело остановилось ($t = t_1 = 2c$) угловая скорость $\omega = 0$, а при $t > t_1 = 2c$ угловая скорость $\omega > 0$ (тело вращается против

часовой стрелки). Угловое ускорение точки $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 2(рад/с^2)$ – постоянно и положительно.

Это означает, что при вращении по часовой стрелке угловая скорость тела уменьшалась (и превратилась в ноль), а при вращении против часовой стрелки угловая скорость будет увеличиваться. Это подтверждается и видом функции $\omega = \dot{\varphi}(t) = 2t - 4$. Направление вращения тела, угловая скорость и угловое ускорение показано дуговыми стрелками на рис.2 к примеру. При $t = t_3 = 5c.$ будем иметь: $\varphi(t_3) = 5^2 - 4 \cdot 5 = +5\ (рад)$, $\omega(t_5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6\ (рад/с)$, $\varepsilon = 2(рад/с^2)$. **Ответ:** $\varphi(t_3) = +5\ (рад)$, $\omega(t_5) = 6\ (рад/с)$, $\varepsilon = 2(рад/с^2)$.

Задача 2.4. Механизм, показанный на рисунке к задаче, состоит из двух параллельных кривошипов одинаковой длины $OA = CB = 0{,}5м$. С концами кривошипов шарнирно соединен стержень AB. Кривошип OA вращается по закону $\varphi(t) = \pi \cdot t^2\ (рад)$, где угол отсчитывается от положительного направления оси Ox. В момент времени $t_1 = 2c$ показать положение механизма и определить радиус кривизны траектории тоски M, вектор скорости, векторы касательного, нормального и вектор полного ускорения точки M. Найденные векторы изобразить на рисунке.

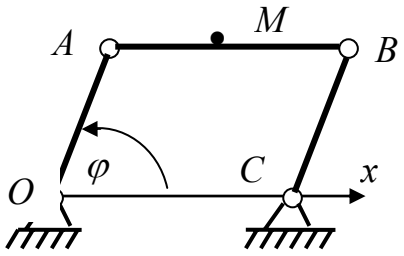


Рис. к задаче 2.4(а)

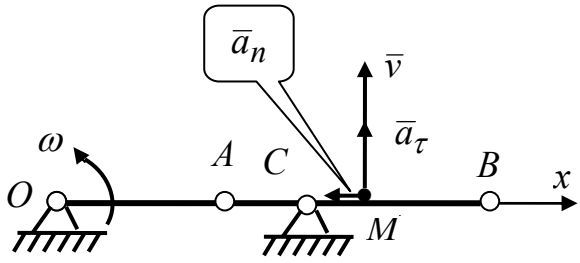


Рис. к задаче 2.4(б)

Решение. Механизм состоит из трех сочлененных тел – параллельных кривошипов OA и CB и стержня AB, который в процессе движения остается параллельным оси Ox. Следовательно стержень AB совершает поступательное движение и к нему применима основная теорема поступательного движения. Кривошипы OA и CB совершают вращение относительно неподвижных осей, проходящих через точки O и C, перпендикулярно к плоскости рисунка по заданному закону. По условию задачи и формулам (2.5) и (2.7) находим: $\varphi(t) = \pi \cdot t^2\ (рад)$, $\omega = d\varphi/dt = 2\pi t(рад/с)$, $\varepsilon = d\omega/dt = 2\pi\ \ (рад/с^2)$. В начальный момент времени $t_0 = 0$ было $\varphi(t_0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 = 0$, $\varepsilon = 2\pi$. Другими словами, кривошип (и механизм в целом) занимал положение, показанное на рис. 2.4(б), начал движение с нулевой начальной скоростью, равноускоренно. В заданный момент времени $t_1 = 2c$ имеем: $\varphi(t_1) = 4\pi\ (рад)$, $\omega(t_1) = 4\pi(рад/с)$, $\varepsilon(t_1) = 2\pi\ \ (рад/с^2)$. Судя по значению $\varphi(t_1) = \varphi(2) = 4\pi\ (рад)$, через две секунды после начала движения кривошип, вращаясь равноускоренно, вновь на мгновение занял первоначальное положение (рис. 2.4(б)). При этом он продолжает вращаться против часовой стрелки. Найдем вектор скорости и векторы ускорений точки A. По формулам (2.16), (2.17), (2.18) имеем:

$$v_A = \omega \cdot h = \omega \cdot OA, \qquad a_\tau^A = \varepsilon \cdot h = \varepsilon \cdot OA, \qquad a_n^A = v_A^2 / \rho = v_A^2 / OA.$$

В момент $t_1 = 2c$: $v_A = \omega \cdot OA = 4\pi \cdot 0{,}5 = 2\pi(м/с)$, $a_\tau^A = \varepsilon \cdot OA = 2\pi \cdot 0{,}5 = \pi(м/с^2)$, $a_n^A = v_A^2 / OA = 4\pi^2 / 0{,}5 = 8\pi^2(м/с^2)$. Применяя основную теорему поступательного движения (п. 2.2 настоящей главы), окончательно получим: $v_M = v_A = 2\pi(м/с)$, $a_\tau^M = a_\tau^A = \pi(м/с^2)$, $a_n^M = a_n^A = 8\pi^2(м/с^2)$. Направление ответствующих векторов показано на рис.2.4(б). **Ответ:** $v_M = v_A = 2\pi(м/с)$, $a_\tau^M = a_\tau^A = \pi(м/с^2)$, $a_n^M = a_n^A = 8\pi^2(м/с^2)$.

Задача 2.5. Тело из состояния покоя начинает вращаться и за первые $t_1 = 12c$ достигает угловой скорости вращения в ω = 36 *рад/с.* Считая, что тело вращается равноускоренно, определить число полных оборотов, которое сделает тело за указанное время вращения.

Решение. Так как первоначально тело находилось в покое, то начальная угловая скорость $\omega(0) = \omega_0 = 0$. Угол поворота тела будем также отсчитывать от его начального положения, то есть предполагать, что $\varphi(0) = \varphi_0 = 0$. Для равнопеременного вращения угловое ускорение тела и угол поворота определяются по формулам (2.12) и (2.13): $\varepsilon = (\omega - \omega_0)/t$ и $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$. В нашем случае будем иметь: $\varepsilon = \omega / t_1 = 36/12 = 3(рад/с^2)$, а $\varphi = \varepsilon t_1^2/2 = 3 \cdot 12^2/2 = 216(рад)$. При одном полном обороте вокруг оси вращения тело поворачивается на угол, равный углу поворота в $2\pi(рад)$, или 360^0. Поэтому полный угол поворота всегда равен $\varphi = 2\pi n(рад)$, где n – число оборотов тела вокруг оси вращения. Отсюда для момента времени $t_1 = 12c$ справедливо уравнение $\varphi = 2\pi n = 216(рад)$. Отсюда $n = 216/2\pi = 216/6{,}28 = 34(об)$.

Ответ: $n = 34(об)$.

Задача 2.6. Коленчатый вал автомобильного двигателя, имеющий частоту вращения $n = 3000(об/мин)$, был предоставлен самому себе (выключили «зажигание») и из-за трения в подшипниках и в других системах двигателя, остановился в момент времени $t = t_1$, сделав $n = 1000(об)$. Считая вращение вала равнопеременным, определить его угловое ускорение.

Решение. Угловое ускорение ε при равнопеременном вращении входит в две основные формулы (2.12), (2.13): $\varepsilon = (\omega - \omega_0)/t$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$. С учетом условия задачи в момент времени $t = t_1$ последние формулы примут вид: $\varepsilon = -\omega_0 / t_1$, $\varphi(t_1) = \omega_0 t_1 + \varepsilon t_1^2/2$. Действительно, вал в итоге остановился ($\omega(t_1) = 0$), а угол вращения определяется от того положения вала, при котором он оказался представленным самому себе, то есть $\varphi(0) = \varphi_0 = 0$. Исключим время t_1 из последних формул. Для этого выражаем t_1 из первой формулы ($t_1 = -\omega_0 / \varepsilon$) и подставляем во вторую. Получаем $\varphi(t_1) = -\omega_0^2/\varepsilon + \omega_0^2/(2\varepsilon)$. Окончательно, формула для искомой величины имеет вид:

$$\varepsilon = -\omega_0^2 /(2\cdot\varphi(t_1)). \qquad (*)$$

Определяем угол поворота вала, соответствующий сделанным до остановки одной тысячи оборотов: $\varphi(t_1) = 2\pi n = 2\pi\cdot 1000 = 2000\pi(рад)$. Начальная угловая скорость определяется по формуле (2.10): $\omega_0 = \pi n/30 = 3000\cdot\pi/30 = 100\pi(рад/с)$. Тогда искомая величина углового ускорения

$$\varepsilon = -\omega_0^2 /(2\cdot\varphi(t_1)) = -10^4\pi^2/(4\cdot 10^3\pi) = -2{,}5\pi(рад/с^2).$$

Ответ: $\varepsilon = -7{,}9(рад/с^2)$.

Задача 2.7. Маховик, показанный на рис.(а) к задаче, имеет в данный момент времени $t = t_1(с)$ угловую скорость $\omega = 2\pi(рад/с)$ и угловое ускорение $\varepsilon = -3(рад/с^2)$. Найти величины скорости v_M, касательного a_τ^M, нормального a_n^M и полного a ускорений точки M маховика, которая находится на расстоянии $h = 0{,}8м$ от оси вращения.

Решение. Скорость точки M определяется по формуле (2.16). Тогда $v_M = h\omega = 0{,}8\cdot 2\pi = 5(м/с)$. Касательное ускорение точки вычисляется по формуле (2.17). Тогда $a_\tau^M = h\cdot\varepsilon = 0{,}8\cdot(-3) = -2{,}4(м/с^2)$. Так как знаки угловой скорости ω и углового ускорения ε различны ($\omega\cdot\varepsilon < 0$), то маховик вращается замедленно. Следовательно, вектор касательного ускорение точки $\bar{a}_\tau^M$ направлен по касательной к окружности радиуса h противоположно вектору скорости $\bar{v}_M$. Нормальное ускорение точки M определяется по (2.18): $a_n^M = h\cdot\omega^2 = 0{,}8\cdot(2\pi)^2 = 31{,}6(м/с^2)$.

Полное ускорение точки вычисляется по (2.19). Тогда $a_M = \sqrt{(a_\tau^M)^2 + (a_n^M)^2} = \sqrt{2{,}4^2 + 31{,}6^2} = 31{,}7(м/с^2)$. Вектор полного ускорения точки $\bar{a}_M$ отклонен от вектора a_n^M к вектору a_τ^M на угол, тангенс которого вычисляется по формуле (2.20).

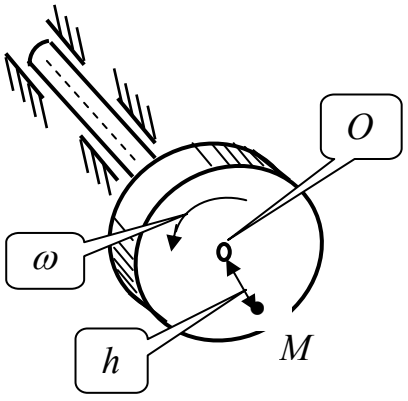


Рис. к задаче 2.7а

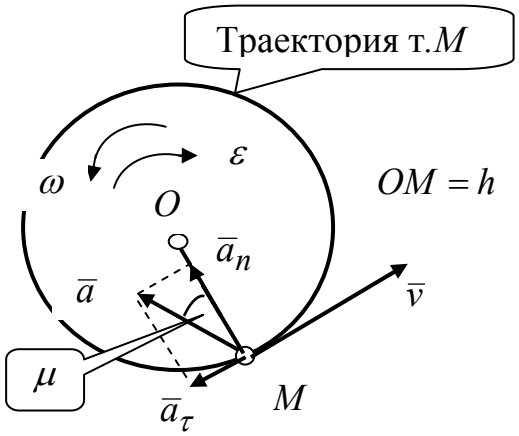


Рис.к задаче 2.7б

$tg\mu = a_\tau^M / a_n^M = -2{,}4/31{,}6 = 0{,}076$ ($\mu = -4{,}35^0$). Направление векторов $\bar{v}$, $\bar{a}_\tau$, $\bar{a}_n$, $\bar{a}$ показано на рис. (б) к задаче в увеличенном масштабе.

Ответ: $v_M = 5(м/с)$, $a_\tau^M = -2{,}4(м/с^2)$, $a_n^M = 31{,}6(м/с^2)$, $a_M = 31{,}7(м/с^2)$.

Задача 2.8. Механизм состоит из четырех тел – двух вращающихся диска «2» и ступенчатого диска «3», груза «1», подвешенного на нерастяжимой нити, которая намотана на диск «2» без проскальзывания, и рейки «4», плотно прижатой к диску «4». Механизм приводится в движение грузом «1», который движется в положительном направлении оси z по закону $z = \pi \cdot R_2 t^3 (м)$. Коэффициент πR_2 имеет единицу измерения $м/с^3$. Радиусы дисков $R_2 = 0{,}2м$, $R_3 = 0{,}3м$, $r_3 = 0{,}25м$. В момент времени $t = t_1 = 1c$ определить угловые скорости ω_2, ω_3 и угловые ускорения $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ дисков «2» и «3», векторы линейных скоростей $\bar{v}_1, \bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_C$ и ускорений $\bar{a}_1, \bar{a}_\tau^A, \bar{a}_n^A, \bar{a}_\tau^B, \bar{a}_n^B, \bar{a}_C$ тела «1» и точек A, B, C. Сколько оборотов сделает диск «3» за промежуток времени $t = t_1$.

Замечание. Механизм, рассматриваемый в данной задаче, является учебной расчетной моделью механизмов, которые могут входить в состав различных редукторов – механизмов для уменьшения угловых скоростей и увеличения крутящих моментов. Другими словами, механизмов, применяемых для согласования вращательных движений валов двигателей и других частей машин. В качестве примера на фотографиях к задаче показаны два типа редукторов, при этом второй редуктор – «червячный» – преобразует вращение «червяка» относительно одной оси во вращение шестерни относительно другой, перпендикулярной оси. Еще один тип редуктора с коническими шестернями показан ниже на фотографии к задаче 2.20.

Решение: Механизм в момент времени $t = t_1$ показан на рисунке (а) к задаче. Линейное перемещение тела «1» и углы поворота тел «2», «3» отсчитываются от соответствующих положений тел в начальный момент времени.

1. Рассмотрим движения тела «1», которое совершает прямолинейное поступательное движение. По основной теореме поступательного движения (п. 2.2 настоящей главы) все точки этого тела движутся одинаково – совершают прямолинейные движения.

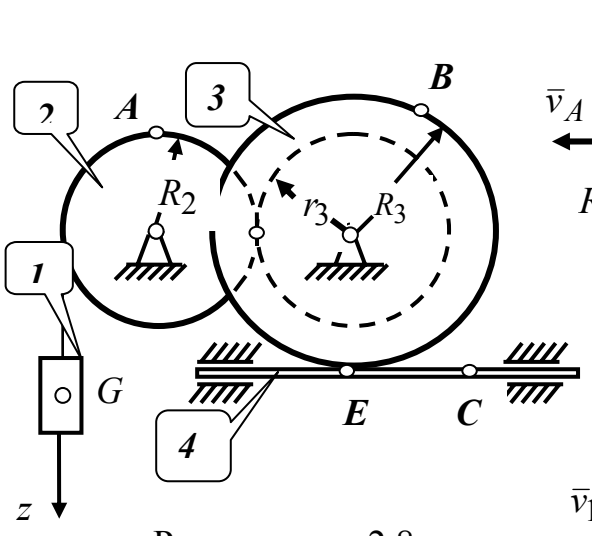


Рис. к задаче 2.8а

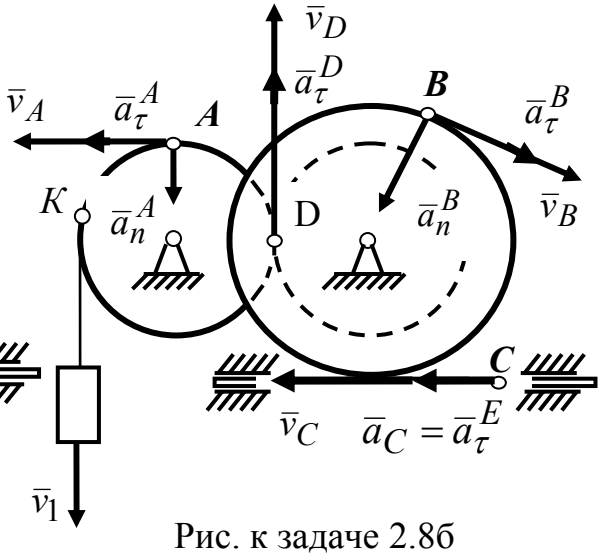


Рис. к задаче 2.8б

Закон движения тела, то есть закон движения любой его точки, например, точки G задан координатным способом. Судя по закону движения, тело «1» всегда движется в

одну сторону, поэтому путь L, пройденный точкой G за время t_1, равен координате точки $z(t_1)$. Проекции вектора скорости и ускорения точки G равны: $v_z = v_1 = 3\pi R_2 t^2$, $a_z = a_1 = 6\pi R_2 t$.

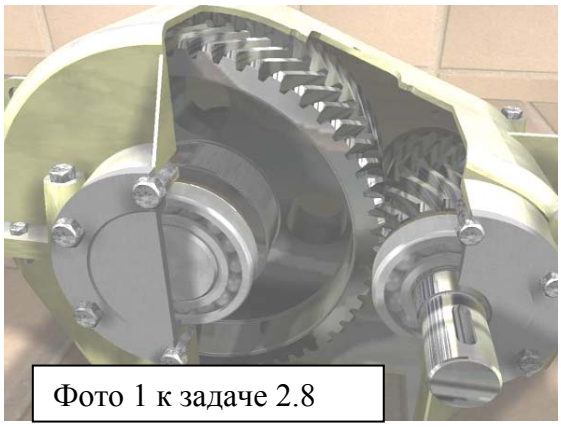


Фото 1 к задаче 2.8

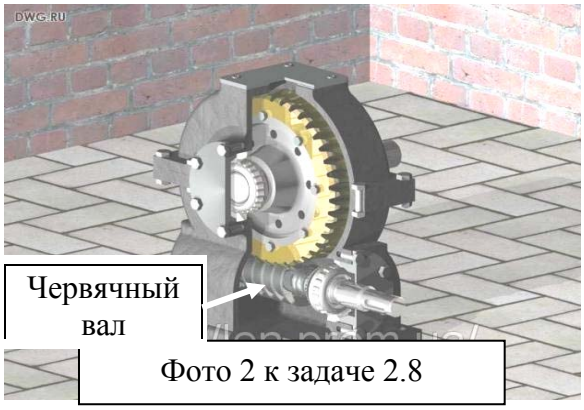


Фото 2 к задаче 2.8

В момент времени $t = t_1$ имеем: $L = z(t_1) = \pi R_2 (м)$, $v_1 = 3\pi R_2 (м/с)$, $a_1 = 6\pi R_2 (м/с^2)$.

2. Рассмотрим движение тела «2», которое совершает вращательное движение относительно неподвижной оси подшипника, перпендикулярной плоскости рисунка. Так как нить считается нерастяжимой и намотана на диск без проскальзывания, то в точках соприкосновения точки нити и диска имеют равные скорости и ускорения: $v_1 = v_K = v_A$, $a_1 = a_\tau^K = a_\tau^A$. С другой стороны, по (2.16) и (2.17) имеем: $v_A = \omega_2 R_2 = v_1$, $a_\tau^A = \varepsilon_2 R_2 = a_1$. Тогда $\omega_2 = v_1 / R_2 = 3\pi t^2 (рад/с)$, $\varepsilon_2 = a_1 / R_2 = 6\pi t (рад/с^2)$, где ω_2, ε_2 – угловая скорость и угловое ускорение второго диска, соответственно. По (2.18) находим величину нормального ускорения $a_n^A = \omega_2^2 R_2 = 9\pi^2 R_2 t^4$. В момент времени $t = t_1$ получим: $\omega_2 = 3\pi (рад/с)$, $\varepsilon_2 = 6\pi (рад/с^2)$, $v_A = 3\pi R_2$, $a_\tau^A = 6\pi R_2 (м/с^2)$, $a_n^A = 9\pi^2 R_2$. Величину вектора полного ускорения вычислим по формуле $a^A = \sqrt{(a_\tau^A)^2 + (a_n^A)^2} = R_2 \sqrt{36\pi^2 + 81\pi^4} = = 5{,}78\pi (м/с^2)$.

3. Рассмотрим движение тела «3». Так как диски находятся в зацеплении без проскальзывания, то в точке D можно записать: $v_{D,2} = v_{D,3}$, $a_{\tau,2}^D = a_{\tau,3}^D$, где индексы «2» и «3» указывают на соответствующие диски. Тогда $\omega_2 R_2 = \omega_3 r_3$, $\varepsilon_2 R_2 = \varepsilon_3 r_3$. Отсюда $\omega_3 = \omega_2 R_2 / r_3 = 0{,}8\omega_2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 R_2 / r_3 = 0{,}8\varepsilon_2$. Для точки B будем иметь: $v_B = \omega_3 R_3 = \omega_2 R_2 R_3 / r_3 = 0{,}8\omega_2 R_3$, $a_\tau^B = \varepsilon_3 R_3 = \varepsilon_2 R_2 R_3 / r_3 = 0{,}8\varepsilon_2 R_3$, $a_n^B = \omega_3^2 R_3 = = 0{,}64\omega_2^2 R_3$. В момент времени $t = t_1$ получим: $\omega_3 = 0{,}8\omega_2 = 2{,}4\pi (рад/с)$, $\varepsilon_3 = 0{,}8\varepsilon_2 = 4{,}8\pi (рад/с^2)$, $v_B = 0{,}72\pi (м/с)$, $a_\tau^B = 0{,}8\varepsilon_2 R_3 = 1{,}44\pi (м/с^2)$, $a_n^B = 0{,}64\omega_2^2 R_3 = 1{,}728\pi^2$. $a^B = \sqrt{(a_\tau^B)^2 + (a_n^B)^2} = 5{,}61\pi (м/с^2)$.

4. Рассмотрим тело «4», которое совершает поступательное движение. В точке E оно соприкасается с диском «3». Следовательно, $v_C = v_E = v_B = 0{,}72\pi(м/с)$, $a_E = a_C = a_\tau^B = 1{,}44\pi(м/с^2)$.

5. Наконец, определим число оборотов третьего диска. Первое тело за заданный промежуток времени прошло расстояние $L = z(t_1) = \pi R_2(м)$. Такое же расстояние проходит любая точка *нерастяжимой* нити. Точки диска «2», соприкасающиеся с намотанной на него нитью, проходят такой же путь по окружности диска. При одном полном повороте диска его произвольная точка проходит путь, равный длине окружности диска $l_2 = 2\pi R_2$. Число поворотов n получим, поделив путь, пройденный точкой нити, на длину окружности $n_2 = \pi R_2/(2\pi R_2) = 0{,}5(об)$. Другими словами, второй диск совершил пол-оборота. Точки диска «3» пройдут тот же путь $L = z(t_1) = \pi R_2(м)$. Поделив этот путь на длину меньшей окружности третьего диска, получим: $n_3 = L/l_3 = \pi R_2/(2\pi R_3) = 0{,}5R_2/r_3 = 0{,}4(об)$. Интересно отметить, что $n_3/n_2 = R_2/r_3 = \omega_3/\omega_2$.

§ 2.8. Задачи для самостоятельного решения на поступательное и вращательное движения твердого тела

Задача 2.9. Шкив радиусом $r = 0{,}3м$ вращается равномерно с частотой $n = 1200об/мин$. Найти его угловую скорость ω в *рад/с,* а также скорость и ускорение точки, лежащей на внешнем ободе шкива.

Ответ: $\omega = 125{,}6рад/с$, $v = 37{,}7м/с$, $a = a_n = 4732{,}6м/с^2$.

Задача 2.10. Лопасти вентилятора вращаются с частотой $n = 4200об/мин$. Какой длины L можно сделать отдельную лопасть вентилятора, если максимальная скорость точек вентилятора v не должна превышать $88м/с$? **Ответ:** $L \le 0{,}2м$.

Задача 2.11. На вращающийся вал плотно насажен шкив диаметром $d = 600мм$, который вращается вместе с валом. Скорость точек v, лежащих на внешнем ободе шкива, равна в данный момент времени $1{,}5м/с$.Определить частоту вращения шкива n. **Ответ:** $n = 47{,}8об/мин$.

Задача 2.12. Маховик радиуса $R = 1{,}0м$ вращается равномерно вокруг своей оси, делая 5 оборотов за половину секунды. Определить скорость и ускорение точки, лежащей на внешнем ободе маховика. **Ответ:** $v = 62{,}8м/с$, $a = a_n = 3943{,}8м/с^2$.

Задача 2.13. Механизм состоит из двух зубчатых колес 1 и 2, находящихся в зацеплении, и кривошипного механизма O_2BCO_3. Точки O_1, O_2, O_3 лежат на одной горизонтальной прямой. Кривошипы O_2B и O_3C параллельны и имеют равную длину $r_2 = 0{,}6м$. В точках O_2, B, C, O_3 имеют место шарнирные соединения. Механизм приводится в движение вращением против часовой стрелки кривошипа O_2B, который имеет общую ось вращения с зубчатым колесом 2 и в точке B соединен с ним при помощи шарнира. Определить величину скорости v_C точки C, если величина скорости точки A в данный момент времени известна и $v_A = 5м/с$. $R_1 = 0{,}5м; R_2 = 0{,}8м$.

Ответ: $v_C = 3{,}75м/с$.

Задача 2.14. Зубчатое колесо 1 (см. условие и рис. к задаче 2.13) вращается согласно закону $\varphi_1 = t^4 (рад)$. Определить величину вектора полного ускорения a_C точки C в момент времени $t_1 = 1c$, если $R_1 = 0{,}5м; R_2 = 0{,}8м, r_2 = 0{,}6м$. **Ответ:** $a_C = 5{,}86 м/с^2$.

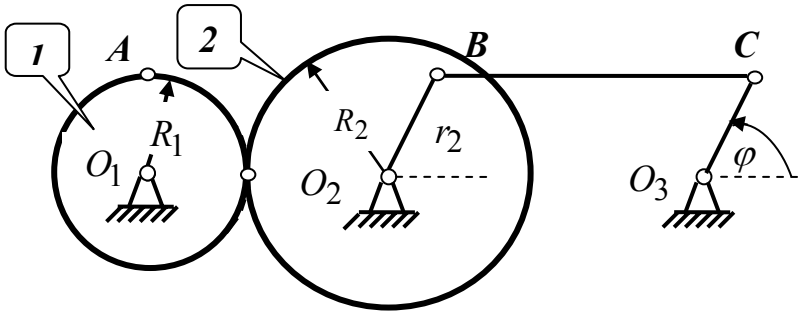


Рис. к задаче 2.13, 2.14

Задача 2.15. Величина нормального ускорения точки B зубчатого колеса 2 равно $a_n^C = 2{,}4 м/с^2$ (см. условие и рис. к задаче 2.13). Определить величину скорости точки A, если $R_1 = 0{,}5м; R_2 = 0{,}8м, r_2 = 0{,}6м$. **Ответ:** $v_A = 1{,}6 м/с$.

Задача 2.16. В период разгона маховик паровой турбины (см. рис. к задаче 2.7) вращается по закону $\varphi(t) = \pi t^3 (рад)$. Диаметр маховика $d = 0{,}9м$. В момент времени $t_1 = 2c$ определить количество оборотов m, которое сделает маховик к этому моменту времени, угловую скорость ω и угловое ускорение ε маховика, а также величины линейной скорости v, касательного a_τ, нормального a_n и полного a ускорений точек, лежащих на окружности маховика. **Ответ:** $m = 4$ *об*, $\omega = 37{,}68 рад/с$, $\varepsilon = 37{,}68 рад/с^2$, $v = 16{,}96 м/с$, $a_\tau = 16{,}96 м/с^2$, $a_n = 638{,}9 м/с^2$, $a = 639{,}13 м/с^2$.

Задача 2.17. Конькобежец проходит закругление беговой дорожки стадиона. Центр тяжести спортсмена имеет в этот момент времени величину касательного ускорения $a_\tau = 1{,}3 м/с^2$ и величину полного ускорения $a = 16 м/с^2$. Определить в этот момент времени радиус кривизны траектории центра тяжести h и угловую скорость этого воображаемого радиуса ω, если угловое ускорение радиуса $\varepsilon = 0{,}15 рад/с^2$. **Ответ:** $h = 8{,}7м$, $\omega = 1{,}35 рад/с$.

Задача 2.18. Определить угловые скорости $\omega_{сек}, \omega_{мин}, \omega_{час}$, угловые ускорения $\varepsilon_{сек}, \varepsilon_{мин}, \varepsilon_{час}$, линейные скорости $v_{сек}, v_{мин}, v_{час}$, касательные $a_\tau^{сек}, a_\tau^{мин}, a_\tau^{час}$, нормальные $a_n^{сек}, a_n^{мин}, a_n^{час}$ и полные $a^{сек}, a^{мин}, a^{час}$ ускорения концов секундной, минутной и часовой стрелок часов, если их длины, соответственно, равны $l_{сек} = 0{,}09м$, $l_{мин} = 0{,}08м$, $l_{час} = 0{,}06м$. **Ответ:** $\omega_{сек} = 0{,}105 рад/с$, $\omega_{мин} = 0{,}0017 рад/с$, $\omega_{час} = 0{,}00015 рад/с$, $\varepsilon_{сек} = \varepsilon_{мин} = \varepsilon_{час} = 0$,

$a_\tau^{сек} = a_\tau^{мин} = a_\tau^{час} = 0$, $v_{сек} = 0{,}0094 м/с$, $v_{мин} = 0{,}00014 м/с$, $v_{час} = 0{,}0000087 м/с$, $a_n^{сек} = a^{сек} = 0{,}001 м/с^2$, $a_n^{мин} = a^{мин} = 2 \cdot 10^{-7} м/с^2$, $a_n^{час} = a^{час} = 1 \cdot 10^{-9} м/с^2$.

Задача 2.19. Гимнаст, раскачиваясь на «перекладине», в некоторый момент времени приобрел угловую скорость $\omega = 1{,}2 рад/с$ и угловое ускорение $\varepsilon = 2{,}5 рад/с^2$. Определить величину скорости v, касательного a_τ, нормального a_n и полного a ускорений центра тяжести гимнаста, если расстояние от центра тяжести тела гимнаста до «перекладины» равно $L = 1{,}6 м$. **Ответ:** $v = 1{,}92 м/с$, $a_\tau = 4{,}0 м/с^2$, $a_n = 2{,}3 м/с^2$, $a = 4{,}61 м/с^2$.

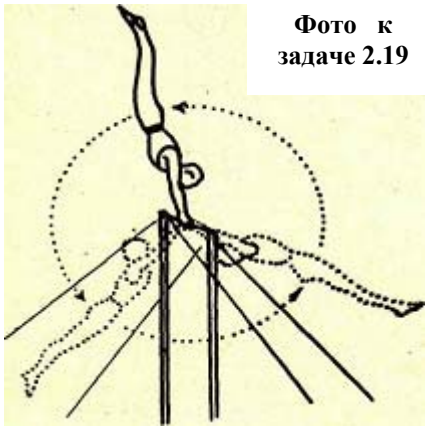


Фото к задаче 2.19

Фото к задаче 2.19

Задача 2.20. На фотографии к задаче показан разрез угловой шлифовальной машины (УШМ). Ведущая коническая шестерня 1 малого диаметра соединена с якорем электродвигателя и вращается относительно продольной оси машины. С другой стороны, ведущая шестерня сцеплена с конической ведомой шестерней большего диаметра 2 шпинделя, которая вращается вместе с осью шпинделя 4, перпендикулярного продольной оси машины. На оси шпинделя 4 жестко крепится шлифовальный круг 3 диаметром $d = 0{,}115 м$. Допустимо ли использование данного шлифовального круга, если известно, что якорь электродвигателя вращается с равномерной скоростью, делая $n_1 = 30000 об/мин$, отношение числа зубьев шестерен $z_2 / z_1 = 3$, а максимально допустимая линейная скорость движения точек, лежащих на внешнем контуре шлифовального диска, равна $v = 80 м/с$. Расчетная схема приведена на рис. к задаче. **Ответ:** Допустимо.

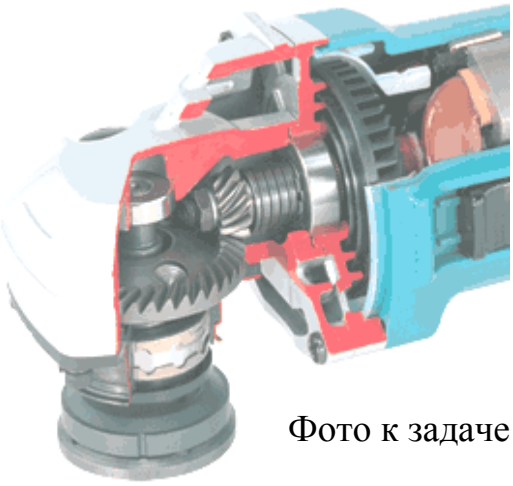


Фото к задаче 2.20

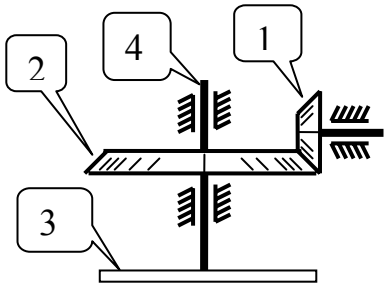


Рис. к задаче 2.20

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется поступательным?
2. Сформулируйте и докажите основную теорему поступательного движения.
3. Запишите уравнения поступательного движения твердого тела.
4. Какое движение твердого тела называется вращательным движением твердого тела относительно неподвижной оси?
5. Как называются связи, с помощью которых закрепляется ось вращения твердого тела?
6. Запишите закон вращательного движения твердого тела и поясните его.
7. Как вычисляются угловая скорость и угловое ускорение вращающегося тела при известном законе вращения? В каких единицах они измеряются?
8. Какие вращения твердого тела называются равномерными вращениями и равнопеременными вращениями твердого тела? Получите законы этих вращений.
9. Опишите векторное представление угловой скорости и углового ускорения.
10. Опишите движение отдельной точки вращающегося твердого тела – плоскость движения, траекторию движения, направление движения.
11. Как вычисляются величины линейных скоростей, касательных, нормальных и полных ускорений точек вращающегося тела?
12. Как направлен вектор скорости произвольной точки вращающегося тела?
13. Выведите формулы для векторов касательного и нормального ускорений точек вращающегося тела.
14. Изобразите графически поля векторов скоростей, касательных ускорений и нормальных ускорений точек вращающегося тела.

ГЛАВА 3. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 3.1. Общие понятия и определения

3.1. Плоскопараллельным или плоским называется такое движение твердого тела, при котором каждая его точка движется в плоскости, параллельной некоторой фиксированной плоскости П (рис. 3.1).

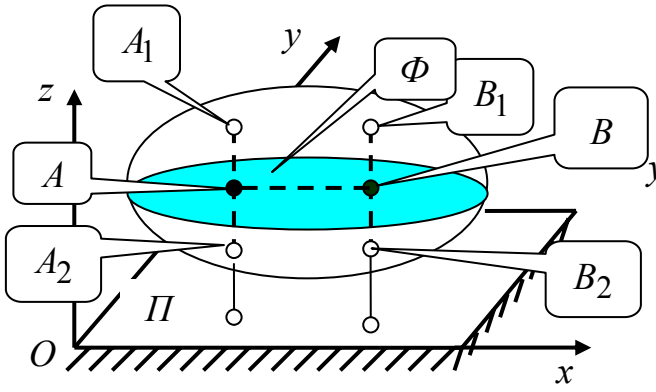


Рис.3.1

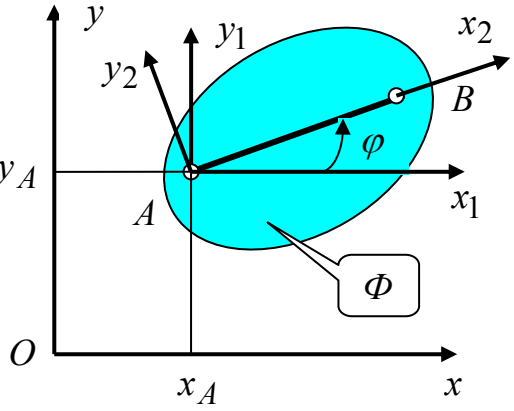


Рис.3.2

Уравнение плоскопараллельного движения твердого тела

При плоскопараллельном движении (рис. 3.1) любое сечение тела $Ф$, параллельное плоскости $П$, должно оставаться параллельным плоскости $П$ в процессе всего движения. В сечение $Ф$ выберем произвольную точку A и проведем через нее прямую, перпендикулярную к плоскостям $Ф$ и $П$. В процессе плоскопараллельного движения тела эта прямая остается параллельной самой себе, следовательно, она движется поступательно. Тогда все точки тела, лежащие на этой прямой, например, A, A_1, A_2 будут иметь одинаковые скорости, ускорения и траектории. Следовательно, достаточно знать движение точки A в сечения $Ф$, чтобы знать движение любой точки тела, лежащей на рассматриваемой прямой. Аналогично можно взять любую другую точку сечения $Ф$, например, точку B, и получить тот же вывод. Отсюда следует, что плоскопараллельное движение тела будет известно, если будет известно движение фигуры $Ф$.

Вывод. Изучение плоскопараллельного движения твердого тела сводится к изучению движения произвольного сечения тела, параллельного плоскости П.

Движение любой плоской фигуры Φ в неподвижной системе координат Oxy на плоскости, при известных форме и размерах фигуры Φ, определяется по движению произвольного отрезка AB известной длины и ориентации по отношению к фигуре (рис.3.2). Точку A на Φ назовем полюсом, второй конец отрезка обозначим точкой B. Положение отрезка AB на плоскости (следовательно, и положение фигуры) будет в каждый момент времени определено, если знать координаты полюса и угол $\varphi(t)$, который отрезок AB образует с осью Ox. Положение точки B можно определить по известной длине отрезка AB.

