

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Ф.Г. Ахмадиев, Р.М. Гильфанов

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

Учебное пособие

Казань
2017

УДК 519.8

ББК 22.1

A95

Ахмадиев Ф.Г., Гильфанов Р.М.

A95 Математическое моделирование и методы оптимизации: Учебное пособие / Ф.Г. Ахмадиев, Р.М. Гильфанов. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитектур.-строит. ун-та, 2017. – 178 с.

ISBN 978-5-7829-0534-7

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Учебное пособие предназначено для магистров направления подготовки 08.04.01 «Строительство» и аспирантов специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», изучающих дисциплины «Математическое моделирование» и «Математическое моделирование сложных систем». В нем излагаются основы математического моделирования и методов оптимизации. Раскрываются особенности реализации основ математического моделирования на примере моделирования конкретных объектов и процессов строительного производства и смежных отраслей промышленности. Излагаются алгоритмы основных методов оптимизации и приводятся примеры их реализации как традиционным способом, так и с использованием табличного процессора Excel.

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент,
директор Института строительства КГАСУ

А.В. Исаев

Доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой экономики
и информационных технологий КГАУ

М.Х. Газетдинов

УДК 519.8

ББК 22.1

© Казанский государственный
архитектурно-строительный
университет, 2017

© Ахмадиев Ф.Г., Гильфанов Р.М.,
2017

ISBN 978-5-7829-0534-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. Основы математического моделирования и математического программирования.....	7
1.1. Основы математического моделирования.....	7
1.2. Задачи математического программирования (оптимизации) и математическое моделирование с применением оптимизационных моделей.....	17
2. Задачи линейного программирования и методы их решения.....	26
2.1. Графический метод решения задач линейного программирования.....	29
2.2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.....	36
2.3. Взаимно двойственные задачи линейного программирования и их применение для определения интервалов устойчивости двойственных оценок.....	50
3. Задачи дискретного (целочисленного) программирования и методы их решения.....	67
4. Задачи нелинейного программирования и методы их решения	78
4.1. Классификация методов решения задач нелинейного программирования.....	81
4.2. Методы для решения задач безусловной нелинейной оптимизации.....	84
4.2.1. Метод Нелдера-Мида.....	85
4.2.2. Метод наискорейшего спуска.....	91
4.2.3. Популяционные методы.....	94
4.3. Методы для решения задач условной нелинейной оптимизации.....	103
4.3.1. Метод штрафных функций.....	103
4.3.2. Методы для непосредственного решения условной задачи нелинейного программирования	106
5. Задачи многокритериальной оптимизации и методы их решения.....	139
5.1. Системный анализ и задачи оптимального проектирования конструкций.....	139
5.2. Основные особенности задач оптимального проектирования конструкций.....	142
5.3. Основные подходы к решению задач многокритериальной оптимизации.....	144
5.4. Многокритериальная оптимизация строительных конструкций	155
Литература.....	169

Приложение № 1. Программный модуль на VBA для обработки данных, полученных из экспериментов, проведенных по плану В3	172
Приложение № 2. Функции VBA для расчета теплофизических свойств воды.....	177
Приложение № 3. Таблица значений критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости.....	178

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для магистров направления подготовки 08.04.01 «Строительство» и аспирантов специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», изучающих дисциплины «Математическое моделирование» и «Математическое моделирование сложных систем». В нем излагаются основы математического моделирования, раскрываются его теоретические аспекты. Приводятся практические примеры математического моделирования и оптимизации конструкций, материалов, процессов и систем, относящихся к строительному производству и смежным отраслям промышленности. Излагаются алгоритмы основных методов оптимизации и приводятся примеры их реализации как традиционным способом, так и с использованием табличного процессора Excel.

В учебном пособии излагаются основы математического моделирования с применением оптимизационных моделей и основных численных методов.

В работе авторы выбрали следующий порядок изложения материала. Весь материал разбит на пять глав.

В первой главе излагаются основы математического моделирования и математического программирования. Приводятся определения основных понятий математического моделирования и методов оптимизации. Также приведен пример на составление математической модели конкретного процесса.

Во второй главе рассматривается математическое моделирование объектов, процессов и явлений, которое приводит к оптимизационным математическим моделям типа задач линейного программирования. Подробно излагаются алгоритмы графического метода и симплекс-метода для решения задач линейного программирования. На конкретных примерах разбираются особенности их реализации традиционным способом и с использованием табличного процессора Excel. Также описывается применение принципа двойственности для анализа чувствительности моделей и устойчивости оптимального решения.

В третьей главе рассматривается математическое моделирование объектов, процессов и явлений, которое приводит к решению задач линейного программирования с дискретными переменными. Рассмотрены метод и пример решения таких задач.

В четвертой главе рассматривается математическое моделирование объектов, процессов и явлений, в результате которого возникают задачи нелинейного программирования. Подробно рассматриваются основные методы

решения этих задач и излагаются алгоритмы их реализации. Здесь же приводятся примеры решения таких задач.

В пятой главе рассматривается математическое моделирование объектов, процессов и явлений, которое приводит к задачам многокритериальной оптимизации. Излагаются основные подходы и методы, используемые для их решения. Рассматривается пример решения задачи многокритериальной оптимизации различными методами.

В конце каждой главы приводятся задания по соответствующей теме и вопросы для самопроверки.

1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Моделирование – это **процесс** выбора или построения модели для исследования определенных свойств и характеристик объекта-оригинала, системы-оригинала, процесса-оригинала или явления-оригинала (в дальнейшем все эти понятия для краткости будем определять одним термином – оригинал) в определенных условиях. **Модель** – это упрощенный образ оригинала, обладающий его наиболее важными свойствами, с точки зрения цели исследования, изучение которого является при этом более простым, чем изучение самого оригинала. **Математическая модель** – это модель, в которой все взаимосвязи, существующие между элементами оригинала, выражены с помощью математических формул (функциональных зависимостей, уравнений, неравенств, систем уравнений, систем неравенств). Можно привести еще такое определение: **математическая модель** – это приближенное описание на языке математики (отображение на математическом языке) основных закономерностей и наиболее важных свойств, присущих исследуемому оригиналу. **Математическое моделирование** – это метод, базирующийся на разработке и использовании математических моделей для исследования свойств, характеристик или поведения оригинала.

1.1. Основы математического моделирования

Математическое моделирование является составной частью метода моделирования, являющегося универсальным методом познания окружающей нас действительности, используемым человечеством с древних времен. Широкое применение математическое моделирование получило, начиная с середины двадцатого столетия, а именно: с момента создания ЭВМ, потому что с их появлением возникла возможность выполнения объемных расчетов по сложным математическим моделям. В настоящее время математическое моделирование является важным методом познания человеком окружающей действительности, где компьютеры выступают как мощное техническое средство [1].

При моделировании, и в частности математическом моделировании, основной целью является получение требуемого соответствия между моделью и исследуемым оригиналом [2]. Наличие этого соответствия гарантируется таким свойством математической модели, которое называется **адекватностью**. Любая правильно составленная, с точки зрения цели исследования, математическая модель оригинала должна обладать свойством **адекватности**. **Адекватность** математической модели – это ее соответствие исследуемому оригиналу. Это в какой-то степени условное понятие, так как абсолютного соответствия между математической моделью и моделируемым оригиналом быть не может (в этом случае теряется смысл самого процесса моделирования). Поэтому под адекватной математической моделью понимается модель, которая с приемлемой степенью приближения описывает исследуе-

мый оригинал (с точностью, вытекающей из практических потребностей, а также из уровня понимания разработчиком модели моделируемого оригинала). В качестве количественных показателей оценки адекватности математической модели могут быть использованы различные критерии (величины): относительная погрешность, критерии Фишера и т.д. Соответствие между математической моделью и оригиналом следует оценивать с точки зрения цели исследования. Математическая модель должна учитывать и описывать лишь те свойства и характеристики исследуемого оригинала, которые представляют определенный интерес с точки зрения цели исследования. Поэтому, в зависимости от цели исследования, один и тот же оригинал может иметь различные математические описания и, соответственно, может быть представлен различными математическими моделями. Математическая модель должна быть адекватной, иначе невозможно получить положительные результаты в процессе моделирования.

Возможны различные подходы к оценке адекватности разных математических моделей. Например, для выявления этого соответствия в случае оригинала, представляющего собой механические системы или процессы, характеризующиеся измеримыми величинами – параметрами – необходимо провести сравнение значений этих параметров, полученных с помощью математической модели и оригинала в одних и тех же условиях. Очевидно, что сравнивать следует лишь значения соответствующих друг другу параметров между собой и только в той области функционирования оригинала, в которой предполагается его исследовать. В этой связи надо сказать, что любая математическая модель строится на базе определенных гипотез и допущений об оригинале. Поэтому ее адекватность должна проверяться только в области действия этих гипотез и допущений, потому что за пределами этой области для оригинала могут быть справедливы совершенно другие гипотезы и допущения, из-за чего построенная математическая модель там возможно будет неадекватной.

Кроме **свойства адекватности**, правильно составленная математическая модель должна обладать еще **свойствами достаточности и корректности**.

Свойство достаточности математической модели означает, что исходных данных, включенных в нее, должно быть достаточно для того, чтобы по ней можно было производить расчеты значений искомых величин.

Свойство корректности математической модели (краевой задачи) является более сложным понятием и включает в себя три компоненты: существования решения, единственности решения и устойчивости решения. Компонента существования решения означает, что математическая задача, связанная с построенной моделью, имеет решение. Это означает следующее: поскольку исследуемый оригинал реально существует и если интересующие исследователя его свойства и характеристики правильно переведены на язык математики, то у математической задачи должно существовать решение, от-

ражающие соответствующие свойства и характеристики оригинала. Компонента единственности решения означает следующее: поскольку описываемый построенной моделью исследуемый оригинал является уникальным (единственным в своем роде), то правильно построенная модель должна давать характеристики именно этого оригинала и ничего более. Компонента устойчивости означает следующее: внесение небольших погрешностей в исходные данные должно приводить к небольшим погрешностям в расчетных значениях искомых величин, вычисленных по построенной модели. Невыполнение этой компоненты свело бы к нулю практическую ценность построенной математической модели, поскольку значения исходных данных, входящих в модель, мы измеряем с определенными погрешностями (не существует абсолютно точных измерительных приборов), а также в процессе расчетов вносятся вычислительные погрешности.

Надо отметить, что построить хорошую математическую модель, достаточно точно отражающую описываемый оригинал, непросто. По словам Беллмана: «Если мы попытаемся включить в нашу математическую модель слишком много характеристик оригинала, то захлебнемся в сложных уравнениях, содержащих неизвестные параметры и неизвестные функции. Определение этих функций приведет к еще более сложным уравнениям с еще большим количеством параметров и функций и т.д. Если же, наоборот, оробев от столь мрачных перспектив, построим слишком упрощенную модель, то обнаружим, что она не определяет последовательность действий так, чтобы удовлетворять нашим требованиям. Следовательно, Ученый должен идти прямой и узкой тропой между Западнями Переупрощения и Болотом Переусложнения».

Таким образом, создавая математическую модель оригинала, нужно:

- выдвинуть предположения, гипотезы и допущения, на которых будет основываться модель;
- определить, что считать исходными данными, а что – искомыми величинами;
- записать математические соотношения, связывающие искомые величины с исходными данными.

При построении математических моделей для различных оригиналов далеко не всегда удастся выразить с помощью формул искомые величины через исходные данные. В таких случаях используются численные методы, позволяющие найти значения искомых величин с той или иной степенью точности [3].

Процесс математического моделирования исследуемого оригинала условно можно разделить на следующие этапы:

Этап 1. На этом этапе осуществляется постановка задачи исследования: определяются искомые характеристики оригинала и исходные данные; описывается и анализируется проблемная ситуация; определяются законы, которыми описывается поведение оригинала; устанавливаются связи, дейст-

вующие между отдельными элементами оригинала; определяются требования к исходной информации и математической модели (точность, удобство, простота и т.д.); выдвигаются гипотезы, предположения; описываются ожидаемые результаты. Строится математическая модель исследуемого оригинала, отражающая наиболее важные его свойства с точки зрения цели исследования. Математическая модель изучается теоретическими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об оригинале. Далее анализируется математическая задача, связанная с построенной математической моделью, определяется методика решения задачи, ее масштабы, возможности разбиения ее на подзадачи, приоритетность различных подзадач.

Этап 2. На данном этапе проводится выбор подходящего метода решения математической задачи, связанной с построенной математической моделью, или, если его нет, то разрабатывается соответствующий эффективный метод. Далее осуществляется разработка алгоритма решения задачи для реализации математической модели на компьютере. Выбирается подходящий пакет прикладных программ для реализации алгоритма или составляется специальный программный модуль, переводящий разработанный алгоритм на доступный компьютеру язык. Далее составляется план проведения расчетов (вычислительного эксперимента) и проводятся рабочие расчеты.

Этап 3. На этом этапе осуществляется идентификация и проверка адекватности математической модели, а если необходимо, то и уточнение (усовершенствование) ее. Под идентификацией модели понимается выбор переменных модели и ее параметров с последующей их оценкой на основе статистических данных, полученных в результате наблюдения или эксперимента. Если при проверке адекватности математической модели установлена недостаточная точность ее, то осуществляется переход к **Этапу 4**. После проведения идентификации и оценки адекватности математической модели и установления ее адекватности проводятся рабочие расчеты и далее интерпретируются результаты моделирования (это переход от информации, полученной в результате вычислительного эксперимента с математической моделью, к информации применительно к моделируемому оригиналу, на основании которой делаются выводы о функционировании исследуемого оригинала). Далее подводится итог математического моделирования, выдаются рекомендации, составляется техническая документация.

Этап 4. На этом этапе (в случае его необходимости) проводится уточнение (усовершенствование, коррекция) модели, т.е. построение более усовершенствованной математической модели, а далее осуществляется переход к **Этапу 2**.

Перечисленные этапы вытекают из общей методологии математического моделирования оригиналов. При моделировании различных оригиналов трудоемкости одних и тех же этапов могут быть разными. В процессе моделирования конкретного оригинала могут иметь место некоторые изменения последовательности действий. В частности, может быть заранее предопреде-

лен метод моделирования или выбрано конкретное средство моделирования. В отдельных случаях математическая модель может оказаться настолько простой, что не потребуются проведения вычислительных экспериментов.

Следует обратить внимание на первоочередную необходимость постановки, формулирования цели математического моделирования. В этом вопросе должно быть достигнуто взаимопонимание между заказчиком (лицом, принимающим решение (ЛПР)), ответственным за исследование оригинала, и разработчиком математической модели. Важность аккуратного выполнения этого этапа определяется тем, что все последующие этапы проводятся с ориентацией на определенную цель математического моделирования.