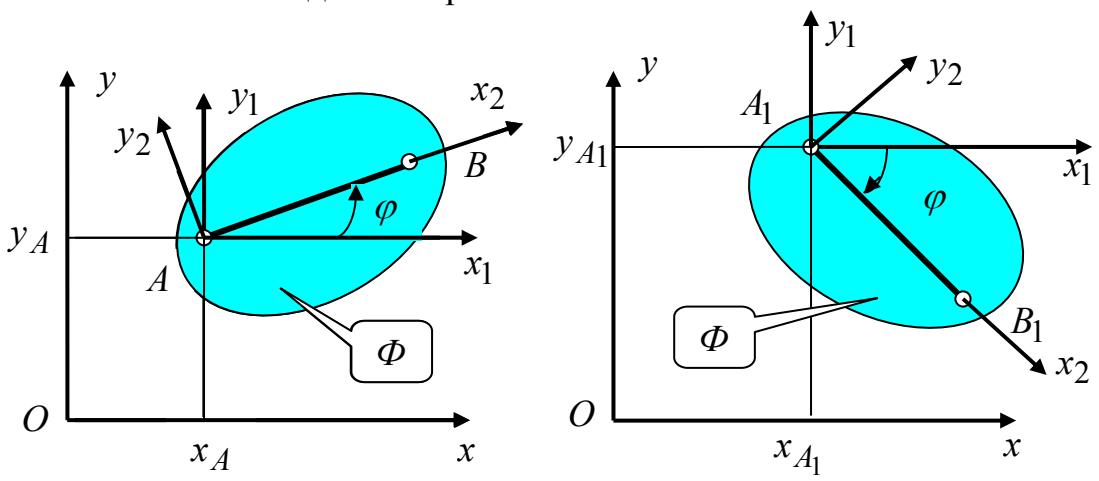


Рис.3.3

С фигурой свяжем две системы координат Ax_1y_1 и Ax_2y_2. Оси Ax_1 и Ay_1 в процессе движения остаются параллельными неподвижным осям Ox, Oy, то есть оси системы координат Ax_1y_1 при движении фигуры Φ движутся поступательно. Движение фигуры Φ в системе координат Ax_1y_1 есть движение вращательное относительно подвижной оси Az, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости чертежа (на рисунке не показана). Система координат Ax_2y_2 жестко связана с фигурой и движется вместе с ней. Если фигура Φ в процессе движения поворачивается, то повернется и система координат Ax_2y_2. Поворот фигуры, происходящий в процессе ее движения относительно точки A, можно теперь определить углом поворота $\varphi(t)$ между осями Ax_1 и Ax_2 (рис.3.2) или, что то же самое, между осями Ox и Ax_2. Окончательно, движение отрезка AB определяется уравнениями:

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t). \qquad (3.1)$$

Эти же уравнения определяют движение плоской фигуры Φ, а по движению фигуры Φ определяется движение и самого тела.

3.2. Уравнения (3.1) называются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

Из уравнений (3.1) видно, что в общем случае движение плоской фигуры можно мысленно представить в виде комбинации двух движений – поступательного движения фигуры (координаты полюса x_A, y_A с течением времени меняются, $\varphi = const$) и вращательного движения относительно некоторой оси, проходящей через полюс A, перпендикулярно к плоскости фигуры (полюс неподвижен $x_A = const$, $y_A = const$, а фигура вращается $\varphi = \varphi(t)$). Действительно, пусть за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ тело совершило плоскопараллельное движение, и фигура Φ (отрезок AB) заняла новое положение, показанное на рис. 3.3. Это могло произойти, как минимум, двумя способами, изображенными на рис. 3.4, варианты а) и б).

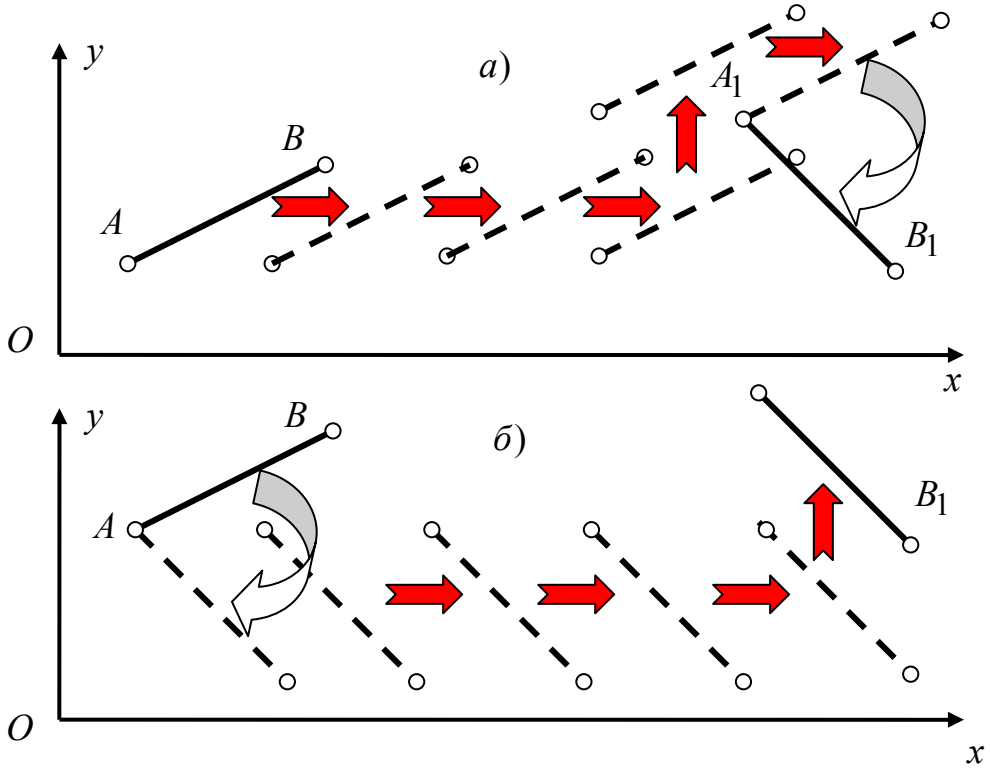


Рис. 3.4

Первый вариант, тело движется так, что угол φ некоторое время остается постоянным, пока точка A не займет положение точки A_1. Координаты точки A, $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$, в течении этого промежутка времени меняются, но отрезок AB остается параллельным самому себе, то есть фигура (читай тело) пока совершает поступательное движение. Достигнув точки A_1, отрезок AB поворачивается и совершает вращение относительно оси, проходящей через точку A_1 перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 3.4а). Во втором случае отрезок AB сначала поворачивается относительно точки A так, чтобы отрезок AB стал

параллельным отрезку A_1B_1, а затем, двигаясь поступательно, приходит в положение A_1B_1 (рис. 3.4б). Конечно, на практике части механизмов одновременно совершают и мгновенно поступательные, и мгновенно вращательные движения, но понимание механики явления позволяют в целом ряде случаев облегчить вычисления при определении кинематических характеристик.

3.3. Плоскопараллельное движение можно рассматривать как «сумму» поступательного и вращательного движений.

Зная уравнения движения (3.1), можно определить проекции вектора скорости $\bar{v}_A$ точки A, которая принята за полюс, и проекции вектора ускорения полюса $\bar{a}_A$, угловую скорость и ускорение фигуры Φ в ее вращении относительно полюса A. Полюс – это точка. По формулам кинематики точки (1.33), (1.38), (2.5), (2.7) получим:

$$v_{Ax}=\frac{dx_A}{dt}=\dot{x}_A;\quad v_{Ay}=\frac{dy_A}{dt}=\dot{y}_A\ ; \tag{3.2}$$

$$a_{Ax}=\frac{d^2x_A}{dt^2}=\ddot{x}_A;\quad a_{Ay}=\frac{d^2y_A}{dt^2}=\ddot{y}_A\ ; \tag{3.3}$$

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi};\quad \varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\ddot{\varphi}\ ; \tag{3.4}$$

$$v_A=\sqrt{v_{Ax}^2+v_{Ay}^2};\quad a_A=\sqrt{a_{Ax}^2+a_{Ay}^2}\ . \tag{3.5}$$

Формулы (3.2), (3.3), (3.5) определяют кинематические характеристики поступательной составляющей движения тела, формулы (3.4) определяют кинематические характеристики вращательной составляющей движения. За полюс можно принять любую точку плоской фигуры. Но на практике в качестве полюса A выбирается точка фигуры, кинематические характеристики которой известны или могут быть относительно просто определены. Легко показать, что если в качестве полюса будет выбрана другая точка A^*, то ее скорость и ускорение будут другими, но угловая скорость ω и угловое ускорение ε остаются неизменными.

3.4. Другими словами, угловая скорость и угловое ускорение твердого тела при плоскопараллельном движении не зависят от выбора полюса.

Зная уравнения движения (3.1) точки A, можно записать уравнения движения точки B плоской фигуры Ф. Пусть x_B, y_B – координаты точки B в неподвижной системе координат Oxy. Тогда (см. рис. 3.3) будем иметь:

$$x_B = x_A + AB \cdot cos\varphi(t), \qquad y_B = y_A + AB \cdot \sin\varphi(t). \tag{3.6}$$

§ 3.2. Определение вектора скорости произвольной точки плоской фигуры

1. Теорема о геометрическом сложении векторов скоростей

3.5. Скорость любой точки B плоской фигуры геометрически складывается из скорости произвольно выбранного полюса A и скорости, которую точка B получает при вращении фигуры вокруг этого полюса

$$\boxed{\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}\ .} \tag{3.7}$$

Доказательство. Рассмотрим плоскопараллельное движение твердого тела и на фигуре Ф выберем две точки – полюс A и произвольную точку B (рис. 3.5).

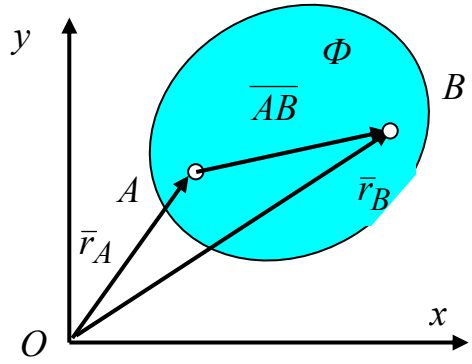


Рис. 3.5

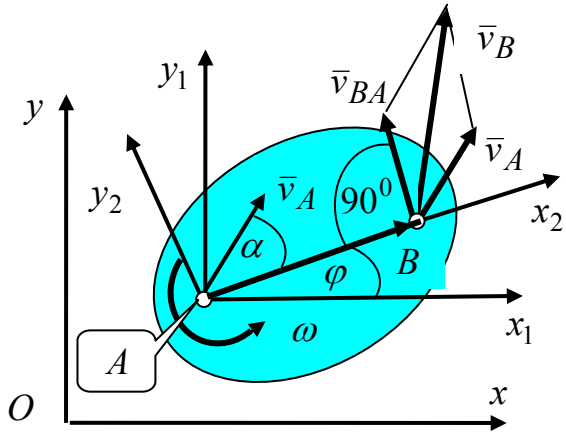


Рис.3.6

Движение точек в системе координат Oxy определим векторным способом, задав векторы $\bar{r}_A, \bar{r}_B$. Положение точки B по отношению к точке A в осях Ax_1y_1 определим радиус-вектором $\overline{AB}$. Тогда $\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}$. Продифференцируем последнее равенство по времени и с учетом (1.13) получим:

$$d\bar{r}_B / dt = d\bar{r}_A / dt + d\,\overline{AB} / dt\ .$$

Здесь $d\bar{r}_B/dt=\bar{v}_B$, $d\bar{r}_A/dt=\bar{v}_A$–векторы скорости точек B, A, соответственно.

Рассмотрим второе слагаемое в правой части – вектор $d\overline{AB}/dt$. Как может изменяться с течением вектор $\overline{AB}$? Модуль вектора $\left|\overline{AB}\right|=const$, так как расстояние между двумя точками твердого тела не меняется. Переменность вектора $\overline{AB}$ проявляется только в переменности его направления. Этот вектор в процессе движения может поворачиваться вместе с фигурой Ф относительно полюса A, как показано на рис.3.6, 3.7. Следовательно, $d\overline{AB}/dt$ – это вектор скорости, приобретенной точкой B от вращения отрезка AB (фигуры Ф) вокруг полюса A. Обозначая $\bar{v}_{BA}=d\overline{AB}/dt$, приходим к формуле (3.7). Что и требовалось доказать.

3.6. Вектор скорости $\bar{v}_{BA}$ направлен по касательной к окружности – траектории точки B во вращательном движении отрезка AB в сторону вращения фигуры. $\bar{v}_{BA}$ перпендикулярен к радиусу траектории AB. Угловая скорость фигуры ω определяется по формулам (3.4).

$$\bar{v}_{BA}=(\bar{\omega}\times\overline{AB}),\qquad v_{BA}=\omega\cdot AB,\qquad \bar{v}_{BA}\perp AB. \tag{3.8}$$

На рис.3.7 показаны направления вектора скорости $\bar{v}_{BA}$ при различных положениях вектора $\overline{AB}$.

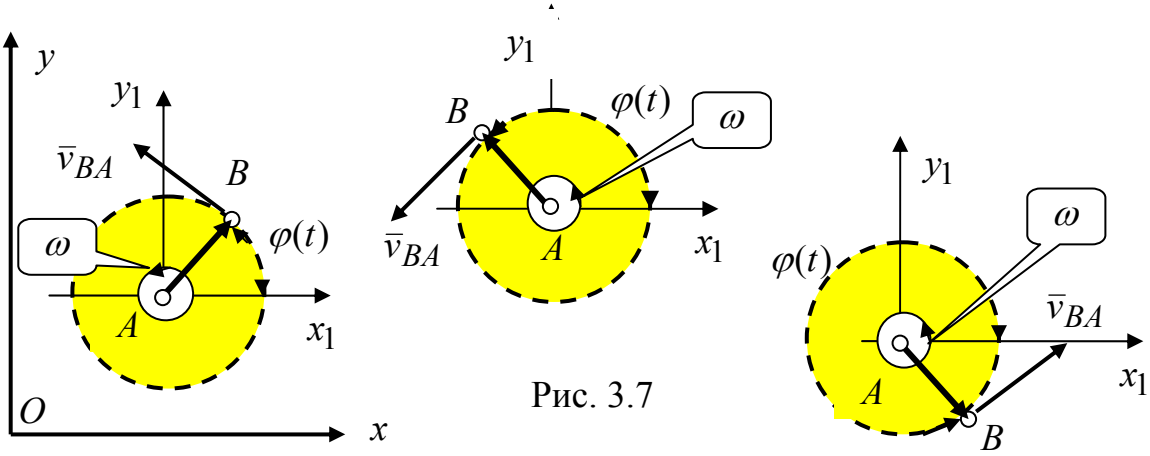


Рис. 3.7

Значение теоремы. ***1.*** *Эта теорема является основной теоремой для скоростей,* позволяющей определять скорости отдельных точек тела при плоскопараллельном движении. Она не только раскрывает механизм образования скорости отдельной точки, но позволяет получить и другие методы вычисления скоростей точек плоской фигуры. ***2.*** *Равенство (3.7) позволяет найти любой из трех векторов $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$, $\bar{v}_{BA}$ по известным*

двум другим векторам. Например, непосредственно по формуле (3.7) вектор $\bar{v}_B$ можно найти двумя способами: геометрическим построением (рис. 3.6.) и по известным проекциям векторов скоростей на выбранные оси координат (этот метод часто называют «методом проекций»). Рассмотрим их по отдельности.

1.1. Определение вектора скорости точки B с помощью геометрических построений

1. Пусть известна скорость полюса $\bar{v}_A$ и известна угловая скорость фигуры ω. По (3.8) определяется величина и направление вектора $\bar{v}_{BA}$. Он прикладывается в точке B и направляется в сторону вращения отрезка AB (фигуры Ф). Мысленно из точки A в точку B параллельно самому себе переносится вектор скорости $\bar{v}_A$. На векторах $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_{BA}$ строится параллелограмм (рис.3.6), диагональ которого и определяет вектор скорости $\bar{v}_B$. Все построения делаются в выбранном масштабе, длины измеряются линейкой, углы – транспортиром. Искомый вектор будет определен с погрешностью, характерной для чертежных работ.

2. Если рисунок из векторов скоростей будет носить эскизный характер, то надо знать свойства параллелограммов и треугольников, теоремы синусов и косинусов (см. приложение). Задача сведется к вычислительной работе по определению диагонали параллелограмма по известным его сторонам и углам наклона сторон к осям координат, то есть к решению школьной геометрической задачи. По теореме косинусов:

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 + 2 \cdot v_A \cdot v_{BA} \cdot \cos\gamma}\,, \quad \gamma = 90^0 - \alpha\ .} \qquad (3.9)$$

Угол γ – угол между слагаемыми векторами $\bar{v}_A$ *и* $\bar{v}_{BA}$. Искомый вектор скорости определяется с погрешностью, зависящей от погрешности вычислений.

1.2. Метод проекций для определения векторов скоростей точек плоской фигуры

Спроецируем уравнение (3.7) на неподвижные оси Oxy или, что то же самое, на оси системы координат Ax_1y_1. Получим два уравнения для определения любых двух скалярных величин:

$$\boxed{v_{B,x} = v_{A,x} + v_{BA,x}\,, \qquad v_{B,y} = v_{A,y} + v_{BA,y}\,.} \qquad (3.10)$$

Если удается найти $v_{B,x}$, $v_{B,y}$, то по проекциям вектора находится и сам вектор $\bar{v}_B$. Модуль вектора скорости точки B определяется по формуле:

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_{B,x}^2 + v_{B,y}^2}\ .} \qquad (3.11)$$

Пример 3.1. Кривошип OA кривошипно-ползунного механизма OAB длиной $r = 0{,}5м$ равномерно вращается относительно неподвижной точки O с угловой скоростью $\omega_1 = 2рад/с$, приводя в движение весь механизм. Определить мгновенную скорость точки B ползуна и угловую скорость ω_2 шатуна AB в показанном на рисунке положении механизма, если длина шатуна $AB = OA$, $\alpha = 30^0$. В точках A и B имеют место шарнирные соединение (подшипники).

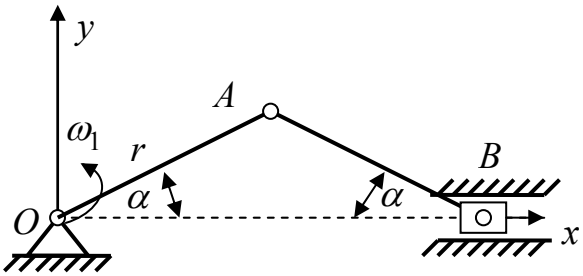


Рис. к примеру 3.1а

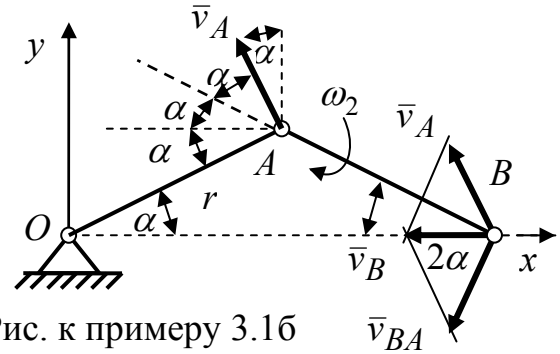


Рис. к примеру 3.1б

Решение. Кривошипно-шатунный механизм совершает плоскопараллельное движение. При этом кривошип вращается относительно неподвижной точки O против часовой стрелки. Модуль вектора скорости точки A кривошипа OA может быть определен по формуле (2.16). $v_A = h\omega_1 = OA \cdot \omega_1 = 1 \cdot 0{,}5 = 1(м/с)$. Сам вектор $\bar{v}_A$ направлен перпендикулярно к кривошипу OA в сторону его вращения, как показано на рис. к примеру 3.1б. Но, как легко видеть, точка A является общей точкой для кривошипа OA и шатуна AB. Поэтому при определении скорости точки B, принадлежащей шатуну AB, по формуле (3.7) или из системы уравнений (3.10), точку A примем за полюс. Ползун B совершает прямолинейное поступательное движение, что следует из устройства этой связи. Все точки ползуна, включая точку B, совершают прямолинейное движение. Точка B движется к точке O. Поэтому и вектор скорости $\bar{v}_B$ точки B направлен к точке O. Далее перенесем мысленно в точку B вектор скорости $\bar{v}_A$. Это принято делать для наглядности геометрических построений по формуле (3.7) и одновременного контроля механики явления. Направление вектора скорости $\bar{v}_{BA}$ известно – он перпендикулярен к оси шатуна AB и может быть направлен или так, как показано на рис. к примеру, или в противоположную сторону. Но по (3.7) вектор $\bar{v}_B$, направление которого точно установлено, должен быть диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\bar{v}_A$ (этот вектор известен и по направлению и по величине) и $\bar{v}_{BA}$, для которого

изначально известна только линия действия. Поэтому вектор $\bar{v}_{BA}$ направлен так, как показано на рис. к примеру. В точке B строится параллелограмм, соответствующий формуле сложения векторов скоростей (3.7). Если построения выполнены строго в масштабе, то в данном примере по известной одной стороне параллелограмма длиной v_A можно найти и диагональ параллелограмма и другую его сторону. Но мы воспользуемся методом проекций. Спроецируем уравнение (3.7) на оси неподвижной системы координат Oxy. (Проецируем каждый вектор и найденную проекцию подставляем в (3.10)).

Проекция уравнения (3.7) на ось Ox: $-v_B = -v_A \cdot \cos 60^0 - v_{BA} \cdot \cos 60^0$. (1)

Проекция уравнения (3.7) на ось Oy: $0 = v_A \cdot \sin 60^0 - v_{BA} \cdot \sin 60^0 = 0$. (2)

Из второго уравнения получим $v_{BA} = v_A = 1(м/с)$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем. $-v_B = -v_A \cdot 0{,}5 - v_A \cdot 0{,}5 = -v_A$. Отсюда $v_B = v_A = 1(м/с)$. Угловую скорость шатуна AB определяем по формуле (3.8). $\omega_2 = v_{BA}/BA = 1/0{,}5 = 2(рад/с)$. **Ответ:** $v_B = 1м/с$, $\omega_2 = \omega_1 = 2рад/с$.

2. Теорема о проекциях скоростей

3.7. Теорема. Проекции векторов скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ двух точек A и B твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны.

$$\boxed{v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha .} \qquad (3.12)$$

Здесь v_A, v_B – модули векторов скоростей соответствующих точек, α, β – углы, которые образуют векторы $\bar{v}_A, \bar{v}_B$ с осью $A\eta$. По теореме о проекциях скоростей можно определить одну из четырех величин, входящих в (3.12). Три другие величины должны быть известны.

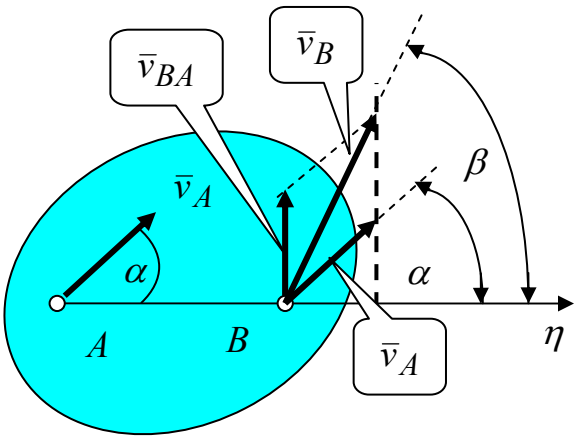


Рис. 3.8

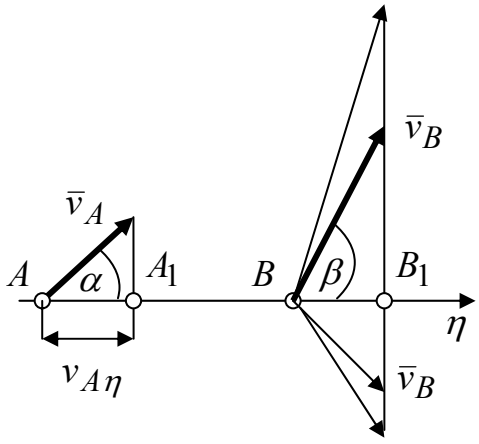


Рис. 3.9

Доказательство. Рассмотрим движение двух произвольных точек A и B твердого тела, совершающего плоскопараллельное движение (рис.3.8).

Пусть точка A выбрана за полюс. Проведем через точки A и B ось координат $A\eta$. Точки выбраны на горизонтальной оси. Это не уменьшает общности рассуждений, но облегчает восприятие рис. 3.8. Вектор скорости $\bar{v}_B$ в точке B находится по формуле (3.7): $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$. Соответствующие построения показаны на рис. 3.8 и раньше на рис. 3.6. При этом можно пока предполагать, что векторы $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_{BA}$ известны. Спроецируем равенство (3.7) на ось $A\eta$. Другими словами, спроецируем три вектора, показанные на рис. 3.8 в точке B, на ось $A\eta$. Учитывая, что вектор $\bar{v}_{BA}$ перпендикулярен к оси $A\eta$ и его проекция на ось равна нулю, получим: $v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$. Что и требовалось доказать.

Значение теоремы. ***1.*** *Теорема позволяет найти одну из входящих в (3.12) алгебраических величин по трем другим известным величинам.* ***2.*** *Формула (3.12) допускает простую механическую интерпретацию движения плоской фигуры.* Действительно, $v_A \cos\alpha = v_{A\eta}$, $v_B \cos\beta = v_{B\eta}$ – это алгебраические величины скоростей двух точек фигуры в направлении оси $A\eta$. По (3.12) они равны. Другими словами, на сколько в процессе движения точка A приближается к точке B за промежуток времени Δt в направлении $A\eta$, на столько же точка B удаляется от точки A в этом же направлении. Значит, расстояние между точками A и B при движении абсолютно твердого тела не изменяется. Понятно, что этот факт не зависит от выбора точек, а (3.12) можно рассматривать как математическое выражение гипотезы об абсолютно твердом теле. ***3.*** *По известному направлению движения одной точки, например, по направлению вектора скорости $\bar{v}_A$, можно определить направление движения точки B.* В качестве примера на рис.3.9 показано возможное направление движения точки B для заданного вектора $\bar{v}_A$. Точка B может двигаться только вправо – вверх или вправо – вниз. Длина вектора $\bar{v}_B$ тоже может меняться в широких пределах, но только так, чтобы модуль проекции вектора $\bar{v}_B$ на ось $A\eta$ был равен отрезку BB_1. «Насильственное» нарушение указанных требований в реальных механизмах приводит к разрушению механизма «заклиниванием».

Пример 3.2. Воспользовавшись условием примера 3.1, найти скорость точки B (рис. к примеру 3.1.а и 3.1.б), пользуясь теоремой о проекциях скоростей.

Решение. Если бы задачу пришлось решать с самого начала, то пришлось бы вначале определить направления векторов скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ в точках A и B, а также модуль вектора скорости $v_A = 1 м/с$, как это было сделано в примере 3.1. Далее пришлось бы мысленно провести ось, например, $B\eta$, проходящую через точки A и B и направленную от точки B к точке A. Далее определить углы, которые векторы $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ образуют с этой осью, и которые показаны на рис. к примеру 3.1б. Наконец, записать разрешающее уравнение (3.12) $v_A \cdot \cos\alpha = v_B \cdot \cos\alpha$. Отсюда

$v_B = v_A = 1м/с$, что совпадает с результатом предыдущего примера.

Замечание. Пользуясь только теоремой о проекциях скоростей, определить угловую скорость шатуна AB не можем.

О распределении скоростей точек на отрезке АВ

Как распределены скорости других точек по отрезку AB? Возьмем произвольную точку C между точками A и B и построим вектор ее скорости. Можно показать, что концы векторов $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$, $\bar{v}_C$ лежат на одной прямой A_1B_1.

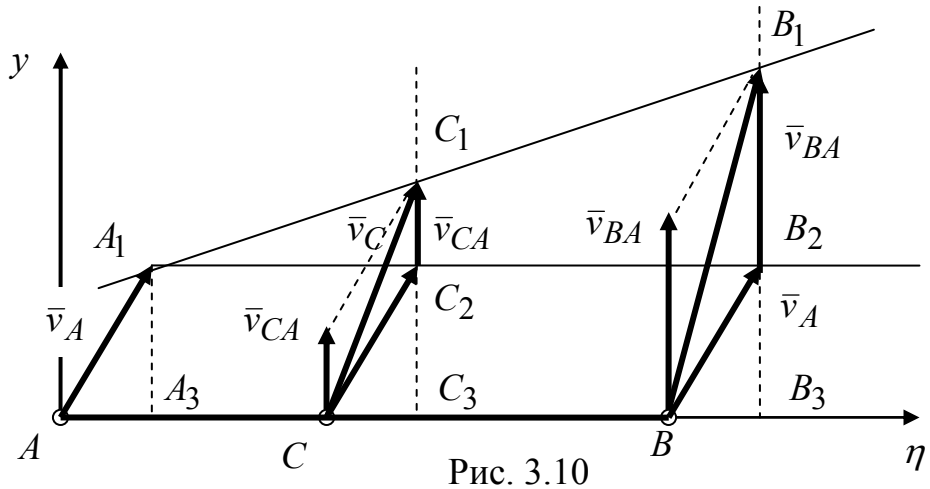


Рис. 3.10

Действительно, если в качестве полюса принять точку A, то по формуле (3.8) будем иметь: $v_{CA} = \omega \cdot AC$, $v_{BA} = \omega \cdot AB$. Отсюда $v_{CA} / AC = v_{BA} / AB$. Другими словами, $C_1C_2 / A_1C_2 = B_1B_2 / A_1B_2$. Это означает, что концы векторов скоростей $\bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_C$ всех точек отрезка AB лежат на одной прямой A_1B_1. Отсюда следует, что треугольники $A_1C_1C_2$ и треугольник $A_1B_1B_2$ – подобны. Отсюда $A_1C_1 / A_1B_1 = A_1C_2 / A_1B_2$ или $A_1C_1 / A_1B_1 = AC / AB$, или $A_1C_1 / C_1B_1 = AC / CB$.

3.8. Следовательно, чтобы при известных векторах скоростей двух точек $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ определить вектор скорости $\bar{v}_C$ точки C, лежащей между ними, надо в точке C построить вектор $\bar{v}_A$. Через конец этого вектора провести перпендикуляр к отрезку AB до пересечения с прямой A_1B_1 и соединить точки C и C_1.

Спроектируем уравнение (3.7) на ось $Ay \perp AB$ (рис.3.10) и получим:

$$v_{By} = v_{Ay} + v_{BA} = v_{Ay} + \omega \cdot AB .$$

Отсюда следует еще одна формула для угловой скорости плоской фигуры:

$$\boxed{\omega = \left| v_{By} - v_{Ay} \right| / AB \ .} \qquad (3.13)$$

3. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей (МЦС)

3.9. Мгновенным центром скоростей МЦС (иногда обозначают p) называется такая точка плоской фигуры Ф, скорость которой в данный момент времени равняется нулю.

В случае движения тел произвольной формы МЦС отдельных тел может и не лежать в пределах тела, но обязательно лежит в плоскости движения тел.

3.10.Теорема. У плоской фигуры, совершающей плоскопараллельное (не поступательное) движение, в каждый момент времени существует единственная точка p, скорость которой в данный момент времени равна нулю $v_p = 0$.

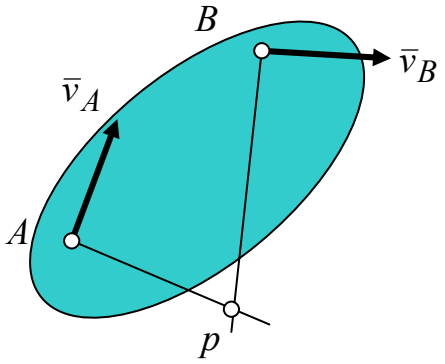


Рис. 3.11

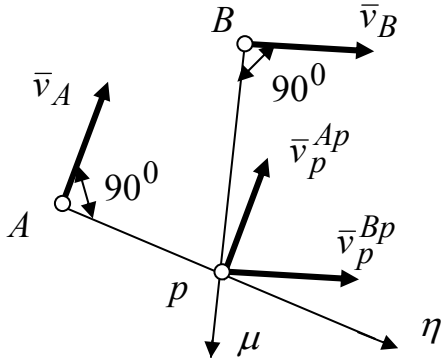


Рис. 3.12

Доказательство. Пусть известны векторы скоростей двух точек фигуры $\bar{v}_A$ *и* $\bar{v}_B$. Восстановим перпендикуляры в точках и найдем точку пересечения p (рис. 3.12). Докажем, что скорость этой точки плоскости равна нулю $\bar{v}_p = 0$. Доказательство проведем методом от противного. Через точки A *и* B в направлении МЦС проведем две оси $A\eta$ и $B\mu$ (рис.3.12*)*. Воспользуемся теоремой о проекциях скоростей (3.12) для оси $A\eta$ и найдем вектор скорости $\bar{v}_p$. По построению проекция вектора $\bar{v}_A$ на ось $A\eta$ равна нулю, так как он перпендикулярен оси. Тогда и проекция вектора $\bar{v}_p$ на эту ось равна нулю. Это возможно в двух случаях: или $\bar{v}_p$=0, или $\bar{v}_p \perp A\eta$. Пусть скорость точки p не равна нулю $\bar{v}_p \neq 0$. Тогда $\bar{v}_p$ *II* $\bar{v}_A$. Применяя теорему к точкам B и p, приходим к выводу, что $\bar{v}_p$ *II* $\bar{v}_B$. Другими словами, приходим к противоречию. Одна точка в один и тот же момент времени не может двигаться в двух разных направлениях.

Следовательно, $\bar{v}_p$=0. Что и требовалось доказать. Отсюда следует правило построения МЦС.

3.11. Чтобы построить мгновенный центр скоростей плоской фигуры Φ по известным векторам скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ двух точек A и B, надо в точках A и B восстановить перпендикуляры к векторам скоростей и найти их точку пересечения p (рис. 3.11).

Чем же полезна точка, которую назвали мгновенным центром скоростей? Выберем точку p за полюс. Тогда скорость произвольной точки B по формуле (3.7) примет вид: $\bar{v}_B = \bar{v}_p + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_{Bp}$, так как $\bar{v}_p$=0.

3.12. Величину мгновенной скорости любой точки плоской фигуры, совершающей плоскопараллельное движение, можно вычислить по формуле (3.8) как произведение угловой скорости тела на расстояние от точки до мгновенного центра скоростей.

$$\boxed{\bar{v}_A = \bar{v}_{Ap}\ ,\ \bar{v}_B = \bar{v}_{Bp}.} \qquad \boxed{v_B = \omega \cdot pB\ ,\ \ v_A = \omega \cdot pA\ .} \qquad (3.14)$$

Здесь ω – угловая скорость фигуры при плоскопараллельном движении. Вектор скорости любой точки A тела перпендикулярен к отрезку Ap, соединяющему точку A с мгновенным центром скоростей, и направлен в сторону вращения тела (по направлению круговой стрелки ω). Формулы (3.14) позволяют по известной скорости точки и мгновенного центра скоростей определить угловую скорость фигуры.

$$\boxed{\omega = v_A / Ap = v_B / Bp\ .} \qquad (3.15)$$

Сравнивая величины скоростей точек для одного и того же момента времени, то есть для одной и той же угловой скорости ω, из (3.14) имеем:

$$\boxed{\frac{v_A}{pA} = \frac{v_B}{pB}\ .} \qquad (3.16)$$

Из (3.14) можно найти одну неизвестную величину, а другие три должны быть определены заранее. Ниже приводятся примеры, иллюстрирующие некоторые правила и приемы определения МЦС.

Пример 3.3. Брус AB движется в плоскости Oxy, опираясь точками A и B на две взаимно перпендикулярные идеально гладкие плоскости, так что его центр тяжести C приближается к горизонтальной оси Ox. Определить положение МЦС (точку p) бруса в показанный на рисунке момент времени.

Решение. Движение бруса ограничено связями в виде двух взаимно перпендикулярных абсолютно гладких плоскостей. По условию задачи сечение бруса

плоскостью Oxy, которое показано на рисунке, в процессе движения остается в плоскости Oxy. Следовательно, брус совершает плоскопараллельное движение.

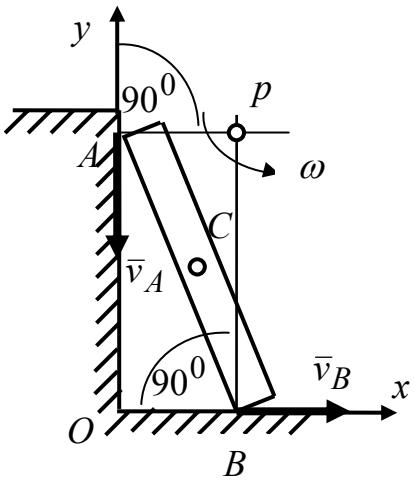


Рис. к примеру 3.3

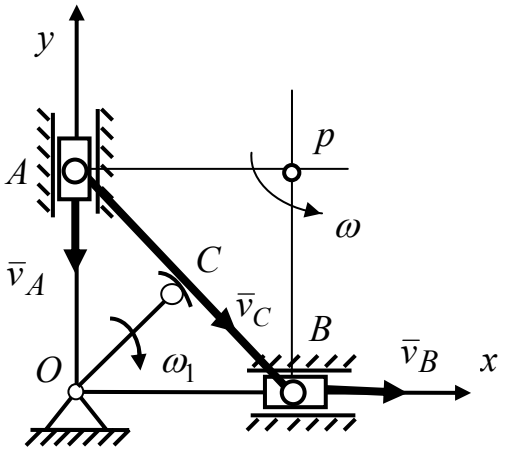


Рис. к примеру 3.4

Известны траектории движения точек A и B – это оси Oy и Ox, соответственно. Следовательно, траекториями точек являются прямые линии. Из кинематики точки знаем, что вектор скорости точки всегда направлен по касательной к траектории этой точки. Касательная к прямой линии совпадает с самой прямой. Так как траекториями точек A и B являются прямые, то можем утверждать, что векторы скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ «лежат» на осях Oy и Ox, соответственно. Но в какую сторону они направлены? По условию задачи точка C перемещается вниз. Поскольку брус является абсолютно твердым телом, то повседневный опыт подсказывает, что точка A тоже перемещается вниз. Поэтому вектор перемещения точки A, не показанный на рисунке, направлен строго вниз. Вектор скорости точки при любом характере движения сонаправлен с вектором перемещения, а для прямолинейных траекторий их направления просто совпадают (см. главу 1). Следовательно, вектор скорости $\bar{v}_A$ направлен вниз, как показано на рисунке.

Направление вектора скорости $\bar{v}_B$ в данной задаче можно найти интуитивно, но это бывает невозможно сделать в более сложных задачах. Поэтому воспользуемся теоремой 3.5 о проекциях скоростей двух точек на ось, проходящую через эти точки, считая направление вектора $\bar{v}_A$ установленным. Проекции векторов $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ на ось, проходящую через точки A и B будут равны, если вектор $\bar{v}_B$ направить по траектории движения вправо, как показано на рисунке (см. еще пример 3.2). Чтобы найти МЦС, теперь достаточно по правилу 3.9 восстановить перпендикуляры в точках A и B и найти точку их пересечения p. Итак, брус AB совершает мгновенно вращательное движение против часовой стрелки относительно точки p.

Пример 3.4. Линейка эллипсографа приводится в движение кривошипом OC. Определить положение мгновенного центра скоростей линейки в показанном на рисунке положении.

Решение. В этом примере известны траектории движения трех точек линейки – точек A, B, C. Вектор скорости точки C перпендикулярен к OC и устремлен по направлению вращения кривошипа – по направлению дуговой стрелки ω_1. Траектории точек A, B – прямые, что навязано конструкцией механизма (связями-ползунами). Зная

направление вектора $\bar{v}_C$, по теореме о проекциях скоростей получаем направления векторов $\bar{v}_A, \bar{v}_B$. По правилу 3.9 получаем положение точки p, направление угловой скорости ω и направление мгновенного вращения линейки эллипсографа.

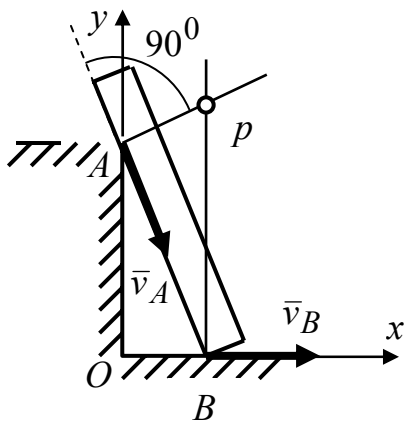


Рис. к примеру 3.5

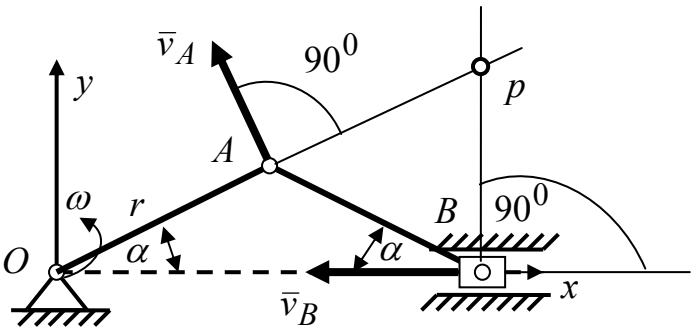


Рис. к примеру 3.6

Пример 3.5. Брус *AB* движется в плоскости *Oxy*, опираясь точками *A* и *B* на две взаимно перпендикулярные идеально гладкие плоскости так, что его центр тяжести *C* приближается к горизонтальной оси *Ox*. Одна из плоскостей вырождается в точку A. Определить положение МЦС (точку *p*) бруса в показанный на рисунке момент времени.

Решение. Мгновенный центр скоростей определяется, как в примере 3.3, но требует пояснения определение направления вектора скорости $\bar{v}_A$ точки A бруса, показанное на рис. к примеру. Если взять за тело отсчета брус, то вектор скорости угла A будет направлен по касательной к его траектории, то есть по краю бруса вверх. Следовательно, точки самого бруса, касающиеся неподвижного угла, имеют векторы скоростей, направленные по краю бруса вниз, как показано на рисунке. Положение точки p определяется из геометрических построений по правилу 3.9.

Пример 3.6. Кривошипно-шатунный механизм с известными длинами кривошипа и шатуна приводится в движение вращением кривошипа OA и совершает плоское движение. В точке B – ползун с осью, совпадающей с осью координат Ox. В показанном на рисунке положении механизма определить положение мгновенного центра скоростей шатуна AB.

Решение. Определим направление вектора скорости точки A. Точка принадлежит вращающемуся кривошипу OA, поэтому (см. гл. 2) вектор скорости перпендикулярен радиусу OA и направлен в сторону вращения – по направлению дуговой стрелки ω. Интересно отметить, что $\bar{v}_O = 0$, и точка O является для кривошипа не мгновенным, а просто центром вращения. Точка A – общая для кривошипа и шатуна, и оба тела в этой точке имеют одну и ту же скорость. Вектор скорости точки B должен лежать на оси Ox. Это навязано связью – ползуном. Применяя терему 3.5 о проекциях скоростей, определяем истинное направление вектора $\bar{v}_B$, показанное на рисунке. Положение мгновенного центра скоростей шатуна AB определяется теперь элементарно по правилу 3.9. Итак, механизм совершает плоское движение. Но при этом кривошип совершает **вращательное движение** относительно оси, проходящей через точку O, перпендикулярно к плоскости рисунка, а шатун AB **в данный момент времени совершает мгновенно вращательное**

движение относительно оси, проходящей через точку p, перпендикулярно плоскости рисунка.

Положение МЦС для некоторых частных случаев движения

1) Качение катка по плоскости без скольжения (без проскальзывания или, еще говорят, без «буксовки»).

Мгновенный центр скоростей находится в точке p, где каток касается плоскости. Действительно, точки плоскости неподвижны. Каток катится без скольжения. Следовательно, в точке касания скорости тел (катка и плоскости) должны быть одинаковыми и равными нулю. Если известна скорость точки O, то угловая скорость катка вычисляется по формуле: $\omega = v_0 / R$, где $R = pO$ – радиус катка. $v_B = \omega \cdot 2R = 2v_0$. Оказывается, что мгновенная скорость песчинки, прилипшей к колесу автомобиля в точке B, в два раза больше скорости точки оси O, которую мы видим на спидометре своего автомобиля. Вектор скорости точки A, лежащей на конце горизонтального диаметра, направлен к точке B, так как известно, что угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр, – прямой. Тогда, $v_A = \omega \cdot R\sqrt{2}$.

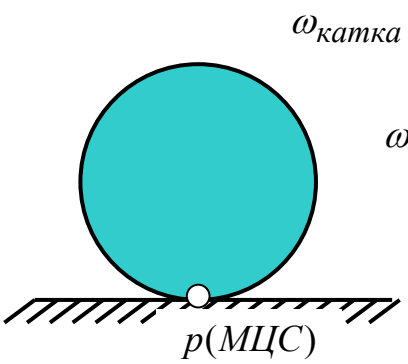


Рис.3.13

$\omega_{катка} = \omega = v_B / PB$

или

$\omega = v_A / PA$

или

$\omega = v_O / PO$

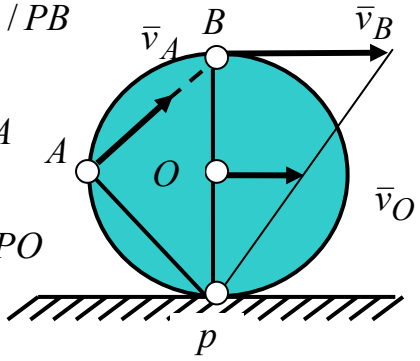


Рис.3.14

2) Векторы скоростей двух точек плоской фигуры $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ параллельны, направлены в одну сторону, но точки не лежат на общем перпендикуляре, восстановленном к одному из векторов скоростей (рис. 3.15). Мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и угловая скорость фигуры ω равна нулю.

$$\boxed{\omega_{AB} = 0\ .} \qquad (3.17)$$

Действительно, по (3.14) $v_B = \omega \cdot pB$, $v_A = \omega \cdot pA$. При этом v_A и v_B – конечные величины. Параллельные прямые Ap и Bp пересекаются в бесконечности. Тогда по (3.15), $\omega = v_A / pA = v_B / pB = v_A / \infty = v_B / \infty = 0$ (МЦС не существует). Это означает, что тело в данный момент времени

совершает мгновенно поступательное движение, векторы скоростей всех точек тела параллельны и равны по модулю.

Пример 3.7. Кривошипно-шатунный механизм OAB приводится в движение вращением кривошипа OA с угловой скоростью ω_{OA}. Точка A одновременно принадлежит шатуну BA и кривошипу OA. Кривошип OA вращается относительно неподвижной оси Oz (на рисунке не показана), проходящей через точку O, перпендикулярно плоскости рисунка. Следовательно, вектор скорости $\bar{v}_A$ точки A направлен перпендикулярно к оси кривошипа OA в сторону вращения кривошипа. Вектор $\bar{v}_A$ в данный момент времени параллелен оси Bx. По величине он равен $v_A = \omega_{OA} \cdot OA$.

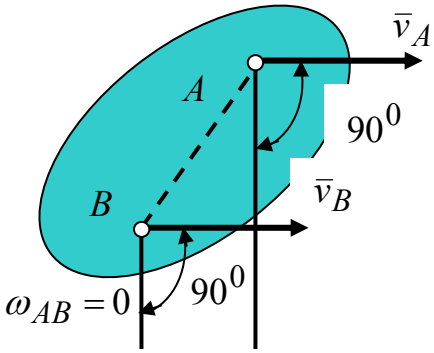


Рис.3.15

В точке B в механизме – ползун, который позволяет точке B двигаться только вдоль своей оси Bx. Следовательно, вектор скорости точки $\bar{v}_B$ параллелен вектору $\bar{v}_A$ и оба вектора направлены в одну сторону. МЦС шатуна находится в бесконечности. Следовательно, шатун движется **мгновенно поступательно,** и все его точки движутся с одинаковыми по величине и направлению скоростями. **Замечание.** Сравните этот пример с примером 3.6 и убедитесь в том, что в другие моменты времени шатун вращается.

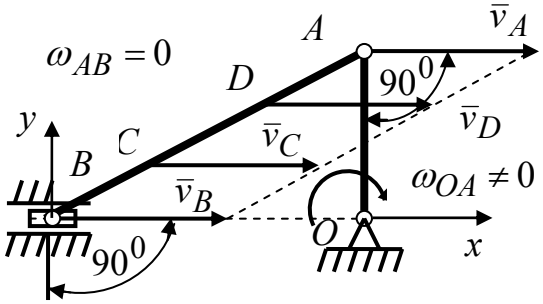


Рис. к примеру 3.7

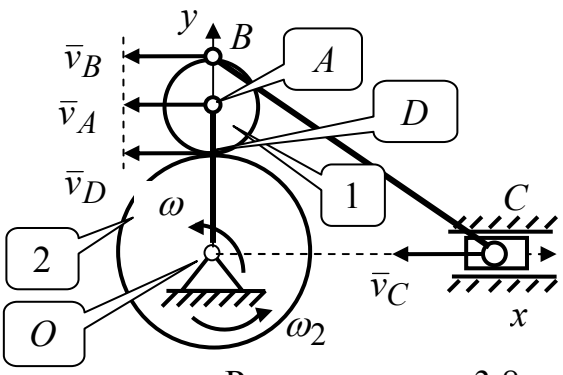


Рис. к примеру 3.8

Пример 3.8. В эпициклическом механизме кривошип OA длиной $30см$ вращается с угловой скоростью $\omega = 2рад/с$ и приводит в движение колесо 1 радиусом $r = 10см$. Колесо 1 находится во внешнем зацеплении без проскальзывания с колесом 2, вращающимся с угловой скоростью $\omega_2 = 3рад/с$. Колесо 1 и ползун C соединены шарнирно шатуном BC. Определить скорости точек A, B, C, D механизма и угловую скорость ω_1 колеса 1, угловую скорость ω_{BC} шатуна BC.

Решение. $v_A = \omega \cdot OA = 2 \cdot 30 = 60см/с$**.** Так как в точке касания D колеса 1 и 2 не проскальзывают относительно друг друга, то линейные скорости точек D и первого, и второго колес равны. $\bar{v}_D = \bar{v}_D^{(1)} = \bar{v}_D^{(2)}$. Вектор линейной скорости точки D найдем по известному вращению колеса 2. По величине $v_D = \omega_2 \cdot (OA - r) = 3 \cdot 20см/с$. Вектор $\bar{v}_D$ направлен в сторону вращения колеса 2 и перпендикулярен радиусу OD

второго колеса, который в данный момент времени совпадает по направлению с кривошипом OA. Скорости двух точек одного и того же тела (колеса 1) оказались равными и по величине, и по направлению. Следовательно, колесо 1 совершает мгновенно поступательное движение, то есть не вращается и $\omega_1 = 0$. Шатун BC в данном его положении движется поступательно и $\omega_{BC} = 0$. Это было показано в предыдущем примере. Окончательно, векторы скоростей всех точек A, B, C, D параллельны и равны по величине $v_B = v_A = v_C = v_D = 60 см/с$.

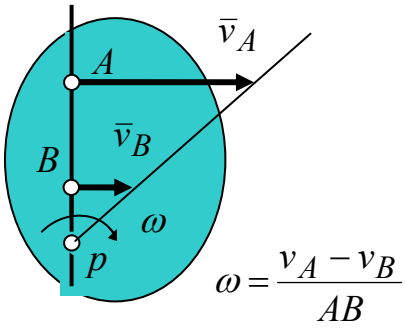


Рис.3.16

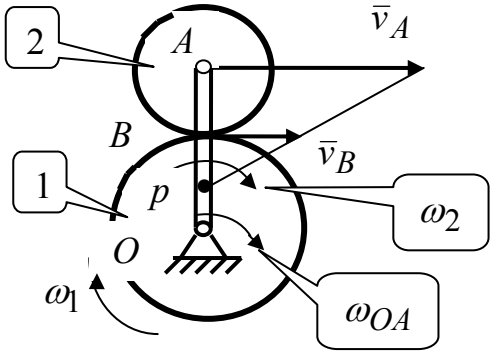


Рис. 1 к примеру 3.9

3) Векторы скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ двух точек плоской фигуры параллельны, не равны друг другу по модулю, а сами точки лежат на общем перпендикуляре к векторам скоростей (рис. 3.16). МЦС (точка р) находится на пересечении прямой AB и прямой, проходящей через концы векторов скоростей.

При этом угловая скорость плоской фигуры вычисляется по формуле:

$$\omega = \frac{v_A - v_B}{AB} \quad . \tag{3.18}$$

Доказательство основано на применении соотношения (3.15).

Пример 3.9. Третий частный случай иллюстрируется движением механизма, положение которого в некоторый момент времени $t = t_1$ показано на рис. к примеру. Механизм состоит из двух колес 1 и 2, плотно прижатых друг к другу (это могут быть и зубчатые колеса) и кривошипа OA, вращающегося относительно точки O и шарнирно (подшипник) соединенного с колесом 2 в точке A. Кривошип OA и колесо 1 «сидят» на одной оси, но друг с другом не соединяются. Механизм приводится в движение независимыми вращениями колеса 1 и кривошипа OA. В данный момент времени угловые скорости их равны ω_1 и ω_{OA}, соответственно, и направлены так, как показано на рисунке к примеру 3.5. Таким образом, колесо 1 и кривошип OA совершают при работе механизма вращательное движение относительно неподвижной оси, а колесо 2 совершает плоскопараллельное движение. Так как кривошип совершает вращательное движение относительно неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости рисунка (на рис. ось не показана), то вектор линейной

скорости $\bar{v}_A$ точки A кривошипа OA и точки A колеса 2 перпендикулярен к оси кривошипа OA и направлен в сторону его вращения (по криволинейной стрелке ω_{OA}). Векторы линейной скорости $\bar{v}_B$ в точке касания колес B совпадают. Рассматривая вращение колеса 1, видим, что $\bar{v}_B$ направлен перпендикулярно к радиусу вращающегося колеса 1 в сторону его вращения. Следовательно, $\bar{v}_B$ II $\bar{v}_A$. Пусть при этом $v_A > v_B$, как показано на рисунке. Тогда мгновенный центр скоростей колеса 2 оказывается в точке p. Колесо 2 совершает мгновенное вращение относительно точки p с мгновенной угловой скоростью ω_2. При этом по формулам (3.14) $\omega_2 = v_A / Ap = v_B / Bp$. Отсюда $v_A \cdot Bp = v_B \cdot Ap$, где $Ap = Bp + r_2$. Решая совместно два последних уравнения, получим:

$$Bp = \frac{v_B \cdot r_2}{v_A - v_B} \quad . \tag{3.19}$$

Угловая скорость второго колеса по (3.15) будет равна:

$$\omega_2 = v_B / Bp = (\bar{v}_A - \bar{v}_B)/r_2 \quad . \tag{3.20}$$

Направление ω_2 совпадает с направлениями ω_1 и ω_{OA}, что показано на рисунке. Это означает, что второе колесо «катится» без скольжения по первому, обегая его по часовой стрелке, так как при вращательных движениях тел направление векторов линейных скоростей точек тела и угловая скорость вращения самого тела всегда согласованы и «направлены в одну сторону».

Пусть теперь модули векторов скоростей таковы, что $v_B > v_A$. Это может быть, если $\omega_1 \cdot OB > \omega_{OA} \cdot OA$ и $\omega_1 > \omega_{OA} \cdot OA / OB$. Тогда мгновенный центр скоростей p будет в точке, показанной на рис.2 к примеру 3.9. По аналогии с предыдущим случаем получим:

$$Ap = v_A \cdot r_2 / (v_B - v_A), \tag{3.21}$$

$$\omega_2 = (v_B - v_A)/r_2 . \tag{3.22}$$

Как и раньше, направление угловой скорости ω_2 определяется по направлению векторов линейных скоростей $\bar{v}_A, \bar{v}_B$.

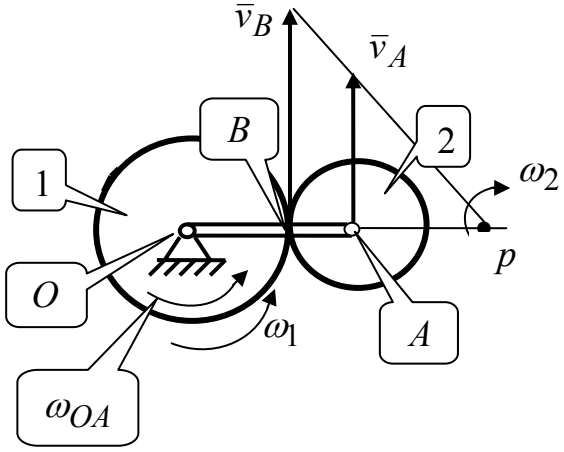


Рис. 2 к примеру 3.9

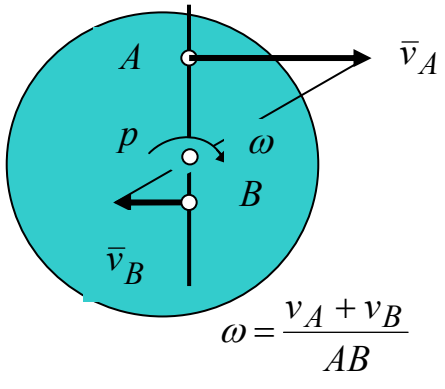


Рис.3.17

4) Векторы скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ двух точек плоской фигуры параллельны, не равны по модулю и направлены в разные стороны. Точки лежат на общем перпендикуляре AB к векторам скоростей

(рис. 3.17). МЦС (точка p) находится на пересечении прямой AB и прямой, проходящей через концы векторов скоростей.

При этом угловая скорость плоской фигуры вычисляется по формуле:

$$\boxed{\omega = \frac{v_A + v_B}{AB}.} \qquad (3.23)$$

Доказательство основано на применении соотношения (3.15).

Пример 3.10. Две параллельные рейки движутся в разные стороны с постоянными скоростями $\bar{v}_1$ *и* $\bar{v}_2$. Между рейками зажат диск радиуса R, катящийся по рейкам без скольжения. Найти угловую скорость диска ω и числовое значение скорости v_0 его центра O, если $v_1 > v_2$.

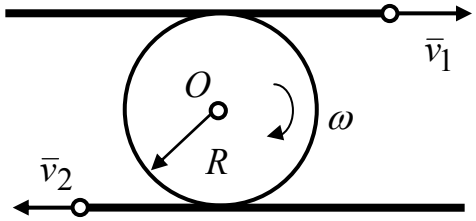


Рис.1 к примеру 3.10

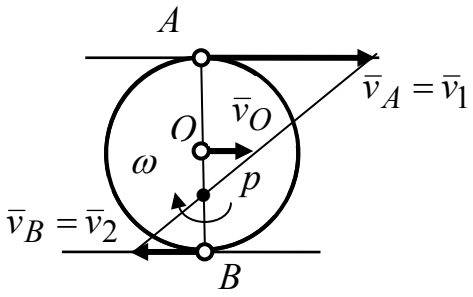


Рис.2 к примеру 3.10

Решение. Так как диск катится без скольжения, то в точках касания A и B диска с рейками соответствующие скорости равны. А именно, $\bar{v}_A = \bar{v}_1$, $\bar{v}_B = \bar{v}_2$. Так как рейки параллельны, то параллельны и векторы скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ точек A и B диска, а сами точки лежат на общем перпендикуляре к векторам скоростей этих точек. Следовательно, мгновенный центр скоростей лежит на вертикальном диаметре диска между точками A и B, как показано на рис. 2 к примеру 3.10. Из пропорциональности точек плоской фигуры их расстояниям до мгновенного центра скоростей (3.16) имеем:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{Ap}{Bp} \qquad \text{и} \qquad Ap + Bp = AB = 2R.$$

Решая совместно последние два уравнения, находим расстояние Bp от точки B до мгновенного центра скоростей p: $Bp = 2Rv_B/(v_A + v_B)$. Угловая скорость диска при его вращении относительно мгновенного центра скоростей p вычисляется по (3.15): $\omega = v_B/Bp = v_A/Ap = v_B(v_A + v_B)/2Rv_B = (v_A + v_B)/2R$. Или

$$\omega = \frac{v_A + v_B}{2R} = \frac{v_1 + v_2}{2R}. \qquad (3.24)$$

Учитывая, что $AB = 2R$, видим совпадение (3.24) и (3.23).

Чтобы определить величину линейной скорости центра диска, вычислим расстояние Op. $Op = OB - Bp = R - 2Rv_B/(v_A + v_B) = R(v_A - v_B)/(v_A + v_B)$

Так как точка p – мгновенный центр скоростей диска, величина скорости центра диска v_O вычисляется по формуле (3.15).

$$v_O = \omega \cdot OP = \frac{v_A + v_B}{2R} \cdot \frac{R(v_A - v_B)}{v_A + v_B} = \frac{(v_A - v_B)}{2} = \frac{(v_1 - v_2)}{2}.$$

Направление вектора $\bar{v}_O$ определяется по направлению вращения диска, то есть по направлению ω, и показано на рис. 2 к примеру 3.10.

§ 3.3. Задачи с решениями на определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении

Задача 3.1. Кривошип OA длиной $OA = 0{,}3м$ вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 10рад/с$. К шатуну AB в точке C шарнирно прикреплен шатун CD. В точках C и D имеются ползуны. Для заданного положения механизма (см. рис. к задаче) определить скорость точки D ползуна, если в данном положении механизма угол $\alpha = 30^0$.

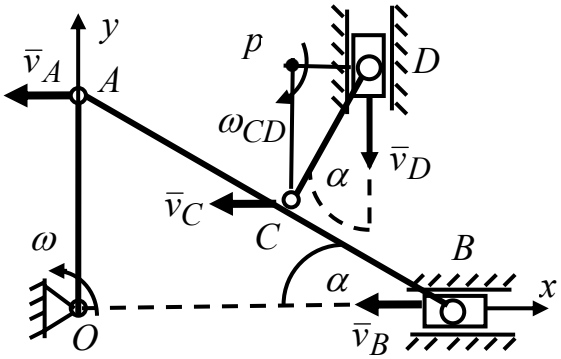


Рис. к задаче 3.1

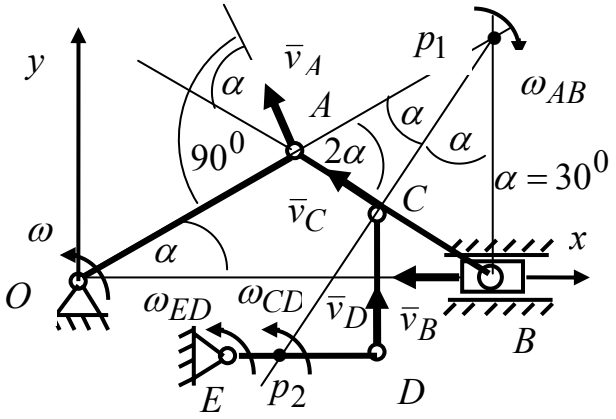


Рис. к задаче 3.2

Решение. Покажем на рисунке скорость точки A, она равна: $v_A = \omega \cdot OA = 10 \cdot 0{,}3 = 3(м/с)$. Ползун B может перемещаться в горизонтальных направляющих. Скорость точки B будет параллельна вектору $\bar{v}_A$, следовательно, шатун AB совершает в данный момент мгновенно поступательное движение и $v_B = v_A = v_C = 3(м/с)$; $\omega = 0$. Ползун D движется в вертикальных направляющих. Для точек шатуна CD по теореме о проекциях скоростей можно записать $v_C \cdot \cos 60^0 = v_D \cdot \cos 30^0$. Отсюда значение скорости $v_D = v_C \cdot \cos 60^0 / \cos 30^0 = 1{,}73м/с$. **Ответ:** $v_D = 1{,}73м/с$.

Задача 3.2. Определить скорости точек A, B, C, D и угловые скорости шатуна AB, стержня CD и коромысла ED, если кривошип OA вращается против хода часовой стрелки с угловой скоростью $\omega = 3рад/с$, а $OA = AB = 30см$; $CD = DE$; $AC = CB$.

Решение. Определим по (3.15) скорость точки A кривошипа OA, который вращается с заданной угловой скоростью ω: $v_A = \omega \cdot OA = 3 \cdot 30 = 90см/с$. Вектор скорости $\bar{v}_A$ перпендикулярен к кривошипу OA. Ползун B движется поступательно, точка B принадлежит также шатуну AB, совершающему плоское движение. Восстановим перпендикуляры к векторам скоростей в точках A и B и найдем *МЦС* шатуна AB - т. p_1.

Треугольник Ap_1B – равносторонний, поэтому $Ap_1 = AB = Bp_1$. Применяя соотношение (3.15), имеем $v_B / v_A = Bp_1 / Ap_1$. Отсюда $v_B = v_A = 90см/с$, а $\omega_{AB} = v_A / Ap_1 = 3рад/с$. Для определения $\bar{v}_C$ соединим точки p_1 и C. Так как треугольник Ap_1B – равносторонний, отрезок p_1C перпендикулярен к AB. Отсюда видно, что вектор скорости $\bar{v}_C$ направлен по CA. По теореме (3.5) о проекциях скоростей $v_C = v_A \cos 30^0 = 90 \cdot 0{,}866 = 77{,}94см/с$. Вектор скорости $\bar{v}_D$ перпендикулярен кривошипу ED. Проектируя $\bar{v}_C$ и $\bar{v}_D$ на CD, имеем $v_D = v_C \cdot \cos 60^0 = 77{,}94 \cdot 0{,}5 = 38{,}97(см/с)$. Мгновенный центр скоростей стержня CD находится в точке p_2. Найдем длину кривошипа ED: $ED = OA \cdot \cos 30^0 + AC \cdot \cos 30^0 = 45 \cdot \cos 30^0 = 38{,}97см$. Кроме того: $ED = CD$, угол $p_2CD = 30^0$, расстояния $p_2C = CD / \cos 30^0 = 45см$, $p_2D = p_2C \cdot \sin 30^0 = 22{,}5см$. Отсюда: $\omega_{CD} = \dfrac{v_C}{Cp_2} = \dfrac{v_D}{p_2D} = \dfrac{38{,}97}{22{,}5} = 1{,}73\,с^{-1}$

$\omega_{ED} = \dfrac{v_D}{ED} = \dfrac{38{,}97}{38{,}98} = 1с^{-1}$. **Ответ:** $\omega_{CD} = 0{,}173с^{-1}$, $\omega_{ED} = 1с^{-1}$.

§3.4. Задачи для самостоятельного решения на определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении

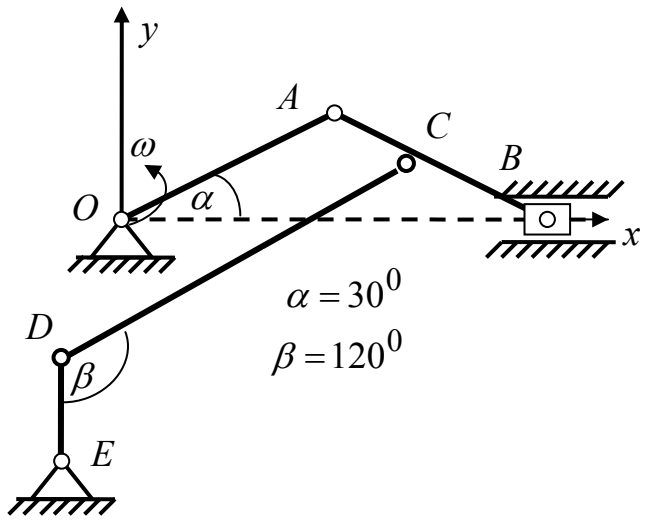


Рис. к задаче 3.3

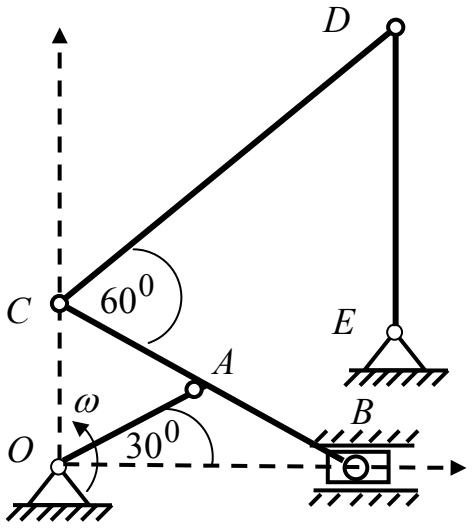


Рис. к задаче 3.4

Задача 3.3. Стержень *CD* шарнирно связан с шатуном *AB* и коромыслом *DE*. Определить скорости точек *A, B, C, D* и угловые скорости всех звеньев механизма, если $\omega = \pi\ с^{-1}$; $OA = 20см$; $CD = 40см$; $OA = AB$; $AC = CB$; $DE = 10см$.

Ответ: $v_A = v_B = 20\pi\ см/с$; $v_C = 17{,}3\ см/с$; $v_D = 10\pi\ см/с$; $\omega_{AB} = \pi\ с^{-1}$; $\omega_{CD} = 0{,}25\pi\ с^{-1}$; $\omega_{DE} = \pi\ с^{-1}$.

Задача 3.4. Кривошип *OA* кривошипно-шатунного механизма *CAB* вращается с угловой скоростью $\omega = 4c^{-1}$. Определить скорости точек *A, B, C, D* и угловые скорости звеньев *BC, CD, DE,* если $OA = AB = AC = 15см$; $CD = 40см$; $DE = 30см$. **Ответ***:* $v_A = v_B = 60см/с$; $v_C = 103{,}8см/с$; $v_D = 60см/с$.

Задача 3.5. Шатун *BD* шарнирно соединен с кривошипно-коромысловым механизмом *OABC,* кривошип *OA* которого вращается с угловой скоростью $\omega = 3c^{-1}$. Определить скорости точек *A, B, D* и угловые скорости всех звеньев, если $OA = 20см$, $AB = BD = 40см$, $BC = 60см$. **Ответ:** $v_A = 60см/с$; $v_B = 69{,}4см/с$; $v_D = 80{,}3см/с$; $\omega_{AB} = 0{,}867c^{-1}$; $\omega_{BD} = 1c^{-1}$; $\omega_{BC} = 1{,}16c^{-1}$.

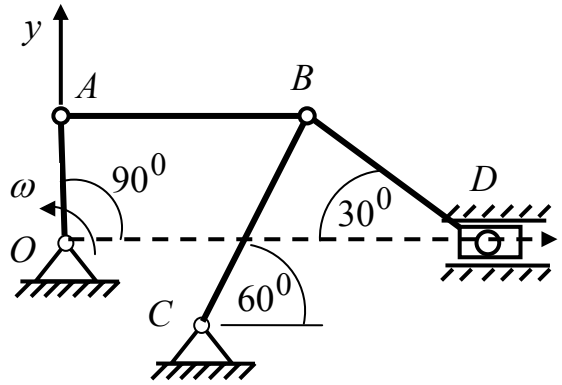


Рис. к задаче 3.5

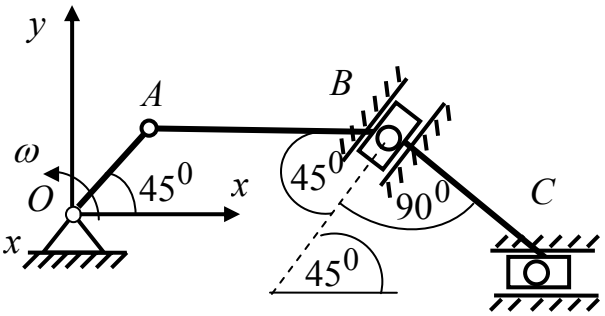


Рис. к задаче 3.6

Задача 3.6. В положении механизма, указанном на рисунке, определить скорости точек *A, B, C,* угловые скорости звеньев механизма, если кривошип *OA* вращается с угловой скоростью $\omega_{OA} = 1c^{-1}$; $OA = AB/3 = BC/2 = 50см$.

Ответ: $v_A = v_B = 50см/с$; $v_C = 0$; $\omega_{AB} = 0{,}47c^{-1}$; $\omega_{BC} = 0{,}5c^{-1}$.

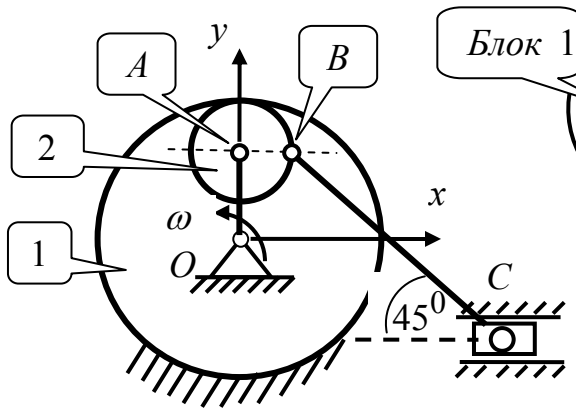


Рис. к задаче 3.7

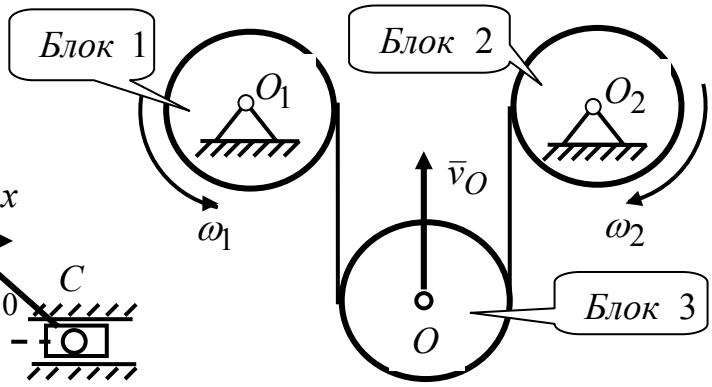


Рис. к задаче 3.8

Задача 3.7. В планетарном механизме кривошип *OA* вращается с угловой скоростью $\omega = 2c^{-1}$ и приводит в движение колесо 2 радиуса $r = 20см$, которое находится во внутреннем зацеплении с неподвижным колесом 1 радиуса $R = 50см$. Колесо 2 и ползун *C* связаны шарнирно шатуном *BC*. Длина шатуна $BC = 100см$. Определить скорости точек *A, B, C* и угловые скорости подвижных звеньев механизма в показанном на рисунке положении.

Ответ: $v_A = 60см/с$; $v_B = 84{,}6см/с$; $v_C = 0$; $\omega_2 = 3с^{-1}$; $\omega_{BC} = 0{,}85с^{-1}$.

Задача 3.8. Блоки 1 и 2 вращаются вокруг неподвижных осей O_1 и O_2 с угловыми скоростями $\omega_1 = 4с^{-1}$ и $\omega_2 = 8с^{-1}$. Определить скорость центра O и угловую скорость подвижного блока 3. Радиусы блоков $r = r_1 = r_2 = 10см$. **Ответ:** $v_0 = 60см/с$; $\omega_3 = 2с^{-1}$.