На этом же этапе конкретизируется, в каких единицах измерения (относительных или абсолютных) должны быть представлены результаты математического моделирования. Под относительными единицами здесь понимаются качественные градации, сравнительные оценки разных вариантов системы (типа «лучше – хуже», «больше – меньше»). При необходимости представления результатов в абсолютных единицах должен быть решен вопрос о точности измерения. Этот вопрос зачастую не имеет однозначного ответа, но крайне важен для выполнения всех этапов математического моделирования.

В приведенном выше разбиении процесса математического моделирования на этапы проверка адекватности модели осуществляется лишь на одном из этапов. Но не надо это понимать буквально, так как на адекватность математической модели оказывает влияние качество выполнения практически всех этапов. Поэтому проверка адекватности должна проводиться в том или ином виде, начиная от разработки концептуальной модели и кончая анализом результатов моделирования.

В математическом моделировании под разработкой математической модели подразумевается создание полностью формализованного описания оригинала при принятых допущениях и гипотезах. Однако не для всех оригиналов, внешних условий и целей математического моделирования может быть подобран известный метод формализации или конструктивный математический аппарат. Тем не менее, и для таких оригиналов следует разработать однозначные зависимости выходных характеристик от параметров и воздействий для каждой составляющей оригинала, алгоритмы взаимодействия между составляющими, логические условия изменения состояний [4].

На всех этапах математического моделирования следует обращать особое внимание на документирование принимаемых решений, допущений, гипотез, ограничений и выводов.

Основным инструментом исследования в математическом моделировании является математическая модель. И, как отмечено в перечисленных выше этапах математического моделирования, на втором этапе осуществляется выбор метода решения математической задачи, связанной с построенной моделью. Выбор метода решения задачи определяется тем, к какому классу от-

носится решаемая математическая задача. А класс решаемой математической задачи определяется классом математической модели, с которой она связана.

В настоящее время существует много классификаций математических моделей по разным признакам. Приведем лишь два вида классификации. Первая классификация – это формальная классификация математических моделей. Она основывается на классификации используемых математических средств. Часто классификация строится в форме разделения на два принципиально отличных друг от друга ряда. Например, один из популярных видов деления на такие ряды следующий:

- линейные или нелинейные математические модели;
 - детерминистские или стохастические;
 - статические или динамические;
 - сосредоточенные или распределённые системы;
 - дискретные или непрерывные;
- и так далее.

Любая построенная математическая модель является линейной или нелинейной, детерминистской или стохастической. Естественно, что возможны и смешанные типы: в одном отношении сосредоточенные (по части параметров), в другом – распределённые модели и т. д.

В качестве второго вида классификации математических моделей можно привести классификацию по их предназначению. По этой классификации все математические модели можно условно разделить на четыре класса.

I. Оптимизационные модели. Их разделяют на стационарные и динамические. Стационарные модели используются на уровне проектирования различных объектов, технологических систем, они описывают конкретные состояния моделируемого оригинала. Динамические – как на уровне проектирования, так и для оптимального управления различными процессами, они описывают различные состояния моделируемого оригинала, их изменение во времени.

II. Модели прогноза или расчетные модели без управления. Их разделяют так же на стационарные и динамические. Основное предназначение этих математических моделей состоит в следующем: зная начальное состояние и информацию о поведении на границе, дать прогноз о поведении исследуемого оригинала во времени и пространстве.

III. Кибернетические модели. Этот тип моделей используется для анализа конфликтных ситуаций. Предполагается, что динамический процесс определяется несколькими субъектами, в распоряжении которых имеется несколько управляющих параметров. В данных моделях с кибернетической системой ассоциируется несколько субъектов со своими собственными интересами.

IV. Имитационные модели. Предыдущие типы моделей не охватывают большого числа ситуаций, которые могут быть полностью формализованы. Для изучения таких процессов необходимо включение в математиче-

скую модель функционирующего «биологического звена» – человека. В таких ситуациях используется имитационное моделирование, а также методы экспертных и информационных процедур. В конечном счете они сводятся к многократно повторенным вариантным расчетам с использованием математических моделей.

Имеется еще множество других видов классификаций математических моделей, например, по содержательному аспекту и т. д.

Пример. Рассмотрим в качестве примера моделирование процесса полета тела, брошенного с заданной начальной скоростью V_0 под заданным углом β к поверхности земли, с заданной высоты h_0 . Нужно определить, через какое время это тело упадет на землю и какое расстояние оно при этом пролетит.

Этап 1. Для описания перемещения тела в процессе полета введем следующую систему координат (рис. 1): направим ось x вдоль поверхности земли, ось y направим перпендикулярно вверх от поверхности земли. Таким образом, в момент броска тело будет находиться на оси y на высоте h_0 . Тогда в любой момент времени t в выбранной системе координат положение тела будет определяться координатами $x(t)$ и $y(t)$, $t > 0$. В момент броска тела будем считать: $t = 0$.

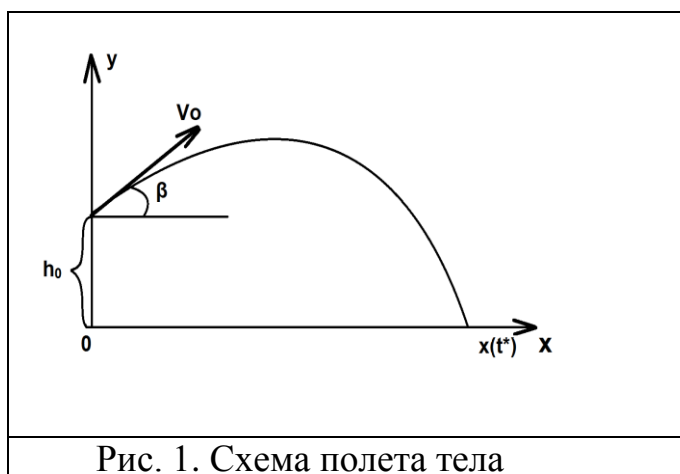


Рис. 1. Схема полета тела

Для построения математической модели процесса полета тела нужно выдвинуть гипотезы и принять определенные допущения. Примем следующую гипотезу: во время полета тела на него действует сила всемирного тяготения, направленная вдоль оси y . Направление действия силы всемирного тяготения противоположно направлению возрастания значений y . Других сил на тело во время его полета не действует. Предположим, что тело достаточно маленькое, и сопротивлением воздуха ему можно пренебречь. Также считаем, что тело пролетает небольшое расстояние, поэтому кривизной поверхности земли можно пренебречь. При принятых гипотезе и допущениях математическая модель процесса полета тела будет следующей:

$$x(0) = 0, \tag{1.1}$$

$$y(0) = h_0, \tag{1.2}$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = V_0 \cdot \cos \beta, \quad (1.3)$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = V_0 \cdot \sin \beta, \quad (1.4)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -g. \quad (1.6)$$

Соотношения (1.1)–(1.6) в математической модели определяют: (1.1), (1.2) – координаты тела в момент броска; (1.3), (1.4) – компоненты скорости тела в момент броска вдоль осей x и y , соответственно; (1.5), (1.6) – компоненты ускорения тела во время полета вдоль осей x и y соответственно.

Этап 2. Математическая модель процесса полета тела представляет собой систему из двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с четырьмя начальными условиями, заданными в одной точке (точке начала полета). То есть задача, связанная с математической моделью (1.1)–(1.6) представляет собой задачу Коши для двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя неизвестными. Ее можно решить различными методами. Приведем аналитический метод решения, который позволяет найти точное решение задачи.

Воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница и граничными условиями (1.1)–(1.4), дважды проинтегрируем уравнения (1.5) и (1.6) и получим зависимости компонент перемещения тела по осям x и y от времени:

$$x'(t) - x'(0) = \int_0^t x''(z) dz = 0 \Rightarrow x'(t) = x'(0) = V_0 \cdot \cos \beta, \quad (1.7)$$

$$y'(t) - y'(0) = \int_0^t y''(z) dz = - \int_0^t g dz = -g \cdot t \Rightarrow y'(t) = y'(0) - g \cdot t = V_0 \cdot \sin \beta - g \cdot t, \quad (1.8)$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t x'(z) dz = \int_0^t V_0 \cdot \cos \beta dz = V_0 \cdot \cos \beta \cdot t \Rightarrow x(t) = x(0) + V_0 \cdot \cos \beta \cdot t = \\ = V_0 \cdot \cos \beta \cdot t, \quad (1.9)$$

$$y(t) - y(0) = \int_0^t y'(z) dz = \int_0^t (V_0 \cdot \sin \beta - g \cdot t) dz = V_0 \cdot \sin \beta \cdot t - g \cdot t^2 / 2 \Rightarrow y(t) = \\ = h_0 + V_0 \cdot \sin \beta \cdot t - g \cdot t^2 / 2. \quad (1.10)$$

С помощью полученного соотношения (1.10) и из условия, что в момент времени t^* падения тела на землю должно выполняться соотношение $y(t^*) = 0$, определим время, через которое оно упадет на землю. Для определения времени падения тела на землю имеем квадратное уравнение:

$$h_0 + V_0 \cdot \sin \beta \cdot t - g \cdot t^2 / 2 = 0. \quad (1.11)$$

Корни этого уравнения вычисляются по формулам:

$$t_1^* = \frac{V_0 \cdot \sin \beta - \sqrt{V_0^2 \cdot \sin^2 \beta + 2 \cdot g \cdot h_0}}{g},$$

$$t_2^* = \frac{V_0 \cdot \sin \beta + \sqrt{V_0^2 \cdot \sin^2 \beta + 2 \cdot g \cdot h_0}}{g}.$$
(1.12)

Для всех значений h_0 , удовлетворяющих соотношению $h_0 > 0$, справедливо неравенство $t_1^* < 0$, которое из физических соображений не подходит, так как время течь вспять не может. Поэтому тело упадет на землю через время t_2^* . При этом по оси x оно пролетит расстояние:

$$x(t_2^*) = V_0 \cdot \cos \beta \cdot t_2^* = V_0 \cdot \cos \beta \cdot \left(\frac{V_0 \cdot \sin \beta + \sqrt{V_0^2 \cdot \sin^2 \beta + 2 \cdot g \cdot h_0}}{g} \right).$$
(1.13)

Мы построили математическую модель, нашли решение математической задачи, связанной с построенной моделью, вывели расчетные формулы для вычисления значений искомых величин t_2 и $x(t_2)$ по известным значениям исходных данных h_0 , V_0 , β . Теперь необходимо дать ответ на вопрос: а какой является область применения построенной модели?

Этап 3. Проанализируем, при изменении в каких диапазонах исходных данных h_0 , V_0 , β , а также, соответственно, времени полета тела t_2^* и пролетаемого им при этом расстояния $x(t_2^*)$ построенная модель (1.1)–(1.6) будет являться адекватной. Также обсудим расчетные значения искомых величин t_2^* и $x(t_2^*)$, вычисленные по модели, будут ли достаточно точно согласовываться с их реальными значениями, которые легко могут быть определены экспериментальным путем.

При больших значениях h_0 , V_0 , и значениях $\beta \approx 45^\circ$ тело будет лететь долго и пролетит достаточно большое расстояние. В этом случае будут нарушены следующие допущения, на которых математическая модель процесса была построена: поверхность земли является плоской, действие силы всемирного тяготения направлено перпендикулярно поверхности земли. Поэтому в этом случае говорить об адекватности построенной математической модели не приходится. Таким образом, построенная математическая модель будет адекватной только для не очень больших значений h_0 , V_0 .

Этап 4. При построении математической модели (1.1)–(1.6) также было принято допущение, что размеры тела небольшие, поэтому сопротивлением воздуха ему можно пренебречь. В случае, когда размеры тела немаленькие, фактором сопротивления воздуха пренебрегать уже нельзя. Если предположить, что тело имеет сферическую форму и на него в полете действует в направлении оси x постоянная сила f , определяющая сопротивление воздуха, то модель (1.1)–(1.6) можно усовершенствовать следующим образом. В математической модели процесса полета нужно заменить уравнение (1.5) на следующее:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{f}{m},$$
(1.14)

где m – масса тела.

Проинтегрировав дважды уравнение (1.14) с учетом граничных условий (1.3) и (1.1), получим:

$$\begin{aligned} x'(t) - x'(0) &= \int_0^t x''(z) dz = \int_0^t \frac{f}{m} dz = \frac{f}{m} \cdot t \Rightarrow x'(t) = x'(0) + \frac{f}{m} \cdot t = V_0 \cdot \cos \beta + \frac{f}{m} \cdot t, \\ x(t) - x(0) &= \int_0^t x'(z) dz = \int_0^t (V_0 \cdot \cos \beta + \frac{f}{m} \cdot z) dz = V_0 \cdot \cos \beta \cdot t + \frac{f}{2 \cdot m} \cdot t^2 \Rightarrow \\ x(t) &= x(0) + V_0 \cdot \cos \beta \cdot t + \frac{f}{2 \cdot m} \cdot t^2 = 0 + V_0 \cdot \cos \beta \cdot t + \frac{f}{2 \cdot m} \cdot t^2 = V_0 \cdot \cos \beta \cdot t + \frac{f}{2 \cdot m} \cdot t^2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В итоге, для вычисления расстояния, которое пролетит тело до момента своего падения на землю, получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} x(t_2^*) &= V_0 \cdot \cos \beta \cdot t_2^* + \frac{f}{2 \cdot m} \cdot t_2^2 = V_0 \cdot \cos \beta \cdot \left(\frac{V_0 \cdot \sin \beta + \sqrt{V_0^2 \cdot \sin^2 \beta + 2 \cdot g \cdot h_0}}{g} \right) + \\ &+ \frac{f}{2 \cdot m} \cdot \left(\frac{V_0 \cdot \sin \beta + \sqrt{V_0^2 \cdot \sin^2 \beta + 2 \cdot g \cdot h_0}}{g} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Формула (1.16) отличается от формулы (1.13) вторым слагаемым, и абсолютная величина этого слагаемого будет тем больше, чем будут больше значения h_0 , V_0 , и значения $\beta \approx 45^\circ$. Усовершенствованная математическая модель процесса (1.1)–(1.4), (1.14), (1.6) позволяет рассчитывать достаточно точное расстояние полета тела до момента его падения на землю, только в случае, когда на тело действует сила сопротивления воздуха постоянной величины f .

В случае же, когда тело будет подниматься на значительную высоту, и размеры его будут являться немаленькими, то сопротивление воздуха при полете на него будет не постоянной, а переменной величиной, так как давление воздуха на разных высотах разное и зависит от других факторов, например, скорости полета. При составлении математической модели процесса этот фактор необходимо учесть, в противном случае математическая модель будет давать неточные значения времени падения тела на землю и расстояния, пролетаемого телом во время полета. Но в этом случае модель станет достаточно сложной, и задачу, связанную с ней, невозможно будет решить аналитическими методами, и придется использовать численные методы решения.