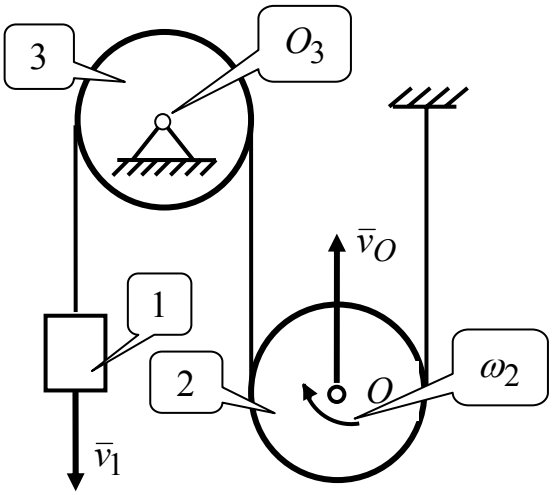


Рис. к задаче 3.9

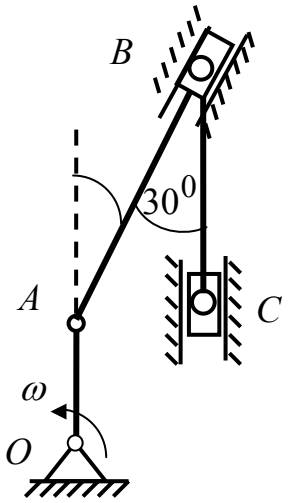


Рис. к задаче 3.10

Задача 3.9. Величина скорости груза 1, совершающего поступательное движение, $v_1 = 0{,}5м/с$. Определить угловую скорость ω_2 и величину скорости v_O центра O подвижного блока 2, если его радиус $R_2 = 0{,}1м$. **Ответ:** $\omega_2 = 2{,}5с^{-1}$; $v_O = 0{,}25м/с$.

Задача 3.10. Определить скорости точек *A, B, C* и угловые скорости ω_{AB}, ω_{BC} звеньев *AB* и *BC* механизма, если кривошип *OA* вращается с угловой скоростью $\omega = 2с^{-1}$; $OA = 20см$; $AB = 60см$; $BC = 50см$.

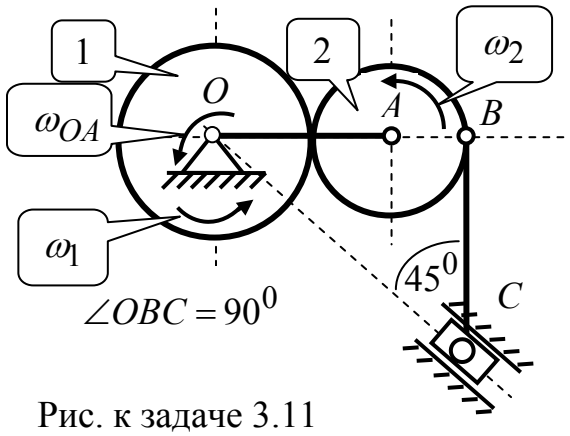


Рис. к задаче 3.11

Ответ: $v_A = 40см/с$; $v_B = 20см/с$; $v_C = 17{,}3см/с$; $\omega_{AB} = 0{,}577с^{-1}$; $\omega_{BC} = 0{,}6с^{-1}$.

Задача 3.11. В эпициклическом механизме кривошип *OA* вращается с угловой скоростью $\omega_{OA} = 1с^{-1}$ и приводит в движение шестерню 2 радиусом $r_2 = 20см$, которая находится во внешнем зацеплении с шестерней 1 радиусом $r_1 = 60см$. К точке *B*, находящейся на ободе шестерни 2, шарнирно присоединен шатун *BC*. Второй конец шатуна *BC* связан с ползуном *C*. В указанном положении механизма определить

скорости точек *A, B, C* и угловые скорости ω_1 и ω_{BC} звеньев механизма, если шестерня 2 вращается с угловой скоростью $\omega_2 = 4c^{-1}$ в ту же сторону, что и кривошип *OA*. **Ответ:** $v_A = 80см/с$; $v_B = 160см/с$; $v_C = 225{,}4см/с$; $\omega_1 = 0c^{-1}$; $\omega_{BC} = 1{,}6c^{-1}$.

§ 3.5. Определение вектора ускорения произвольной точки плоской фигуры

1. Теорема о геометрическом сложении векторов ускорений

3.13. Теорема. Вектор ускорения $\bar{a}_B$ произвольной точки B плоской фигуры в плоскопараллельном движении равен геометрической сумме вектора ускорения $\bar{a}_A$ точки A , принятой за полюс, и вектора ускорения $\bar{a}_{BA}$, которое точка B приобретает при вращении плоской фигуры относительно полюса A (рис. 3.18):

$$\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.} \qquad (3.25)$$

Доказательство: По теореме о сложении векторов скоростей (3.7) вектор скорости произвольной точки плоской фигуры $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$. Продифференцируем последнее равенство по времени и получим: $\bar{a}_B = d\bar{v}_B / dt = d\bar{v}_A / dt + d\bar{v}_{BA} / dt$.

Здесь $\bar{a}_B = d\bar{v}_B / dt$ – вектор ускорения точки *B*. $\bar{a}_A = d\bar{v}_A / dt$ – вектор ускорения полюса *A*. $\bar{a}_{AB} = d\bar{v}_{BA} / dt$ – вектор ускорения точки *B*, которое оно приобретает от вращения фигуры (другими словами, отрезка *AB*) относительно полюса *A*. Окончательно вектор ускорения точки *B* вычисляется по формуле $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$. Что и требовалось доказать.

Геометрическая интерпретация формулы (3.25) для одного из возможных вариантов движения фигуры представлена на рис. 3.18.

В общем случае полюс *A* может двигаться по любой траектории – прямолинейной или криволинейной. Отрезок *AB* вращается, поэтому траектория точки *B* – кривая линия. Следовательно, вектор $\bar{a}_{BA}$ всегда можно представить в виде суммы его касательной и нормальной составляющих $\bar{a}_{BA} = \bar{a}^{\tau}_{BA} + \bar{a}^{n}_{BA}$, что бывает удобно в практических расчетах (рис.3.18, рис.3.19). При этом (3.25) принимает вид:

$$\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^{\tau}_{BA} + \bar{a}^{n}_{BA}.} \qquad (3.26)$$

Величины векторов $\bar{a}^{\tau}_{BA}, \bar{a}^{n}_{BA}$ вычисляются по формулам теории вращательного движения относительно неподвижной оси

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB, \qquad a_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot AB, \tag{3.27}$$

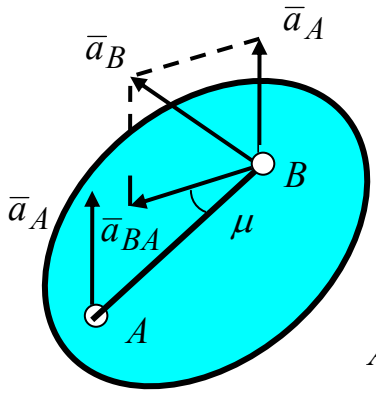


Рис. 3.18

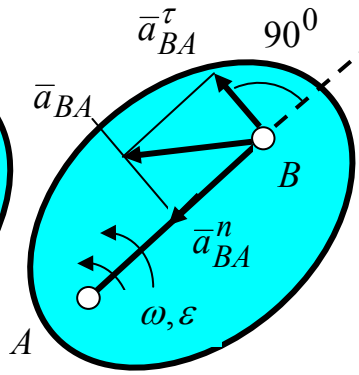


Рис.3.19

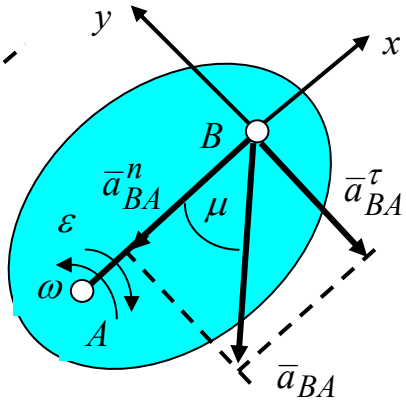


Рис.3.20

где $\omega = \dot{\varphi}(t), \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}(t)$ – угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры соответственно. С учетом (3.27) имеем:

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^{\tau})^2 + (a_{BA}^{n})^2} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; tg\,\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{3.28}$$

Здесь a_{BA} и μ – модуль и угол отклонения вектора $\bar{a}_{BA}$ от отрезка BA, соответственно. Вектор $\bar{a}_{BA}^{n}$, независимо от направления вращения фигуры (рис. 3.19, рис. 3.20), направлен от точки B к мгновенной оси вращения, проходящей через точку A. Другими словами, ***вектор*** $\bar{a}_{BA}^{n}$ ***всегда направлен от точки B к точке A, принятой за полюс.***

Направление вектора $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ (рис. 3.19, рис. 3.20) соответствует направлению дуговой стрелки углового ускорения ε и не зависит от направления вращения фигуры, то есть не зависит от направления дуговой стрелки ω.

Если точка A, которую решено принять за полюс, движется по известной криволинейной траектории, то и вектор $\bar{a}_A$ можно разложить на касательную и нормальную составляющие $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n}$, а формула (3.26) примет вид:

$$\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}\ .} \tag{3.29}$$

И последнее, если и точка B движется по известной криволинейной траектории, то формулу (3.26) можно будет записать в самом общем виде:

$$\boxed{\bar{a}_B^{\tau} + \bar{a}_B^{n} = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}.} \qquad (3.30)$$

Уравнения (3.25) – (3.30) позволяют вычислить вектор ускорения произвольной точки B плоской фигуры. При этом предполагается, что все другие векторы, входящие в эти уравнения, или известны заранее, или могут быть вычислены по исходным данным задачи. Но совершенно очевидно, что эти уравнения справедливы и для случая, когда вектор $\bar{a}_B$ известен. В этом случае они позволяют найти любой другой один вектор по известным остальным векторам (из одного уравнения можно найти одно неизвестное).

2. Метод проекций для определения ускорений

С методом проекций мы уже сталкивались при обсуждении методов определения скоростей. С математической стороны здесь все делается так же, но применительно к другим механическим уравнениям. Введем на плоскости некоторую прямоугольную систему координат Oxy. Начало координат O и направление осей выбираются произвольно. Спроецировав любое из уравнений (3.25) – (3.30) на эти оси, получают соответствующие уравнения метода проекций. Например, векторное уравнение (3.30) заменится двумя скалярными уравнениями:

$$\boxed{a_{Bx} = a_{Ax}^{\tau} + a_{Ax}^{n} + a_{BAx}^{\tau} + a_{BAx}^{n}, \quad a_{By} = a_{Ay}^{\tau} + a_{Ay}^{n} + a_{BAy}^{\tau} + a_{BAy}^{n}.} \qquad (3.31)$$

Все входящие в эти уравнения величины – это проекции соответствующих векторов. Из системы уравнений (3.31) могут быть определены любые две входящие в них величины. Остальные величины должны быть известны заранее. Если, например, из системы (3.31) определены проекции вектора ускорения точки B – a_{Bx}, a_{By}, то модуль вектора ускорения $|\bar{a}_B|$ находится по формуле:

$$|\bar{a}_B| = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}\,. \qquad (3.32)$$

Направление вектора $\bar{a}_B$ в принятой системе координат Oxy можно установить по проекциям a_{Bx}, a_{By}. Выбор осей координат не влияет на конечный результат, но может существенно облегчить или затруднить вычисления.

Пример 3.11. Стержень AB движется в плоскости. В данный момент времени точки A имеет ускорение $\bar{a}_A$, угловая скорость стержня $\omega = 2c^{-1}$, угловое ускорение $\varepsilon = 2c^{-2}$. Направление угловой скорости и углового ускорения показаны дуговыми

стрелками на рисунке 1 к примеру. Определить величину ускорения точки B стержня, если длина его $AB = 1м$, а модуль вектора ускорения $a_A = 1м/с^2$.

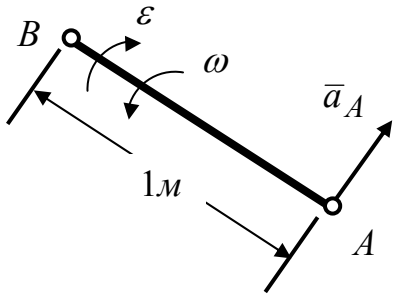


Рис.1к примеру 3.11

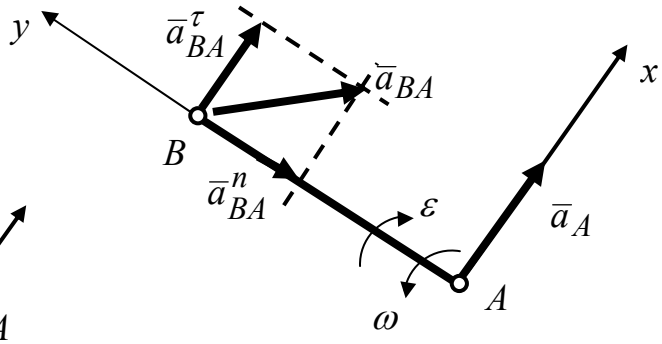


Рис.2к примеру 3.11

Решение. Стержень в данный момент времени вращается замедленно, так как ω и ε имеют противоположные направления. За полюс примем точку A, ускорение которой известно. Это единственная причина для выбора полюса в точке A. По (3.26) $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^{\tau}_{BA} + \bar{a}^{n}_{BA}$. Это уравнение позволяет определиться с направлением соответствующих векторов ускорений на плоскости в данный момент времени. Направление вектора $\bar{a}_A$ дано в условии примера. Направление вектора $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ определено по направлению ε. Вектор нормального ускорения $\bar{a}^{n}_{BA}$ всегда направлен к выбранному полюсу. Модули двух последних векторов вычисляются по формулам (3.17). $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon \cdot AB = 2 \cdot 1 = 2м/с^2$, $a^{n}_{BA} = \omega^2 \cdot AB = 4 \cdot 1 = 4м/с^2$. $a_A = 1м/с^2$ по условию примера. Далее воспользуемся методом проекций. Введем оси координат, показанные на рис. 2 к примеру, и спроецируем векторное уравнение (3.26) на эти оси. Получим:

$$a_{Bx} = a_{Ax} + a^{\tau}_{BAx} + a^{n}_{BAx}, \quad a_{By} = a_{Ay} + a^{\tau}_{BAy} + a^{n}_{BAy}, \qquad (*)$$

где $a_{Ax} = a_A = 1м/с^2$, $a^{\tau}_{BAx} = a^{\tau}_{BA} = 2м/с^2$, $a^{n}_{BAx} = 0$, $a_{Ay} = 0$, $a^{\tau}_{BAy} = 0$, $a^{n}_{BAy} = -a^{n}_{BA} = -4м/с^2$. Удачный выбор осей координат существенно облегчил нахождение проекций, многие из них равны нулю. Окончательно из (*) получим $a_{Bx} = 3м/с^2$, $a_{By} = -4м/с^2$, $a_B = \sqrt{(a_{Bx})^2 + (a_{By})^2} = 5м/с^2$. **Ответ:** $a_B = 5м/с^2$.

3. Мгновенный центр ускорений (МЦУ). Определение ускорений точки плоской фигуры с использованием мгновенного центра ускорений

3.14. Мгновенным центром ускорений Q плоской фигуры называется точка в плоскости движения фигуры, ускорение которой равно нулю ($\bar{a}_Q = 0$).

Слово «мгновенный» указывает на то, что при плоскопараллельном движении плоской фигуры положение этой точки в общем случае меняется с течением времени и может быть определено для конкретного момента времени. Так же было и с мгновенным центром скоростей. Пусть положение МЦУ известно. Примем ее за полюс. Тогда ускорение произвольной точки B плоской фигуры вычисляется по формулам (3.25) и (3.26), которые теперь принимают вид: $\bar{a}_B = \bar{a}_Q + \bar{a}_{BQ}$. Отсюда $\bar{a}_B = \bar{a}_{BQ} = \bar{a}^{\tau}_{BQ} + \bar{a}^{n}_{BQ}$, так как $\bar{a}_Q = 0$. Вывод: *При плоскопараллельном движении и известном МЦУ вектор полного ускорения $\bar{a}_B$ любой точки B плоской фигуры определяется как вектор ускорения $\bar{a}_{BQ}$ этой точки во вращательном движении плоской фигуры относительно МЦУ ($\bar{a}_B = \bar{a}^{\tau}_{BQ} + \bar{a}^{n}_{BQ}$).* Величины векторов $\bar{a}^{\tau}_{BQ}, \bar{a}^{n}_{BQ}$ вычисляются по формулам (3.27).

$$\boxed{a^{\tau}_{BQ} = \varepsilon \cdot QB, \qquad a^{n}_{BQ} = \omega^2 \cdot QB.} \tag{3.33}$$

Здесь ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры соответственно, $QB = BQ$ – расстояние от мгновенного центра ускорений Q до точки B, ускорение которой в данный момент хотим определить. А формулы (3.28) будут иметь вид:

$$a_B = a_{BQ} = BQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad tg\,\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{3.34}$$

$$BQ = QB = a_B / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \tag{3.35}$$

μ – угол отклонения вектора $\bar{a}_{BQ}$ от отрезка BQ, соответственно.

Как определить мгновенный центр ускорений (МЦУ)? Рассмотрим два частных случая.

Первый случай. *Известен вектор ускорения $\bar{a}_B$ некоторой точки B плоской фигуры (известны его модуль и направление в точке B), а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε самой фигуры. Для определения Q нужно сделать следующее.*

1. Изобразить вектор $\bar{a}_B$ в точке B. **2.** Вычислить угол μ по формуле (3.34). **3.** Мысленно повернуть вектор $\bar{a}_B$ на угол μ в направлении дуговой стрелки ε и провести в направлении повернутого вектора луч $Q\eta$. **4.** Вычислить длину отрезка BQ по формуле (3.35). Это дает $BQ = QB = a_B / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. **5.** Отложить от точки B на луче $Q\eta$ отрезок длиной BQ и найти точку Q.

Докажем, что $\bar{a}_Q = 0$. Выберем точку B за полюс и вычислим

ускорение $\bar{a}_Q$ точки Q. По имеем формуле (3.26) $\bar{a}_Q = \bar{a}_B + \bar{a}_{BQ}$, где $\bar{a}_{QB} = \bar{a}^{\tau}_{BQ} + \bar{a}^{n}_{BQ}$.Модуль вектора $a_{QB} = \sqrt{(a^{\tau}_{QB})^2 + (a^{n}_{QB})^2}$ = $= BQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Но по построению $BQ = QB = a_B / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Тогда $a_{QB} = BQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = (a_B / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}) \cdot (\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}) = a_B$. Далее, прямая $B\eta$ отклонена от вектора $\bar{a}_B$ на угол μ в сторону ε по построению. Вектор $\bar{a}_{BQ}$ отклонен от направления $B\eta$ на тот же угол, найденный из (3.34), по свойствам вращательного движения. Следовательно, $\bar{a}_B = -\bar{a}_{BQ}$, что показано на рис.3.21. Тогда $\bar{a}_Q = \bar{a}_B + \bar{a}_{BQ} = \bar{a}_B - \bar{a}_B = 0$. Что и требовалось доказать.

Второй случай. *Пусть известны только направления векторов ускорений $\bar{a}_A, \bar{a}_B$ двух точек A и B плоской фигуры (модули не известны), угловая скорость ω и угловое ускорение ε самой фигуры. Для определения Q нужно выполнить следующее.*

1. Вычислить угол μ по второй из формул (3.34). **2.** Мысленно повернуть векторы $\bar{a}_A$ и $\bar{a}_B$ в точках их приложения на угол μ в направлении дуговой стрелки ε и провести в направлении повернутых векторов лучи $A\varsigma$ и $B\xi$. **3.** Точка пересечения этих лучей определит положение мгновенного центра ускорений Q (рис. 3.21). Доказательство

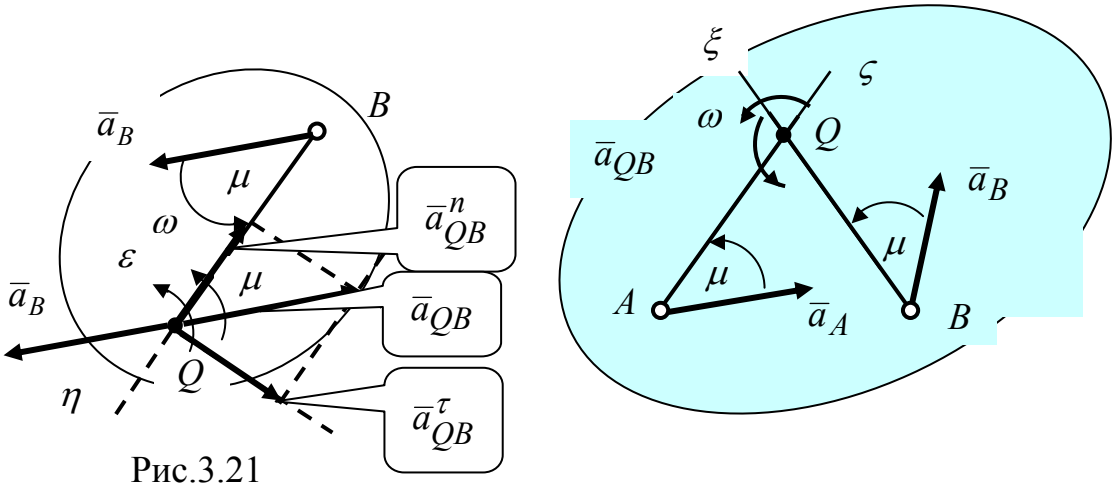


Рис.3.21

основано на том, что точка Q должна лежать на двух построенных прямых $A\varsigma$ и $B\xi$ одновременно, так как обе они построены по обсужденной в первом случае методике. Но две не параллельные прямые на плоскости имеют только одну общую точку – точку пересечения. Что доказывает

высказанное утверждение о положении точки Q. Отсюда следует и единственность этой точки.

Сравнивая ускорения разных точек плоской фигуры, вычисленные по (3.34), находим, что они пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений.

$$\boxed{\bar{a}_A / \bar{a}_B = QA / QB.} \qquad (3.36)$$

3.15. Если мгновенный центр ускорений Q известен, известны угловая скорость ω и угловое ускорение ε, то ускорение $\bar{a}_B$ точки B находится по следующему правилу.

1. Находится расстояние QB от точки Q до точки B. 2. Модуль вектора ускорения $\bar{a}_B$ точки B плоской фигуры определяется по первой из формул (3.34). 3. Вычисляется угол μ по второй из формул (3.34). 4. Приложив вектор $\bar{a}_B$ в точке B, он сначала мысленно направляется к точке Q, а затем поворачивается на угол μ от отрезка BQ в сторону дуговой стрелки ε (то есть в сторону своей составляющей $\bar{a}^{\tau}_{BQ}$. Рис. 3.21).

§ 3.6. Задачи с решениями на определение ускорений отдельных точек тела при плоскопараллельном движении

Задача 3.12. К кривошипу $OA = r = 0{,}2м$, равномерно вращающемуся в плоскости рисунка вокруг точки O с угловой скоростью $\omega = 2рад/с$, прикреплен шатун $AB = 2r$, соединенный с коромыслом $BC = r$. Определить ускорение $\bar{a}_B$ точки B шатуна, угловые скорости ω_{AB}, ω_{BC} и угловые ускорения ε_{AB}, ε_{BC} шатуна AB и коромысла BC.

Решение. Начнем с определения скоростей. Шатун AB совершает плоскопараллельное движение. Движение точки A можно легко определить. Поэтому за полюс примем точку A и по исходным данным определим скорость и ускорение точки A шатуна. Так как точка A принадлежит и равномерно вращающемуся кривошипу OA, то по (2.16) $v_A = \omega \cdot OA = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4м/с$. Вектор $\bar{v}_A$ перпендикулярен к OA и направлен в сторону вращения кривошипа. По формулам (2.17) и (2.18) при $\varepsilon_{OA} = 0$: $a^{\tau}_A = 0$, $a^n_A = \omega^2 \cdot OA = 0{,}8м/с^2$. Вектор нормального ускорения $\bar{a}^n_A$ направлен от точки A к точке О. Точка B принадлежит вращающемуся коромыслу BC и шатуну AB одновременно. Следовательно, траектория точки B известна. Точка B движется по окружности радиуса BC. Поэтому вектор скорости $\bar{v}_B$ перпендикулярен к BC и направлен так, как показано на рис. 2 к задаче. Последнее следует из теоремы о проекциях скоростей. По этой же теореме находится и величина v_B. Проецируя векторы $\bar{v}_A, \bar{v}_B$ на ось Bx_1, получим: $v_B \cos 60^0 = v_A$. Или $v_B = 2v_A = 0{,}8м/с$.

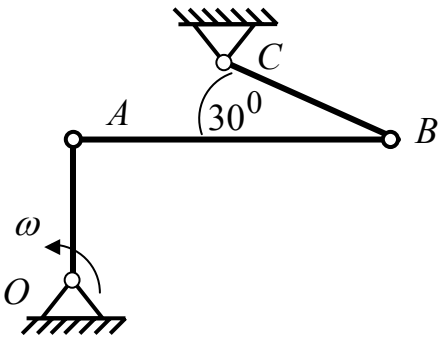


Рис. 1 к задаче 3.12

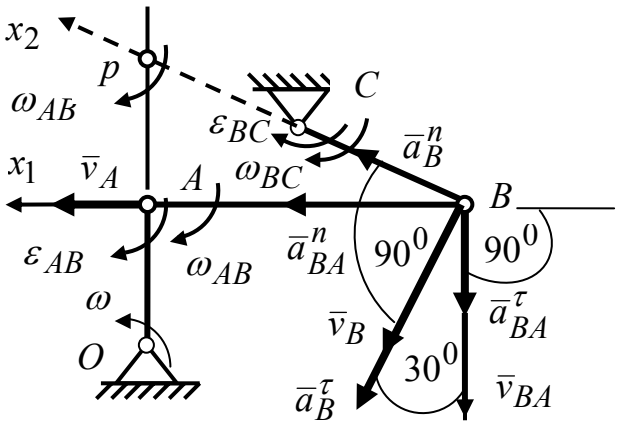


Рис. 2 к задаче 3.12

Чтобы найти ω_{AB}, ω_{BC}, построим мгновенный центр скоростей p шатуна AB. Из треугольника ApB видно, что $Ap = AB \cdot tg30^0 = 2r \cdot tg30^0$. Или $Ap = 0{,}4 \cdot 0{,}577 = 0{,}23м$. Тогда

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{Ap} = \frac{0{,}4}{0{,}23} = 1{,}74c^{-1},\ \omega_{BC} = \frac{v_B}{BC} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4c^{-1}.$$

Переходим к определению ускорений. Векторы нормальных ускорений отдельных точек тел, совершающих вращательное движение, направлены к оси вращения. То есть их направления всегда известны, если известна ось вращения. В данной задаче оси вращения проходят через точки O, C, p, A перпендикулярно плоскости рисунка. Оси, проходящие через точки O, C – неподвижны, а две другие – подвижные, «мгновенные» оси. Векторы касательных ускорений отдельных точек вращающихся тел направлены по касательным к их траекториям, но часто бывает не известно в какую сторону. Если направления векторов линейных скоростей точек уже известны, то неизвестные векторы касательных ускорений будем направлять в ту же сторону. Это соответствует предположению об ускоренном движении точек. Угловые ускорения вращающихся тел связаны с соответствующими касательными ускорениями, направления их согласованы. С учетом сказанного, на рис.2 показаны векторы касательных ускорений точек $\bar{a}^\tau$ и угловых ускорений тел ε.

Учитывая, что точки A и B описывают окружности радиуса OA и BC соответственно, запишем векторное уравнение (3.20):

$$\bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n, \qquad (*)$$

где $a_A^\tau = 0$, $a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 0{,}8м/c^2$, $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$, $a_A = 0{,}8м/c^2$, $a_B^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 16 \cdot 0{,}2 = 3{,}2м/c^2$, $a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 \cdot AB = 1{,}2м/c^2$. Все векторы ускорений показаны на рисунке 2 к задаче. Модули векторов $\bar{a}_B^\tau$, $\bar{a}_{BA}^\tau$ пока неизвестны.

Спроектируем обе части векторного уравнения (*) сначала на ось Bx_1 (направление BA), затем на ось Bx_2 (направление BC):

$$a_B^\tau \cdot \cos 60^0 + a_B^n \cdot \cos 30^0 = a_{BA}^n,$$

$$a_B^n = -a_A \cdot \cos 60^0 + a_{BA}^n \cdot \cos 30^0 - a_{BA}^\tau \cdot \cos 60^0.$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$a_B^\tau = 2(a_B^n \cdot \cos 30^0 - a_{BA}^n) = 2(-3{,}2 \cdot 0{,}866 + 1{,}2) = -3{,}14 м/с^2.$$

$$a_{BA}^\tau = 2(a_{BA}^n \cdot \cos 30^0 - a_B^n - a_A \cdot \cos 60^0) =$$

$$= 2(1{,}2 \cdot 0{,}866 - 3{,}2 - 0{,}8 \cdot 0{,}5) = -5{,}14 м/с^2.$$

Математически знак минус указывает на то, что векторы $\bar{a}_B^\tau, \bar{a}_{BA}^\tau$, показанные на рис. 2, в действительности направлены в обратную сторону, и их истинные направления, удовлетворяющие уравнению (*), не совпадают с направлениями соответствующих векторов линейных скоростей $\bar{v}_B, \bar{v}_{BA}$, которые уже были определены. С механической стороны не совпадение направлений соответствующих векторов линейных скоростей и ускорений означает, что точка B в данный момент совершает мгновенно замедленное движение. Вычислим, наконец, модуль ускорения точки B и угловые ускорения шатуна AB и коромысла $CB - a_B, \varepsilon_{AB}, \varepsilon_{BC}$.

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{(-3{,}14)^2 + (3{,}2)^2} = 4{,}48 м/с^2,\ \varepsilon_{AB} = a_{BA}^\tau / AB = -12{,}85 с^{-2},$$

$$\varepsilon_{BC} = a_B^\tau / CB = -15{,}7 с^{-2}.$$

Знак (–) в обоих случаях связан с полученными знаками для соответствующих проекций векторов $\bar{a}_B^\tau, \bar{a}_{BA}^\tau$ и указывает на то, что вращение шатуна AB и коромысла BC из рассматриваемого положения является замедленным. Другими словами, истинные направления криволинейных стрелок $\varepsilon_{AB}, \varepsilon_{BC}$ противоположно тому, что показано на рис. 2 к задаче. **Ответ:** $a_B = 4{,}48 м/с^2$, $\omega_{AB} = 1{,}74 с^{-1}$, $\omega_{BC} = 4 с^{-1}$, $\varepsilon_{AB} = -12{,}85 с^{-2}$, $\varepsilon_{BC} = -15{,}7 с^{-2}$.

Задача 3.13. Груз 3 движется согласно закону $x = 5 + 2t + 4t^2$. Определить скорости и ускорения точек A, B, C подвижного блока в момент времени $t = 0{,}25 с$, если радиус подвижного блока $R_1 = 0{,}5 м$.

Решение. Груз 3 движется поступательно вниз. Его скорость $v_3 = \dot{x} = 2 + 8t (м/с)$. При $t = 0{,}25 с$; $v_3 = 4 м/с$, ускорение $a_3 = \ddot{x} = 8 м/с^2$. Блок 1 движется плоскопараллельно. Так как левая часть нити неподвижна, то точка A имеет скорость $v_A = 0$. Следовательно, точка A – мгновенный центр скоростей (МЦС) блока 1. Так как проскальзывание нити по блоку 1 отсутствует, значение скорости в точке B равно значению скорости груза 3, то есть $v_B = v_3$. Угловая скорость блока 1 при $t = 0{,}25 с$ равна $\omega_1 = v_B / 2R_1 = 4 рад/с$. Найдем скорости точек O и C подвижного блока: $v_O = R_1 \cdot \omega_1 = 2 м/с$; $v_C = AC \cdot \omega_1 = R_1\sqrt{2} \cdot \omega_1 = 2{,}82 м/с$. Определим ускорения точек *A, B, C* плоской фигуры. Касательное ускорение точки B равно ускорению груза 3: $a_B^\tau = a_3 = 8 м/с^2$. Так как $a_B^\tau = dv_B / dt$, то $a_B^\tau = d(2R_1\omega_1)/dt = 2R_1 d\omega_1 / dt = 2R_1\varepsilon_1$ и $\varepsilon_1 = a_B^\tau / 2R_1 = 8 рад/с^2$;

$a_O = a_O^\tau = R_1\varepsilon_1 = 4 м/с^2$. $a_O^n = 0$, так как точка O движется прямолинейно.

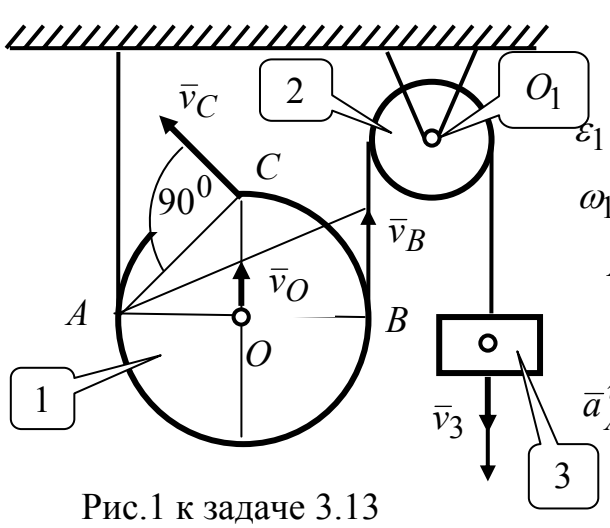


Рис.1 к задаче 3.13

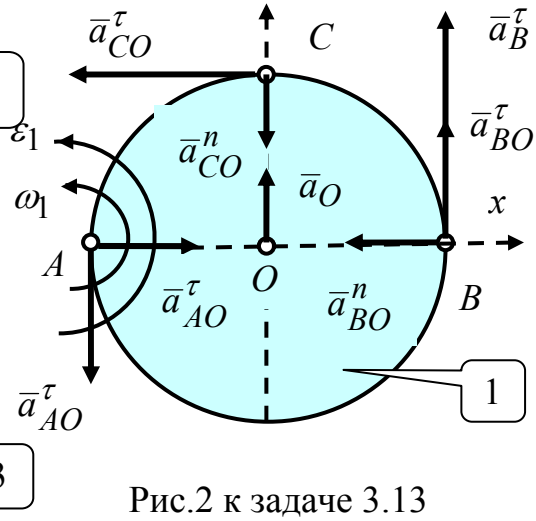


Рис.2 к задаче 3.13

Итак, модуль и направление ускорения точки O известны, поэтому будем считать данную точку полюсом. По (3.26) найдем векторы ускорений точек A, B и C:

$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}^{\tau}_{AO} + \bar{a}^{n}_{AO}$; $\bar{a}_B = \bar{a}_O + \bar{a}^{\tau}_{BO} + \bar{a}^{n}_{BO}$; $\bar{a}_C = \bar{a}_O + \bar{a}^{\tau}_{CO} + \bar{a}^{n}_{CO}$.

Спроецируем эти векторные равенства на оси Ox, Oy: $a_{Ax} = a^{n}_{AO}$;

$a_{Ay} = a_O - a^{\tau}_{AO}$; $a_{Bx} = -a^{n}_{BO}$; $a_{By} = a_O + a^{\tau}_{BO}$; $a_{Cx} = -a^{\tau}_{CO}$; $a_{Cx} = a_O - a^{n}_{CO}$, где

$a^{n}_{AO} = a^{n}_{BO} = a^{n}_{CO} = R_1\omega_1^2 = 8 м/с^2$, $a^{\tau}_{AO} = a^{\tau}_{BO} = a^{\tau}_{CO} = R_1\varepsilon_1 = 4 м/с^2$. Тогда

$a_A = \sqrt{a^2_{Ax} + a^2_{Ay}} = 8 м/с^2$; $a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} = 11{,}3 м/с^2$; $a_C = \sqrt{a^2_{Cx} + a^2_{Cy}} = 5{,}66 м/с^2$.

Отметим, что $a_{By} = 2 \cdot a_O$. Это значит, что величины ускорений точек нити (или груза 3) в два раза больше величины ускорения точки О. **Ответ:** $v_A = 0$; $v_B = 4 м/с$;

$v_C = 2{,}82 м/с$, $a_A = 8 м/с^2$; $a_B = 11{,}3 м/с^2$; $a_C = 5{,}66 м/с^2$.

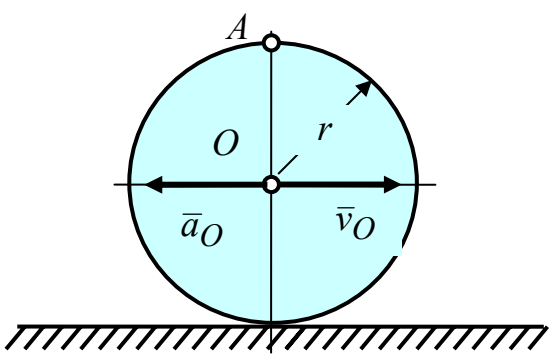


Рис. 1 к задаче 3.14

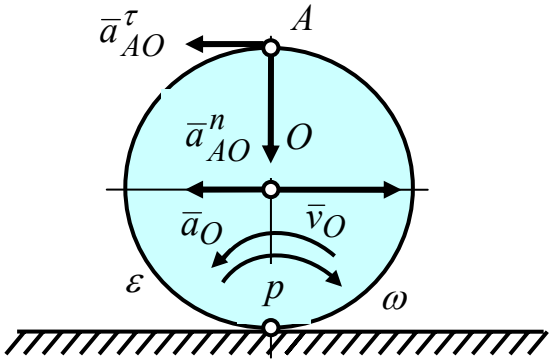


Рис. 2 к задаче 3.14

Задача 3.14. Диск радиуса $r = 0{,}4м$, совершающий плоскопараллельное движение, катится без скольжения по горизонтальной плоскости (рис. 1 к задаче 3.14). Центр диска движется равнозамедленно с ускорением $\bar{a}_O$, модуль которого $a_O = 1м/с^2$. Определить вектор полного ускорения $\bar{a}_A$ точки A диска в тот момент времени $t = t_1$, когда скорость центра $v_O = 2м/с$.

Решение. Для определения вектора ускорения $\bar{a}_A$ точки A воспользуемся формулой (3.25), приняв за полюс центр диска точку O, скорость и ускорение которой известны.

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}^{\tau}_{AO} + \bar{a}^{n}_{AO}. \qquad (*)$$

Здесь $a^{\tau}_{AO} = \varepsilon(t)\cdot OA = \varepsilon(t)\cdot r$, $a^{n}_{AO} = \omega(t)^2 \cdot OA = \omega(t)^2 \cdot r$. Найдем угловую скорость и угловое ускорение диска, учитывая, что точка p является мгновенным центром скоростей. $\omega(t) = v_O(t)/r$, и для момента времени $t = t_1$, когда $v_O(t_1) = v_O$, имеем следующее значение угловой скорости:

$$\omega = \omega(t_1) = v_O / r = 2/0{,}4 = 5c^{-1}. \qquad (**)$$

Направление ω соответствует направлению вектора скорости $\bar{v}_O$ и показано дуговой стрелкой на рис.2 к задаче 3.14.

Замечание: *по условию задачи центр диска движется замедленно. Другими словами его скорость меняется с течением времени. То есть надо считать, что величина скорости есть функция времени* $v_O(t)$. *Следовательно, и угловая скорость диска* $\omega(t) = v_O(t)/r$ *есть функция времени. Но в момент времени* $t = t_1$ *по условию задачи* $v_O(t_1) = v_O$ *и* $\omega = \omega(t_1) = 5c^{-1}$.

Угловое ускорение диска в любой момент времени вычисляется по формуле $\varepsilon(t) = d\omega(t)/dt$. Продифференцируем по времени $\omega(t) = v_O(t)/r$ с учетом того, что расстояние от точки *O* до МЦС в любой момент времени равно $r = 0{,}4м = const$. Тогда $\varepsilon(t) = d\omega(t)/dt = (dv_O(t)/dt)/r = a_O(t)/r$. По условию задачи центр диска движется равнозамедленно, то есть с постоянным ускорением (замедлением) $a_O(t) = a_O = const$. Тогда в любой момент времени, в том числе и при $t = t_1$, для модуля углового ускорения имеем: $\varepsilon = a_O / r = 1/0{,}4 = 2{,}5c^{-2}$. Следовательно, и $\varepsilon = const$. Оно имеет одно и то же значение для любого момента времени. Направление ε соответствует направлению вектора ускорения $\bar{a}_O$ и показано дуговой стрелкой на рис.2 к задаче 3.14. Направления ω и ε не совпадают, поэтому движение диска замедленное.

Теперь для момента времени $t = t_1$ можно вычислить $a^{\tau}_{AO} = \varepsilon \cdot r = 2{,}5 \cdot 0{,}4 = 1м/с^2$, $a^{n}_{AO} = \omega^2 \cdot r = 25 \cdot 0{,}4 = 10м/с^2$. Вектор касательного ускорения $\bar{a}^{\tau}_{AO}$ приложен к точке A и направлен по направлению дуговой стрелки ε (Рис.2,3 к примеру). Вектор нормального ускорения $\bar{a}^{n}_{AO}$ приложен к точке A и направлен к полюсу O. Геометрическая интерпретация векторного равенства (*) показана на рис.3 к примеру. Вектор ускорения $\bar{a}_A$ точки A получается сложение по правилу параллелограмма двух взаимно перпендикулярных

векторов $\bar{a}_O + \bar{a}^{\tau}_{AO}$ и $\bar{a}^{n}_{AO}$ (рис.3). Эти векторы взаимно перпендикулярны, параллелограмм превращается в прямоугольник. По теореме Пифагора:

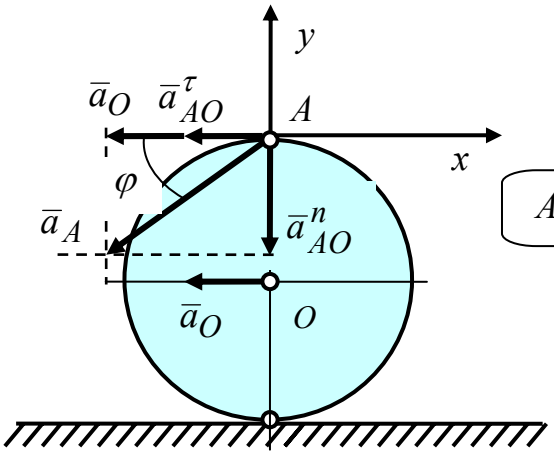


Рис. 3 к задаче 3.14

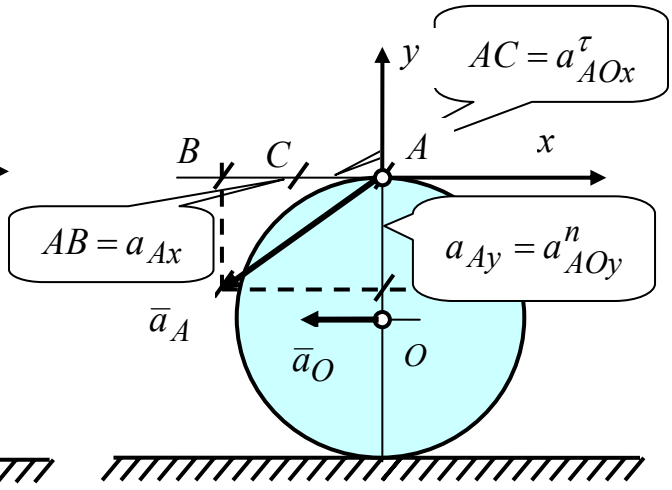


Рис. 4 к задаче 3.14

$$|\bar{a}_A| = \sqrt{(|\bar{a}_O| + |\bar{a}^{\tau}_{AO}|)^2 + (|\bar{a}^{n}_{AO}|)^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (10)^2} = \sqrt{104} = 10{,}2 м/с^2 .$$

Угол наклона вектора $\bar{a}_A$, как видно по рисунку, определится из уравнения $tg\varphi = |\bar{a}^{n}_{AO}| / (|\bar{a}_O| + |\bar{a}^{\tau}_{AO}|) = 10/2 = 5$. Отсюда $\varphi = 78{,}69^0$. 2. Для определения вектора $\bar{a}_A$ можно воспользоваться методом проекций. Спроецируем уравнение (*) на оси координат Axy (см. рис. 3 и 4). Получим: $a_{Ax} = a_{Ox} + a^{\tau}_{AOx} + a^{n}_{AOx}$, $a_{Ay} = a_{Oy} + a^{\tau}_{AOy} + a^{n}_{AOy}$. Здесь $a_{Ox} = -1$, $a_{Oy} = 0$, $a^{\tau}_{AOx} = -1$, $a^{\tau}_{AOy} = 0$, $a^{n}_{AOx} = 0$, $a^{n}_{AOy} = -10$. Тогда $a_{Ax} = -1-1 = -2$, $a_{Ay} = -10$. Модуль вектора: $|\bar{a}_A| = a_A = \sqrt{a^2_{Ax} + a^2_{Ay}} = \sqrt{104} = 10{,}2 м/с^2$. Направление вектора полного ускорения $\bar{a}_A$ определяется в данном случае по знакам его проекций на оси координат, а для модуля угла φ имеем уравнение $tg\varphi = |a_y| / |a_x| = 5$. Отсюда $\varphi = 78{,}69^0$, что полностью совпадает с полученным ранее значением. **Ответ:** $a_A = 10{,}2 м/с^2$, $\varphi = 78{,}69^0$.

§ 3.7. Задачи для самостоятельного решения на определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

Задача 3.15. Концы бруса AB, движущегося в вертикальной плоскости, скользят по горизонтальной и наклонной плоскостям (рис. к задаче 3.15). В момент времени, когда $\varphi = 30^0$, величина скорости $v_B = 0{,}5 м/с$ и величина ускорения

$a_B = 0{,}2 м/с^2$. Определить в данный момент времени величины скорости v_A и ускорения a_A конца A бруса, угловую скорость бруса ω_{AB} и угловое ускорение ε_{AB}, если $AB = 1м$. **Ответ:** $v_A = 0{,}5 м/с$, $a_A = 0{,}49 м/с^2$, $\omega_{AB} = 0{,}5 с^{-1}$, $\varepsilon_{AB} = 0{,}345 с^{-2}$.

Задача 3.16. По неподвижной шестерне 1 радиуса $R = 0{,}2м$ обкатывается шестерня 2 радиуса $r = 0{,}2м$, насаженная на кривошип OA. Кривошип OA вращается относительно неподвижной оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку O, и имеет в данный момент времени угловую скорость $\omega = 2 с^{-1}$ и угловое ускорение $\varepsilon = 1 с^{-2}$. Определить в данный момент времени угловую скорость ω_2, угловое ускорение ε_2 второй шестерни и величину ускорения a_B точки B, если радиус AB перпендикулярен оси кривошипа OA.

Ответ: $\omega_2 = 6 с^{-1}$, $\varepsilon_2 = 3 с^{-2}$, $a_B = 3{,}6 м/с^2$.

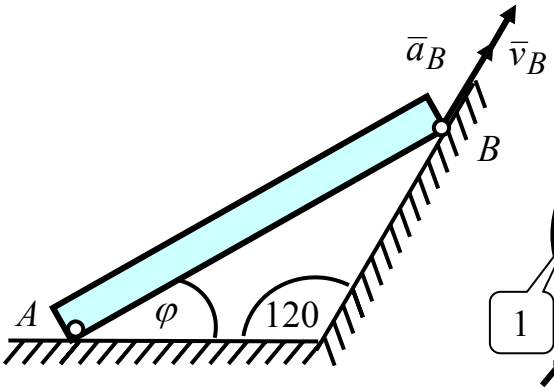


Рис. к задаче 3.15

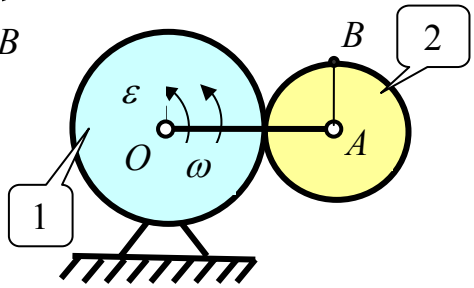


Рис. к задаче 3.16

Задача 3.17. Стержень AB длиной $L = 0{,}4м$ движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени точки A и B имели ускорения, модули которых $a_A = 2 м/с^2$, $a_B = 6 м/с^2$. Определить угловое ускорение стержня ε_{AB}, если в данный момент времени угол $\alpha = 30^0$. **Ответ:** $\varepsilon_{AB} = 10 с^{-2}$.

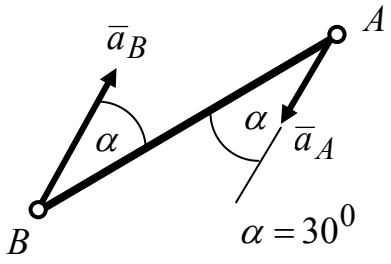


Рис. к задаче 3.17

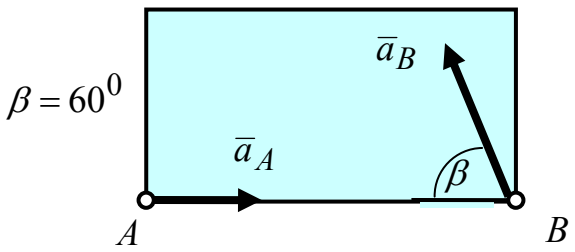


Рис. к задаче 3.18

Задача 3.18. Тело в форме прямоугольника находится в плоскопараллельном движении. Найти в показанный на рисунке момент времени его угловую скорость ω, если модули ускорений $a_A = 1 м/с^2$, $a_B = 6 м/с^2$. Расстояние $AB = 1м$, угол $\beta = 60^0$. **Ответ:** $\omega = \omega_{AB} = 2 с^{-1}$.

Задача 3.19. Определить величину ускорения a_B ползуна B и угловое ускорение ε_{AB} шатуна AB кривошипно-шатунного механизма в показанном на рисунке положении, если угловое ускорение кривошипа в данный момент времени $\omega = 1c^{-1}$. Длины звеньев $OA = 0{,}3м$, $AB = 0{,}5м$.

Ответ: $a_B = 0{,}225м/c^2$, $\varepsilon_{AB} = 0{,}75c^{-2}$.

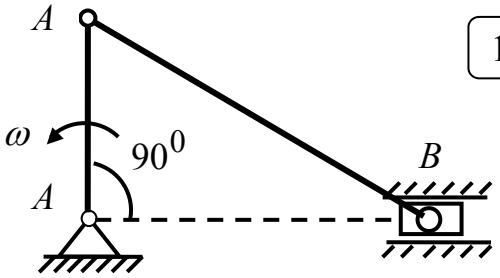


Рис. к задаче 3.19

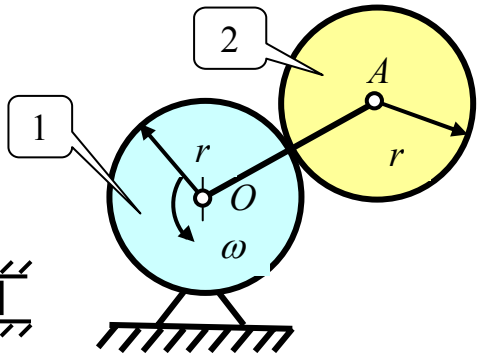


Рис. к задаче 3.20

Задача 3.20. Кривошип OA планетарного механизма вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 1c^{-1}$ относительно оси, проходящей перпендикулярно к плоскости рисунка через центр O неподвижного колеса 1. Определить модуль ускорения точки p, являющейся мгновенным центром скоростей подвижного колеса 2, если радиусы колес $r = 0{,}1м$. **Ответ:** $a_p = 0{,}2м/c^2$.

Задача 3.21. Кривошип OA кривошипно-шатунного механизма вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2c^{-1}$. В показанном на рисунке положении механизма определить угловую скорость ω_{AB} и угловое ускорение ε_{AB} шатуна AB, модули скоростей и ускорений точек A, B, C, если $OA = 0{,}2м$, $AB = 1{,}6м$, $BC = 0{,}8м$, $h = 0{,}8м$. **Ответ:** $\omega_{AB} = 0{,}29c^{-1}$, $\varepsilon_{AB} = 0{,}05c^{-2}$, $v_A = 0{,}4м/c$, $v_B = v_C = 0{,}23м/c$, $a_A = a_A^n = 0{,}8м/c^2$, $a_B = 0{,}96м/c^2$, $a_C = 0{,}88м/c^2$.

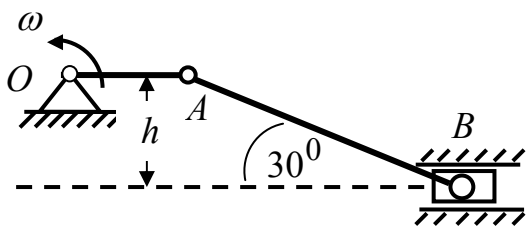


Рис.1 к задаче 3.21

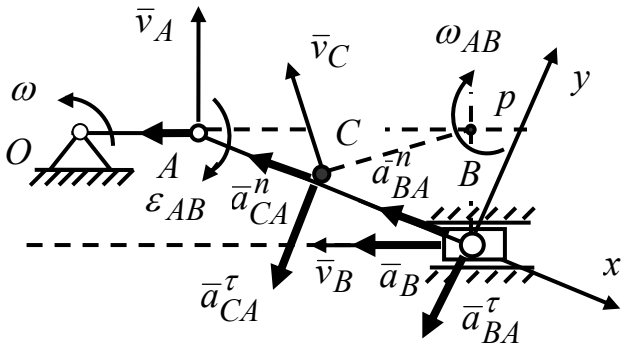


Рис.2 к задаче 3.21

Замечание к задаче 3.21. На рис.1 к задаче приведена исходная схема механизма. На рис. 2 к задаче приведена расчетная схема, которая сопровождает вычисления. Это некоторая «подсказка» к решению. Рекомендуется при решении задачи на первом этапе разобраться со скоростями, а векторы ускорений с рисунка убрать. На втором этапе определяются ускорения. При этом векторы скоростей с рисунка надо убрать, чтобы не загромождать рисунок.

Вопросы для самоконтроля к главе 3

1.Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным или плоским?

2. Запишите уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.

3. Из каких простейших движений твердого тела математически «складывается» плоскопараллельное движение?

4. Сформулируйте и поясните теорему о геометрическом сложении скоростей точек плоской фигуры.

5. Запишите уравнения метода проекций для определения скорости произвольной точки плоской фигуры.

6. Какая точка плоской фигуры называется полюсом?

7. Зависят ли угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры от выбора полюса?

8. Как вычисляется скорость произвольной точки плоской фигуры при вращении фигуры относительно полюса в плоскопараллельном движении?

9. Сформулируйте теорему о проекциях векторов скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки.

10. Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры

11. Как определяется мгновенный центр скоростей плоской фигуры при известных направлениях векторов скоростей двух точек плоской фигуры?

12. Покажите положение мгновенного центра скоростей для известных Вам частных случаев движения плоской фигуры.

13. Как вычисляется скорость произвольной точки плоской фигуры в плоскопараллельном движении при известном положении мгновенного центра скоростей?

14. Сформулируйте теорему о геометрическом сложении векторов ускорений при плоскопараллельном движении плоской фигуры. Из каких векторов состоит в общем случае вектор ускорения произвольной точки плоской фигуры?

15. Как направлены и как вычисляются величины касательной и нормальной составляющих вектора ускорения произвольной точки, возникающего от вращения плоской фигуры относительно полюса?

16. Запишите уравнения метода проекций для определения ускорения произвольной точки плоской фигуры.

17. Какая точка называется мгновенным центром ускорений плоской фигуры?

18. Как вычисляется ускорение произвольной точки плоской фигуры при известном мгновенном центре ускорений?

ГЛАВА 4. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ И СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

При изучении данной главы настоятельно рекомендуется периодически возвращаться к материалу главы 2, где рассматривалось вращение твердого тела относительно **неподвижной** оси. Внимательный читатель найдет много аналогий не только в терминологии, но в самих рабочих формулах, описывающих оба вида движения. Тем самым облегчится процесс не только понимания нового материала, но и его запоминания.

§ 4.1. Уравнения движения тела с одной неподвижной точкой

4.1. Если в процессе движения твердого тела только одна из его точек O остается неподвижной, то движение тела называется движением тела с одной неподвижной точкой или сферическим движением.

При сферическом движении *точки* твердого тела движутся по траекториям, лежащим на сферических поверхностях разного радиуса, но с центрами в неподвижной точке тела O. Радиус сферы, по которой движется произвольная точка M, равен расстоянию OM от точки M до неподвижной точки тела O (рис.4.2).

Фото 4.1

Сферическое движение в чистом виде (например, детская юла, когда она еще не сошла с точки вращения, гироскоп в кардановом подвесе) или в комбинации с другими движениями (вращение шаровых опор в автомобилях, вращение тел, брошенных под углом к горизонту) достаточно часто встречается на практике. В то же время вращение твердого тела относительно неподвижной оси является частным случаем сферического движения. Та же юла до момента времени, пока ее ось остается вертикальной, вращается относительно неподвижной оси.

Чтобы определить сферическое движение тела, введем две системы отсчета. Систему координат $Oxyz$ жестко свяжем с неподвижным телом отсчета, которое на рисунках не показано. С движущимся телом жестко свяжем подвижную систему координат $Ox_1y_1z_1$. Начала обеих систем

координат находятся в неподвижной точке O. В подвижной системе координат $Ox_1y_1z_1$ произвольная точка M тела имеет координаты x_{1M}, y_{1M}, z_{1M}, не зависящие от времени. Кроме того, предполагается, что форма и размеры движущегося тела известны. Пусть в начальный момент времени подвижная система координат совпадает с неподвижной. Если тело вращается так, что оси Oz и Oz_1 совпадают, то приходим к изученному ранее вращению тела относительно неподвижной оси. Положение тела в любой момент времени определяется одним единственным углом $\varphi(t)$, который показан на рис.4.1.

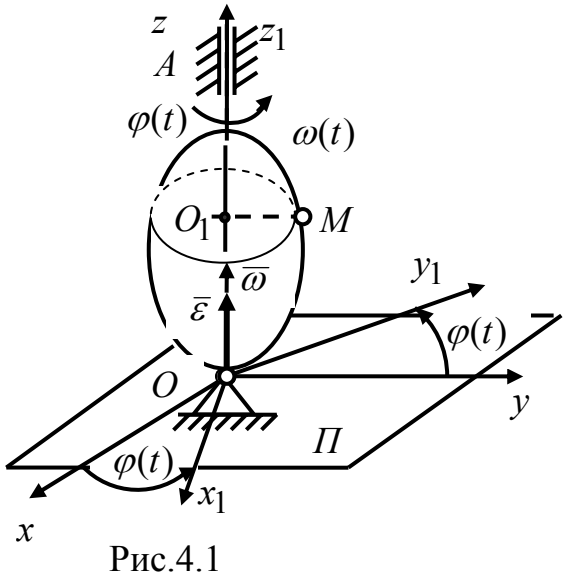


Рис.4.1

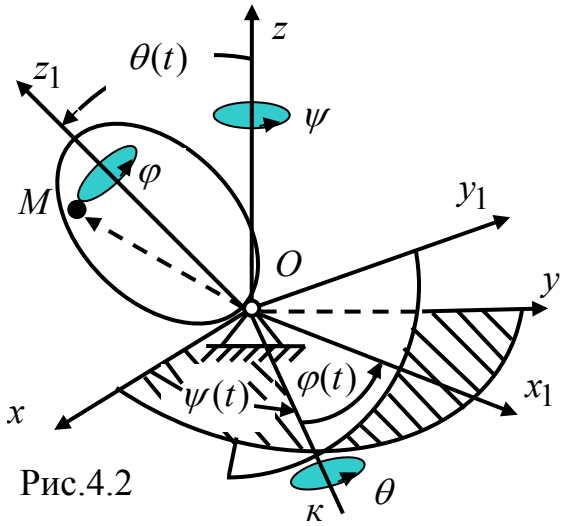


Рис.4.2

Тело с одной неподвижной точкой в произвольный момент времени показано на рис. 4.2. Для того чтобы однозначно определить положение тела и его произвольной точки M в неподвижной системе координат $Oxyz$, необходимо определить положение подвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ по отношению к неподвижной системе координат $Oxyz$ в любой момент времени. Это можно сделать задав три угла Л. Эйлера (рис.4.2).

$$\boxed{\varphi = \varphi(t), \qquad \psi = \psi(t), \qquad \theta = \theta(t).} \tag{4.1}$$

4.2. Уравнения (4.1) называются уравнениями сферического движения твердого тела. *(Углы φ, ψ, θ измеряются в рад).*

Действительно, пусть в течении некоторого промежутка времени тело движется так, что $\theta = const$, $\psi = const$, $\varphi = \varphi(t)$. Это означает, что подвижная координатная плоскость Ox_1y_1 наклонилась по отношению к неподвижной плоскости Oxy на угол $\theta = const$ и пересеклась с ней по прямой Ok, которая называется **линией узлов**. Положение линии Ok на плоскости Oxy задано углом $\psi = const$ и в рассматриваемый промежуток

времени не меняется. Так как меняется угол $\varphi(t)$, то тело вращается относительно наклонной оси Oz_1. $\varphi = \varphi(t)$ – это закон вращения тела относительно наклонной оси Oz_1. Такое движение может быть исследовано по теории вращения твердого тела относительно неподвижной оси (рис.4.1), а угол $\varphi = \varphi(t)$ между линией узлов $O\kappa$ и подвижной осью Ox_1 называется **углом собственного вращения.** Положение самой прямой $O\kappa$ на плоскости Oxy определяется углом $\psi(t)$, который называется **углом прецессии.** Если функции $\varphi(t) \neq const$, $\psi(t) \neq const$, а $\theta = const$, то тело совершает собственное вращение вокруг оси Oz_1. Одновременно ось Oz_1 описывает коническую поверхность с углом $2\theta = const$ при вершине O. Таким образом, две функции $\varphi(t), \psi(t)$ определяют положение подвижной оси Ox_1 относительно неподвижной оси Ox. Прибавляя к углу $\varphi(t)$ угол $\pi/2$, находят положение оси Oy_1 на наклонной плоскости Ox_1y_1. Наконец, угол между осями Oz *и* Oz_1 (читай между плоскостями Oxy и Ox_1y_1) определяют углом $\theta(t)$**,** который называется **углом нутации.**

4.3. За положительные направления отсчета углов $\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$ ***принимаются направления, соответствующие поворотам тела против часовой стрелки, если наблюдать вращение с положительных концов осей*** $Oz_1, Oz, O\kappa$ ***соответственно (рис.4.2).*** (Такое же правило было принято для закона вращения $\varphi = \varphi(t)$ в теории вращения твердого тела относительно неподвижной оси).

Из (4.1) следует, что сферическое движение твердого тела как бы состоит из трех одновременных вращений тела относительно трех разных мгновенных осей вращения (то есть осей, меняющих при движении свое положение в пространстве). Алгебраические угловые скорости этих вращений обозначим $\omega_1 = \dot{\varphi}(t)$, $\omega_2 = \dot{\psi}(t)$, $\omega_3 = \theta(t)$. Соответствующие векторы угловых скоростей обозначаются $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ и направляются по осям $Oz_1, Oz, O\kappa$ соответственно, так чтобы с конца любого вектора соответствующий поворот тела наблюдался происходящим против часовой стрелки (рис.4.3). (Такое же правило было принято для вектора угловой скорости $\overline{\omega}$ в теории вращения твердого тела относительно неподвижной оси).

Суммируя векторы угловых скоростей $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$, находим мгновенную угловую скорость тела $\overline{\omega}$ и его мгновенную ось вращения.

$$\boxed{\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3.} \qquad (4.2)$$

4.4. Мгновенной осью вращения тела при сферическом движении называется прямая, по которой направлен вектор мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ и точки которой имеют в данный момент времени линейные скорости равные нулю.

Формула (4.2) проясняет механизм сферического движения, что отражено в следующей теореме.

4.5. Теорема Эйлера. Всякое движение твердого тела с одной неподвижной точкой – это последовательность элементарных поворотов тела относительно мгновенных осей вращения.

Понятие о мгновенной оси вращения введено Д' Аламбером в 1749 г. и Л. Эйлером в 1750 г.

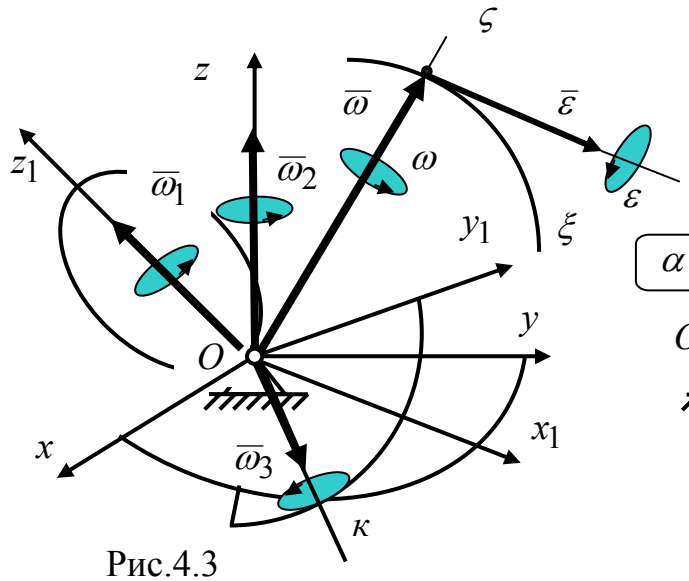


Рис.4.3

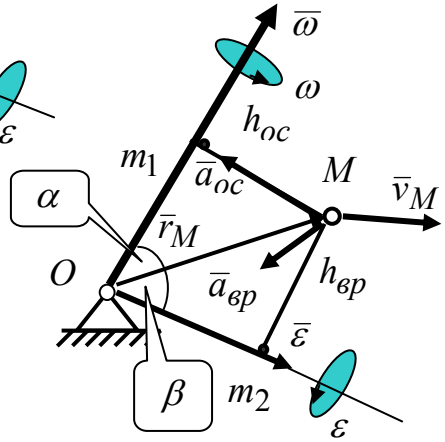


Рис.4.4

Пример 4.1. В качестве примера существования мгновенной оси вращения можно привести случай качения без скольжения кругового конуса с неподвижной вершиной по горизонтальной неподвижной плоскости (см. рис. к примеру). Очевидно, что точки конуса, касающиеся по прямой плоскости, имеют линейные скорости равные нулю. Следовательно, эта образующая конуса в этот момент времени является мгновенной осью вращения $O\varsigma$.

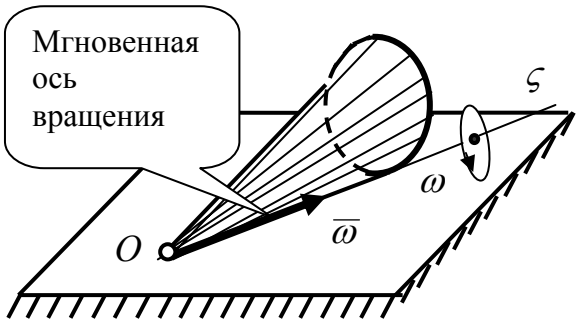


Рис. к примеру 4.1

Скорость изменения вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ характеризуется вектором углового ускорения $\bar{\varepsilon}$.

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega}/dt\,.} \qquad (4.3)$$

Чтобы определить направление вектора $\bar{\varepsilon}$, вспомним формулу (1.13) для вектора линейной скорости $\bar{v}$ точки $\bar{v} = d\bar{r}/dt\,.$ (1.13)

Было установлено, что вектор скорости точки $\bar{v}$ направлен по касательной к годографу радиус-вектора $\bar{r}$ точки. Поскольку между формулами (4.3) и (1.13) существует полная математическая аналогия, можно утверждать следующее.

4.6. Вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ направлен по касательной к годографу вектора угловой скорости $\bar{\omega}$, как показано на рис.4.3.

На практике вектор углового ускорения принято параллельно самому себе переносить и прикладывать в неподвижной точке O, как показано на рис. 4.4. Итак, кинематические характеристики сферического движения твердого тела – закон движения (4.1), вектор мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ (4.2) и вектор мгновенного углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ (4.3) определены. Переходим к определению движения отдельных точек тела.

Замечание. Годограф радиус-вектора $\bar{r}$ точки имеет механический смысл – это траектория точки, годограф вектора $\bar{\omega}$ механического смысла не имеет, это просто пространственная кривая, которую описывает конец вектора $\bar{\omega}$.

§ 4.2. Векторы скорости и ускорения точек тела при сферическом движении

1. Вектор скорости. Зная вектор мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$, можно определить вектор линейной скорости любой *точки* тела. По теореме Эйлера и формуле (2.21) для вектора скорости точки M можно записать (см. рис. 4.4):

$$\boxed{\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \bar{r}_M \ ,} \qquad (4.4)$$

где $\bar{r}_M$ – радиус – вектор точки. *Эта формула носит название формулы Эйлера.* Вектор $\bar{r}_M$ имеет постоянную длину (так как тела абсолютно твердые), но переменное направление. Вектор $\bar{\omega}$ может менять с течением времени и длину, и направление. Вектор скорости точки $\bar{v}_M$ направлен по касательной к траектории точки перпендикулярно к плоскости OMm_1, проходящей через радиус-вектор точки $\bar{r}_M$ и вектор мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ в ту сторону, куда в данный момент поворачивается тело, то есть по направлению дуговой стрелки ω. При этом $|\bar{v}_M| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{r}_M| \cdot \sin\alpha$ (рис.4.4). Или

$$\boxed{|\bar{v}_M| = |\bar{\omega}| \cdot Mm_1 = |\bar{\omega}| \cdot h_{oc} \ .} \qquad (4.5)$$

Пример 4.2. Коническое зубчатое колесо 1, насаженное с помощью шарикового подшипника на кривошип OB, катится по неподвижному коническому зубчатому колесу 2 (рис. а) к примеру 4.2). Угловая скорость кривошипа OB, вращающегося относительно неподвижной оси OA, известна и равна $\bar{\omega}_2$. Определить скорости точек B, C, E, лежащих на диаметральном сечении колеса 1, проходящем через ось

кривошипа OB перпендикулярно к неподвижной плоскости. Геометрические размеры механизма считать известными.

Решение. Колесо 1 совершает сферическое движение относительно точки O с некоторой угловой скоростью $\overline{\omega}$. В начальный момент времени в точке O введем неподвижную систему координат $Oxyz$ и подвижную систему координат $Ox_1y_1z_1$. Как и прежде, подвижную ось Oz_1 направим по оси вращения тела, совершающего

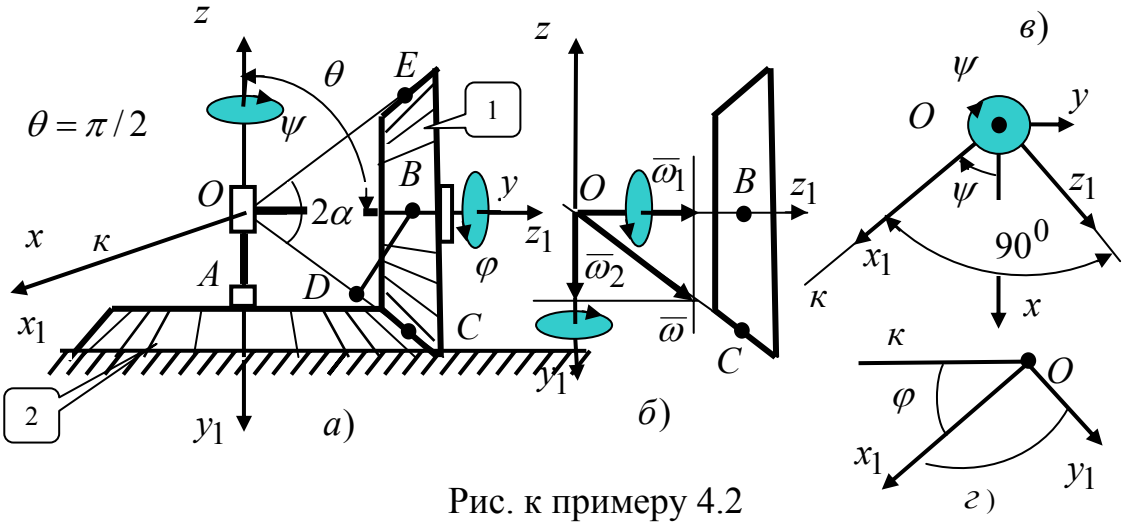


Рис. к примеру 4.2

сферическое движение, то есть по оси собственного вращения зубчатого колеса 2 (рис. а) к примеру 4.2). Линия узлов Ok в начальный момент времени совпадает с осями Ox и Ox_1, а в процессе движения она будет над или под подвижной осью Ox_1. На рис. *в*) к примеру 4.2 для произвольного момента времени показано положение осей при наблюдении с положительного конца оси Oz. На рис. *г*) к примеру 4.2 показано для произвольного момента времени положение осей координат при наблюдении с положительного конца оси Oz_1. Видим, что углы φ и ψ меняются. Угол $\theta = \pi/2$. Модули соответствующих угловых скоростей $\omega_1 = \dot{\varphi}$, $\omega_2 = \dot{\psi}$, $\omega_3 = 0$. По (4.2) имеем $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$. В этом равенстве полностью известен вектор $\overline{\omega}_2$ и известно направление векторов $\overline{\omega}, \overline{\omega}_1$. При этом $\overline{\omega}$ направлен по мгновенной оси вращения OC ($v_C = 0$, так как это точка касания подвижного колеса с неподвижным – рис б). Тогда из прямоугольника векторов угловых скоростей находим $\omega = \omega_{2/} \sin\alpha$. По теореме Эйлера имеем $v_B = \omega_2 \cdot OB$ или $v_B = \omega \cdot BD = (\omega_{2/} \sin\alpha) \cdot OB \cdot \sin\alpha = \omega_2 \cdot OB$, что совпадает с предыдущим результатом. Точка E находится от мгновенной оси на расстоянии $h = 2 \cdot BD$. Следовательно, $v_E = 2v_B = 2 \cdot \omega_2 \cdot OB$. **Ответ:** $v_B = \omega_2 \cdot OB$, $v_C = 0$, $v_E = 2 \cdot \omega_2 \cdot OB$.

2. Векторы ускорения точек тела при сферическом движении. Зная вектор мгновенного углового ускорения $\overline{\varepsilon}$, можно определить линейные ускорения любой *точки* тела.

4.7. Теорема Ривальса: вектор полного ускорения $\bar{a}_M$ любой точки твердого тела, совершающего сферическое движение, равен сумме векторов вращательного $\bar{a}_{вр}$ и осестремительного $\bar{a}_{ос}$ ускорений.

$$\boxed{\bar{a}_M = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_M) + (\bar{\omega} \times \bar{v}_M)} \quad \text{или} \quad \boxed{\bar{a}_M = \bar{a}_{вр} + \bar{a}_{ос},} \tag{4.6}$$

где $$\boxed{\bar{a}_{вр} = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_M),} \quad \boxed{\bar{a}_{ос} = (\bar{\omega} \times \bar{v}_M)\ .} \tag{4.7}$$

Действительно, дифференцируя по времени (4.4) по аналогии с формулой (2.22), получим формулу (4.6). Здесь $\bar{a}_M = d\bar{v}_M / dt$ –вектор полного ускорения точки M. $\bar{a}_{вр} = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_M)$ – вектор вращательного ускорения точки. Он перпендикулярен плоскости, проходящей через векторы $\bar{\varepsilon}$ *и* $\bar{r}_M$, и направлен по дуговой стрелке ε (направление определяется по правилу векторного произведения). В общем случае он не направлен по касательной к траектории, как вектор скорости точки $\bar{v}_M$, так как векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ не лежат на одной прямой (рис.4.4). $\bar{a}_{ос} = (\bar{\omega} \times \bar{v}_M)$ – вектор осестремительного ускорения точки тела. Этот вектор перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\bar{\omega}, \bar{v}_M$ и направлен к мгновенной оси вращения $O\varsigma$ по перпендикуляру Mm_1 (рис.4.4).