Как можно увидеть из рассмотренного достаточно простого примера область применимости математической модели определяется зоной действия принятых при ее построении гипотез и допущений, вне этой зоны модель может оказаться неадекватной.

Что касается свойства достаточности математической модели в рассмотренном примере, если бы нам не было известно значение хотя бы одной из величин h_0 , V_0 , или β , то модель была бы недостаточной, и по ней мы бы не смогли вычислить расчетные значения искомых величин.

Также из рассмотренного примера нужно сделать следующий очень важный для математического моделирования вывод: при анализе результатов математического моделирования нельзя забывать о физической сути исследуемого оригинала, потому что это позволит отсеять некоторые ложные результаты.

1.2. Задачи математического программирования (оптимизации) и математическое моделирование с применением оптимизационных моделей

В учебном пособии рассматривается математическое моделирование оригиналов с использованием оптимизационных моделей и методы решения математических задач, возникающих при анализе и использовании этих моделей, т.е. задач принятия решений (ПР).

В электронной энциклопедии (википедии) приводится следующее определение оптимизационных моделей: «Оптимизационные модели представляют систему математических уравнений, неравенств линейных или нелинейных, подчиненных определенной (ым) целевой (ым) функции (ям) и служащих для отыскания наилучших (оптимальных) решений конкретной экономической задачи. Эти модели относятся к классу экстремальных задач и описывают условия функционирования экономической системы».

Исследование сложных оригиналов методами математического моделирования, в конечном счете, сводится к нахождению оптимального решения, т.е. к задачам ПР.

На языке математики формулировка задачи оптимизации имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \max(\min) f_i(\bar{x}), \quad i = \overline{1, k}; \\ & \bar{x} \in G_x : \begin{cases} \varphi_j(\bar{x}) \geq 0, \quad j = \overline{1, m_1}; \\ \psi_j(\bar{x}) = 0, \quad j = \overline{m_1 + 1, m}; \end{cases} \\ & G_x \in R^n; \end{aligned} \tag{1.17}$$

здесь n – количество параметров оптимизации (независимых переменных); k – количество изучаемых в модели характеристик оригинала, которые определенным образом зависят от параметров оптимизации; m – количество функциональных ограничений на изменение параметров оптимизации; $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ – точка n – мерного пространства изменения параметров оптимизации R^n ; G_x – множество из n – мерного пространства параметров оптимизации R^n , в котором удовлетворяются все ограничения задачи; $f_i(\bar{x})$ – целевые функции (математические записи критериев оптимизации); $\varphi_j(\bar{x})$, $\psi_j(\bar{x})$ – функции, входящие в ограничения задачи.

Задача (1.17) представляет собой задачу математического программирования, здесь $f_i(\bar{x})$, $\varphi_j(\bar{x})$, $\psi_j(\bar{x})$ представляют собой математическую модель исследуемого оригинала.

Из формулировки оптимизационных моделей следует, что они тесным образом связаны с задачами оптимизации и используются при проведении оптимизационных исследований.

Задачей оптимизации называется задача, в которой требуется из множества возможных вариантов выбрать один или несколько являющихся наилучшими в определенном смысле. В задачах оптимизации обязательными элементами **являются критерии** оптимизации, по которым определяются наилучшие варианты из множества возможных вариантов; а также **параметры оптимизации** (независимые переменные), варьируя значения которых выбираются наилучшие варианты.

Таким образом, решить задачу оптимизации (1.17) – означает среди всевозможных наборов значений параметров оптимизации, принадлежащих множеству G_x , найти один или несколько наборов, для которых значения критериев оптимизации будут наилучшими. Математически это запишется так: найти такой вектор-столбец $\bar{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ для которого $f_i(\bar{x}^*) = f_{i_{\max}}$; $i = \overline{1, k}$; $\varphi_j(\bar{x}^*) \geq 0$, $j = \overline{1, m_1}$; $\psi_j(\bar{x}^*) = 0$, $j = \overline{m_1 + 1, m}$.

Оптимизационное исследование заключается в нахождении решения задачи оптимизации, входящей в оптимизационную модель и проведении анализа найденного решения. Самая важная часть оптимизационного исследования заключается в обосновании правильности решения задачи оптимизации и анализе его чувствительности. Наиболее важным является не само найденное решение, а информация о состоянии оригинала в окрестности этого решения, что позволяет точнее понять его основные свойства.

Важными результатами оптимизационного исследования являются ответы на следующие вопросы: Какие ограничения, входящие в задачу оптимизации, являются активными? Какова чувствительность решения к изменениям значений параметров оптимизации? Активные ограничения указывают, как правило, на ограниченные возможности оригинала или на то, что из проектных соображений оригинал усовершенствовать нельзя. Чувствительность решения к изменению значений параметров оптимизации указывает на то, какие оценки параметров необходимо улучшить для того, чтобы точно определить оптимальное решение.

Первое, что нужно сделать при исследовании результатов оптимизационных расчетов – определить, обоснованно ли найденное решение. Реализуемое состояние – это одно из возможных состояний оригинала. Считается, что найденное решение обоснованно, если ему соответствует некоторое реализуемое состояние оригинала, и оно является оптимумом. Обычно, если модель достаточно точно описывает поведение исследуемого оригинала, она содержит ограничения на изменения определенных характеристик оригинала и ограничения на границы изменения значений параметров оптимизации. Это позволяет получать математическое решение, которое всегда отражает физически реализуемое возможное состояние исследуемого оригинала. Любые

модели верны лишь в определенных пределах, все зависимости справедливы в некоторых границах, а вся информация имеет ограниченную точность. После получения решения необходимо проверить, не выходит ли оно за пределы достоверности модели. В случае обнаружения этого необходимо ввести в модель дополнительные ограничения и повторить оптимизационные расчеты.

После того, как установлено, что решение реализуемо, необходимо определить, является ли оно оптимальным. Речь идет не о математическом доказательстве выполнения необходимых и достаточных условий критерия оптимальности, а об интерпретации полученного результата и о понимании того почему решение оптимально. Для того чтобы быть уверенным в правильности полученного решения, нужно на качественном или интуитивном уровне понять причины, почему параметры оптимизации в решении задачи приняли именно такие значения. Если этого сделать не удастся, то остается принять оптимальность найденного решения задачи оптимизации как результат применения математики и вычислительной техники.

На следующем этапе оценки решения определяется его чувствительность к изменениям значений параметров оптимизации или исходных данных задачи. Такое исследование называется анализом чувствительности. Целями реализации анализа чувствительности являются следующие:

1. Отыскание параметров оптимизации, которые оказывают наиболее сильное влияние на оптимальное решение. В случае существования таких параметров, возможно, следует рассмотреть вопрос о коррекции соответствующих свойств оригинала.

2. Уточнение исходных данных о дополнениях или модификации оригинала с целью улучшения его характеристик. Такая информация необходима, например, для оценки целесообразности повышения производственной мощности путем расширения производства или увеличения промежуточных запасов.

3. Установление влияния на исследуемый оригинал изменений не точно заданных параметров оптимизации. Значения некоторых параметров оптимизации модели, вероятно известны с большой погрешностью. Анализ чувствительности, как правило, дает ответ на вопрос: стоит ли тратить средства на определение более точных значений этих параметров. В процессе реализации анализа чувствительности может быть установлено, что параметры оригинала, которые представлялись вначале достаточно важными, не оказывают существенного влияния на результаты оптимизации, и, поэтому нет необходимости уточнять их значения.

4. Выяснение возможной реакции оригинала на неуправляемые внешние воздействия. Некоторые исходные данные оригинала, например, спрос на производственную продукцию, изменяются произвольным образом. В данном случае анализ чувствительности позволит оценить влияние спроса на прибыль, что даст возможность планировать производство при широком возможном диапазоне экономических показателей.

Поскольку информация этого рода очень важна для практической реализации решения, детальный анализ чувствительности оказывается во многих случаях полезнее, чем определение оптимального решения.

Прежде чем перейти к классификации задач оптимизации, приведем определение некоторых понятий, которые в дальнейшем будут использоваться при классификации, а также при решении задач оптимизации.

Непрерывной называется переменная, которая может принимать любые значения из своего диапазона изменения. Любая непрерывная переменная (вне зависимости от того, в конечном или бесконечном диапазоне она изменяется) принимает бесконечное множество значений.

Дискретной называется переменная, которая может принимать не любые значения из своего диапазона изменения, а только отдельные, причем изолированные друг от друга. Дискретная переменная может принимать конечное или счетное число значений.

Счетным называется множество, элементы которого могут быть пронумерованы с помощью множества натуральных чисел.

Выпуклым называется множество, которое вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит отрезок прямой, соединяющей эти точки. Примеры выпуклого и невыпуклого множества приведены на рис. 2.

Односвязным называется множество, любые две точки которого могут быть соединены непрерывной линией.

Не односвязным называется множество, у которого существует, по крайней мере, две точки, которые не могут быть соединены непрерывной линией. Примеры односвязного и не односвязного множеств показаны на рис. 3.

Функцией одной переменной называется функция, в которую входит всего лишь одна независимая переменная.

Функцией многих переменных называется функция, в которую входят несколько независимых переменных.

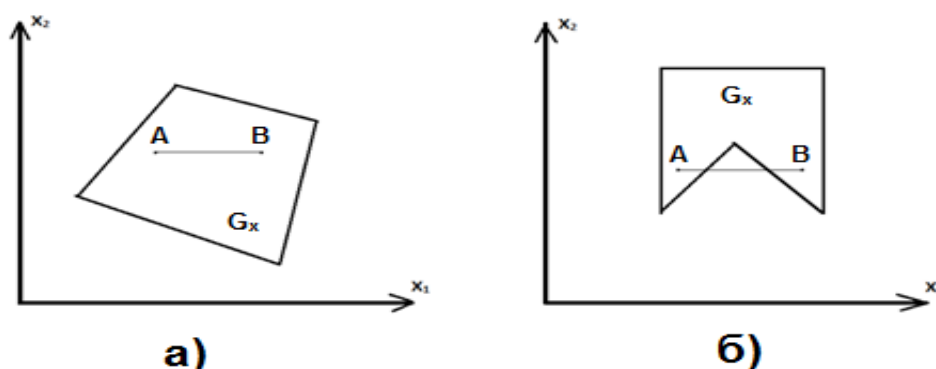


Рис. 2. а) Выпуклое множество; б) невыпуклое множество

Линейной называется функция, в которую независимые переменные (аргументы) входят только в первой степени (многочлен первой степени от многих переменных).

Нелинейной называется функция, в которую хотя бы одна из независимых переменных (аргументов) входит в степени, отличной от первой.

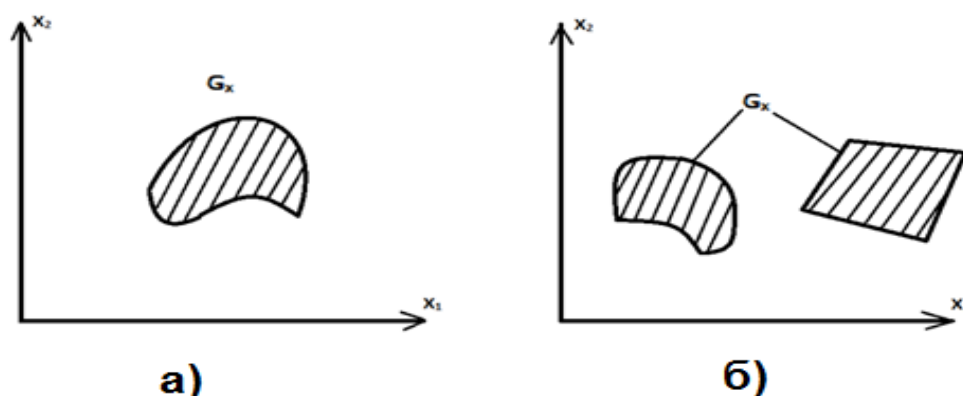


Рис. 3. а) Односвязное множество; б) не односвязное множество

Дифференцируемой называется функция одной или многих переменных, у которой существуют первые производные во всех точках изменения независимых переменных из их диапазонов изменения.

K раз дифференцируемой называется функция многих переменных, у которой существуют частные производные, от первого порядка до K -го включительно, во всех точках изменения независимых переменных из их диапазонов изменения.

Линией уровня функции $f(\bar{x})$ называется множество значений ее независимых переменных, для которых значение функции остается постоянной величиной. На рис. 4 приведено несколько линий уровня для функции двух независимых переменных $f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + 5$.

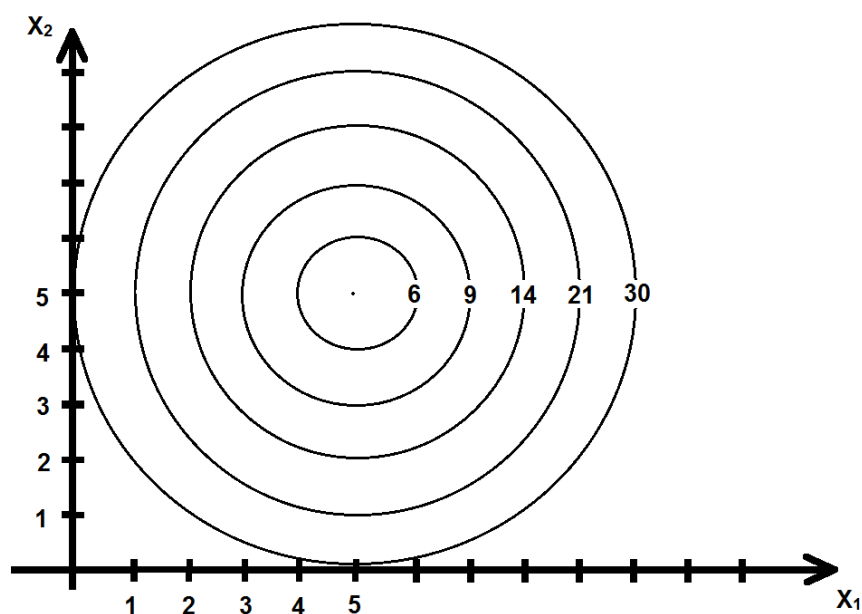


Рис. 4. Несколько линий уровня функции $f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + 5$

Точка \bar{x}^* называется точкой **локального минимума** функции $f(\bar{x})$, если в некоторой окрестности этой точки $\delta > 0$ справедливо неравенство:

$$\Delta f = f(\bar{x}) - f(\bar{x}^*) \geq 0. \quad (1.18)$$

Точка \bar{x}^* называется точкой **глобального минимума** функции $f(\bar{x})$, если неравенство (1.18) выполняется для всех $\bar{x} \in R^n$.

Таким же образом определяются понятия точки **локального и глобального максимумов** функции $f(\bar{x})$, только в этом случае неравенство (1.18) должно выполняться с точностью до наоборот.