§ 4.3. Определение кинематических характеристик сферического движения твердого тела аналитически

Пусть заданы уравнения сферического движения твердого тела (4.1). Векторы мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ и мгновенного углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ представим через их проекции $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ на оси неподвижной системы координат $Oxyz$.

$$\bar{\omega} = \omega_x \cdot \bar{i} + \omega_y \cdot \bar{j} + \omega_z \cdot \bar{k}, \qquad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_x \cdot \bar{i} + \varepsilon_y \cdot \bar{j} + \varepsilon_z \cdot \bar{k}\ . \tag{4.8}$$

Здесь $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы неподвижных осей Ox, Oy, Oz, соответственно.

Проекции вектора угловой скорости $\bar{\omega}$. Используя (4.2), можно получить формулы:

$$\omega_x = \dot{\varphi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi + \dot{\theta} \cdot \cos\psi, \qquad \omega_y = -\dot{\varphi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi + \dot{\theta} \cdot \sin\psi,$$
$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cdot \cos\theta\ . \tag{4.9}$$

Проекции вектора углового ускорения. Так как мгновенный вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ связан с вектором угловой скорости $\bar{\omega}$ по формуле (4.3), то в неподвижной системе координат $Oxyz$ имеем:

$$\boxed{\varepsilon_x = \dot{\omega}_x, \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y, \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z.} \tag{4.10}$$

Зная проекции векторов, можно определить и сами векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$ по формулам типа (1.24), (1.25).

Проекции вектора $\bar{\omega}$ на подвижные оси системы координат $Ox_1y_1z_1$ даются формулами (вывод тоже не приводится):

$$\omega_{x_1} = \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + \dot{\theta} \cdot \cos\varphi, \qquad \omega_{y_1} = \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi - \dot{\theta} \cdot \sin\varphi,$$

$$\boxed{\omega_{z_1} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos\theta.} \tag{4.11}$$

Уравнения (4.9), (4.11) называются кинематическими уравнениями Эйлера.

Пусть вектор линейной скорости точки M тела, совершающего сферическое движение, и радиус вектор точки в неподвижной системе координат $Oxyz$ представлены в виде:

$$\bar{v}_M = v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k}, \qquad \bar{r}_M = x_M \cdot \bar{i} + y_M \cdot \bar{j} + z_M \cdot \bar{k}. \tag{4.12}$$

Проекции вектора скорости точки v_x, v_y, v_z в неподвижной системе координат $Oxyz$ можно получить из формулы Эйлера (4.4), используя представление векторного произведения через определитель:

$$\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \bar{r}_M = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_M & y_M & z_M \end{vmatrix}. \tag{4.13}$$

Разлагая определитель по элементам первой строки и приравнивая коэффициенты, стоящие перед одноименными единичными векторами, с учетом (4.12) будем иметь:

$$\boxed{v_x = (\omega_y z_M - \omega_z y_M), \quad v_y = (\omega_z x_M - \omega_x z_M), \quad v_z = (\omega_x y_M - \omega_y x_M).} \tag{4.14}$$

Все величины, входящие в правую часть формул (4.14), являются функциями времени. Проекции $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ определяются по формулам (4.9). Координаты точки $x_M(t)$, $y_M(t)$, $z_M(t)$ могут быть определены по координатам точки x_{1M} , y_{1M} , z_{1M} в подвижной системе координат и уравнениям движения тела (4.1). Если проекции v_x, v_y, v_z вычислены, то по формулам вида (1.24) определяется и модуль вектора скорости:

$$\boxed{|\bar{v}_M| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ .} \tag{4.15}$$

Заменив в (4.13) $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ на $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$, а $x_M(t)$, $y_M(t)$, $z_M(t)$ на x_{1M} , y_{1M} , z_{1M} , для проекций вектора скорости $v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}$ в подвижной системе

координат $Ox_1y_1z_1$ с учетом (4.9) получим:

$$v_{x_1} = (\omega_{y_1} z_{1M} - \omega_{z_1} y_{1M}), \qquad v_{y_1} = (\omega_{z_1} x_{1M} - \omega_{x_1} z_{1M}),$$

$$v_{z_1} = (\omega_{x_1} y_{1M} - \omega_{y_1} x_{1M}), \qquad |\bar{v}| = v = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2} \tag{4.16}$$

§ 4.4. Свободное движение тела

4.8.Тело, которому можно придать любое перемещение в пространстве из занимаемого им положения, называется свободным телом.

4.9. Свободным движением тела называется движение свободного тела.

1. Уравнения движения свободного тела

Движение свободного тела рассматривается в неподвижной системе отсчета с системой координат $Oxyz$. Форма и размеры тела предполагаются известными. Выберем в теле произвольную точку A, называемую полюсом, и свяжем с этой точкой две системы координат.

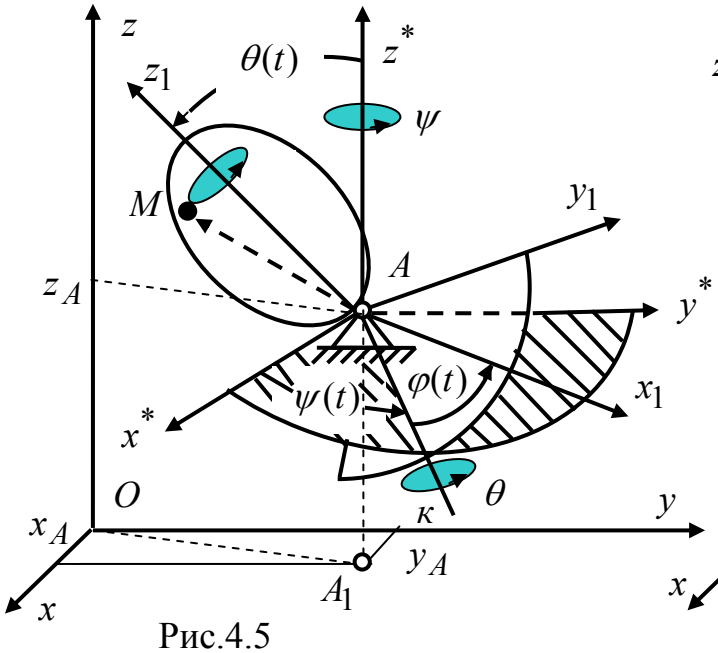


Рис.4.5

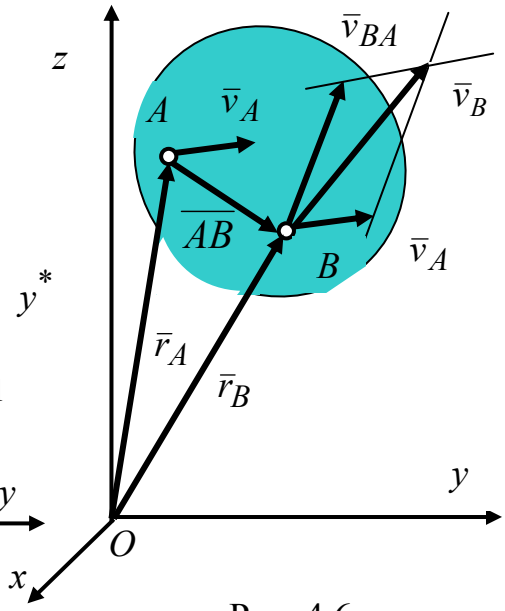


Рис. 4.6

Система координат $Ax^*y^*z^*$ движется вместе с телом поступательно, а ее оси параллельны соответствующим осям системы координат $Oxyz$. Это вспомогательная система координат вводится для отсчета углов. Вторая

система координат $Ax_1y_1z_1$ жестко связана с телом и повторяет все его движения. Положение свободного тела в пространстве будет известно, если задать или знать в каждый момент времени координаты x_A, y_A, z_A полюса A и три угла Эйлера $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ (см. рис. 4.5):

$$\boxed{x_A = x_A(t),\ y_A = y_A(t),\ z_A = z_A(t),\ \varphi = \varphi(t), \psi = \psi(t),\ \theta = \theta(t).} \quad (4.17)$$

4.10.Уравнения (4.17) называются уравнениями свободного движения тела.

Как же движется свободное тело? Если, например, три последние функции углов постоянны, то тело движется поступательно – оси системы координат $Ax_1y_1z_1$, связанные с телом, остаются параллельными самим себе. Другими словами, первые три функции описывают поступательную составляющую свободного движения. Пусть теперь первые три функции – постоянны. Тело как бы зависло полюсом A в некоторой точке пространства. Если три угловые функции при этом меняются, то тело совершает сферическое движение с неподвижной точкой A. Вывод: *движение свободного тела «складывается» из поступательного движения, при котором все точки тела движутся так же, как и произвольно выбранный полюс A, и сферического движения относительно полюса A.*

2. Скорости и ускорения точек тела при свободном движении

4.11. Теорема. Вектор скорости произвольной точки B тела равен геометрической сумме вектора скорости полюса и вектора скорости точки в сферическом движении тела вокруг полюса.

$$\boxed{\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}} \quad \text{или} \quad \boxed{\bar{v}_B = \bar{v}_A + (\bar{\omega} \times \overline{AB})\ .} \quad (4.18)$$

Доказательство. Движение произвольной точки B зададим векторным способом через движение полюса A (рис.4.6). Тогда $\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}$. Продифференцируем последнее равенство по времени. $d\bar{r}_B / dt = d\bar{r}_A / dt + d(\overline{AB})/dt$ или $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$, где $\bar{v}_B = d\bar{r}_B / dt -$ вектор скорости точки B в неподвижной системе координат $Oxyz$, $\bar{v}_A = d\bar{r}_A / dt -$ вектор скорости полюса A в неподвижной системе координат $Oxyz$. $\bar{v}_{BA} = d(\overline{AB})/dt$ – вектор скорости точки B в системе координат $Ax^*y^*z^*$, то есть вектор скорости точки в ее сферическом движении относительно полюса A. Действительно, $\left|\overline{AB}\right| = const$, так как тело

абсолютно твердое. Но $\overline{AB}$ – радиус-вектор с началом в полюсе A. Следовательно, вектор $\overline{AB}$ изменяет лишь свое направления в пространстве. В системе координат $Ax*y*z*$ он лишь вращается вокруг полюса A. Если положение мгновенной оси вращения тела в сферическом движении и вектор мгновенной угловой скорости тела $\overline{\omega}$ известны, то с учетом формулы Эйлера (4.4) имеем:

$$\boxed{\overline{v}_{BA} = (\overline{\omega} \times \overline{AB}).} \qquad (4.19)$$

Окончательно:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + (\overline{\omega} \times \overline{AB}). \qquad (4.20)$$

Что и требовалось доказать.

4.12. Теорема Ривальса для свободного движения тела. Вектор полного ускорения любой точки твердого тела при его свободном движении равен геометрической сумме вектора ускорения полюса, вектора осестремительного и вектора вращательного ускорений.

$$\boxed{\overline{a}_B = \overline{a}_A + (\overline{\varepsilon} \times \overline{AB}) + (\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{AB}))} \quad \text{или} \quad \boxed{\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{вр} + \overline{a}_{ос},} \qquad (4.21)$$

где $\boxed{\overline{a}_{вр} = (\overline{\varepsilon} \times \overline{AB})}$, $\boxed{\overline{a}_{ос} = (\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{AB}))}$. (4.22)

Доказательство. Продифференцируем (4.20) по времени. С учетом формулы (4.3) получим:

$$\overline{a}_B = \frac{d\overline{v}_B}{dt} = \frac{d\overline{v}_A}{dt} + (\frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{AB}) + (\overline{\omega} \times \frac{d\overline{AB}}{dt}) = \overline{a}_A + (\overline{\varepsilon} \times \overline{AB}) + (\overline{\omega} \times \overline{v}_{BA})$$

Или с учетом (4.19) $\overline{a}_B = \overline{a}_A + (\overline{\varepsilon} \times \overline{AB}) + (\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{AB}))$. Что и требовалось доказать.

Вопросы для самоконтроля к главе 4

1. Запишите уравнения сферического движения тела.
2. Что называется мгновенной осью вращения и мгновенной угловой скоростью вращения тела при сферическом движении?
3. Запишите формулы для векторов линейной скорости и ускорения точки тела, совершающего сферическое движение.
4. Как направлен вектор линейной скорости точки при сферическом движении тела?
5. Как направлены векторы вращательного и осестремительного ускорений точки при сферическом движении?
6. Какое движение твердого тела называется свободным?
7. Запишите уравнения свободного движения тела.
8. Что называется вектором мгновенной угловой скорости и мгновенного углового ускорения тела при его свободном движении?
9. Запишите формулу для вектора скорости произвольной точки тела, совершающего свободное движение.

ГЛАВА 5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

С точки зрения обсуждаемых ниже вопросов сейчас важно подчеркнуть, что движение исследовалось в одной неподвижной системе отсчета. Напомним, что под системой отсчета мы договорились понимать тело отсчета и жестко с ним связанную систему координат. При этом в качестве тел отсчета принимались или сама Земля, или любое другое тело, жестко с ней связанное (следовательно, тоже неподвижное тело). На практике часто встречаются задачи, когда движение точки приходится рассматривать в нескольких системах отсчета. Такое движение точки приходится изучать отдельно. Мы остановимся на задачах, для исследования которых достаточно ввести две системы координат, одна из которых связана с неподвижным телом (неподвижная система координат), а вторая – с подвижным (подвижная система координат). Не уменьшая общности последующих рассуждений, а, следовательно, не сужая область применимости выводов, которые будут сделаны, предположим, что точка движется по некоторому телу, а само это тело совершает одно из изученных ранее движений в неподвижной системе координат. Например, движение точки по палубе речного теплохода в системе координат, связанной с берегом, можно рассматривать как два «простых» движения. Первое движение – это движение относительно самой палубы. Если мы находимся на палубе (связаны с подвижной системой координат), то все перемещения, скорости, траектории, ускорения точки мы оцениваем по отношению к самой палубе. Другими словами, в этом случае движение точки рассматривается в некоторой подвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$, жестко связанной с подвижным телом (палубой). Второе движение – это движение, которое совершает точка вместе с палубой относительно неподвижной системы координат $Oxyz$, связанной, например, с берегом. Проблема кинематики сложного движения точки – научиться объединять, «складывать» эти движения и получить кинематические характеристики движения точки относительно неподвижной системы координат.

§ 5.1. Общие понятия и определения в теории сложного движения точки

5.1. Если при исследовании движения точки приходится вводить две и более систем отсчета, то движение точки будем называть «сложным движением точки».

5.2.Систему координат $O_1x_1y_1z_1$, жестко связанную с движущимся телом, называют подвижной системой координат. Координаты всех точек тела в этой системе координат – постоянны и остаются таковыми в процессе движения.

5.3.Систему координат $Oxyz$, связанную с Землей или любым другим телом, жестко с Землей связанным, называют неподвижной системой координат. В этой системе координат исследуется движение тела и всех его точек. Поэтому координаты точек тела по отношению к неподвижной системе координат будут меняться с течением времени.

5.4.Движение точки относительно подвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ ***называется относительным движением.***

Кинематические характеристики относительного движения будут в дальнейшем иметь индекс «отн». Например, вектор скорости точки в относительном движении (относительная скорость) будем в дальнейшем обозначать – $\bar{v}_{отн}$, вектор ускорения точки в относительном движении (относительное ускорение) будем обозначать – $\bar{a}_{отн}$. Линия, которую «вычерчивает» точка при движении в подвижной системе координат, называется траекторией относительного движения точки. Эту траекторию часто можно построить экспериментально. Например, шар, вымазанный в краске, оставит на палубе след – траекторию движения. Аналитически траектория относительного движения в подвижных осях строится по известному закону относительного движения точки, как было рекомендовано в главе 1.

5.5.Движение точки относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ ***называется абсолютным движением.***

Кинематические характеристики абсолютного движения будут в дальнейшем иметь индекс «абс». Например, вектор скорости точки в абсолютном движении (абсолютная скорость) будем в дальнейшем обозначать – $\bar{v}_{абс}$, вектор ускорения точки в абсолютном движении (абсолютное ускорение) будем обозначать – $\bar{a}_{абс}$. Линия, которую «вычерчивает» точка при движении в неподвижной системе координат, называется траекторией абсолютного движения точки. Эту линию можно наблюдать в эксперименте, находясь в неподвижной системе координат.

5.6. Движение точки M вместе с подвижной системой координат $O_1x_1y_1z_1$ ***по отношению к неподвижной системе координат*** $Oxyz$ ***называется переносным движением точки M.***

Кинематические характеристики переносного движения будут в дальнейшем иметь индекс «пер». Например, вектор скорости точки в переносном движении (переносную скорость) будем в дальнейшем обозначать – $\bar{v}_{пер}$, вектор ускорения точки в переносном движении (переносное ускорение) будем обозначать – $\bar{a}_{пер}$.

5.7. Переносными скоростью и ускорением точки M в данный момент времени относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ ***называются скорость и ускорение той геометрической точки пространства, жестко связанной с подвижной системой координат*** $O_1x_1y_1z_1$ ***(читай: «тела, по которому движется точка»), в которой в данный момент времени находится кинематическая точка M.***

Пример 5.1. Поясним теперь, как определить скорость и ускорение точки в переносном движении. Как следует из определения 5.2, координаты точек движущегося тела не меняются в подвижной системе координат. Подвижная система координат как бы «вморожена» в твердое тело (например, в палубу). Следовательно, и скорости, и ускорения точек тела (палубы) по отношению к подвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$ равны нулю. Движение точки M в этой системе координат – относительное движение. Это движение по палубе может быть проанализировано методами главы 1, считая палубу неподвижной. Сама подвижная система координат $O_1x_1y_1z_1$ (читай: «палуба») и все жестко связанные с ней геометрические точки пространства (точки палубы) совершают движение с определенными скоростями и ускорениям в неподвижной системе координат $Oxyz$, которая связана, например, с берегом. Совершая относительное движение, точка M в разные моменты времени попадает то в одну, то в другую точки движущегося тела (палубы). Согласно определению 5.7 переносными скоростью и ускорением точки M в данный момент времени будут скорость и ускорение точки палубы, в которой находится точка M в данный момент времени.

Пример 5.2. На лобовое стекло движущегося автомобиля упала капля дождя. С автомобилем, например, с самим лобовым стеклом, жестко связана подвижная система координат $O_1x_1y_1z_1$, в которой каждая точка лобового стекла имеет постоянные координаты. Движение точки (капли) M в этой системе координат (движение точки по стеклу) – это относительное движение точки. Его можно наблюдать, находясь в салоне автомобиля. Это движение можно задать и исследовать, считая автомобиль неподвижным, методами главы 1. В некоторый момент времени движущаяся точка M достигла точки m лобового стекла. Переносными скоростью и ускорением кинематической точки M в этот момент времени, согласно данному выше определению, являются скорость и ускорение точки m лобового стекла. Но чтобы найти скорость и ускорение точки m лобового стекла, надо знать, как движется само стекло в данный момент времени или, что одно и то же, надо знать как движется подвижная система координат $O_1x_1y_1z_1$ относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ (поступательно, вращательно или еще как). Затем по известным формулам найти скорость и ускорение точки m лобового стекла. Другими словами, чтобы определить переносную скорость точки M в заданный момент времени, надо уметь определять скорости точек тела при различных изученных выше движений.

§ 5.2. Теорема о геометрическом сложении векторов скоростей точки при сложном движении

5.8. Теорема. При сложном движении точки вектор скорости точки в абсолютном движении геометрически складывается из вектора скорости в относительном движении точки и вектора скорости в переносном движении точки:

$$\boxed{\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}\ .} \qquad (5.1)$$

Доказательство. Пусть точка M движется по некоторому телу, а само тело совершает какое-либо движение в неподвижной системе отсчета

с системой координат $Oxyz$ (рис.5.1). С телом жестко связана подвижная система координат $O_1x_1y_1z_1$, которая на рисунке не показана. Определим вектор скорости $\bar{v}_{абс}$ точки M в абсолютном движении, то есть при движении точки в неподвижной системе координат $Oxyz$, в фиксированный момент времени $t = t_1$. На рис. 5.1 изображены два положения точки, соответствующие моментам времени $t = t_1$ и $t = t_2$. Время, в течение которого произошло перемещение точки в пространстве, равно $\Delta t = t_2 - t_1$. В момент времени $t = t_1$ движущаяся точка M находилась в точке пространства m_1. В момент времени $t = t_2$ точка M переместилась в точку пространства m_2. Следовательно, вектор $\overline{m_1m_2}$ – вектор абсолютного перемещения точки M.

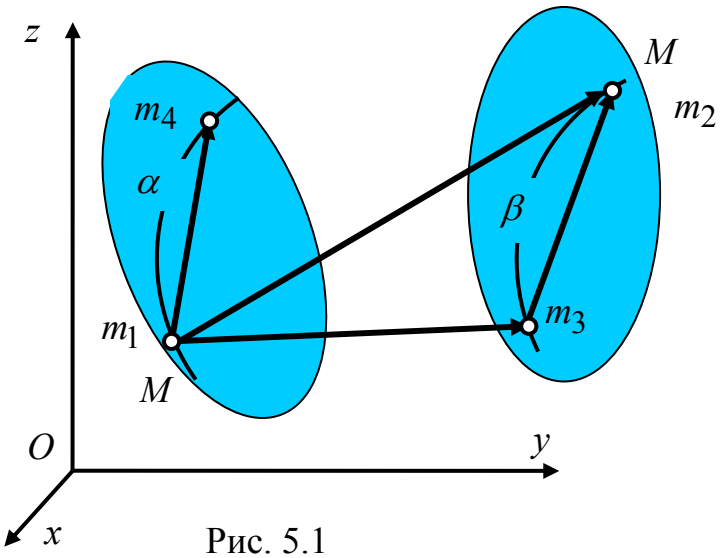


Рис. 5.1

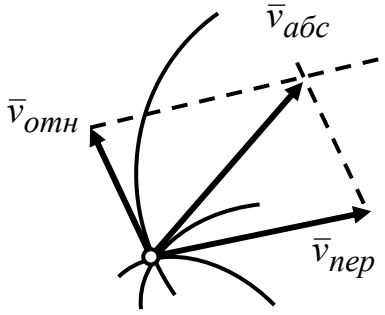


Рис. 5.2

Абсолютное перемещение $\overline{m_1m_2}$ точки M есть следствие относительного перемещения $\overline{m_1m_4}$ точки в подвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$ по траектории относительного движения и перемещения этой траектории, как жесткого целого, в неподвижной системе координат $Oxyz$. При этом $\overline{m_1m_3}$ – вектор переносного перемещения точки M. Траектории относительного движения изображены на рисунке в соответствующие моменты времени в виде кривых α и β. Фактически кривые α и β – это одна и та же пространственная кривая в два момента времени $t = t_1$ и $t = t_2$, по-разному ориентированная по отношению к неподвижной системе координат $Oxyz$ (кривые α и β совпали бы при наложении). Из рисунка видно, что

$$\overline{m_1m_2} = \overline{m_1m_3} + \overline{m_3m_2}.$$

Поделив это равенство на Δt и переходя к пределу, будем иметь:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{m_1 m_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{m_1 m_3}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{m_3 m_2}}{\Delta t} . \qquad (5.2)$$

По формуле (1.13) и определению 5.5 предел, стоящий в левой части равенства (5.2), равен вектору абсолютной скорости $\bar{v}_{абс}$, первый предел, стоящий в правой части, по формуле (1.13) и определению 5.6 равен вектору переносной скорости $\bar{v}_{пер}$. Принимая во внимание, что при $\Delta t \to 0$ кривая β стремиться к кривой α, можно заключить, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{m_3 m_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{m_1 m_4}}{\Delta t} = \bar{v}_{отн} .$$

Тогда (5.2) принимает вид:

$$\boxed{\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер} .} \qquad (5.3)$$

Что и требовалось доказать. Графическое представление равенства (5.1) или (5.3) приведено на рис. 5.2.

При непосредственном использовании равенства (5.1) нужно помнить, что для конкретного момента времени $\bar{v}_{абс}$ графически изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\bar{v}_{отн}$, $\bar{v}_{пер}$. Из равенства (5.1) может быть определен один – любой из входящих в него векторов.

Теорему (5.1) можно записать и в виде *метода проекций*. Спроецируем равенство (5.1) на оси произвольной системы координат. Тогда будем иметь:

$$\boxed{v_{абс,x} = v_{отн,x} + v_{пер,x} \; ; \quad v_{абс,y} = v_{отн,y} + v_{пер,y} ;}$$

$$\boxed{v_{абс,z} = v_{отн,z} + v_{пер,z} .} \qquad (5.4)$$

$$\boxed{|\bar{v}_{абс}| = v_{абс} = \sqrt{v_{абс,x}^2 + v_{абс,y}^2 + v_{абс,z}^2} .} \qquad (5.5)$$

Косинусы углов α, β, γ (направляющие косинусы) вычисляются по формулам:

$$\boxed{Cos\alpha = Cos(\bar{v}_{абс}, x) = v_{абс,x} / v_{абс} ; \quad Cos\beta = Cos(\bar{v}_{абс}, y) = v_{абс,y} / v_{абс} ;}$$

$$\boxed{Cos\gamma = Cos(\bar{v}_{абс}, z) = v_{абс,z} / v_{абс} .} \qquad (5.6)$$

§ 5.3. Теорема о геометрическом сложении векторов ускорений точки при сложном движении

5.9.Теорема. Вектор абсолютного ускорения при сложном движении точки равен геометрической сумме векторов ускорений точки в ее относительном, переносном движениях и вектора ускорения Кориолиса.

$$\boxed{\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}\,.} \qquad (5.7)$$

Доказательство. По определению (1.15) вектор ускорения точки в абсолютном движении равен:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}\,. \qquad (5.8)$$

Продифференцируем равенство (5.8) по времени и получим:

$$d\bar{v}_{абс}\,/\,dt \;=\; d\bar{v}_{отн}\,/\,dt + \;\; d\bar{v}_{пер}\,/\,dt\,. \qquad (5.9)$$

Как известно, вектор ускорения характеризует изменение со временем вектора скорости. Следовательно, в правой части (5.9) производные по времени характеризуют изменение векторов в $\bar{v}_{отн}$ *и* $\bar{v}_{пер}$ в абсолютном движении. Абсолютное движение точки ранее мы представили в виде «суммы» относительного и переносного движений.

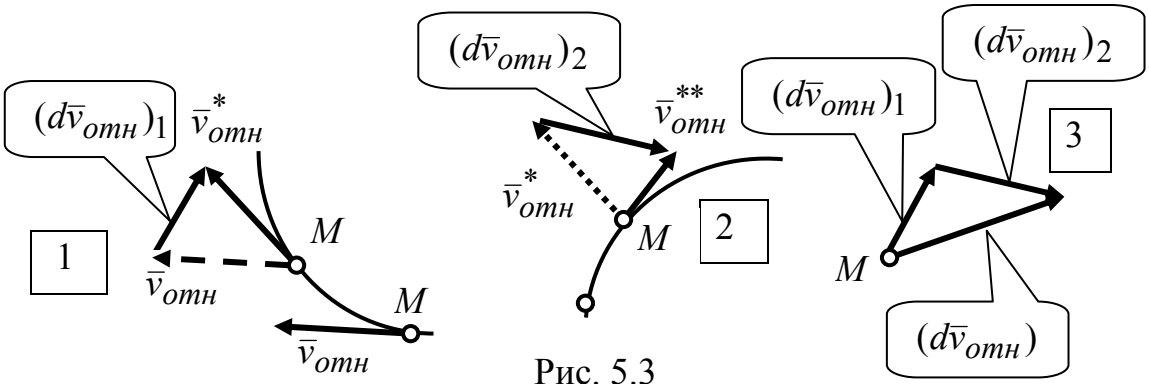


Рис. 5.3

Рассмотрим два бесконечно близких момента времени. Пусть в относительном движении вектор относительной скорости $\bar{v}_{отн}$ получает приращение, обозначенное как $(d\bar{v}_{отн})_1$ (рис. 5.3,1). Но траектория относительного движения в то же время перемещается вместе с самим

телом (рис. 5.3,2) и вектор относительной скорости $\bar{v}^{*}_{отн}$ из-за поворота тела (траектории относительного движения) примет новое положение $\bar{v}^{**}_{отн}$. Приращение вектора относительной скорости $\bar{v}_{отн}$ из-за переносного движения точки обозначено на рисунках $(d\bar{v}_{отн})_2$. Перенося параллельно самим себе векторы $(d\bar{v}_{отн})_1$ и $(d\bar{v}_{отн})_2$ в точку M и складывая, получим: $d\bar{v}_{отн} = (d\bar{v}_{отн})_1 + (d\bar{v}_{отн})_2$. Совершенно аналогично можно показать, что $d\bar{v}_{пер} = (d\bar{v}_{пер})_1 + (d\bar{v}_{пер})_2$, где $(d\bar{v}_{пер})_1$ – изменение вектора переносной скорости точки M в относительном движении, $(d\bar{v}_{пер})_2$ – изменение вектора переносной скорости точки M в переносном движении. Тогда равенство (5.9) может быть записано в виде:

$$d\bar{v}_{абс} / dt = (d\bar{v}_{отн})_1 / dt + (d\bar{v}_{отн})_2 / dt + (d\bar{v}_{пер})_1 / dt + (d\bar{v}_{пер})_2 / dt . \quad (5.10)$$

Принимая во внимание введенные ранее определения, можно записать:

$$\bar{a}_{абс} = d\bar{v}_{абс} / dt , \quad \bar{a}_{отн} = (d\bar{v}_{отн})_1 / dt , \quad \bar{a}_{пер} = (d\bar{v}_{пер})_2 / dt , \quad (5.11)$$

где $\bar{a}_{абс}$, $\bar{a}_{отн}$, $\bar{a}_{пер}$ – векторы абсолютного, относительного и переносного ускорений точки соответственно. Сумму двух оставшихся слагаемых из (5.10) называют кориолисовым ускорением.

$$\boxed{\bar{a}_{кор} = (d\bar{v}_{отн})_2 / dt + (d\bar{v}_{пер})_1 / dt .} \quad (5.12)$$

5.10.Кориолисовым ускорением точки при сложном движении называется вектор $\bar{a}_{кор}$, характеризующий изменение во времени вектора относительной скорости в переносном движении точки и изменение вектора переносной скорости в относительном движении точки.

Окончательно равенство (5.10) примет вид: $\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}$. Что и требовалось доказать.

§ 5.4. Определение вектора кориолисова ускорения точки и его свойства

Формула (5.12) раскрывает механическую суть вектора $\bar{a}_{кор}$, но еще не пригодна для непосредственного использования в практических расчетах. Опуская промежуточные геометрические построения и вычисления, приводим окончательные формулы, пригодные для практического использования.

$$\boxed{\bar{a}_{кор} = 2 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{v}_{отн})}, \tag{5.13}$$

$$\boxed{\left|\bar{a}_{кор}\right| = 2\left|\bar{\omega}\right| \cdot \left|\bar{v}_{отн}\right| \cdot Sin\alpha}, \tag{5.14}$$

где $\bar{\omega}$ – угловая скорость ***переносного*** движения подвижной системы координат (или вращающегося тела, с которым связана точка), α – угол между векторами угловой скорости $\bar{\omega}$ и вектором относительной скорости точки $\bar{v}_{отн}$.

5.11. ***Итак, вектор кориолисова ускорения (5.13) равен удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости переносного движения $\bar{\omega}$ и вектора скорости точки в относительном движении $\bar{v}_{отн}$.***

5.12. Модуль вектора кориолисова ускорения (5.14) вычисляется по правилам векторного произведения и равен удвоенному произведению модулей векторов угловой скорости, относительной скорости точки и синуса угла между этими векторами

5.13. Направление вектора кориолисова ускорения $\bar{a}_{кор}$ находится по правилу векторного произведения: вектор $\bar{a}_{кор}$ направлен в ту сторону, откуда кратчайший поворот от первого вектора-сомножителя $\bar{\omega}$ ко второму вектору - сомножителю $\bar{v}_{отн}$ наблюдается происходящим против часовой стрелки.

Правило Жуковского

В инженерной практике для определения направления вектора кориолисова ускорения $\bar{a}_{кор}$ удобно пользоваться правилом Жуковского, которое непосредственно вытекает из правил векторной алгебры. Чтобы найти направление $\bar{a}_{кор}$ нужно:

1) мысленно построить плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости;

2) спроецировать вектор относительной скорости точки $\bar{v}_{отн}$ на эту плоскость;

3)повернуть проекцию вектора $\bar{v}_{отн}$ в плоскости, перпендикулярной вектору угловой скорости $\bar{\omega}$, на угол 90 градусов в сторону вращения подвижной системы координат (то есть в сторону вращения твердого тела).

Пример 5.3. На рис. к примеру 5.3 показано применение правила Жуковского в некоторых частных случаях. Для облегчения пространственного восприятия показанных векторов они отнесены к координатным осям или координатным плоскостям прямоугольной системы координат $Mxyz$ с началом в движущейся точке M. С той же целью в точку M перенесен параллельно самому себе и вектор угловой скорости переносного движения $\bar{\omega}$. На рисунках 1) и 4) к примеру 5.1 вектор $\bar{v}_{отн}$ уже перпендикулярен вектору угловой скорости $\bar{\omega}$. Следуя правилу Жуковского в таких случаях для определения направления вектора кориолисова ускорения $\bar{a}_{кор}$, нужно просто повернуть вектор $\bar{v}_{отн}$ против часовой стрелки, наблюдая этот поворот с конца вектора $\bar{\omega}$. Это и будет направлением переносного вращения тела, по которому точка совершает относительное движение. Во втором случае вектор $\bar{v}_{отн}$ лежит в координатной плоскости Mxy. Поэтому его необходимо мысленно спроецировать на плоскость Myz, перпендикулярную вектору $\bar{\omega}$. Вектор проекции будет направлен по оси My. Затем нужно повернуть вектор проекции на девяносто градусов в сторону вращения тела. В третьем случае вектор $\bar{v}_{отн}$ лежит в плоскости Myz и проецируется на плоскость Mxz (вектор проекции «ляжет» на ось Mz). Далее действовать по правилу и получить показанный на рисунке вектор $\bar{a}_{кор}$.

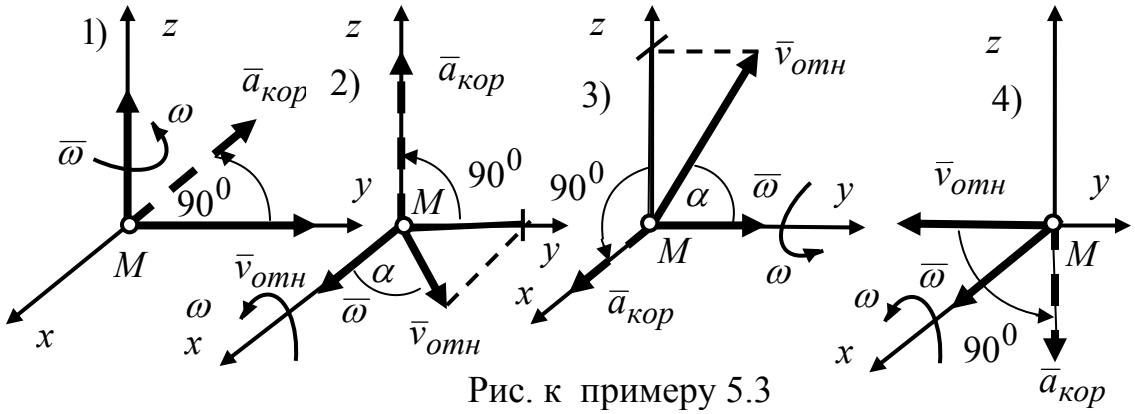


Рис. к примеру 5.3

Частные случаи. Из формул (5.13), (5.14) следует, что вектор кориолисова ускорения $\bar{a}_{кор} = 0$ в трех случаях:

1) если переносное движение является поступательным, то есть $\bar{\omega} = 0$. В примере 5.2 это означало бы, что капля в данный момент времени движется по стеклу в любом направлении, а кузов автомобиля движется поступательно, например, прямолинейно. Формула (5.7) принимает вид:

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер}; \qquad (5.15)$$

2) если точка находится в относительном покое, то есть $\bar{v}_{отн} = 0$. В примере 5.2 это означало бы, что капля в данный момент времени неподвижна по отношению к стеклу и движется только вместе с автомобилем. Формула (5.7) принимает вид:

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{пер}; \qquad (5.16)$$

3) если $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, то $\left|\bar{a}_{кор}\right| = 0$, следовательно, $\bar{a}_{кор} = 0$. Это означает, что векторы угловой скорости переносного движения $\bar{\omega}$ и вектор относительной скорости точки $\bar{v}_{отн}$ параллельны. Представим себе цилиндр, вращающийся с угловой скоростью $\bar{\omega}$ относительно неподвижной вертикальной оси. Вектор $\bar{\omega}$ направлен по оси вращения в ту или иную сторону в зависимости от направления вращения. Если по поверхности тела точка будет двигаться строго параллельно оси вращения вверх или вниз (это ее относительное движение), то будет иметь место рассматриваемый случай. Вектор абсолютного ускорения определится по формуле (5.15).

§ 5.5. Задачи с решениями на сложное движение точки

Задача 5.1. Пластина в форме прямоугольного треугольника OAB вращается вокруг вертикальной оси Oz по закону (см. рис. 1 к примеру 5.1) $\varphi = 3\pi t^2 / 4\,(рад)$. Положительное направление отсчета угла φ соответствует вращению пластины против часовой стрелки, если наблюдать с положительного конца оси Oz. По гипотенузе AB от вершины треугольника A к вершине B движется точка M по закону $S = 4\sin\dfrac{\pi t}{6}$ $(м)$. В момент времени $t = 0$ точка M находится в вершине треугольника A. Найти абсолютную скорость и ускорение точки M в момент времени $t_1 = 2$ секунды, если катеты треугольника $OA = 3м$, $OB = 4м$.

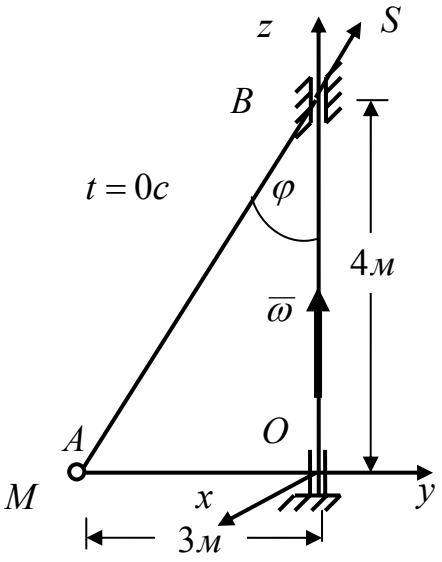


Рис.1 к задаче 5.1

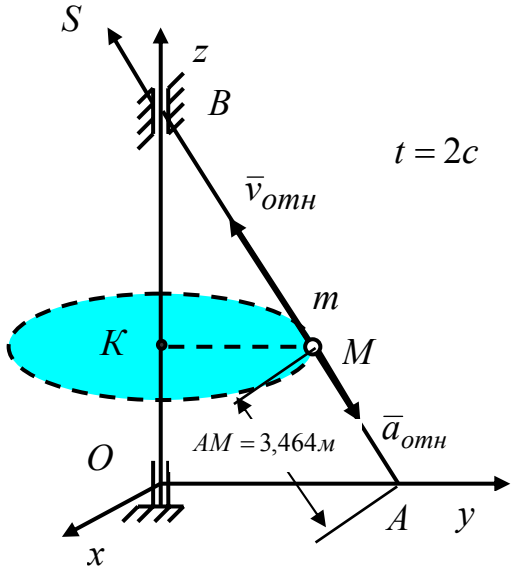


Рис.2 к задаче 5.1

Решение. Неподвижная система координат $Oxyz$ показана на рис.1 к задаче 5.1. С вращающейся пластиной жестко совместим подвижную систему координат As, ось которой направлена по гипотенузе *AB* от вершины А к вершине В. По условию задачи траектория точки *M* – прямая линия. При вращении пластины эта система координат будет вращаться вместе с ней.

Движение точки *M* в подвижной системе координат As, то есть движение точки по пластине – это относительное движение точки *M*. Движение точки вместе с пластиной – это ее переносное движение.

1. Определение положения точки в пространстве в момент времени $t_1 = 2$ с. Из закона переносного движения $\varphi = 3\pi t^2/4$ при $t = t_1 = 2\,c$ получим $\varphi = 3\pi$ *рад*. Будем считать, что показанное на рисунке 2 положение пластины соответствует этому углу. Другими словами, к моменту времени $t_1 = 2\,c$ пластина сделала 1,5 оборота вокруг оси вращения Oz. Так как точка движется по гипотенузе по закону $S = 4\sin\dfrac{\pi t}{6}$, то при $t = t_1 = 2\,c$ получим $AM = S(2) = 4\sin\dfrac{\pi\cdot 2}{6} = 2\sqrt{3}$ *м*.

Другими словами, пока пластина поворачивалась на $\varphi = 3\pi$ *рад*, точка *M* прошла по гипотенузе *AB* расстояние $S = AM = 2\sqrt{3} = 3{,}464$ *м*. Длина гипотенузы $AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{9+16} = 5$ *м*. Положение точки на гипотенузе AB в момент времени $t_1 = 2\,c$ показано на рис.2 к задаче 5.1.

2. Исследование относительного движения точки *M*. В относительном движении точка *M* совершает прямолинейное движение по гипотенузе *AB*. Пользуясь формулами для определения алгебраических значений скоростей и ускорений точек при естественном способе задания движения, будем иметь:

$$v_{отн} = \dot{S} = \frac{4\pi}{6}\cos\frac{\pi t}{6} = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{6} = 2{,}093\cos\frac{\pi t}{6}.$$

В общем случае вектор относительного ускорения точки равен сумме касательной и нормальной составляющих $\bar{a}_{отн} = \bar{a}^{\tau}_{отн} + \bar{a}^{n}_{отн}$. В данном случае траектория относительного движения - прямая (гипотенуза). Поэтому

$$a^{\tau}_{отн} = \dot{v}_{отн} = \ddot{S} = -\frac{2\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi t}{6} = -\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{6} = -1{,}096\sin\frac{\pi t}{6},$$

$a^{n}_{отн} = v^2_{отн}/\rho = 0$, так как радиус кривизны $\rho = \infty$ (траектория относительного движения – гипотенуза *AB*). Следовательно, $\bar{a}_{отн} = \bar{a}^{\tau}_{отн}$. При $t = t_1 = 2c$ получим:

$$v_{отн} = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 1{,}047\,м/с, \qquad a^{n}_{отн} = 0,$$

$$a_{отн} = a^{\tau}_{отн} = -\frac{\pi^2}{9}\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{9\cdot 2} = -\frac{\pi^2}{18}\sqrt{3} = -0{,}949\,(м/с^2).$$

Вычисления показали, что в момент времени $t = t_1 = 2c$ точка совершает замедленное движение ($v_{отн} > 0, a^{\tau}_{отн} < 0$). Вектор относительной скорости $\bar{v}_{отн}$ направлен по касательной к траектории (следовательно, по гипотенузе AB) от точки *M*

к вершине *B*, а вектор $\bar{a}^{\tau}_{отн}$ направлен в обратную сторону (см. рис.2 к задаче 5.1).

3. Исследование переносного движения точки. Переносным движением для точки *M* является вращение треугольника относительно неподвижной оси. Мысленно удалим движущуюся точку *M* с треугольника и рассмотрим кинематику точки пластины m, в которой находится движущаяся точка *M* в момент времени $t = t_1 = 2c$. Воспользуемся теорией вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение вычисляются по формулам:

$$\omega = \dot{\varphi} = 6\pi t/4 = \frac{3\pi t}{2}\ \ рад/с, \qquad \varepsilon = \dot{\omega} = \frac{3\pi}{2}\ \ рад/с^2.$$

Линейные скорость и ускорения вычисляются по формулам:

$$v_{пер} = \omega \cdot Km, \quad a^{\tau}_{пер} = \varepsilon \cdot Km, \quad a^{n}_{пер} = \omega^2 \cdot Km,$$

$$\sin\varphi = OA/AB = 3/5 = 0{,}6, \qquad \cos\varphi = OB/AB = 4/5 = 0{,}8,$$

$$Km = Bm \cdot \sin\varphi = \left(5 - 2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{3}{5} = 0{,}922м.$$

При $t = 2c$: $\omega = 3\pi = 9{,}42c^{-1}$, $\varepsilon = \frac{3\pi}{2} = 4{,}71c^{-2}$. $v_{пер} = \omega \cdot Km = 9{,}42 \cdot 0{,}922 = 8{,}685м/с$,

$a^{\tau}_{пер} = \varepsilon \cdot Km = 4{,}71 \cdot 0{,}922 = 4{,}343м/с^2$, $a^{n}_{пер} = \omega^2 \cdot Km = 9{,}42^2 \cdot 0{,}922 = 81{,}815м/с^2$.

Чтобы облегчить пространственное восприятие векторов, в точке M, совпадающей в данный момент времени с точкой m пластины, введем систему координат $Mx_1y_1z_1$ с осями, параллельными осям исходной системы координат $Oxyz$. Векторы $\bar{v}_{пер}$, $\bar{a}^{\tau}_{пер}$, $\bar{a}^{n}_{пер}$ лежат в плоскости Mx_1y_1, перпендикулярной к оси вращения Oz. Алгебраическая величина $v_{пер}$ – положительна. Поэтому вектор $\bar{v}_{пер}$, будучи направлен по касательной к траектории переносного движения точки, – перпендикулярен к плоскости пластины и к радиусу траектории Km, то есть направлен по оси Mx_1, параллельной оси Ox. Направлен он в направлении вращения пластины.

Так как знаки $v_{пер}$, $a^{\tau}_{пер}$ совпадают, то вектор $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ направлен так же, как и вектор $\bar{v}_{пер}$. Вектор $\bar{a}^{n}_{пер}$ направлен к оси вращения пластины по оси My_1. Указанные векторы показаны на рис. 3 к задаче.

4. Определение величины и направления вектора ускорения Кориолиса точки M.

$$\bar{a}_{кор} = 2\left(\bar{\omega} \times \bar{v}_{отн}\right), \qquad \left|\bar{a}_{кор}\right| = 2 \cdot \left|\bar{\omega}\right| \cdot \left|\bar{v}_{отн}\right| \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\bar{\omega}$ и $\bar{v}_{отн}$. По рисунку видно что $\alpha = \varphi$. Тогда $\sin\alpha = 0{,}6$.

При $t = 2$ с: $\left|\bar{a}_{кор}\right| = 2 \cdot \left|\bar{\omega}\right| \cdot \left|\bar{v}_{отн}\right| \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 9{,}42 \cdot 1{,}047 \cdot 0{,}6 = 11{,}835\ \frac{м}{с^2}$.

Направление вектора $\bar{a}_{кор}$ определим по правилу Жуковского. Спроецируем вектор $\bar{v}_{отн}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\bar{\omega}$, и повернем эту проекцию

на 90° в сторону вращения. Вектор $\bar{a}_{кор}$ «ляжет» на ось Ox_1 и будет направлен на наблюдателя, как показано на рис.3 к задаче 5.1.

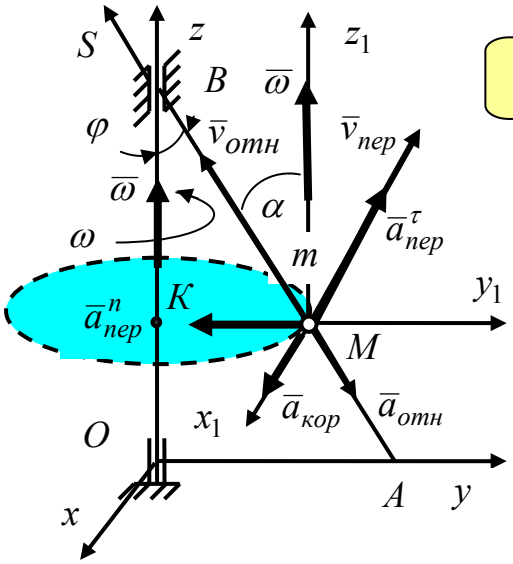


Рис.3 к задаче 5.1

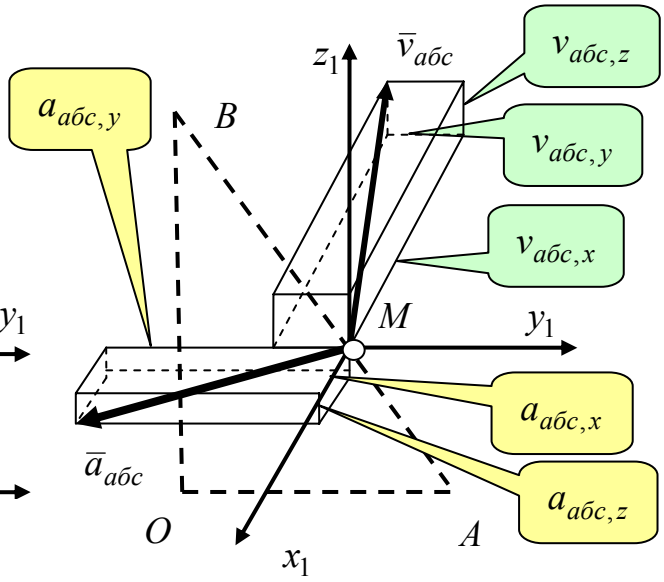


Рис.4 к задаче 5.1

5. Определение $\bar{v}_{абс}$. Вектор абсолютной скорости $\bar{v}_{абс}$ точки M находится по формуле:

$$\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}. \qquad (*)$$

В данной задаче $v_{абс} = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2} = \sqrt{1{,}047^2 + 8{,}685^2} = 8{,}784 м/с$, так как $\bar{v}_{отн} \perp \bar{v}_{пер}$. Но так бывает не всегда, поэтому воспользуемся методом проекций. Равенства (*) перепишем в проекциях на оси неподвижной системы координат $Oxyz$.

$$v_{абс,x} = v_{отн,x} + v_{пер,x} \ , \qquad v_{абс,y} = v_{отн,y} + v_{пер,y} \ ,$$
$$v_{абс,z} = v_{отн,z} + v_{пер,z}. \qquad (**)$$

Вычислим проекции отдельных векторов скоростей на оси системы координат $Oxyz$ или, что то же самое, на оси системы координат $Mx_1y_1z_1$ и воспользуемся (**). Для момента времени $t = 2$ с будет иметь :

$$v_{отн,x1} = 0 \ , \ v_{пер,x1} = -v_{пер} = -8{,}685 \ ,$$
$$v_{абс,x1} = v_{абс,x} = -v_{пер} = -8{,}685 (м/с) \ ,$$
$$v_{отн,y_1} = -v_{отн} \cdot \sin\alpha = -0{,}6282 (м/с) \ , \quad v_{пер,y_1} = 0 \ ,$$
$$v_{абс,y1} = v_{абс,y} = -v_{отн} \cdot \sin\alpha = -0{,}6282 (м/с) \ ,$$
$$v_{отн,z1} = v_{отн} \cdot \cos\alpha \ , \qquad v_{пер,z1} = 0 \ ,$$
$$v_{абс,z1} = v_{абс,z} = v_{отн} \cdot \cos\alpha = 0{,}8376 (м/с) \ .$$

Здесь было учтено, что $\cos\alpha=\cos\varphi=4/5=0{,}8$; $\sin\alpha=\sin\varphi=3/5=0{,}6$. Тогда

$$v_{абс}=\sqrt{v_{абс,x}^2+v_{абс,y}^2+v_{абс,z}^2}=\sqrt{8{,}685^2+0{,}628^2+0{,}8376^2}=8{,}748(м/с).$$

Косинусы углов $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$, которые вектор абсолютной скорости $\bar{v}_{абс}$ образует с осями Ox_1, Oy_1, Oz_1, соответственно равны:

$$\cos\alpha_1=\frac{v_{абс,x}}{|\bar{v}_{абс}|}=-\frac{8{,}685}{8{,}748}=-0{,}993,\quad \alpha_1=173{,}217^0,$$

$$\cos\beta_1=\frac{v_{абс,y}}{|\bar{v}_{абс}|}=-\frac{0{,}628}{8{,}748}=-0{,}072,\quad \beta_1=85{,}87^0,$$

$$\cos\gamma_1=\frac{v_{абс,z}}{|\bar{v}_{абс}|}=+\frac{0{,}838}{8{,}748}=0{,}096,\quad \gamma_1=95{,}51^0.$$

Вектор $\bar{v}_{абс}$ показан на рис. 4 к задаче 5.1.

6. Определение $\bar{a}_{абс}$. По (5.7) имеем $\bar{a}_{абс}=\bar{a}_{отн}+\bar{a}_{пер}+\bar{a}_{кор}$. В нашем случае траектория переносного движения точки – окружность радиуса *Km*, поэтому вектор переносного ускорения разлагается $\bar{a}_{пер}=\bar{a}_{пер}^{\tau}+\bar{a}_{пер}^{n}$. Тогда

$$\bar{a}_{абс}=\bar{a}_{отн}+\bar{a}_{пер}^{\tau}+\bar{a}_{пер}^{n}+\bar{a}_{кор}. \qquad (***)$$

В проекциях на оси неподвижной системы координат (***) примет вид:

$$a_{абс,x}=a_{отн,x}+a_{пер,x}^{\tau}+a_{пер,x}^{n}+a_{кор,x},\quad a_{абс,y}=a_{отн,y}+a_{пер,y}^{\tau}+a_{пер,y}^{n}+a_{кор,y},$$

$$a_{абс,z}=a_{отн,z}+a_{пер,z}^{\tau}+a_{пер,z}^{n}+a_{кор,z}. \qquad (****)$$

Вычислим проекции векторов $\bar{a}_{отн},\bar{a}_{пер}^{\tau},\bar{a}_{пер}^{n},\bar{a}_{кор}$, входящих в (***), на оси неподвижной системы координат $Oxyz$.

$$a_{отн,x}=0,\ a_{отн,y}=|a_{отн}|\cdot\sin\alpha,\ a_{отн,z}=-|a_{отн}|\cdot\cos\alpha.$$

$$a_{пер,x}^{\tau}=-a_{пер}^{\tau},\ a_{пер,y}^{\tau}=a_{пер,z}^{\tau}=0,\qquad a_{пер,x}^{n}=0,\ a_{пер,y}^{n}=-a_{пер}^{n},\ a_{пер,z}^{n}=0,$$

$$a_{кор,x}=a_{кор},\quad a_{кор,y}=a_{кор,z}=0.$$

Подставляя полученные выражения проекций в (****), для момента $t=2$ получим:

$$a_{абс,x}=-a_{пер}^{\tau}+a_{кор}=-4{,}343+11{,}835=7{,}492(м/с^2),\quad a_{абс,y}=|a_{отн}|\cdot\sin\alpha-a_{пер}^{n}=$$

$$0{,}949\cdot0{,}6-81{,}815=-81{,}246(м/с^2),\ a_{абс,z}=-|a_{отн}|\cdot\cos\alpha=-0{,}949\cdot0{,}8=-0{,}759(м/с^2).$$

$$a_{абс}=\sqrt{a_{абс,x}^2+a_{абс,y}^2+a_{абс,z}^2}=\sqrt{7{,}492^2+81{,}246^2+0{,}759^2}=81{,}594 м/с^2.$$

Косинусы углов $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$, которые вектор $\bar{a}_{абс}$ образуют с осями Ox, Oy, Oz, соответственно равны

$$\cos\alpha_2 = \frac{a_{абс,x}}{|\bar{a}_{абс}|} = \frac{7{,}492}{81{,}594} = 0{,}092\,,\quad \alpha_2 = 84{,}72^0\,,$$

$$\cos\beta_2 = \frac{a_{абс,y}}{|\bar{a}_{абс}|} = -\frac{81{,}246}{81{,}594} = -0{,}996\,,\quad \beta_2 = 174{,}87^0\,,$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{a_{абс,z}}{|\bar{a}_{абс}|} = -\frac{0{,}759}{81{,}594} = -0{,}009\,,\quad \gamma_2 = 90{,}52^0\,.$$

Вектор $\bar{a}_{абс}$ показан на рис.4 к задаче 5.1.

Задача 5.2. Ползун M движется вдоль прямолинейной кулисы OA от точки O к точке A с постоянной скоростью $\bar{u}$, а сама кулиса вращается вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, с угловой скоростью $\omega = const$. Принимая ползун за точку, определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение ползуна M в момент времени, когда ползун переместится на расстояние $OM = L$.

Решение. Движение ползуна вдоль кулисы для ползуна является относительным движением, а вращательное движение кулисы – переносным движением. Поэтому $\bar{v}_{отн} = \bar{u}$ и модули этих векторов равны $|\bar{v}_{отн}| = |\bar{u}|$. Переносная скорость $v_{пер} = \omega \cdot OM = \omega \cdot L$. Вектор $\bar{v}_{пер}$ перпендикулярен OA, а модуль абсолютной скорости ползуна будет равен $v_a = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2} = \sqrt{u^2 + L^2\omega^2}$. Так как $v_{отн} = u = const$, то $a_{отн} = \dot{v}_{отн} = 0$. $a^{\tau}_{пер} = 0$ (так как $\omega = const,\ \varepsilon = 0$) $a^{n}_{пер} = \omega^2 \cdot OM = \omega^2 L$. Модуль кориолисова ускорение находится по формуле $a_{кор} = 2 \cdot \omega \cdot u \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot \omega \cdot u$. Модуль абсолютного ускорения при $a_{отн} = 0$ будет равен $a_a = \sqrt{\left(a^n_{пер}\right)^2 + a^2_{кор}} = \sqrt{\omega^4 L^4 + 4\omega^2 u^2}$. Здесь $L = u \cdot T$ ($T = const$).

Ответ: $a_a = \omega \cdot u\sqrt{\omega^2 T^2 + 4}$.

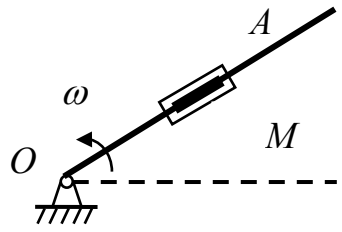


Рис.1 к задаче 5.2

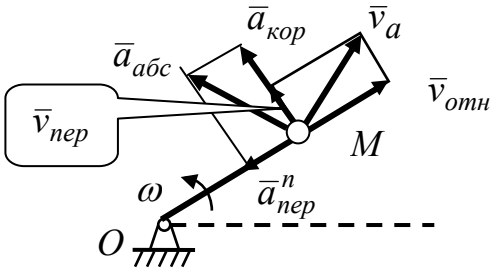


Рис.2 к задаче 5.2

Задача 5.3. Точка M движется с постоянной скоростью $v = 2м/с$ по кольцу радиуса $r = 0{,}5м$, которое вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4рад/с$, относительно оси Oy. Определить модуль абсолютного ускорения точки M в указанном на рисунке положении.

Решение. Движение точки по кольцу – это ее относительное движение, вращение кольца вместе с кольцом – переносное движение. Тогда (т.к. $\omega = const$): $a^{\tau}_{пер} = 0$,

$a^n_{пер} = \omega^2 r = 4^2 \cdot 0{,}5 = 8 м/с^2$, $v_{отн} = v$, $a^\tau_{отн} = \frac{dv}{dt} = 0$, $a^n_{отн} = \frac{v^2_{отн}}{r} = 8 м/с^2$, $v_{пер} = \omega \cdot r = 4 \cdot 0{,}5 = 2 м/с$, $a^\tau_{пер} = 0$. Учитывая, что $\bar{v}_{отн} \parallel \bar{\omega}$, получим $a_{абс} = |\bar{a}_{абс}| = |\bar{a}^n_{отн}| + |a^n_{пер}| = 16 м/с^2$, т.к. $a_{кор} = 2|\bar{v}_{отн}| \cdot |\bar{\omega}| \sin 0^0 = 0$.

Ответ: $a_{абс} = 16 м/с$.

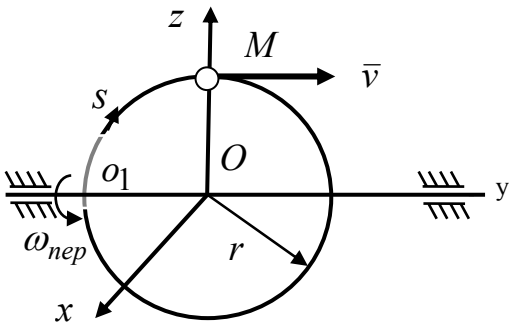


Рис.1 к задаче 5.3

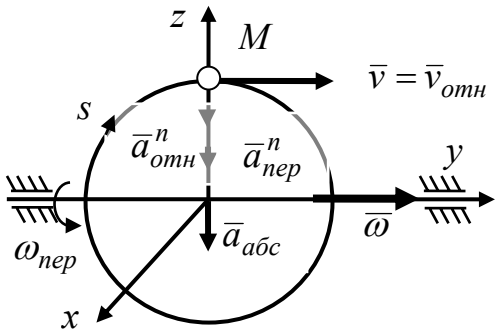


Рис.2 к задаче 5.3

Задача 5.4. Движение поршня горизонтальной паровой машины катера задано уравнением $x = b\sin(\omega \cdot t)$ (ось x направлена от кормы к носу). Принимая поршень за точку, определить модуль абсолютного ускорения поршня в его среднем положении, если катер движется по окружности радиуса R с постоянной скоростью u.

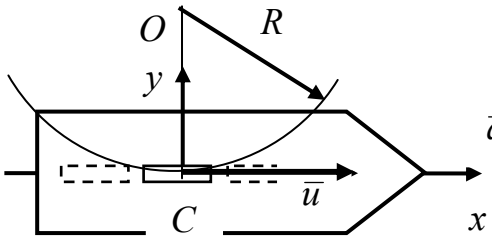


Рис.1 к задаче 5.4

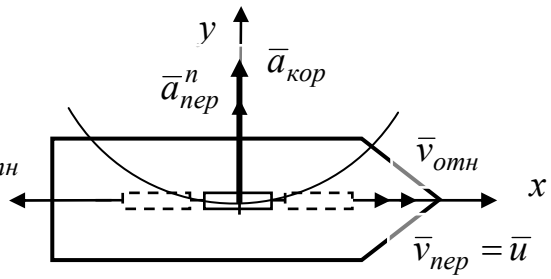


Рис.2 к задаче 5.4

Решение. Обозначим центр поршня точкой C. Движение поршня относительно корпуса катера – это относительное движение точки C. Движение точки C вместе с вращающимся катером по окружности радиуса R – это переносное движение точки со скоростью $\bar{v}_{пер} = \bar{u}$. Вычислим $v_{отн} = \dot{x} = b\omega\cos\omega t$, $a_{отн} = \ddot{x} = -b\omega^2 \sin\omega t$. Здесь $\omega = \omega_{отн}$. По уравнению движения видно, что среднее положение поршня соответствует моментам времени $t = 0$, $t = \pi/\omega$, $t = 2\pi/\omega$ и т.д.. В эти моменты времени $a_{отн} = 0$. Определим переносную угловую скорость $\omega_{пер}$. Длина траектории точки C катера (длина окружности) $L = 2\pi R$. Время (период) ее обхода катером (точкой C): $T = L/u = 2\pi R/u$. Из теории вращения твердого тела

относительно неподвижной оси Oz, направленной перпендикулярно плоскости рисунка, $v_{пер} = u = \omega_{пер} \cdot R$. Тогда $\omega_{пер} = u / R = const$. Следовательно, $\varepsilon_{пер} = 0, a^{\tau}_{пер} = \varepsilon_{пер} R = 0$. Тогда $\overline{a}_{пер} = \overline{a}^{n}_{пер}$. $a_{пер} = a^{n}_{пер} = \omega^{2}_{пер} \cdot R = u^2 / R$, $a_{кор} = 2\left|\overline{\omega}_{пер}\right|\left|\overline{v}_{отн}\right| \cdot \sin\alpha = (2ub\omega\cos\omega t)/R.$ Для среднего положения поршня $a_{кор} = 2(u/R)b\omega.$ Напомним, здесь $\omega = \omega_{отн}$ из уравнения движения. Направления ускорений показаны на рис. 2 к задаче. Абсолютное ускорение $a_{абс} = \left|a^{n}_{пер} \pm a_{кор}\right| = \left|u^2 / R \pm 2b\omega u / R\right|$. Надо иметь в виду, что при работе поршня вектор $\overline{v}_{отн}$ будет периодически менять свое направление на обратное. В формуле для вычисления $a_{абс}$ знак (+) берется при совпадении направлений векторов скоростей поршня и катера.

Ответ: $a_{абс} = \left|u^2 / R \pm 2b\omega u / R\right|$.

Задача 5.5. Кривошипы O_1A и O_2B тепловоза длиной $r = O_1A = O_2B = 1м$ вращаются с угловой скоростью $\omega = 10рад/с$ и угловым ускорением $\varepsilon = 10рад/с^2$ и соединены между собой спарником AB. Радиусы колес $R = 1{,}5м$. Колеса катятся по рельсам без скольжения. Определить абсолютное ускорение любой точки M спарника AB для четырех положений кривошипа: A_1, A_2, A_3, A_4.

Решение. Так как спарник AB совершает поступательное движение, то скорости и ускорения всех его точек одинаковы. Скорость и ускорение точки M равны скорости и ускорению точки A (точки, в которой конец спарника AB соединен с кривошипом O_1A). Точку A можно считать участвующей в двух движениях. Относительное движении – это движение по окружности радиуса O_1A вокруг оси O_1 колеса тепловоза. Переносное движении – это движение вместе с колесом в его поступательном движении со скоростью $\overline{v}_0$ и ускорением $\overline{a}_0$. При этом $\overline{v}_0, \overline{a}_0$ – скорость и ускорение точки O_1 оси колеса. Найдем скорость v_0 и ускорение a_0 конца оси колеса тепловоза O_1. Для этого рассмотрим движение точки С колеса, в которой оно касается рельса. Для точки C переносная скорость $v_{пер} = v_0$, относительная скорость $v_{отн} = R \cdot \omega.$ Она найдена как скорость точки вращающегося тела. Но колесо катится без скольжения и скорость точки C должна быть равна нулю. Отсюда $v_C = v_e - v_r = v_0 - R\omega = 0$ или $v_0 = R\omega = 1{,}5 \cdot 10 = 15м/с$.

Ускорение точки O_1 является переносным ускорение точки A. Найдем его как производную от v_0: $a_0 = \dfrac{dv_0}{dt} = \dfrac{d}{dt}(R\omega) = R \cdot \varepsilon = 15м/с^2$. Относительная скорость точки A: $v_{отн} = r \cdot \omega = 10м/с,$ а ее ускорение $\overline{a}_{отн} = \overline{a}^{n}_{отн} + \overline{a}^{\tau}_{отн}$, где $a^{n}_{отн} = v^2_{отн} / r = 100м/с^2$, $a^{\tau}_{отн} = \varepsilon \cdot r = 10м/с^2$. Поскольку за переносное движение принимается поступательное движение колеса, то $\overline{\omega}_{пер} = 0$ и,

следовательно, $\bar{a}_{кор}=0$. Поэтому $\bar{a}^{A}_{абс}=\bar{a}^{M}_{абс}=\bar{a}^{A,\tau}_{отн}+\bar{a}^{A,n}_{отн}+\bar{a}^{A}_{пер}$. Используя четыре раза метод проекций, вычислим ускорения точки M при четырех положениях точки A – в A_1, A_2, A_3, A_4. Они будут постоянными по модулю, но меняются по направлению. Абсолютные ускорения всех точек для различных положений кривошипа показаны на рисунке 2 к задаче 5.5. Их модули определяются следующим образом:

$$a_{абс,1}=\sqrt{(a_0-a^{\tau}_{отн})^2+(a^{n}_{отн})^2}=\sqrt{25+100^2}=100{,}12 м/с^2,$$

$$a_{абс,2}=\sqrt{(a_0+a^{n}_{отн})^2+(a^{\tau}_{отн})^2}=\sqrt{115^2+100}=115{,}43 м/с^2,$$

$$a_{абс,3}=\sqrt{(a_0+a^{\tau}_{отн})^2+(a^{n}_{отн})^2}=\sqrt{625+100^2}=103{,}08 м/с^2,$$

$$a_{абс,4}=\sqrt{(a_0-a^{n}_{отн})^2+(a^{\tau}_{отн})^2}=\sqrt{85^2+100}=85{,}59 м/с^2.$$

Ответ: $a_{абс,1}=100{,}12 м/с^2, a_{абс,2}=115{,}43 м/с^2, a_{абс,3}=103{,}08 м/с^2$, $a_{абс,4}=85{,}59 м/с^2$.

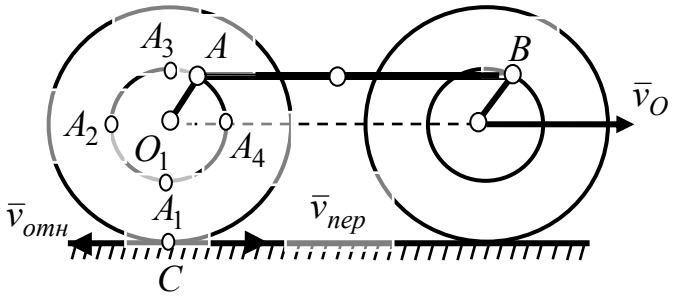


Рис. 1 к задаче 5.5

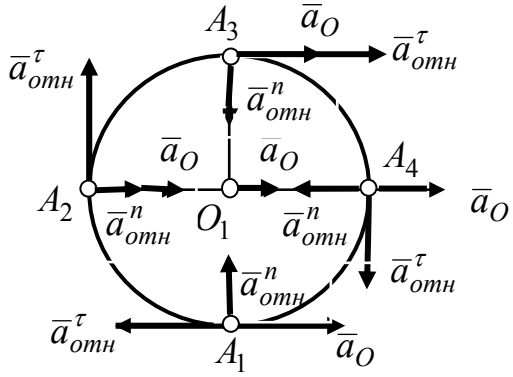


Рис. 2 к задаче 5.5

Задача 5.6. Башенный кран вращается равномерно с угловой скоростью $\omega=2 рад/с.$ По стреле крана перемещается крановая тележка A с постоянной скоростью $v_A=3 м/с.$ Вертикально вниз груз B движется равноускоренно из состояния покоя; пройдя расстояние $s=2 м$, он имеет скорость, равную $v^{*}_B=2 м/с.$ Принимая груз за точку, определить модуль абсолютного ускорения груза B, если в рассматриваемый момент времени $OA=2 м$. Точка O лежит на вертикальной оси крана (рис. 2 к задаче).

Решение. Кран стоит на месте, стрела поворачивается. Трос AB движется поступательно, оставаясь параллельным самому себе. Тогда за переносное движение точки B можно принять вращение крана относительно своей оси. Мысленно остановим тележку на расстоянии $OA=2 м$ и найдем кинематические характеристики переносного движения точки – то есть точки стрелы крана, в которой в данный момент времени находится центр тележки A. Для точки вращающегося тела A $\bar{a}_{пер}=\bar{a}^{\tau}_{пер}+\bar{a}^{n}_{пер}$. Векторы $\bar{a}^{\tau}_{пер}, \bar{a}^{n}_{пер}$ взаимно перпендикулярны. По условию задачи $\omega=const,\ \varepsilon=\dot{\omega}=0$. Тогда $v_{пер}=\omega\cdot OA=4 м/с,\ a^{\tau}_{пер}=\varepsilon\cdot OA=0$. Следовательно, $a_{пер}=a^{n}_{пер}=\omega^2\cdot OA=8 м/с^2$. Исследуем относительное движение точки B - движение точки по отношению к «неподвижной» стреле крана.

Относительная скорость точки B складывается из постоянной скорости перемещения тележки $\bar{v}_A$ и скорости движения груза в вертикальном направлении, которая в указанный момент времени равна $v_B^* = 2м/с$: $\bar{v}_{отн} = \bar{v}_A + \bar{v}_B^*$. Так как $\bar{v}_A, \bar{v}_B^*$ взаимно перпендикулярны, то в данный момент времени $v_{отн} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} м/с$. Вектор $\bar{v}_{отн}$ направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах – слагаемых $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B^*$. Относительное ускорение точки B складывается из вектора ускорения $\bar{a}_A$ точки A в её движении по стреле крана и вектора ускорения a_B при движении точки B в вертикальном направлении: $\bar{a}_{отн} = \bar{a}_A + \bar{a}_B$. Но $\bar{a}_A = d\bar{v}_A / dt = 0$, так как по условию задачи $\bar{v}_A = const$. Следовательно,

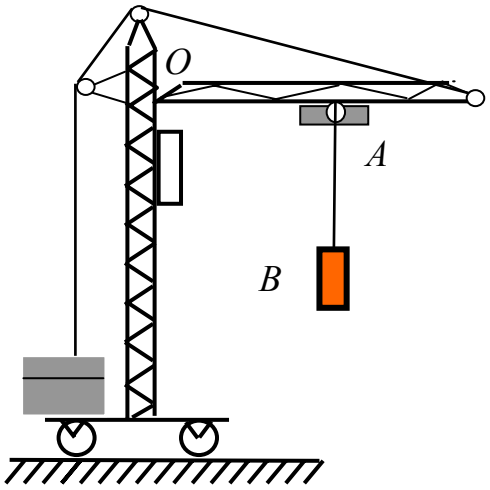


Рис. 1 к задаче 5.6

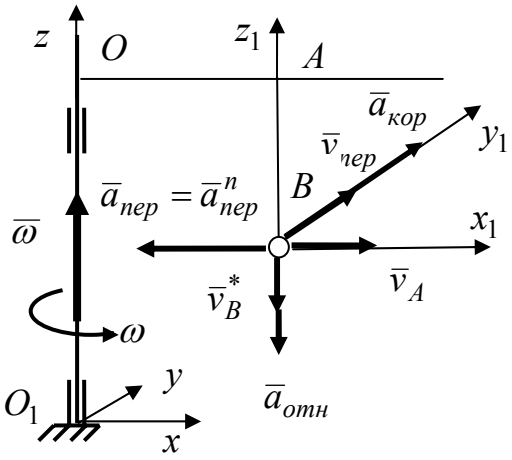


Рис. 2 к задаче 5.6

$\bar{a}_{отн} = \bar{a}_B$. Определим ускорение с которым опускается груз B. Это движение точки – прямолинейное, равноускоренное. Для такого движения $v_B = a_{отн} \cdot t$, $s = a_{отн} \cdot t^2 / 2$. Выражая время из первого уравнения и подставляя во второе, получим выражение для постоянного относительного ускорения, с которым опускается груз B: $a_{отн} = a_B = v_B^2 / 2s = 1м/с^2$. Ускорение Кориолиса $\bar{a}_{кор} = 2(\omega \times \bar{v}_{отн}) = 2(\omega \times \bar{v}_A) + 2(\omega \times \bar{v}_B^*) = 2(\omega \times \bar{v}_A)$, так как $v_B^* \| \bar{\omega}$. Тогда модуль этого вектора равен $a_{кор} = 2\omega \cdot v_A = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12м/с^2$. Направление вектора $\bar{a}_{кор}$ определяется по правилу Жуковского и показано на рис.2 к задаче. Вектор абсолютного ускорения определяется по формуле (5.7) $\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}$. Спроецируем это уравнение на оси системы координат O_1xyz или, что то же, $Bx_1y_1z_1$. $a_{абс,x} = -a_{пер} = -8м/с^2$, $a_{абс,y} = a_{кор} = 12м/с^2$, $a_{абс,z} = -a_{отн} = -1м/с^2$.

$$a_a = \sqrt{a_{абс,x}^2 + a_{абс,y}^2 + a_{абс,z}^2} = \sqrt{8^2 + 12^2 + 1^2} = \sqrt{209} = 14{,}46м/с^2.$$

Ответ: $a_{абс} = 14{,}46м/с^2$.

Задача 5.7. Тележка движется со скоростью $v_{пер} = \sin(\pi t / 3)м/с$. Стержень O_1M длиной $1м$, закрепленный в центре тележки, вращается по закону $\varphi = 0{,}5\pi t$ ($рад$).

Определить абсолютное ускорение $a_{абс}$ конца стержня (точки M) в момент времени $t = 0{,}5c$, принимая $\varphi > 0$ при вращении по часовой стрелке.

Решение. Движение (вращение) стержня по отношению к тележке является относительным движением. Исследуем относительное движение.