Точка \bar{x}^0 называется **седловой** точкой функции $f(\bar{x})$ в случае, когда Δf принимает как положительные и отрицательные, так и нулевые значения в зависимости от выбора точек из δ -окрестности.

Точка \bar{x}^0 называется **стационарной точкой** дифференцируемой функции $f(\bar{x})$ если $\frac{\partial f(\bar{x}^0)}{\partial x_i} = 0, i=1, \dots, n$.

Градиентом непрерывной и дифференцируемой функции $f(\bar{x})$ в точке \bar{x}^* называется вектор $\nabla f(\bar{x}^*)$, имеющий проекции на оси координат, равные первым ее частным производным, вычисленным в точке \bar{x}^* по соответствующим координатам. Таким образом, градиент функции $f(\bar{x})$ в точке \bar{x}^* равен:

$$\nabla f(\bar{x}^*) = \left(\frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_1} \cdot i + \frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_2} \cdot j + \dots + \frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_n} \cdot n \right)^T, \quad (1.19)$$

где i, j, \dots, n – единичные вектора, параллельные координатным осям.

Выражение $\nabla^T f(\bar{x}^*)$ обозначает вектор-строку, составленную из первых частных производных функции $f(\bar{x})$. В литературе по математическому анализу [14] доказывается, что вектор-градиент скалярной функции направлен в сторону наискорейшего возрастания функции и что он ортогонален линии уровня $f(\bar{x})$, проходящей через данную точку \bar{x}^* . Вектор, противоположный вектору-градиенту в данной точке, будет указывать направление наибоыстрейшего убывания функции в данной точке. Любой вектор \bar{y} , ортогональный к $\nabla f(\bar{x}^*)$ (так же как и касательная плоскость, ортогональная к $\nabla f(\bar{x}^*)$ в точке \bar{x}^*), может быть записан как $\bar{y} \cdot \nabla f(\bar{x}^*) = 0$.

Классификация задач оптимизации производится по многим признакам. При классификации их по типу функций, участвующих в математической формулировке, они разделяются на два класса: линейного программирования (ЛП) и нелинейного программирования (НЛП). Задачами ЛП называются задачи оптимизации, в математическую формулировку которых входят только линейные функции. Задачами НЛП называются задачи оптимизации, в математическую формулировку которых входит хотя бы одна нелинейная функция. Разделение задач оптимизации на два класса при данной

классификации обусловлено тем обстоятельством, что решение задач ЛП, когда оно существует (имеется в виду конечное решение), всегда лежит на границе области, определяемой ограничениями. В задачах НЛП решение задачи может находиться не только на границе, но и во внутренней точке области выполнения ограничений, в связи с чем решение задач НЛП является более трудным процессом, чем задач ЛП. При этом в задачах ЛП область выполнения ограничений всегда является выпуклым множеством, а в задачах НЛП эта область может быть не только невыпуклым множеством, но и неодносвязным. Для решения задач ЛП существует универсальный метод: симплекс-метод, а для решения задач НЛП универсального метода не существует.

Задачи оптимизации при классификации их по наличию или отсутствию ограничений, накладываемых на изменения независимых переменных, подразделяют на два класса – **безусловные** и **условные**. Задачи безусловной оптимизации – это такие задачи оптимизации, в которых на изменение независимых переменных никаких ограничений не наложено. Задачи условной оптимизации – это задачи оптимизации с ограничениями, наложенными на изменение независимых переменных.

Задачи оптимизации при классификации их по типу независимых переменных (параметров оптимизации) делятся на три класса: задачи оптимизации только с непрерывными переменными, задачи оптимизации только с дискретными переменными, задачи оптимизации со смешанными переменными (часть переменных в задаче являются непрерывными, а часть являются дискретными). Разделение задач оптимизации на такие три класса при данной классификации обусловлено тем, что для решения задач с непрерывными переменными можно применять принципы оптимальности дифференциального исчисления, а для остальных двух классов нет, потому что в них участвуют дискретные переменные. Поэтому, с точки зрения сложности их решения, задачи оптимизации с непрерывными переменными являются наиболее простым классом. Для решения задач с дискретными переменными применяются три класса методов: отсечений, комбинаторные и приближенные. Для решения класса задач оптимизации со смешанными переменными применяются, как правило, комбинаторные методы, и этот класс задач является наиболее сложным в плане их решения.

При классификации задач оптимизации по количеству критериев оптимизации (целевых функций) все задачи оптимизации делятся на два класса: **задачи однокритериальной оптимизации** и **задачи многокритериальной оптимизации с числом критериев больше или равно 2 ($k \geq 2$)**. С точки зрения сложности их решения класс задач однокритериальной оптимизации, являющийся подмножеством класса задач многокритериальной оптимизации, является более простым.

При классификации задач оптимизации по количеству независимых переменных они условно делятся на четыре класса: к первому классу отно-

сятся задачи с одной переменной (эти задачи решаются на числовой прямой); ко второму классу относятся задачи с двумя переменными (они решаются на плоскости); к третьему классу относятся задачи с тремя переменными (этот класс задач решается в трехмерном пространстве); к четвертому классу относятся задачи с четырьмя и более переменными (для этого класса задач геометрическая интерпретация невозможна). Данный вид классификации связан с возможностью или невозможностью применения геометрической интерпретации при решении задач. Для решения первых трех классов задач могут быть использованы графические методы, которые при их реализации используют геометрические интерпретации в пространствах соответствующей размерности, а для решения задач из четвертого класса графические методы уже не подходят.

Имеется еще несколько видов классификации задач оптимизации: выпуклого программирования, квадратичного программирования, геометрического программирования, дробно-линейного программирования и т.д.

Любая задача оптимизации по всем вышеперечисленным пяти видам классификации относится к определенному классу, и в зависимости от попадания ее в тот или иной класс выбирается метод ее решения.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое «модель»?
2. Что такое «математическая модель»?
3. Какими свойствами должна обладать математическая модель?
4. Что означает свойство достаточности математической модели?
5. Что означает свойство адекватности математической модели?
6. Что означает свойство корректности математической модели?
7. Что такое «моделирование»?
8. Что такое «математическое моделирование»?
9. На какие этапы условно делится процесс математического моделирования?
10. Что собой представляют оптимизационные модели?
11. Что собой представляют расчетные модели?
12. Какая задача называется задачей оптимизации?
13. Какие компоненты должны обязательно входить в задачи оптимизации?
14. Что такое «критерий оптимизации и целевая функция»?
15. Что такое «параметры оптимизации (независимые переменные)»?
16. Что такое «линия равного уровня»?
17. Что такое «градиент функции»?
18. Каким свойством обладает вектор-градиент?

19. Какая задача оптимизации называется задачей линейного программирования?

20. Какая задача оптимизации называется задачей нелинейного программирования?

21. Какая задача оптимизации называется задачей безусловной оптимизации?

22. Какая задача оптимизации называется задачей условной оптимизации?

23. Какая задача оптимизации называется задачей многокритериальной оптимизации?

24. Какая задача оптимизации называется задачей с непрерывными переменными?

25. Какая задача оптимизации называется задачей с дискретными переменными?

26. Какая задача оптимизации называется задачей со смешанными переменными?

2. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Математическая формулировка задачи математического программирования (1.17) для случая линейного программирования с непрерывными переменными (ЛП) имеет следующий вид:

$$\text{найти } \min(\max) (f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i) \quad (2.1^*)$$

$$\text{при: } \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i \leq b_j, j = \overline{1, m_1}, \quad (2.2.1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i \geq b_j, j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \quad (2.2.2) \quad (2.2^*)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i = b_j, j = \overline{m_2 + 1, m}. \quad (2.2.3)$$

Причем систему ограничений вида неравенств (2.2.1) и (2.2.2) всегда можно свести к ограничениям вида равенств и наоборот, введением, так называемых, дополнительных переменных. Тогда, если предположить, что $x_i \geq 0, (i = \overline{1, n})$; $b_j \geq 0, (j = \overline{1, m})$, то общую задачу ЛП (2.1*)–(2.2*) можно представить **в канонической форме задачи ЛП**:

$$\text{найти } \min(\max) (f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i) \quad (2.1)$$

$$\text{при } \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i = b_j, j = \overline{1, m}; \quad (2.2)$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n}; b_j \geq 0, j = \overline{1, m}. \quad (2.3)$$

Общая задача ЛП (2.1*)–(2.2*) также может быть представлена и в стандартной форме:

$$\text{найти } \min(\max) (f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n c_i' \cdot x_i) \quad (2.1')$$

$$\text{при } \sum_{i=1}^n a_{ji}' \cdot x_i \geq b_j', j = \overline{1, m}; \quad (2.2')$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n}; b_j' \geq 0, j = \overline{1, m}. \quad (2.3')$$

В учебном пособии случай нахождения $\max f(\bar{x})$ отдельно не выделяется, т.к. он сводится к нахождению $\min[-f(\bar{x})]$, причем $\max f(\bar{x}) = -\min[-f(\bar{x})]$. В дальнейшем, если это специально не будет оговорено, будет рассматриваться задача ЛП на нахождение минимума целевой функции.

Задачи ЛП отличаются от задач нелинейного программирования (НЛП) тем, что в них решение (речь идет о конечном решении), в случае, когда оно существует, всегда находится на границе области, в которой выполняются все ограничения задачи. Это утверждение легко доказывается от противного. Предположим, что решение задачи ЛП находится во внутренней точке об-

ласти. Тогда из необходимого условия достижения экстремума функцией $f(\bar{x}) = c_0 + c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$ многих переменных следует:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = c_3 = 0, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = c_n = 0. \quad (2.4)$$

Из соотношений (2.4) вытекает, что целевая функция задачи ЛП (2.1)–(2.3) является константой, а константу оптимизировать невозможно. К такому противоречию мы пришли из-за ошибочного предположения о том, что оптимальное значение целевой функции в задачах ЛП может достигаться во внутренней точке области, где выполняются ограничения задачи.

У задачи (2.1*)–(2.2*) решение может существовать, а может и не существовать. Решение у нее не существует тогда, когда система ограничений (2.2*) является противоречивым, то есть множество G_x , удовлетворяющее этим ограничениям, является пустым множеством. Задача (2.1*)–(2.2*) заведомо имеет решение тогда, когда множество G_x является ограниченным множеством (рис. 5).

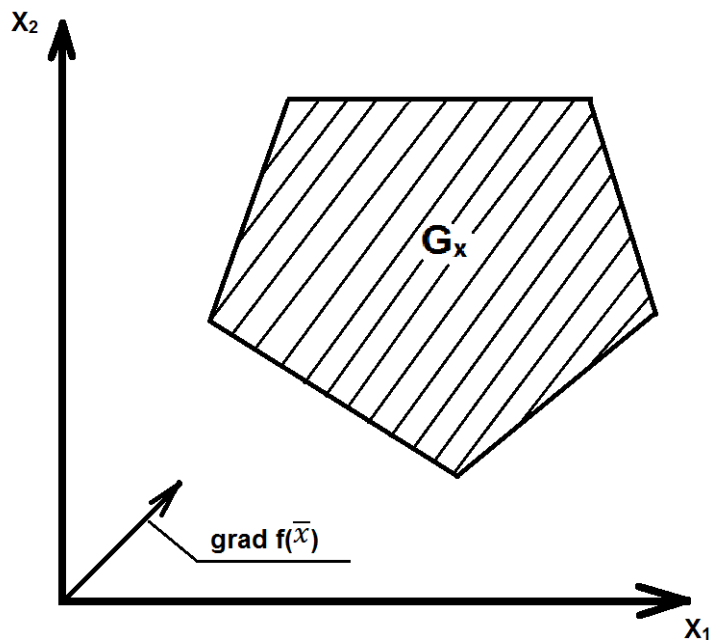


Рис. 5

Задача (2.1*)–(2.2*) может иметь решение, а может и не иметь его в случае, когда множество G_x является неограниченным множеством. Ответ на вопрос о существовании решения задачи в этом случае зависит от того, ограничена снизу на множестве G_x целевая функция или нет. Если она не ограничена снизу, то задача не имеет решения (рис. 6), если ограничена снизу, то задача имеет решение (рис. 7).

мере, одно оптимальное решение задачи ЛП находится в одной из вершин многогранника решений.

В ступенчатом виде (2.5) системы ограничений задачи ЛП (2.2) в качестве базисных использованы первые m переменных, что является необязательным. В общем случае для получения ступенчатого вида системы ограничений (2.2) и соответственно базисного решения можно использовать любые m из n переменных в качестве базисных. Из этого следует, что наибольшее число переборных базисных решений задачи ЛП (2.1)–(2.3), записанной в канонической форме, определяется как число сочетаний из n по m т. е. по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (2.6)$$

Можно доказать что любая вершина многогранника решений соответствует некоторому допустимому решению системы ограничений (2.2)–(2.3) [7]. Следовательно, решение задачи (2.1)–(2.3) можно найти следующим образом: с помощью метода Гаусса-Жордана найти все базисные решения задачи. Вычислить значения целевой функции при всех базисных решениях задачи и в качестве решения задачи выбрать то базисное решение, для которого значение целевой функции $f(\bar{x})$ является наилучшим. Но этот метод является неэффективным в случае, когда число переменных n и ограничений m задачи ЛП становятся большими. Поэтому был разработан ряд более эффективных методов для нахождения решения задач ЛП: графический, потенциалов, симплекс-метод.

Графический метод и метод потенциалов являются частными и применяются для решения специальных задач ЛП, а симплекс-метод является универсальным и им можно решить любую задачу ЛП. Рассмотрение методов решения задач ЛП начнем с графического метода.

2.1. Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим графический метод решения задач ЛП. Так метод назван потому, что в основу его реализации заложена геометрическая интерпретация задачи ЛП. Метод является очень наглядным, но вместе с тем его применимость весьма ограничена – он пригоден только для решения задач ЛП с двумя или тремя параметрами оптимизации.

Алгоритм решения задач ЛП графическим методом рассмотрим на примере решения задачи ЛП с двумя параметрами оптимизации, т.е. при $n = 2$ (задача ЛП решается на плоскости). В случае $n = 3$ (задача ЛП решается в трехмерном пространстве) алгоритм ее решения является таким же, что и при $n = 2$, только при его реализации используются пространственные (трехмерные) геометрические объекты.

На первом этапе реализации алгоритма определяется область, в которой удовлетворяются все ограничения задачи (многоугольник решений).

Для этого строятся граничные прямые всех ограничений задачи. Каждая из этих прямых делит плоскость на две полуплоскости. В одной из полуплоскостей данное ограничение выполняется, в другой – нет. Чтобы определить полуплоскость, в которой данное ограничение выполняется, берем какую-то характерную точку $\bar{x}^+ = [x_1^+, x_2^+]^T$. Подставляем ее координаты в ограничение, если оно удовлетворяется, то данное ограничение выполняется в полуплоскости, к которой принадлежит эта точка и не выполняется в другой полуплоскости. Выполнив эту процедуру для всех ограничений задачи, определяем все полуплоскости, в которых выполняются ограничения задачи по отдельности. И далее, как общую часть этих полуплоскостей, находим область, в которой удовлетворяются все ограничения задачи (многогранник решений).

На втором этапе алгоритма строим вектор-градиент целевой функции задачи. Так как для линейных функций вектор-градиент постоянен по величине и по направлению во всех точках пространства изменения параметров оптимизации, построим его с началом в начале координатной системы и концом в точке с координатами (c_1, c_2) , где c_1, c_2 – соответственно коэффициенты перед параметрами оптимизации x_1 и x_2 в целевой функции задачи.

На третьем этапе алгоритма проводим прямую, перпендикулярную вектору-градиенту и проходящую через точку с координатами (c_1, c_2) . Во всех точках этой прямой значение целевой функции задачи будет оставаться постоянным $f(x_1, x_2) = Z_0$, то есть эта прямая будет являться линией равного уровня целевой функции задачи. Далее, если решаем задачу ЛП на нахождение максимума целевой функции, перемещаем эту прямую параллельно себе в направлении вектора-градиента целевой функции и находим точку последнего пересечения ее с многоугольником решений задачи. Это будет точка оптимума (максимума) целевой функции. Если же решаем задачу ЛП на нахождение минимума целевой функции, то перемещаем эту прямую параллельно себе в направлении, противоположном вектору-градиенту целевой функции и находим точку последнего пересечения ее с многоугольником решений задачи. Это будет точка оптимума (минимума) целевой функции.

На четвертом этапе алгоритма определяем координаты точки оптимума целевой функции. Для этого составляем систему из двух уравнений, а именно, уравнений прямых, на пересечении которых располагается точка оптимума целевой функции задачи ЛП. Если точка оптимума располагается на пересечении более двух прямых, то из этих прямых отбираются любые две и из их уравнений составляется система, решение которой позволит найти координаты точки оптимума целевой функции задачи.

На пятом этапе алгоритма подставляем найденные на предыдущем этапе координаты точки оптимума в целевую функцию и определяем ее

оптимальное значение. На этом алгоритм решения задачи ЛП графическим методом заканчивается.

Реализацию алгоритма графического метода решения задач ЛП рассмотрим на примере решения следующей задачи.

Задача об использовании сырья. Известно, что для производства на предприятии продукции двух видов P_1, P_2 используется четыре вида сырья S_1, S_2, S_3, S_4 . Запасы сырья каждого вида ограничены и составляют соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 условных единиц. Количество единиц сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно и приведено в табл. 2.1–2.2.

Таблица 2.1

Виды сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		1	2
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}
S_3	b_3	a_{31}	a_{32}
S_4	b_4	a_{41}	a_{42}
Доход		d_1	d_2

Таблица 2.2

Виды сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		1	2
S_1	19		
S_2	13		
S_3	15		
S_4	18		
Доход			

Здесь a_{ij} означает количество единиц сырья вида S_i , необходимое для изготовления продукции вида P_j . В последней строке таблицы указан доход, получаемый предприятием от реализации одной единицы каждого вида продукции.

Требуется определить такой план выпуска продукции видов P_1 и P_2 , при котором доход предприятия от реализации всей продукции оказался бы максимальным.

Составим математическую модель задачи. Допустим, что предприятие выпускает x_1 единиц продукции вида P_1 и x_2 единиц продукции вида P_2 . Для этого потребуется $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$ единиц сырья S_1 (табл. 2.2). Так как в наличии имеется всего 19 единиц сырья S_1 , то должно выполняться неравенство $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 19$ (ограничение по сырью S_1).

Аналогичные рассуждения, проведенные для остальных видов сырья, позволяют записать следующие неравенства:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 &\leq 13 && \text{(ограничение по сырью } S_2), \\ 3 \cdot x_2 &\leq 15 && \text{(ограничение по сырью } S_3), \\ 3 \cdot x_1 &\leq 18 && \text{(ограничение по сырью } S_4). \end{aligned}$$

При этих условиях доход Z , получаемый предприятием, составит:

$$Z = f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2.$$

Таким образом, математическую задачу можно сформулировать так: требуется среди решений системы:

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 19, \quad (2.7)$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 \leq 13, \quad (2.8)$$

$$3 \cdot x_2 \leq 15, \quad (2.9)$$

$$3 \cdot x_1 \leq 18, \quad (2.10)$$

$$x_1 \geq 0, \quad (2.11)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (2.12)$$

выбрать такое, при котором целевая функция

$$Z = f(x_1, x_2) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \quad (2.13)$$

принимает наибольшее значение (максимизируется).

Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат $x_1 O x_2$. Известно, что геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе линейных неравенств, образует выпуклый многоугольник. Этот многоугольник называется многоугольником решений данной системы неравенств. Стороны этого многоугольника располагаются на прямых, уравнения которых получаются, если в неравенствах системы знаки неравенств заменить на знаки равенств. А сам этот многоугольник есть общая часть полуплоскостей, на которые делит плоскость каждая из указанных прямых. В рассматриваемой задаче такими прямыми являются:

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 19, \quad (I)$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 = 13, \quad (II)$$

$$3 \cdot x_2 = 15, \quad (III)$$

$$3 \cdot x_1 = 18, \quad (IV)$$

$$x_1 = 0, \quad (V)$$

$$x_2 = 0. \quad (VI)$$

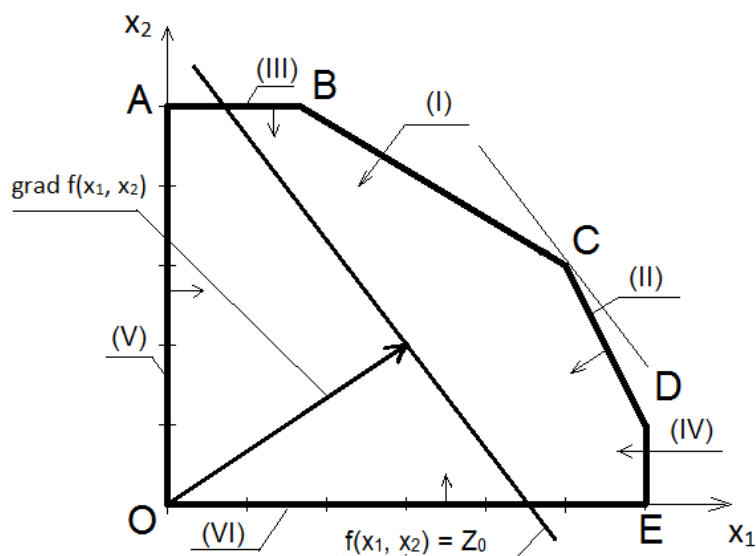


Рис. 8

Начертим прямые (I) – (VI). Подставим координаты характерной точки в ограничения (в качестве характерной точки в ограничения (2.7)–(2.10), удобно подставлять точку с координатами $x_1 = 0, x_2 = 0$ в ограничение (2.11) точку с координатами $x_1 = 1, x_2 = 0$ в ограничение (2.12) точку с координатами $x_1 = 0, x_2 = 1$) и определим полуплоскости, в которых удовлетворяются ограничения (2.7)–(2.12) по отдельности. Далее, как пересечение этих полуплоскостей, найдем многоугольник решений OABCDE (рис. 8). Стрелки на рис. 8 указывают, какие полуплоскости в пересечении дают многоугольник решений задачи (2.7)–(2.13). При этом любая точка из внутренности многоугольника OABCDE и его границ удовлетворяет всем неравенствам (2.7)–(2.12).

Построим вектор-градиент целевой функции задачи:

$$\bar{N} = \text{grad}(f(x_1, x_2)) = c_1 \cdot \bar{e}_1 + c_2 \cdot \bar{e}_2 = 3 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2,$$

здесь \bar{e}_1 и \bar{e}_2 – единичные вектора по осям Ox_1 и Ox_2 , соответственно.

Вектор-градиент обладает тем свойством, что в каждой точке пространства изменений параметров оптимизации указывает направление наискорейшего возрастания функции. Поскольку для линейных функций вектор градиент является постоянным по величине и направлению во всех точках пространства изменения переменных, то прямая, перпендикулярная вектору-градиенту, будет линией равного уровня, то есть линией, во всех точках которой значение функции будет оставаться одним тем же: $f(x_1, x_2) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = Z_0$. Далее перемещаем эту прямую параллельно себе в направлении вектора-градиента (в направлении наискорейшего возрастания функции) и находим точку последнего пересечения перемещаемой прямой с многоугольником OABCDE. Это будет точкой максимума (оптимума) целевой функции $f(x_1, x_2)$. Как видно из рис. 8, для данной задачи это будет вершина C многоугольника решений задачи OABCDE.

Для нахождения координат точки C оптимума задачи определяем, на пересечении каких прямых лежит эта точка. Из рис. 8 видно, что она лежит на пересечении прямых (I) и (II). Запишем систему из уравнений этих прямых:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 19 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 = 13 \end{array} \right\}.$$

Решив эту систему, найдем координаты точки C оптимума целевой функции задачи $x_1 = 5, x_2 = 3$.

Далее, подставив найденные координаты точки оптимума C в целевую функцию $f(x_1, x_2)$ находим ее оптимальное значение:

$$Z_{\max} = f(x_1, x_2) = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 21.$$

Итак, оптимальное решение задачи найдено, оно достигается при $x_1 = 5, x_2 = 3$ и при этом $Z_{\max} = 21$.

Если вспомнить условие задачи, то понятно, что при оптимальном плане использования запасов сырья следует выпускать 5 единиц продукции вида P_1 и 3 единицы продукции вида P_2 , при этом максимальный доход составит $Z_{max} = 21$. Отметим, что при этом сырье видов S_1 и S_2 используется полностью, а S_3 и S_4 – не полностью. В этом можно убедиться, подсчитав расходы четырех видов сырья при найденном плане выпуска продукции: $x_1 = 5, x_2 = 3$:

$$\begin{aligned} S_1: \Delta S_1 &= b_1 - 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = 19 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 0 \\ S_2: \Delta S_2 &= b_2 - 2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = 13 - 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 0 \\ S_3: \Delta S_3 &= b_3 - 3 \cdot x_2 = 15 - 3 \cdot 3 = 6 \\ S_4: \Delta S_4 &= b_4 - 3 \cdot x_1 = 18 - 3 \cdot 5 = 3, \end{aligned}$$

здесь ΔS_i – остатки сырья i -го вида при реализации оптимального плана выпуска продукции.

Далее рассмотрим, как изменяется решение задачи при изменении коэффициентов c_1, c_2 целевой функции $Z = f(x_1, x_2) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$. Допустим, значение c_1 изменяется, а значение c_2 фиксировано. При этом вектор $\bar{N} = \{c_1, c_2\}$ тоже изменяет направление и величину. Если следить за оптимальным решением, то до определенного значения c_1 координаты точки оптимума x_1, x_2 остаются прежними, т.е. равными $x_1 = 5, x_2 = 3$, но при этом значения целевой функции изменяются согласно форме $Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$. Увеличение c_2 (или уменьшение c_1) приводит к такому расположению прямой (целевой функции), при котором эта прямая становится параллельной одной из прямых (I) или (II), ограничивающих область допустимых решений, и совпадает с ней. При этом оптимальные решения задачи заполняют некоторый отрезок с постоянным значением целевой функции.

Значения c_1 , при которых прямая, соответствующая целевой функции, будет параллельна прямым (I) и (II), можно найти из условия пропорциональности коэффициентов параллельных прямых. Для больших значений c_1 имеем:

$$\begin{aligned} Z &= c_1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\ (II): 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= 13 \quad \Leftrightarrow \frac{c_1}{2} = \frac{2}{1} \Rightarrow c_1 = 4 \end{aligned}$$

со значением $Z_1 = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 26$.

Для малых значений c_1 имеем:

$$\begin{aligned} Z &= c_1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\ (I): 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &= 19 \Rightarrow \frac{c_1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow c_1 = 1,3333 \end{aligned}$$

со значением $Z_1 = 1,3333 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 12,6665$.

Таким образом, для значения $c_1 = 4$ оптимальные решения – это множество точек, принадлежащих отрезку CD , а для значения $c_1 = 1,3333$ отрезку BC . Дальнейшее увеличение c_1 приводит к перемещению оптимального решения из точки $C[5; 3]^T$ в точку $D[6; 1]^T$ (а при уменьшении c_1 – из точки $C[5; 3]^T$ в точку $B[2; 5]^T$), т.е. к точкам пересечения прямых:

$$2x_1 + x_2 = 13 \quad (II) \qquad 2x_1 + 3x_2 = 19 \quad (I)$$

$$3x_1 = 18 \text{ (IV)}$$

$$3x_2 = 15 \text{ (III)}$$

или

$$\begin{array}{l} \text{-----} \\ x_1 = 6; \quad x_2 = 1 \\ Z_2 = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{-----} \\ x_1 = 2; \quad x_2 = 5. \\ Z_3 = 1,3333 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 12,6667. \end{array}$$

Из вышеприведенного анализа на чувствительность следует, что при изменении значения c_1 от 1,3333 до 4 (при $c_2 = 2 = \text{const}$) оптимальное базисное решение остается неизменным ($x_1 = 5, x_2 = 3$), хотя значение целевой функции Z изменяется от 12,6666 до 26 единиц. Аналогичные результаты можно получить при изменении значения c_2 при $c_1 = 3 = \text{const}$. Оптимальное решение остается прежним ($x_1 = 5, x_2 = 3$) при изменении значения c_2 от 1,5 до 4,5. При этом максимальное значение целевой функции изменяется от $Z_{\max} = 3 \cdot 5 + 1,5 \cdot 3 = 19,5$ до $Z_{\max} = 3 \cdot 5 + 4,5 \cdot 3 = 23,5$.

Изменение правых частей неравенств (2.7)-(2.12), как следует из построения, приводит к новой области допустимых решений, что тем самым может повлиять на оптимальное решение. Например, при допустимом оптимальном плане $x_1 = 5, x_2 = 3$ запасы сырья S_3 и сырья S_4 остались соответственно в количестве 6 и 3 единиц. Если бы мы увеличили указанные запасы сырья, то они не приводили бы к изменению плана выпуска продукции и дохода, при параллельном перемещении прямых (III) и (IV) в соответствии с ростом значений b_3 и b_4 . При уменьшении значений b_3 и b_4 прямые (III) и (IV) перемещаются в направлении начала координат, оставаясь параллельными самим себе, уменьшая тем самым область допустимых значений (x_1, x_2) . При уменьшении b_3 до определенного значения ($b_3 = 9$) остаток сырья S_3 уменьшается до 0, но при этом оптимальный план $x_1 = 5, x_2 = 3$ не меняется, а дальнейшее уменьшение b_3 приводит к изменению плана.