$\omega_{отн} = \dot{\varphi}(t)$, $\varepsilon_{отн} = \dot{\omega}(t)$, $v_{M,отн} = \omega_{отн}(t) \cdot O_1M$, $a^{\tau}_{отн} = \varepsilon_{отн} \cdot O_1M$, $a^{n}_{отн} = \omega^2_{отн} \cdot O_1M$. В момент времени $t = 0{,}5c$ получим: $\varphi = 0{,}25\pi^2\ рад$, $\omega_{отн} = 0{,}5\pi\ \ c^{-1}$, $\varepsilon_{отн} = 0$, $v_{M,отн} = 0{,}5\pi \cdot 1 = 0{,}5\pi\ \ м/с$, $a^{\tau}_{отн} = 0$, $a^{n}_{отн} = 0{,}25\pi^2 м/с^2$. Следовательно, $a_{отн} = a^{n}_{отн} = 0{,}25\pi^2 м/с^2$. Вектор $\bar{v}_{M,отн} \perp O_1M$ и направлен в сторону вращения стержня. Вектор $\bar{a}_{отн}$ направлен по оси стержня от точки M к точке подвеса O_1. Переносным движением точки является ее движение вместе с тележкой. Тележка движется (колеблется) поступательно. Поэтому $\bar{\omega}_{пер} = 0$ и, следовательно, $\bar{a}_{кор} = 0$. Закон изменения переносной скорости задан в условии задачи, переносное ускорение $a_{пер} = \dot{v}_{пер} = \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3}$. В момент времени $t = 0{,}5c$ имеем $a_e = 0{,}9 м/с^2$. $\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}$.

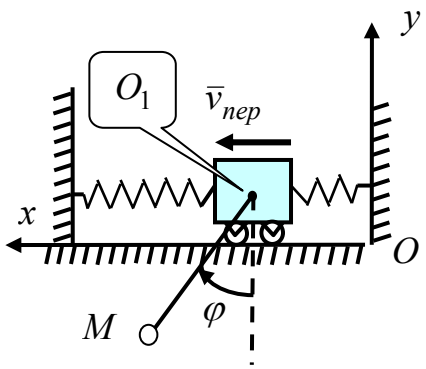


Рис. 1 к задаче 5.7

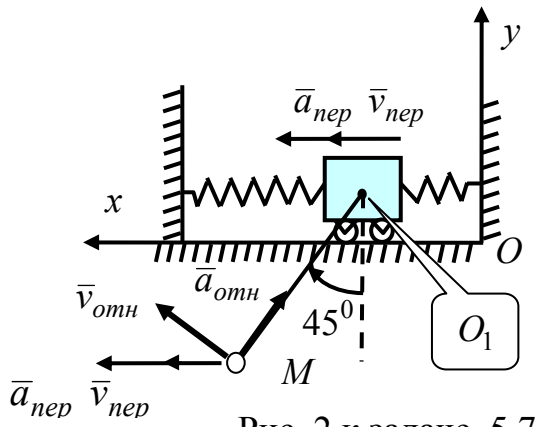


Рис. 2 к задаче 5.7

Спроецируем последнее уравнение на оси координат.

$$a_{абс,x} = a_{пер} - a_{отн} \cdot \sin 45^\circ = 0{,}9 - 0{,}25 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}707 = -0{,}84 м/с^2,$$

$$a_{абс,y} = a_{отн} \cdot \cos 45^\circ = 0{,}25 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}707 = 1{,}74 м/с^2,$$

$$a_{абс} = \sqrt{a^2_{абс,x} + a^2_{абс,y}} = \sqrt{0{,}7 + 3{,}0276} = \sqrt{3{,}73} = 1{,}93 м/с^2.$$

Ответ: $a_{абс} = 1{,}93 м/с^2$.

§ 5.6. Задачи для самостоятельного решения на сложное движение точки

Задача 5.8. Точка M движется с относительной скоростью $v_{отн} = 0{,}5 м/с$ по хорде диска, вращающегося вокруг оси O, перпендикулярной плоскости диска, с угловой скоростью $\omega = -0{,}5 с^{-1}$. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 2с$, если $OM = 0{,}02 м$. **Ответ:** $a_{абс} = 1{,}11 м/с^2$.

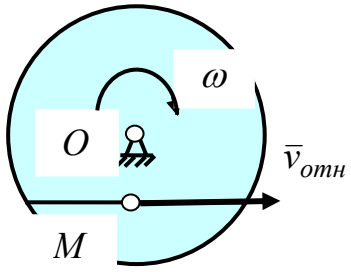


Рис. к задаче 5.8

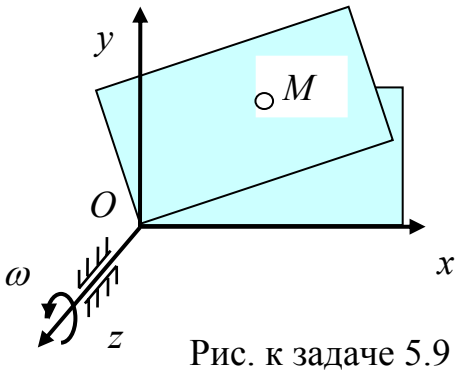


Рис. к задаче 5.9

Задача 5.9. Плоскость, в которой движется точка M согласно уравнениям $x = t, y = 9/t$ (x, y – в $см, t$ – в $сек$), вращается вокруг оси Oz против движения часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\omega = 1 рад/с$. Определить модуль абсолютного ускорения точки в тот момент, когда она находится на кратчайшем расстоянии от оси вращения. **Ответ:** $a_{абс} = \sqrt{10}/3 см/с^2$.

Задача 5.10. Окружность радиуса $R = 1 м$ вращается в вертикальной плоскости Oxy вокруг неподвижной оси Oz согласно закону $\varphi = (\pi/2)t$ (φ – в $рад, t$ – в $сек$). По окружности движется точка M по закону $s = OM = (\pi/2)t$ (s в $м, t$ – в $сек$). Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 1с$.

Ответ: $a_a = \pi^2/4 (м/с^2)$.

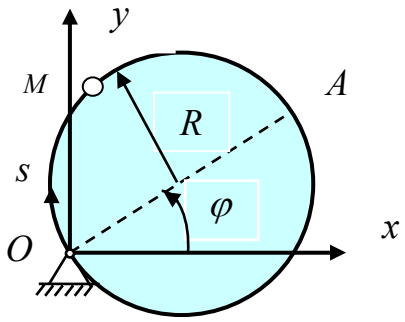


Рис. к задаче 5.10

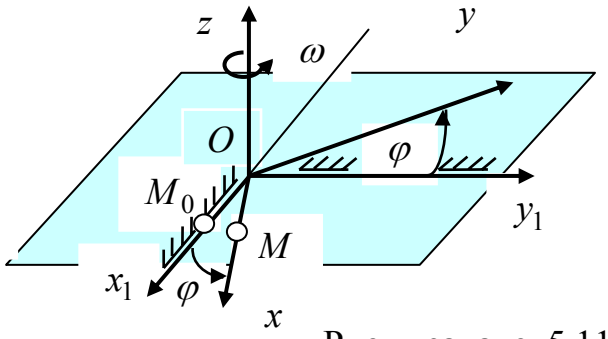


Рис. к задаче 5.11

Задача 5.11. Ось Ox вращается вокруг неподвижной оси Oz системы координат $Oxyz$ по закону $\varphi = t$ (φ – в $рад, t$ – в $сек$). Вдоль оси Ox движется точка согласно закону

$x = 1 + t^2$ (x – в $м$, t – в $сек$). Определить модуль абсолютной скорости и абсолютного ускорения в момент времени $t = 1c$. **Ответ:** $a_{абс} = 4м/с^2, v_{абс} = 2\sqrt{2}м/с$.

Задача 5.12. Крановая тележка A движется по стреле крана равноускоренно из состояния покоя и, пройдя расстояние $OA = 2м$, имеет относительно стрелы крана скорость $\bar{v}_A = 2$м/с. Определить в этот момент времени модуль абсолютного ускорения тележки, если кран вращается равномерно, делая $n = 30/\pi$ $об/мин$.

Ответ: $a_{абс} = 4{,}12м/с^2$.

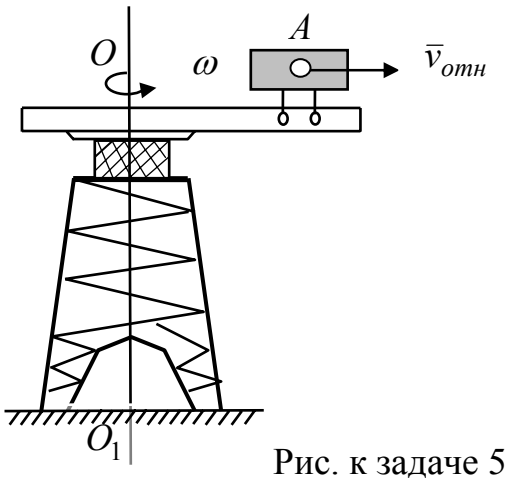


Рис. к задаче 5.12

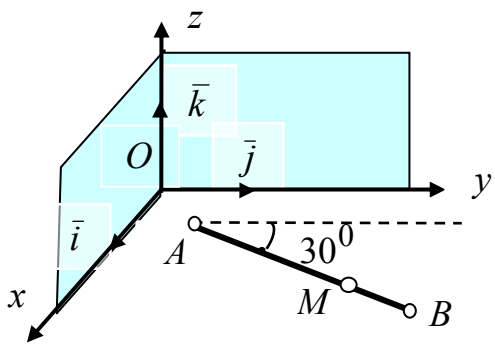


Рис. к задаче 5.13

Задача 5.13. В плоскости Oxy поступательно движется стержень AB, составляя угол $\varphi = 30^\circ$ с осью Oy, как показано на рисунке к задаче. Вектор ускорения меняется по закону $\bar{a} = 10t \cdot \bar{i}$ ($м/с^2$). Вдоль стержня движется точка M по закону $s = AM = 3 \cdot t^2$ (s в $м$, t – в $сек$). Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1c$. **Ответ:** $a_{абс} = 14м/с^2$.

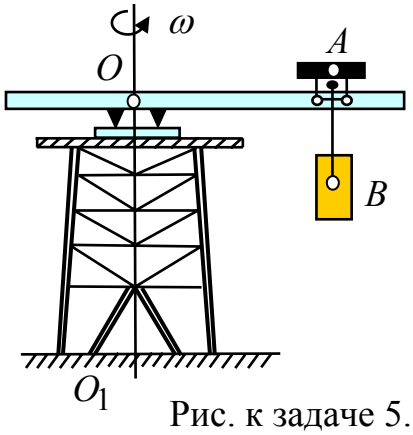


Рис. к задаче 5.14

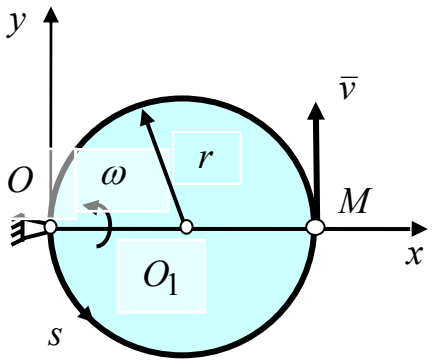


Рис. к задаче 5.15

Задача 5.14. Башенный кран вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 2рад/с$. По отношению к стреле тележка имеет в данный момент скорость

$v_1 = 3м/с$ и ускорение $a_1 = 4м/с^2$. Чему равен модуль абсолютного ускорения груза B в тот момент, когда расстояние $OA = 3м$? **Ответ:** $a_{абс} = 14{,}42м/с^2$.

Задача 5.15. Кольцо радиуса $r = 0{,}5м$ вращается в плоскости чертежа с постоянной угловой скоростью $\omega = 4с^{-1}$. По кольцу перемещается точка M с постоянной линейной скоростью $v_M = 2м/с$. Определить модуль абсолютного ускорения точки M в показанном на рисунке положении. **Ответ:** $a_{абс} = 40м/с^2$.

Задача 5.16. Тележка движется по наклонной плоскости с ускорением $a = a_{пер} = 2м/с^2$. По тележке в плоскости чертежа движется точка M согласно уравнениям $x_1 = 3t^2$ и $y_1 = 4t^2$ $(x, y -$ в $м)$. Определить ускорение точки $a_{абс}$.

Ответ: $a_{абс} = 11{,}3м/с^2$.

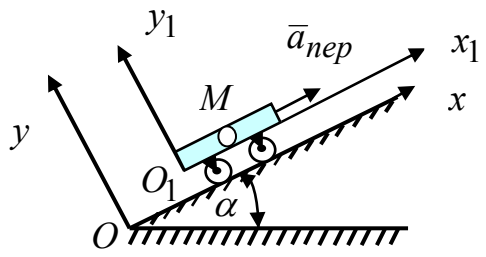


Рис. к задаче 5.16

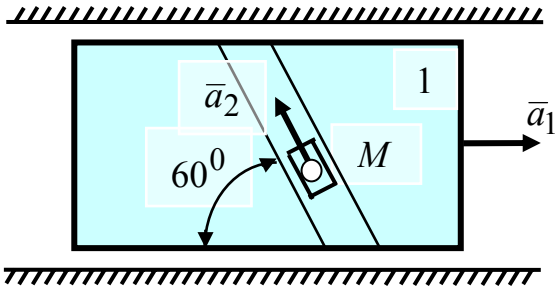


Рис. к задаче 5.17

Задача 5.17. Ползун 1 движется по горизонтальным направляющим с постоянным ускорением $a_1 = 3м/с^2$. Точка M перемещается по ползуну с ускорением $a_2 = 4м/с^2$. Определить абсолютное ускорение точки. **Ответ:** $a_a = 3{,}6м/с^2$.

Вопросы для самоконтроля к главе 5

1. Какое движение точки называется сложным движением?
2. Какое движение точки называется абсолютным движением, переносным движением, относительным движением?
3. Дайте формулировку теоремы о геометрическом сложении векторов скоростей точки при сложном движении точки.
4. Что называется относительной, переносной и абсолютной скоростью точки ?
5. Сформулируйте теорему Кориолиса.
6. Что характеризует вектор ускорения Кориолиса и как он направлен?
7. Чему равен модуль вектора ускорения Кориолиса при сложном движении точки?
8. Сформулируйте правило Жуковского. Когда вектор ускорения Кориолиса равен нулю?

Приложение

Некоторые сведения из математики

А. Функции и их графики

1. Линейная функция $y = ax + b.$ График – прямая линия. Функция монотонно возрастает при $a > 0$ и убывает при $a < 0$ (рис. 1).

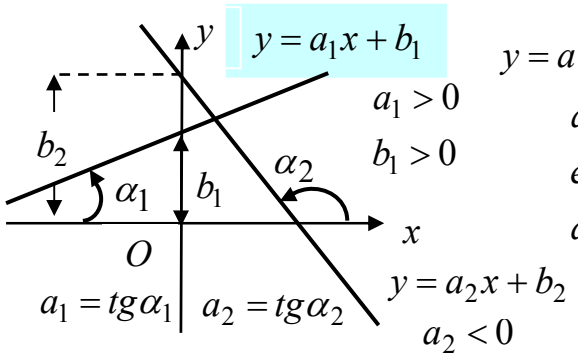


Рис. 1

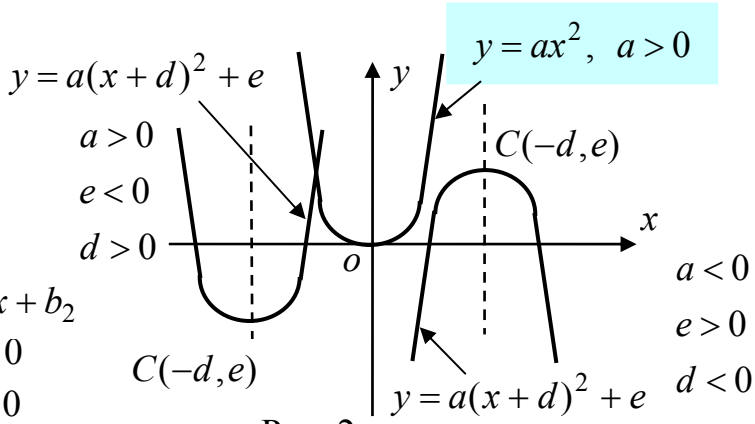
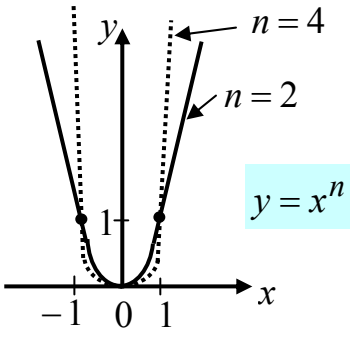


Рис. 2

2. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c.$ График – парабола с вертикальной осью симметрии (рис.2). Обозначим $d = b/2a,\ e = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Квадратный трехчлен примет вид: $y = a(x + d)^2 + e.$ Графики этой функции для разных значений констант показаны на рис. 2.

3. Степенная функция $y = ax^n$ $(n - \text{целое})$. График – парабола n-го порядка. На рис. 3 даны графики для четных $n = 2,4$ и нечетных $n = 3,5$.



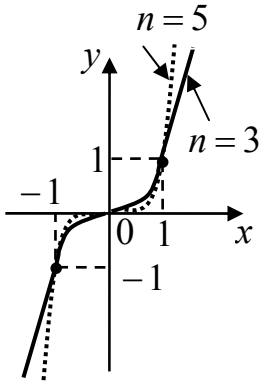


Рис. 3

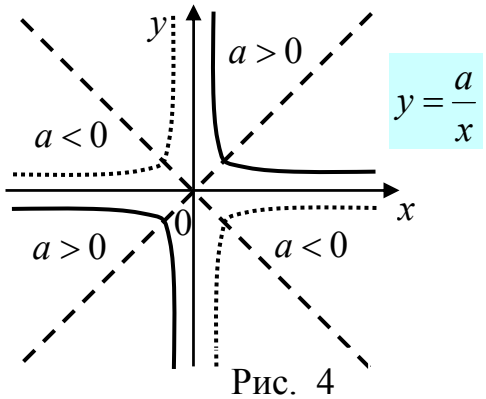


Рис. 4

4.Обратная пропорциональность $y = a/x$. График – равносторонняя гипербола с асимптотами – осями координат (рис. 4).

5. Показательная функция $y = a^x$. График – показательная кривая (рис. 5)

6.Логарифмическая функция $y=\log_a x$ $(y=\ln x)$. График – логарифмическая кривая (рис. 6).

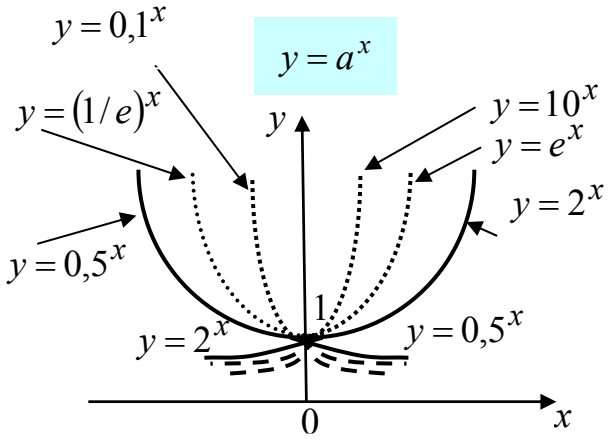


Рис. 5

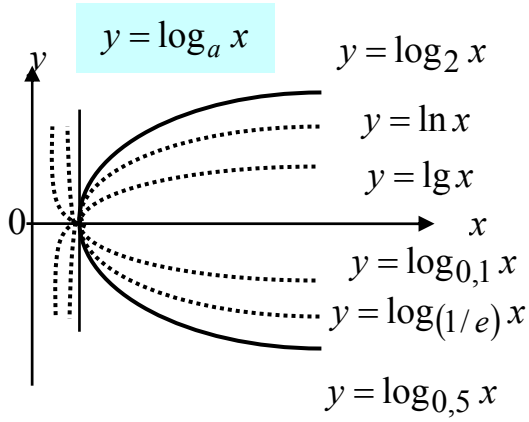


Рис. 6

7. Синус $y=A\cdot\sin kx$. График – синусоида (рис. 7, 8).

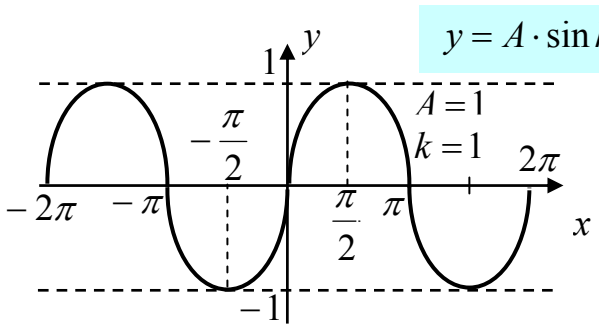


Рис. 7

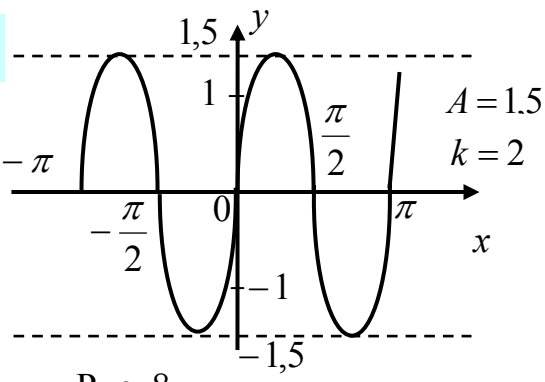


Рис. 8

8. Косинус $y=A\cdot\cos kx$. График – косинусоида (рис. 9, 10).

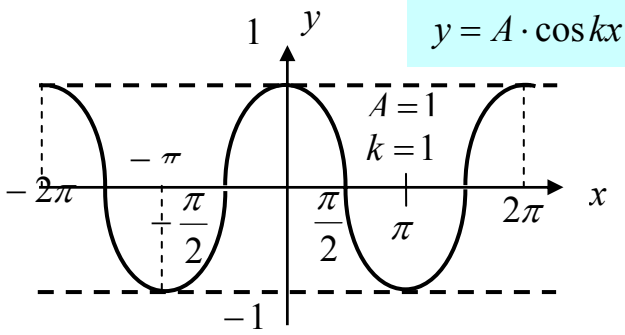


Рис. 9

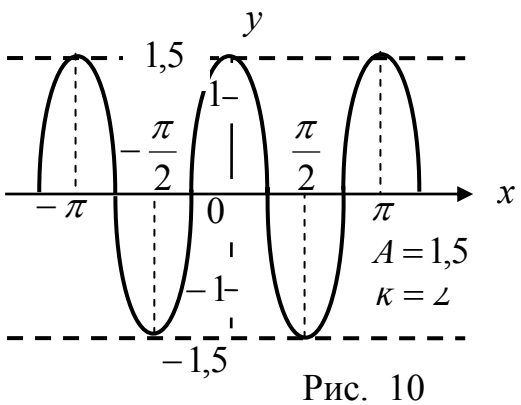


Рис. 10

9. Тангенс $y = tgx$. График – тангенсоида (рис. 11).

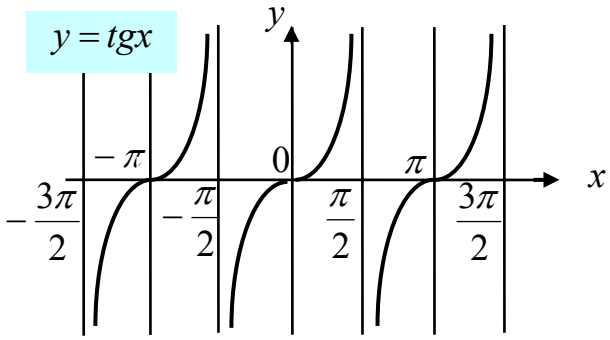


Рис. 11

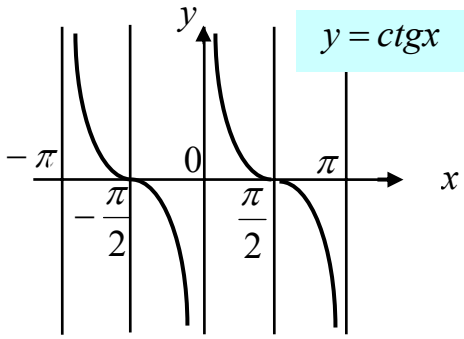


Рис. 12

10.Котангенс $y = ctgx$. График – тангенсоида, зеркально отраженная относительно оси Ox и сдвинутая влево на $\pi/2$ рад (рис. 12).

Б. Алгебра

1. Действия с показательными выражениями

$$a^m a^n = a^{m+n},\ a^m / a^n = a^{m-n},\ (a^m)^n = a^{mn},\ \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

2.Натуральные логарифмы. Логарифмированием некоторой величины называется нахождение ее логарифма. Нахождение величины по ее логарифму называется потенцированием. Логарифмом L числа N при основании c называется показатель степени, в которую нужно возвысить основание c, чтобы получить L.

$$L = \log_C N,\ C^L = N.$$

Всякое положительное число при любом положительном основании c за исключением единицы имеет свой логарифм. Если $C = e = 2{,}718281828$, то логарифм называется натуральным и обозначается $L = \ln N$ без указания основания. Логарифмы обладают следующими свойствами:

$$\ln 1 = 0,\ \ln e = 1,\ \ln 0 = -\infty,$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b,\quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b,$$

$$\ln a^n = n \cdot \ln a,\quad \ln\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \ln a.$$

3. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и формулы сокращенного умножения.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если $b^2-4ac>0$, имеется два действительных корня, если $b^2-4ac=0$, то имеется два совпадающих корня, если $b^2-4ac<0$ – два мнимых корня.

Имеют место формулы сокращенного умножения.

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2, \qquad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$

$$(a^2-в^2)=(a+b)\cdot(a-b), \qquad (a^3\pm b^3)=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2).$$

В. Геометрия

1. Треугольник. Сумма углов треугольника равна 2π *рад* или 180° (рис. 13). Площадь треугольника $S=0{,}5bh$ или $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=0{,}5\cdot(a+b+c)$, h – высота треугольника.

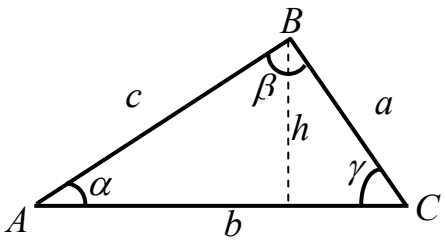


Рис. 13

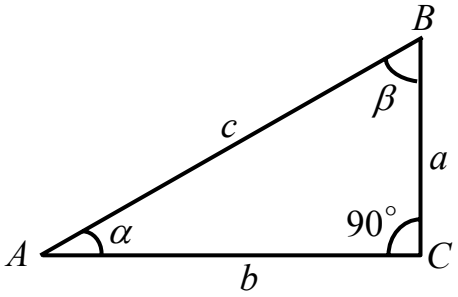


Рис. 14

При решении треугольников используются теорема косинусов и синусов

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta, \qquad a/\sin\alpha=b/\sin\beta=c/\sin\gamma.$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Если один из углов треугольника равен 90°, то треугольник называется прямоугольным (рис.14). Для прямоугольных треугольников имеют место соотношения:

$$S=0{,}5ab,\quad c^2=a^2+b^2,\quad \sin\alpha=a/c,\quad \cos\alpha=b/c,$$

$$\sin\beta=b/c,\quad \cos\beta=a/c,\quad tg\alpha=a/b,\quad tg\beta=b/a.$$

Центр тяжести треугольников находится на пересечении медиан, т.е. прямых, соединяющих вершины треугольников с серединами противолежащих сторон.

2. Параллелограмм (рис.15). У параллелограмма противолежащие стороны попарно равны и параллельны, противоположные углы равны, площадь параллелограмма $S=bh$, где h – высота параллелограмма. Длину диагонали можно вычислить по теореме косинусов, которая в данном случае примет вид:

$$d^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\ (\angle BAD).$$

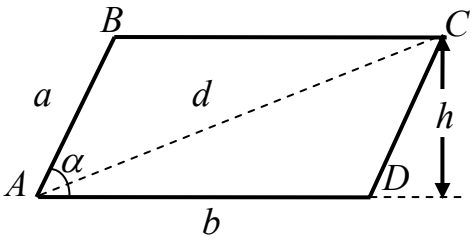


Рис. 15

3. Окружность. Длину окружности вычисляют по формуле $L = 2\pi \cdot r$, где r – радиус окружности. Площадь круга $s = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot d^2 / 4$. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу окружности, проведенному в точку касания.

Г. Тригонометрия

1. Часто используемые формулы тригонометрии:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \sin\alpha / \cos\alpha = tg\alpha, \quad \cos\alpha / \sin\alpha = ctg\alpha,$$

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(a \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\cos\beta,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

2. Формулы приведения

Таблица 1

Функции	$\beta = 90^\circ \pm \alpha$	$\beta = 180^\circ \pm \alpha$	$\beta = 270^\circ \pm \alpha$	$\beta = 360^\circ - \alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$

3. Значение тригонометрических функций некоторых углов

Таблица 2

α (град.) функция	0	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	0,5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0,5	0
$tg\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$ctg\alpha$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0
функция α (рад)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

Д. Сведения из векторной алгебры

В кинематике векторными величинами являются радиус – вектор точки $\bar{r}(t)$, вектор скорости точки $\bar{v}$, вектор ускорения точки $\bar{a}$, вектор угловой скорости вращающегося тела $\bar{\omega}$, вектор углового ускорения вращающегося тела $\bar{\varepsilon}$ и т.д. Все математические операции с этими векторами – сложение векторов, умножение вектора на число, умножение вектора на вектор, разложение векторов на составляющие, – выполняются по одним и тем же правилам векторной алгебры, как это делалось, например, с вектором силы $\bar{F}$ в статике.

1. Геометрический способ сложения векторов. Если вектор $\bar{c}$ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то пишут $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$. Это символическое равенство показано на рис. 16, 17. Вектор $\bar{c}$ получается или как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (правило параллелограмма – рис. 16), или как третья сторона треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (правило треугольника – рис.17). Только так и надо понимать сумму векторов.

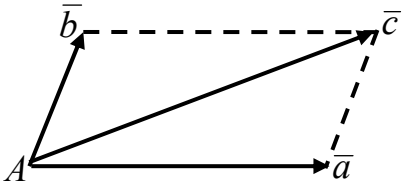


Рис. 16

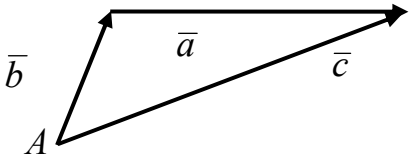


Рис. 17

Чтобы определить числовые значения вектора $\bar{c}$ (то есть его модуль-длину и направление в пространстве) можно или а) по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить параллелограмм (или треугольник) в масштабе и неизвестный вектор $\bar{c}$ определить графически, или б) построив эскизный чертеж параллелограмма (или треугольника), воспользоваться для вычислений теоремами косинуса или синуса.

2. Аналитический способ действия с векторами. В этом случае исходят из того, что любой вектор, в том числе и имеющий механический смысл, может быть представлен через свои проекции.

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\vec{j}+a_z\bar{k}\,,\qquad |\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,.$$

a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\bar{a}$ на оси Ox, Oy, Oz. Косинусы углов между векторами и положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz равны:

$$\cos\alpha = a_x / |\bar{a}|, \quad \cos\beta = a_y / |\bar{a}|, \quad \cos\gamma = a_z / |\bar{a}|.$$

Одна из теорем векторной алгебры утверждает, что если вектор $\bar{a} = \sum \bar{a}_k$, то

$$a_x = \sum_{k=1}^{n} a_{kx}, \quad a_y = \sum_{k=1}^{n} a_{ky}, \quad a_z = \sum_{k=1}^{n} a_{kz}.$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\left(\sum a_{kx}\right)^2 + \left(\sum a_{ky}\right)^2 + \left(\sum a_{kz}\right)^2}.$$

3.Скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть скалярная величина.

$(\bar{a} \cdot \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\alpha$ (α – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$).

4.Векторное произведение $\bar{c}$ **двух векторов** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть величина векторная.

$$\bar{c} = [\bar{a} \times \bar{b}] \quad \text{или} \quad \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \quad \text{и} \quad |\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}| \cdot \sin\alpha.$$

Вектор $\bar{c}$ должен быть направлен так, чтобы при наблюдении с конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора-сомножителя $\bar{a}$ ко второму вектору-сомножителю $\bar{b}$ наблюдался происходящим против направления хода часовой стрелки. Координаты вектора $\bar{c}$ определяются по формулам:

$$c_x = a_y b_z - b_y a_z, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

Е. Производные и интегралы некоторых функций

1. Таблица производных.

$(c)' = 0, \ c = const,$

$(x^n)' = nx^{n-1}, n = const,$

$(e^x)' = e^x,$

$(a^x)' = a^x \ln a, \ a = const,$

$(cosx)' = -\sin x,$

$(\ln x)' = 1/x,$

$(\sin x)' = \cos x,$

$(tgx)' = 1/\cos^2 x,$

$(ctgx)' = -1/\sin^2 x,$

$(shx)' = chx,$

$(chx)' = shx,$

где $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}.$

2. Дифференцирование сложной функции.

Пусть $y = f[\varphi(x)]$, тогда $y'_x = f_\varphi{}'[\varphi(x)] \cdot \varphi_x{}'(x)$.

Примеры: 1) $y = \sin 2x$, $y' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x$.

2) $y = a^{2t}$, $y' = a^{2t} \cdot \ln a \cdot (2t)' = 2a^{2t} \ln a$.

3. Таблица неопределенных интегралов.

$$\int 0 \cdot dx = c$$

$$\int b dx = bx + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$\int shx dx = chx + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x \,|\, c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int chx dx = shx + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – Изд. 11-е, стереот. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.

2. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики / под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. – Изд. 4-е, исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 760 с.

3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – Изд. 8-е, стереот. – СПб.: Лань, 2011. – 720 с.

4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2006. – 416 с.

5. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-пресс, 2006. – 603 с.

6. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. – Изд. 51-е, стереот. – СПб.: Лань, 2012. – 448 с.

7. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 2-х т. Т.1: Статика и кинематика. – Изд. 11-е, стереот. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.

8. Сборник коротких задач по теоретической механике / под ред. О.Э. Кепе. – Изд. 3-е, стереот. – СПб.: Лань, 2009. – 368 с.

9. Шигабутдинов Ф.Г., Сагитова Н.Х. Руководство к решению задач по теоретической механике. – Казань.: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2000. – 100 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРОВ 3

ГЛАВА 1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ 4
§ 1.1. Основные понятия и определения. Задачи кинематики 4
§ 1.2. Векторный способ задания движения 6
§ 1.3. Вектор перемещения, вектор скорости и вектор ускорения точки 8
§ 1.4. Координатный способ задания движения 15
§ 1.5. Связь между координатным и векторным способами задания движения 17
§ 1.6. Скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения 19
§ 1.7. Задачи с решениями на исследование движения точки при векторном и координатном способах задания движения 25
§ 1.8. Естественный способ задания движения точки 30
§ 1.9. Связь между координатным и естественным способами задания движения 36
§ 1.10. Законы равномерного и равнопеременного движений точки 48
§ 1.11.Свободное прямолинейное движение точки по вертикали 53
§ 1.12. Задачи по кинематике точки для самостоятельного решения 55
Вопросы для самоконтроля к главе 1 58

ГЛАВА 2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА 60
§ 2.1. Поступательное движение твердого тела 60
§ 2.2. Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси 65
§ 2.3. Законы равномерного и равнопеременного вращений 71
§ 2.4. Скорости и ускорения точек вращающегося тела 74
§ 2.5. Векторное представление угла поворота, угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела 77
§ 2.6. Векторы скорости и ускорения точки вращающегося тела 79
§ 2.7. Задачи с решениями на поступательное и вращательное движения твердого тела 81
§ 2.8. Задачи для самостоятельного решения на поступательное и вращательное движения твердого тела 89
Вопросы для самоконтроля к главе 2 92
ГЛАВА 3. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА 93

§ 3.1. Общие понятия и определения 93
§3.2. Определение вектора скорости произвольной точки плоской фигуры 97
§ 3.3. Задачи с решениями на определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении 113
§ 3.5. Определение вектора ускорения произвольной точки плоской фигуры 117
§ 3.6. Задачи с решениями на определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении 123
§ 3.7. Задачи для самостоятельного решения на определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении 128
Вопросы для самоконтроля к главе 3 131

ГЛАВА 4. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ И СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА 132

§ 4.1. Уравнения движения тела с одной неподвижной точкой 132
§4.2. Векторы скорости и ускорения точек тела при сферическом движении 136
§4.3. Определение кинематических характеристик сферического движения твердого тела аналитически 138
§ 4.4. Свободное движение тела 140
Вопросы для самоконтроля к главе 4 142

ГЛАВА 5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ 143

§ 5.1. Общие понятия и определения в теории сложного движения точки 143
§ 5.2. Теорема о геометрическом сложении векторов скоростей точки при сложном движении 145
§ 5.3. Теорема о геометрическом сложении векторов ускорений точки при сложном движении 148
§ 5.4. Определение вектора Кориолисова ускорения точки и его свойства 149
§ 5.5. Задачи с решениями на сложное движение точки 152
§ 5.6. Задачи для самостоятельного решения на сложное движение точки 163
Вопросы для самоконтроля к главе 5 165
ПРИЛОЖЕНИЕ (Некоторые сведения из математики) 166
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 173

Феликс Галлямович Шигабутдинов
Айрат Феликсович Шигабутдинов

КРАТКИЙ КУРС

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Ч.2. КИНЕМАТИКА

Учебное пособие

Редактор Е.А. Кириллович

Издательство
Казанского государственного архитектурно-строительного университета
Подписано в печать Формат 60×84/16
Заказ Печать ризографическая Усл.-печ. л. 11,0
Тираж Бумага офсетная № 1 Уч.-изд. л. 11,0

Отпечатано в полиграфическом секторе
Издательства КГАСУ
420043, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1