Таким образом, мы определили интервал устойчивости оптимального плана по отношению к изменению $b_3 (9 \leq b_3 < \infty)$. Аналогично можно найти интервал устойчивости оптимального решения по отношению к $b_4 (15 \leq b_4 < \infty)$.

Напротив, изменение значений b_1 и b_2 приводит к одновременному изменению оптимального плана. При уменьшении значения b_1 координаты оптимального решения перемещаются как пересечение прямых (I) и (II), в соответствии с этим значение оптимального плана тоже уменьшается, а при увеличении b_1 , наоборот, оптимальное значение целевой функции возрастает. Такое возрастание значения целевой функции возможно в нашем случае до определенного значения b_1 . При дальнейшем увеличении значения b_1 область допустимых значений остается неизменной из-за других ограничений (II) и (III). Следовательно, и оптимальный план $x_1 = 4, x_2 = 5$ (точка пересечения прямых (I) и (II) остается неизменным, т.е. увеличение b_1 более чем на $b_1 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$ к изменению точки оптимума целевой функции не приводит.

Увеличение количества первого ресурса на 1 единицу дает новый оптимальный план – новую точку $[4,75; 3,5]^T$ с оптимальным значением целевой функции $Z = f(4,75; 3,5) = 3 \cdot 4,75 + 2 \cdot 3,5 = 21,25$; т.е. увеличивается на 0,25 единиц условный доход.

При увеличении количества второго ресурса на 1 единицу получается новый оптимальный план – новая точка $[5,75; 2,5]^T$ с оптимальным значением целевой функции $Z = f(5,75; 2,5) = 3 \cdot 5,75 + 2 \cdot 2,5 = 22,25$, т.е. увеличивается на 1,25 единиц условный доход. Последнее показывает неравнозначность разных видов сырья с точки зрения их влияния на оптимальное значение целевой функции.

В общем случае для анализа устойчивости полученного решения по правым частям неравенств формулируется задача, двойственная к основной задаче. Общие принципы формирования двойственной задачи из прямой будут сформулированы в пункте 2.3 данной главы.

2.2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

В случае, когда число параметров оптимизации в задаче ЛП $n > 3$, использовать для ее решения графический метод нельзя из-за невозможности применения геометрической интерпретации. В этом случае можно применить следующий подход. Записать задачу (2.1*)–(2.2*) в канонической форме (2.1)–(2.3). Одним из методов решения систем линейных уравнений найти все базисные решения для ограничений (2.2), количество которых будет равно $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Для каждого из базисных решений вычислить значения целевой функции. Далее сравнить значения целевой функции для всех базисных решений, и в качестве решения задачи (2.1*)–(2.2*) выбрать то базисное решение, для которого значение целевой функции окажется наилучшим. Но такой метод решения задачи (2.1*)–(2.2*) является неэффективным, поскольку значение C_n^m становится большим, в случае, когда для значений n и m выполняется соотношение $n > m$. Для таких случаев был разработан метод решения задач ЛП, который был назван симплекс-методом. Суть (идея) симплекс-метода заключается в нахождении отправного базисного решения и далее – в осуществлении целенаправленного (упорядоченного) перебора базисных решений, с улучшением с каждым следующим базисным решением значения целевой функции, пока не будет найдено базисное решение, в котором достигается оптимальное (наилучшее) значение целевой функции задачи ЛП.

Если существует оптимальное решение задачи ЛП, то существует и базисное оптимальное решение. Последнее всегда может быть получено с помощью симплекс-метода, причем начинать можно с любого исходного базиса. Симплекс-метод дает схему упорядоченного перехода от одного базисного решения к другому, и, путем последовательного улучшения отправного

базисного решения, позволяет дойти до оптимального за конечное число шагов [5].

Рассмотрим **алгоритм симплекс-метода** для решения задачи ЛП. Алгоритм симплекс-метода включает следующие основные шаги:

- 1) выбор начального допустимого базисного решения;
- 2) переход от текущего допустимого базисного решения к следующему допустимому базисному решению с лучшим значением целевой функции;
- 3) продолжение поиска допустимых базисных решений, улучшающих значение целевой функции, если допустимое базисное решение улучшить нельзя, то оно является оптимальным, на этом алгоритм завершается.

Рассмотрим решение симплекс-методом задачи ЛП (2.1*)–(2.2*). Запишем задачу ЛП (2.1*)–(2.2*), в канонической форме (2.1)–(2.3), добавив в ограничения типа неравенств дополнительные переменные. Возможны два варианта: а) из полученной системы ограничений удастся выделить начальное допустимое базисное решение, б) из полученной системы ограничений не удастся выделить начальное допустимое базисное решение. В случае варианта б) придется для решения задачи использовать **двухэтапный симплекс-метод** с искусственным базисом, алгоритм которого будет разобран позже. В случае варианта а) из системы ограничений задачи (2.2) выражаем r неизвестных ($r \leq m < n$) через остальные и примем их за базисные переменные (x_1, x_2, \dots, x_r), а остальные переменные – за свободные. Далее базисные переменные исключим из целевой функции и задачу ЛП представим в виде:

$$f(\bar{x}) = c_0' - (c_{r+1}' \cdot x_{r+1} + \dots + c_n' \cdot x_n) \rightarrow \min, \quad (2.14)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 &= b'_1 - (a'_{1r+1} \cdot x_{r+1} + a'_{1r+2} \cdot x_{r+2} + \dots + a'_{1n} \cdot x_n) \\ x_2 &= b'_2 - (a'_{2r+1} \cdot x_{r+1} + a'_{2r+2} \cdot x_{r+2} + \dots + a'_{2n} \cdot x_n) \\ &\vdots \\ x_r &= b'_r - (a'_{rr+1} \cdot x_{r+1} + a'_{rr+2} \cdot x_{r+2} + \dots + a'_{rn} \cdot x_n) \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $b_i' \geq 0, (i = \overline{1, m}); r \leq m < n$.

Из системы ограничений задачи (2.15) определим начальное допустимое базисное решение: значения свободных переменных полагаем $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$, при этом значения базисных переменных получаются такими $x_1 = b_1', \dots, x_r = b_r'$. В результате получаем такое начальное допустимое базисное решение $\bar{x} = [b_1', \dots, b_r', 0, \dots, 0]^T$. При этом значение целевой функции задачи $f(\bar{x}) = c_0'$. Задача состоит в том, чтобы отталкиваясь от начального базисного решения, найти оптимальное. Далее возможны два случая:

- 1) Все числа $c_{r+1}, \dots, c'_n \leq 0$. Тогда анализируя выражение целевой функции задачи (2.14) можно заметить, что при значениях $x_{r+1}, \dots, x_n \geq 0$ $\min f(x)$ достигается при значениях $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$. То есть начальное допустимое базисное решение является одновременно и оптимальным. Задача ЛП решена.

2) Среди коэффициентов c'_{r+1}, \dots, c'_n имеются положительные коэффициенты, пусть $c'_j > 0$, $(r+1 \leq j \leq n)$. Тогда не изменяя нулевых значений всех свободных переменных, кроме значения x_j , можно уменьшить (улучшить) значение целевой функции за счет увеличения x_j . Но значение x_j можно увеличивать только до тех пор, пока все базисные переменные будут оставаться неотрицательными, т.е. $x_1, \dots, x_r \geq 0$. Полагая, что все $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ кроме значения x_j , получим:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1j} \cdot x_j, \\ \dots \\ x_r = b'_r - a'_{rj} \cdot x_j. \end{cases}$$

Здесь возможны два случая:

а) Все значения $a'_{1j}, \dots, a'_{rj} \leq 0$. Тогда при любом значении x_j имеем $x_1 \geq b'_1, \dots, x_r \geq b'_r$. Если взять значение x_j достаточно большим, то $\min f(x) = -\infty$. Задача ЛП не имеет решения.

б) Среди коэффициентов a'_{1j}, \dots, a'_{rj} имеются коэффициенты с положительными значениями. Пусть некоторый коэффициент $a'_{kj} > 0$, $(k \leq r)$. Тогда значение x_j нельзя увеличить более чем на величину b'_k / a'_{kj} . В противном случае получится что $x_k < 0$, т.к. $x_k = b'_k - a'_{kj} \cdot x_j$. Найдем среди значений $b'_k / a'_{kj} > 0$ наименьшее значение: $\min_{1 \leq k \leq r} (b'_k / a'_{kj}) = b'_i / a'_{ij} = \rho \geq 0$. Коэффициент a'_{ij} называется разрешающим элементом. Далее положим: $x_{m+1} = 0, \dots, x_{j-1} = 0$, $x_j = \rho$, $x_{j+1} = 0, \dots, x_n = 0$. Значения остальных переменных определяются так:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1j} \cdot \rho > 0, \\ \dots \\ x_i = b'_i - a'_{ij} \cdot \rho = 0, \\ \dots \\ x_r = b'_r - a'_{rj} \cdot \rho > 0. \end{cases}$$

При этом значение целевой функции $f(\bar{x}) = c'_0 - c'_j \cdot \rho < c'_0$. Таким образом, значение целевой функции уменьшилось (улучшилось). Следовательно, в новом базисном решении переменная x_j становится базисной переменной, а переменная x_i — свободной. Теперь за базисные переменные примем: $x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_r$. Это означает, что они, как и целевая функция, должны быть выражены через остальные. Для этого из i -го уравнения системы ограничений задачи (2.14)-(2.15) выражаем переменную x_j в виде:

$$x_j = \frac{b_i}{a_{ij}} - \left(\frac{a'_{ir+1}}{a_{ij}} \cdot x_{r+1} + \dots + \frac{x_i}{a_{ij}} + \dots + \frac{a'_{in}}{a_{ij}} \cdot x_n \right)$$

и, используя последнее выражение для переменной x_j , исключаем ее из системы ограничений и целевой функции задачи (2.14)–(2.15). За один шаг мы добились уменьшения значения целевой функции. Один коэффициент целевой функции задачи (2.14)–(2.15) стал меньше нуля. Далее данная процедура повторяется до тех пор, пока все коэффициенты целевой функции не станут отрицательными. При этом каждый раз получаем новое базисное решение, последнее полученное базисное решение будет оптимальным.

Не единственность оптимума. Если в оптимальном решении существует небазисная переменная, имеющая нулевую относительную оценку, то это означает, что изменение данной небазисной переменной не приведет к изменению значения целевой функции, несмотря на изменение других базисных переменных. Максимальное изменение небазисной переменной определяется также правилом минимального отношения. Таким образом, существует некоторое множество оптимальных решений, т.е. оптимальное решение не единственно.

Двухэтапный симплекс-метод

Возможность нахождения начального базисного решения из системы ограничений задачи ЛП представляет собой необходимое условие применимости симплекс-метода. Но не для любой задачи ЛП, записанной в канонической форме, удастся легко найти начальное базисное решение. Для получения системы ограничений задачи ЛП в каноническом виде, обладающей базисным решением, существует специальный **двухэтапный симплекс-метод (метод искусственного базиса)**.

Сначала задача ЛП приводится к канонической форме, в которой все переменные неотрицательные, ограничения имеют вид равенств, правые части – неотрицательные. Затем для каждого ограничения проверяется существование соответствующей базисной переменной. Если ее нет, вводится новая переменная, играющая роль базисной для данного ограничения.

После проверки всех ограничений получается система ограничений в ступенчатом виде, поскольку каждому ограничению соответствует своя базисная переменная, и появляется возможность выделения начального базисного решения. Вводимые таким образом переменные не имеют отношения к задаче ЛП в исходной постановке, а служат лишь для приведения системы ограничений к ступенчатому виду, который необходим при использовании симплекс-алгоритма.

Такие переменные называются искусственными в отличие от независимых переменных задачи. В оптимальном решении искусственные переменные должны обращаться в нуль, поскольку в противном случае ограничения задачи будут нарушены.

В случае введения искусственных переменных применяется **двухэтапный симплекс-метод**, т.е. исходная задача ЛП решается в два этапа.

Этап 1. На этом этапе находится начальное базисное решение исходной задачи ЛП. Другими словами, производится исключение искусственных переменных из системы ограничений. С этой целью вначале рассматривается и решается вспомогательная задача ЛП с искусственной целевой функцией, равной сумме искусственных переменных, которая минимизируется при помощи симплекс-метода. Целевая функция исходной задачи на этапе 1 участвует в симплекс-преобразованиях как обычное функциональное ограничение.

Если минимальное значение целевой функции вспомогательной задачи в ее решении равно нулю, то это означает, что все искусственные переменные в решении обращаются в нуль. Что в свою очередь означает, что все ограничения исходной задачи ЛП выполняются, то есть получено ее допустимое базисное решение. Далее реализуется этап 2.

Если минимальное значение целевой функции вспомогательной задачи положительно, то, по крайней мере, одна из искусственных переменных также положительна, что свидетельствует о противоречивости системы ограничений исходной задачи ЛП. В этом случае вычисления прекращаются с констатацией факта, что исходная задача ЛП решения не имеет.

Этап 2. На этом этапе допустимое базисное решение, найденное на этапе 1, улучшается в соответствии с целевой функцией исходной задачи ЛП согласно алгоритму симплекс-метода.

Пример. Реализацию вышеизложенного алгоритма **симплекс-метода** рассмотрим на примере решения следующей задачи:

$$\text{найти } \max (f(\bar{x}) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2) \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \text{при} \quad & x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 6 \\ & 2 \cdot x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Вначале запишем задачу (2.16)–(2.17) в канонической форме, добавив в левую часть каждого из ограничений неравенств по одной дополнительной переменной. В результате чего задача (2.16) – (2.17) примет вид:

$$\text{найти } \max (3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \text{при} \quad & x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 6, \\ & 2 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 8, \\ & -x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 1, \\ & x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 = 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Для решения задачи (2.18)–(2.19) применим обычный симплекс-метод, потому что из системы ограничений (2.19) сразу удастся выразить базисные переменные:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 6 - x_1 - 2 \cdot x_2, \\
x_4 &= 8 - 2 \cdot x_1 - x_2, \\
x_5 &= 1 + x_1 - x_2, \\
x_6 &= 2 - x_2.
\end{aligned}
\tag{2.20}$$

И далее найти начальное допустимое базисное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$, $x_4 = 8$, $x_5 = 1$, $x_6 = 2$. Значение целевой функции для этого базисного решения есть $f(\bar{x})=0$. Выясним, не является ли данное базисное решение оптимальным базисным решением. Для чего проанализируем выражение целевой функции задачи. Два коэффициента перед небазисными переменными в целевой функции задачи положительны, это свидетельствует о том, что данное базисное решение не оптимально. Среди этих коэффициентов наибольшим является коэффициент 3, стоящий перед небазисной переменной x_1 . Это означает, что в следующем базисном решении переменная x_1 должна быть в базисе. Теперь определим, какая из базисных переменных должна быть исключена из базиса. Для чего найдем в системе ограничений (2.19) ограничение, в котором отношение правой его части к положительному коэффициенту, стоящему перед x_1 , будет минимальным. Таким является ограничение $2 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 8$. Поскольку в нем базисной является переменная x_4 , то она будет исключена из базиса и вместо нее туда войдет переменная x_1 . Поэтому из уравнения $x_4 = 8 - 2 \cdot x_1 - x_2$, мы выражаем новую базисную переменную x_1 через небазисные и, подставив полученное для нее выражение в остальные уравнения (2.20), получаем выражения для базисных переменных в новом базисе:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 4 - 0,5 \cdot x_2 - 0,5 \cdot x_4, \\
x_3 &= 2 - 1,5 \cdot x_2 + 0,5 \cdot x_4, \\
x_5 &= 5 - 1,5 \cdot x_2 - 0,5 \cdot x_4, \\
x_6 &= 2 - x_2.
\end{aligned}
\tag{2.21}$$

Подставив выражение базисной переменной x_1 через небазисные в целевую функцию задачи, получим ее новое представление:

$$f(\bar{x})=12+0,5 \cdot x_2-0,5 \cdot x_4. \tag{2.22}$$

Мы получили новую систему базисных переменных и соответственно новое допустимое базисное решение: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 5$, $x_6 = 2$. Значение целевой функции для этого допустимого базисного решения есть $f(\bar{x})=12$. Как видим, это допустимое базисное решение лучше, чем предыдущее, потому что для него значение целевой функции задачи равно 12, а для предыдущего было всего лишь 0. Теперь нам нужно получить ответ на вопрос: а не является ли данное допустимое базисное решение оптимальным базисным решением? Ответ на этот вопрос ищем в выражении целевой функции задачи (2.22). Так как оно содержит еще один положительный коэффициент перед небазисными переменными, то оптимум не достигнут. Значит, существует другое допустимое базисное решение, которое обеспечит еще лучшее значение целевой функции задачи. При переходе к новому допустимому базисному решению небазисная переменная x_2 войдет в базис, по-

тому что перед ней стоит тот самый единственный положительный коэффициент, из-за которого текущее допустимое базисное решение было признано неоптимальным. Теперь нужно определиться с базисной переменной, которая должна быть выведена из базиса. Для этого из уравнений системы (2.21) мы определяем, до какого значения в каждом из них нужно увеличить небазисную переменную x_2 , чтобы базисная переменная данного уравнения приняла нулевое значение. В первом уравнении это значение есть 8, во втором уравнении 1,333; в третьем 3,333; в четвертом 2. Первой, при увеличении x_2 от 0 до значения 1,333 обращается в 0 базисная переменная x_3 , это означает, что она будет исключена из базиса. Выражаем новую базисную переменную x_2 из этого уравнения через небазисные, и, подставив это выражение вместо x_2 в выражения остальных базисных переменных, получаем выражения для базисных переменных в новом базисе:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3,333 + 0,333 \cdot x_3 - 0,667 \cdot x_4 \\ x_2 &= 1,333 - 0,667 \cdot x_3 + 0,333 \cdot x_4, \\ x_5 &= 3 + x_3 - x_4, \\ x_6 &= 0,667 + 0,667 \cdot x_3 - 0,333 \cdot x_4. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Подставив выражение базисной переменной x_2 через небазисные в целевую функцию задачи, получим для нее новое представление:

$$f(\bar{x}) = 12,667 - 0,333 \cdot x_3 - 0,333 \cdot x_4. \quad (2.24)$$

Мы получили новую систему базисных переменных и, соответственно, новое допустимое базисное решение: $x_1 = 3,333$; $x_2 = 1,333$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 3$; $x_6 = 0,667$. Значение целевой функции для этого допустимого базисного решения есть $f(\bar{x}) = 12,667$. Это допустимое базисное решение лучше, чем предыдущее, потому что для него значение целевой функции задачи равно 12,667; а для предыдущего было лишь 12. Теперь ищем ответ на вопрос: а не является ли данное допустимое базисное решение оптимальным базисным решением? И проанализировав выражение целевой функции (2.24) получаем на него положительный ответ (все коэффициенты перед небазисными переменными отрицательны).

Таким образом, в результате реализации алгоритма симплекс-метода получено следующее решение задачи (2.16)–(2.17): максимальное значение целевой функции, равное $f_{max} = 12,667$, достигается при значениях переменных $x_1 = 3,333$ и $x_2 = 1,333$.

Рассмотрим вариант реализации алгоритма **симплекс-метода** решения задачи (2.16)–(2.17) с использованием симплекс-таблиц. Первая симплекс-таблица задачи будет иметь вид:

№	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B_i
1	x_3	1	2	1	0	0	0	6
2	x_4	2	1	0	1	0	0	8
3	x_5	-1	1	0	0	1	0	1
4	x_6	0	1	0	0	0	1	2
		3	2	0	0	0	0	$-f = 0$

Каждой симплекс-таблице соответствует свое допустимое базисное решение, оно получается следующим образом: значения небазисных переменных берутся равными нулю, а значения базисных переменных равняются правым частям ограничений. Допустимое базисное решение, соответствующее первой симплекс-таблице, есть: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$, $x_4 = 8$, $x_5 = 1$, $x_6 = 2$. Значение целевой функции для этого базисного решения есть $f(\bar{x})=0$. Выясним, не является ли данное допустимое базисное решение оптимальным базисным решением, для чего проанализируем строку коэффициентов целевой функции задачи. Два коэффициента перед небазисными переменными в строке коэффициентов целевой функции задачи положительны, это свидетельствует о том, что данное допустимое базисное решение не оптимально. Среди этих коэффициентов наибольшим является коэффициент 3, стоящий в столбце небазисной переменной x_1 . Это означает, что в следующей симплекс-таблице переменную x_1 необходимо ввести в базис. Теперь определим, какая из базисных переменных должна быть исключена из базиса. Для этого найдем минимум отношений правых частей ограничений к положительным коэффициентам, стоящим в столбце переменной, входящей в базис:

$$\min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{B_i}{a_{ij}} \right\} = \min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{6}{1}, \frac{8}{2} \right\} = 4.$$

Минимальное отношение находится в строке второго ограничения, в которой базисной является переменная x_4 , значит, из базиса должна быть исключена эта переменная. В симплекс-таблице жирными линиями выделена клетка, в которой находится ведущий элемент. Эта клетка находится на пересечении столбца, в ней стоит небазисная переменная, входящая в базис, и строки базисной переменной, исключаемой из базиса. Проводим симплекс преобразования над первой симплекс-таблицей и получаем вторую симплекс-таблицу. В новой симплекс-таблице первой заполняем вторую строку. Она получается после следующих преобразований второй строки первой симплекс-таблицы: базисная переменная x_4 заменяется на переменную x_1 и вся строка делится на 2, поскольку в столбце базисной переменной x_1 в этой строке должна стоять 1. Остальные строки второй симплекс-таблицы заполняются следующим образом: базисные переменные в них остаются теми же самыми, а коэффициенты в остальных столбцах получаются путем вычитания из коэффициента данной строки первой симплекс-таблицы коэффициента рабочей строки (на данном шаге реализации алгоритма симплекс-метода вторая строка) второй симплекс-таблицы, умноженного на коэффициент, стоящий в столбце базисной переменной данной строки первой симплекс-таблицы. После выполнения симплекс преобразований и заполнения всех ее строк вторая симплекс-таблица приобретает вид:

№	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B_i
1	x_3	0	3/2	1	-1/2	0	0	2
2	x_1	1	1/2	0	1/2	0	0	4

3	x_5	0	3/2	0	1/2	1	0	5
4	x_6	0	1	0	0	0	1	2
		0	1/2	0	-3/2	0	0	$-f = -12$

Допустимое базисное решение, соответствующее второй симплекс-таблице, есть: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 5$, $x_6 = 2$. Значение целевой функции для этого базисного решения есть $f(\bar{x})=12$. Выясним, не является ли данное допустимое базисное решение оптимальным базисным решением. Для чего проанализируем строку коэффициентов целевой функции задачи. Коэффициент перед небазисной переменной x_2 в строке коэффициентов целевой функции задачи положителен, это свидетельствует о том, что данное допустимое базисное решение не оптимально. Это означает, что в следующей симплекс-таблице переменная x_2 должна быть в базисе. Теперь определим, какая из базисных переменных должна быть исключена из базиса. Для этого находим минимум отношений:

$$\min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{B_i}{a_{ij}} \right\} = \min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{2}{3/2}, \frac{4}{1/2}, \frac{5}{3/2}, \frac{2}{1} \right\} = \frac{4}{3}.$$

Минимальное отношение находится в строке первого ограничения, в этой строке базисной является переменная x_3 , значит, из базиса должна быть исключена эта переменная. С учетом этого проводим симплекс-преобразования (как они проводятся подробно расписано для первой симплекс-таблицы, поэтому для второй симплекс-таблицы их приводить не будем) над второй симплекс-таблицей и получаем третью симплекс-таблицу:

№	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B_i
1	x_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
2	x_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
3	x_5	0	0	-1	1	1	0	3
4	x_6	0	0	-2/3	1/3	0	0	2/3
		0	0	-1/3	-4/3	0	0	$-f = -38/3$

Допустимое базисное решение, соответствующее третьей симплекс-таблице, есть: $x_1 = 10/3$, $x_2 = 4/3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3$, $x_6 = 2/3$. Значение целевой функции для этого базисного решения есть $f(\bar{x})=38/3=12,667$. Выясним, не является ли данное допустимое базисное решение оптимальным базисным решением. Для чего проанализируем строку коэффициентов целевой функции задачи. В строке коэффициентов целевой функции задачи стоят только нулевые и отрицательные коэффициенты, а это значит, что данное допустимое базисное решение является оптимальным базисным решением.

В результате реализации алгоритма симплекс-метода с помощью таблиц получено следующее решение задачи: $x_1 = 10/3 = 3,333$; $x_2 = 4/3 = 1,333$, для которого значение целевой функции есть: $f_{\max} = 38/3 = 12,667$.

Пример. Рассмотрим решение двухэтапным симплекс-методом следующей задачи ЛП:

$$\text{Найти } \min (g(\bar{y}) = 6 \cdot y_1 + 8 \cdot y_2 + y_3 + 2 \cdot y_4), \quad (2.25)$$

$$\text{при } y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 3, \quad (2.26)$$

$$2 \cdot y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0.$$

Запишем задачу (2.25) – (2.26) в канонической форме, которая будет иметь следующий вид:

$$\text{Найти } \min (6 \cdot y_1 + 8 \cdot y_2 + y_3 + 2 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6), \quad (2.27)$$

$$\text{при: } y_1 + 2 \cdot y_2 - y_3 + 0 \cdot y_4 - y_5 + 0 \cdot y_6 = 3,$$

$$2 \cdot y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 0 \cdot y_5 - y_6 = 2, \quad (2.28)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0.$$

В задаче (2.27) – (2.28) сразу не удастся выделить систему базисных переменных, то есть найти начальное базисное решение. Выражения для переменных y_5 и y_6 , как базисных, полученные из уравнений (2.28), определяются следующим образом:

$$y_5 = y_1 + 2 \cdot y_2 - y_3 - 3,$$

$$y_6 = 2 \cdot y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 2.$$

При этом их значения становятся $y_5 = -3$, $y_6 = -2$ для значений небазисных переменных $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$. А эти значения не удовлетворяют условиям задачи (2.27)–(2.28), то есть из ограничений задачи (2.28) нам не удастся выразить базисные переменные и найти первоначальное допустимое базисное решение исходной задачи. Поэтому для нахождения первоначального допустимого базисного решения задачи (2.27)–(2.28) вначале придется решить вспомогательную задачу. Вспомогательная задача будет заключаться в минимизации суммы искусственных переменных y_7 и y_8 , которые придется добавить по одной в каждое из ограничений (2.28). Математически вспомогательная задача запишется в виде:

$$\text{Найти } \min (w(\bar{y}) = y_7 + y_8), \quad (2.29)$$

$$\text{при } y_1 + 2 \cdot y_2 - y_3 + 0 \cdot y_4 - y_5 + 0 \cdot y_6 + y_7 + 0 \cdot y_8 = 3,$$

$$2 \cdot y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 0 \cdot y_5 - y_6 + 0 \cdot y_7 + y_8 = 2, \quad (2.30)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0, y_7 \geq 0, y_8 \geq 0.$$

Решим вспомогательную задачу (2.29)–(2.30) двухэтапным симплекс-методом с помощью таблиц. При решении вспомогательной задачи целевая функция задачи (2.27)–(2.28) будет участвовать в преобразованиях как обычное ограничение. Вспомогательная задача считается успешно решенной, если ее целевая функция после решения равна нулю $w = 0$. Если решение вспомогательной задачи закончено со значением целевой функции большим нуля, то это означает, что исходная задача ЛП решения не имеет. После успешного окончания решения вспомогательной задачи искусственные переменные исключаются из ограничений и целевой функции задачи (2.27)–(2.28). Успешное решение вспомогательной задачи свидетельствует о том, что нами найдено первоначальное допустимое базисное решение для задачи (2.27)–(2.28).

Далее нужно продолжать решать задачу (2.27)–(2.28) симплекс-методом. Проиллюстрируем вышеописанный алгоритм на примере решения задачи (2.27)–(2.28). Первая симплекс-таблица для нее имеет следующий вид:

№	Базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	B_i
1	y_7	1	2	-1	0	-1	0	1	0	3
2	y_8	2	1	1	1	0	-1	0	1	2
		6	8	1	2	0	0	0	0	$-g = 0$
		-3	-3	0	-1	1	1	0	0	$-w = -5$

Первой симплекс-таблице соответствует первоначальное допустимое базисное решение: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0$, $y_6 = 0$, $y_7 = 3$, $y_8 = 2$. Оно еще не является оптимальным, поскольку в строке коэффициентов целевой функции вспомогательной задачи находятся три отрицательных коэффициента. Среди отрицательных коэффициентов наименьшими являются два коэффициента -3 и -3, стоящие в столбцах небазисных переменных y_1 и y_2 , поэтому в базис можно включить любую из них. Включим в базис небазисную переменную y_1 . Далее определим, какая из базисных переменных должна быть из нее выведена. Для этого находим минимум отношений:

$$\min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{B_i}{a_{ij}} \right\} = \min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{3}{1}, \frac{2}{2} \right\} = 1.$$

Минимальное отношение находится в строке второго ограничения, в ней базисной является переменная y_8 , значит, из базиса должна быть исключена эта переменная. С учетом этого проводим симплекс-преобразования над первой симплекс-таблицей и получаем вторую симплекс-таблицу:

№	Базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	B_i
1	y_7	0	3/2	-3/2	-1/2	-1	1/2	1	-1/2	2
2	y_1	1	1/2	1/2	1/2	0	-1/2	0	1/2	1
		0	5	-2	-1	0	3	0	-3	$-g = -6$
		0	-3/2	3/2	1/2	1	-1/2	0	3/2	$-w = -2$

Второй симплекс-таблице соответствует допустимое базисное решение: $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0$, $y_6 = 0$, $y_7 = 2$, $y_8 = 0$. Оно не является оптимальным, поскольку в строке коэффициентов целевой функции вспомогательной задачи находятся два отрицательных коэффициента. Среди отрицательных коэффициентов наименьшим является коэффициент -3/2, стоящий в столбце небазисной переменной y_2 , поэтому в базис должна быть включена она. Затем определим, какая из базисных переменных должна быть из базиса выведена. Для этого находим минимум отношений:

$$\min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{B_i}{a_{ij}} \right\} = \min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{2}{3/2}, \frac{1}{1/2} \right\} = 4/3 = 1,333.$$

Минимальное отношение находится в строке первого ограничения, в ней базисной является переменная y_7 , значит, из базиса должна быть исклю-

чена эта переменная. С учетом этого проводим симплекс-преобразования над второй симплекс-таблицей и получаем третью симплекс-таблицу:

№	Базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	B_i
1	y_2	0	1	-1	-1/3	-2/3	1/3	2/3	-1/3	4/3
2	y_1	1	0	-1/3	2/3	1/3	-2/3	-1/3	2/3	1/3
		0	0	3	2/3	10/3	4/3	-10/3	-4/3	-g = - 38/3
		0	0	0	0	0	0	1	1	-w = 0

Решение вспомогательной задачи найдено, так как в строке коэффициентов целевой функции этой задачи, решаемой на минимум, находятся только нулевые и положительные коэффициенты. Причем, решение вспомогательной задачи завершено успешно, так как $w = 0$. Теперь из последней симплекс-таблицы убираем столбцы искусственных переменных y_7 и y_8 , а также строку целевой функции вспомогательной задачи, после чего она примет вид:

№	Базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	B
1	y_2	0	1	-1	-1/3	-2/3	1/3	4/3
2	y_1	1	0	-1/3	2/3	1/3	-2/3	1/3
		0	0	3	2/3	10/3	4/3	-g = - 38/3

Эта симплекс-таблица является первой в процессе решения симплекс-методом исходной задачи (2.27)–(2.28). Но как видно из этой симплекс - таблицы, решение исходной задачи (2.27)–(2.28) уже найдено, так как в строке коэффициентов целевой функции стоят только положительные и нулевые коэффициенты. Таким образом, допустимое базисное решение данной симплекс-таблицы: $y_1 = 1/3 = 0,333$; $y_2 = 4/3 = 1,333$; $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0$, $y_6 = 0$ является решением задачи, при этом оптимальное значение целевой функции задачи есть $g = 38/3 = 12,667$.

Пример. Проиллюстрируем процесс решения задач ЛП симплекс-методом с помощью табличного процессора **Excel** на примере следующей задачи:

$$\text{Найти } \max (f(\bar{x}) = 240 \cdot x_1 + 210 \cdot x_2 + 180 \cdot x_3)$$

$$\text{при } \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 3120 \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 \leq 3000 \\ 6x_1 + 9x_2 + 4x_3 \leq 3150 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Один из возможных вариантов размещения исходных данных задачи на рабочем листе табличного процессора **Excel** показан на рис. 9.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2	Имя	Прод1	Прод2	Прод3			
3	Перем.	X_1	X_2	X_3			
4	Значение	0	0	0			
5	Нижн. гр.	0	0	0			
6	Прибыль	240	210	180	=суммпроизв (B\$4:D\$4;B\$6: D\$6)	Макс	
7		Ограничения					
8	Вид				Левая часть	знак	Объем
9	Комп. изд.	4	6	8	=суммпроизв (B\$4:D\$4;B9:D 9)	<=	3120
10	Сырье	2	8	10	=суммпроизв (B\$4:D\$4;B10: D10)	<=	3000
11	мате- риалы	6	9	4	=суммпроизв (B\$4:D\$4;B11: D11)	<=	3150

Рис. 9

Функция **СУММПРОИЗВ** в 6, 9, 10 и 11-й строках занесена с помощью кнопки f_x – **Мастер функций**.

После внесения исходных данных задачи в таблицу **Excel** входим в пункт главного меню **Данные** и в правом верхнем углу выбираем надстройку **Поиск решения** (в случае, когда она активизирована; если же она не активизирована, ее предварительно нужно активизировать). Щелкаем левой кнопкой мыши по ней и в появившемся диалоговом окне рис. 10 вводим в соответствующие окошечки исходные данные задачи: адрес ячейки E6, в которую занесено выражение целевой функции, направление оптимизации – максимизация, адреса ячеек B4:D4, в которые записаны начальные значения параметров оптимизации; адреса ячеек E9:E11 и G9:G11, в которые записаны формулы в левых и правых частях ограничений задачи.

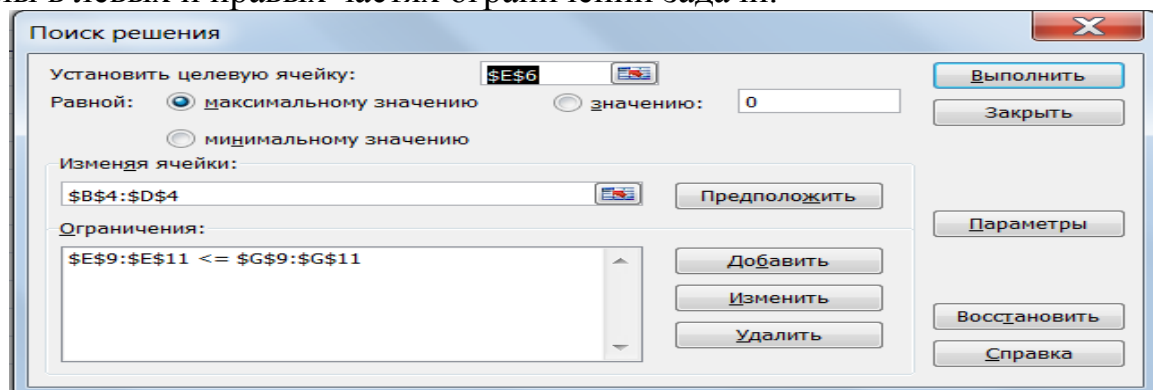


Рис. 10

Далее щелкаем левой кнопкой мыши по пункту «Параметры» и в появившемся диалоговом окне (рис. 11) устанавливаем флажки «Линейная модель», «Неотрицательные значения» и, щелкнув один раз левой кнопкой мыши по пункту «ОК», возвращаемся в предыдущее диалоговое окно. Щелкаем в нем левой кнопкой мыши по пункту «Выполнить» и получаем решение задачи, которое приведено на рис. 12.

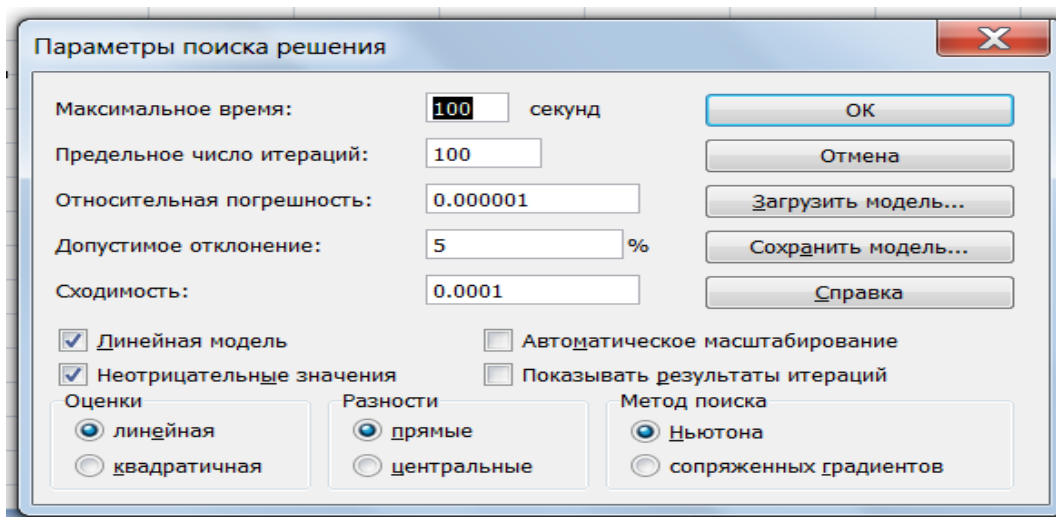


Рис. 11

	A	B	C	D	E	F	G
1	Переменные						
2	Имя	Прод1	Прод2	Прод3			
3	Переем.	X_1	X_2	X_3			
4	Значение	397,5	0	191,25			
5	Нижн.гр.	0	0	0			
6	Прибыль	240	210	180	129825	Макс	
7	Ограничения						
8	Вид				Левая часть	знак	Объем
9	Комп.изд.	4	6	8	3120	\leq	3120
10	Сырье	2	8	10	2707,50	\leq	3000
11	Материалы	6	9	4	3150	\leq	3150

Рис. 12

Как видно из данных рис. 12, получено следующее решение задачи: $x_1 = 397,5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 191,25$, при этом наибольшее значение целевой функции задачи есть: $f_{\max} = 129825$.

2.3. Взаимно двойственные задачи линейного программирования и их применение для определения интервалов устойчивости двойственных оценок

Каждой задаче ЛП можно поставить в соответствие другую задачу ЛП, сформулированную по определенным правилам таким образом, что решение одной из этих задач является решением другой задачи. Такие задачи называются взаимно двойственными или парой двойственных задач.

В зависимости от вида исходной задачи ЛП различают симметричные, несимметричные и смешанные взаимно двойственные задачи ЛП.

Разновидностью двойственных задач ЛП являются взаимно двойственные симметричные задачи. В этих задачах как прямой, так и двойственной системы ограничений задаются с помощью неравенств, при этом на переменные обеих задач накладываются условия не отрицательности. Взаимно двойственные симметричные задачи формируются по следующим правилам [8]:

1. Если прямая задача решается на максимум, то двойственная к ней – на минимум, и наоборот.

2. Коэффициенты c_j целевой функции прямой задачи являются свободными членами ограничений двойственной задачи.

3. Свободные члены b_i ограничений прямой задачи являются коэффициентами перед соответствующими переменными в целевой функции двойственной задачи.

4. Матрицы ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными друг к другу.

5. Если прямая задача решается на максимум, то ее система ограничений представляется в виде неравенств типа \leq . Двойственная задача решается на минимум, и ее система ограничений имеет вид неравенств типа \geq , и наоборот.

6. Число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной, а число ограничений двойственной – числу переменных прямой.

7. Все переменные в обеих задачах неотрицательны.

Математически взаимно двойственные симметричные задачи записываются следующим образом:

Прямая задача:

$$\text{Найти } \max (\min) (Z(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i),$$

$$\text{при: } \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i \leq (\geq) b_j, \quad j = \overline{1, m};$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n};$$

Двойственная задача:

$$\text{Найти } \min (\max) (U(\bar{y}) = \sum_{j=1}^m b_j \cdot y_j),$$

$$\text{при: } \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot y_j \geq (\leq) c_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.31)$$

$$y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Пара взаимно двойственных задач ЛП называется несимметричной, если одна из них записана в стандартной форме и переменные являются неот-

рицательными, а другая задана в нестандартной форме и переменные в ней произвольны по знаку.

Если прямая задача ЛП записана в канонической форме, то переменные в двойственной ей задаче произвольны по знаку и ограничения двойственной задачи имеют вид неравенств со знаком \geq , в случае, когда она решается на *min*, и ограничения имеют вид неравенств со знаком \leq , если она решается на *max*. Далее построение двойственной задачи осуществляется по тем же правилам, как и симметричной пары задач.

Математические формулировки взаимно двойственных задач ЛП в случае несимметричной их постановки следующие:

Первый вариант:

Прямая задача:

$$\text{Найти } \min (\max) (Z(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i)$$

$$\text{при: } \sum_{j=1}^m a_{ji} \cdot x_j = b_i, \quad j = \overline{1, m};$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n};$$

Двойственная задача:

$$\text{Найти } \max (\min) (U(\bar{y}) = \sum_{j=1}^m b_j \cdot y_j)$$

$$\text{при: } \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot y_j \leq (\geq) c_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.32)$$

$$y_j \geq 0 \text{ или } y_j \leq 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Второй вариант:

Прямая задача:

$$\text{Найти } \min (\max) (Z(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i)$$

$$\text{при: } \sum_{j=1}^m a_{ji} \cdot x_j \geq (\leq) b_i, \quad j = \overline{1, m};$$

$$x_i \geq 0 \text{ или } x_i \leq 0, \quad i = \overline{1, n};$$

Двойственная задача:

$$\text{Найти } \max (\min) (U(\bar{y}) = \sum_{j=1}^m b_j \cdot y_j)$$

$$\text{при: } \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot y_j = c_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.33)$$

$$y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Когда система ограничений одной из задач ЛП содержит как уравнения, так и неравенства, и некоторые ее переменные отрицательны, пара взаимно двойственных задач называется смешанной.

При построении двойственной задачи в смешанной паре придерживаются следующих правил. Если переменная в двойственной задаче поставлена в соответствие ограничению-неравенству прямой задачи, то она должна быть неотрицательной, если уравнению – то произвольная по знаку. Если переменная в исходной задаче неотрицательная, то ей ставится в соответствие в двойственной задаче ограничение-неравенство; если переменная произвольная по знаку, то ей ставится в соответствие ограничение-уравнение. Остальные правила построения двойственной задачи такие же, как и в случае симметричной пары.

Математическая формулировка взаимно двойственных задач ЛП в случае смешанной их постановки следующая:

Прямая задача:

$$\text{Найти } \min (\max) (Z(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i),$$

$$\text{при: } \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i \geq (\leq) b_j, j = \overline{1, k};$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i = b_j, j = \overline{k+1, m};$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, p}, p \leq n;$$

Двойственная задача:

$$\text{Найти } \max (\min) (U(\bar{y}) = \sum_{j=1}^m b_j \cdot y_j),$$

$$\text{при: } \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot y_j \leq (\geq) c_i, i = \overline{1, p};$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot y_j = c_i, i = \overline{p+1, n};$$

$$y_j \geq 0, j = \overline{1, k}, k \leq m.$$

\Leftrightarrow

(2.34)

Для взаимно двойственных задач ЛП справедливы следующие две теоремы [8]:

Теорема 2.1 (первая теорема двойственности): Если прямая задача ЛП имеет решение, то и двойственная также имеет решение, причем оптимальные значения критериев совпадают: $\max (\min) Z(\bar{x}^*) = \min (\max) U(\bar{y}^*)$. Здесь $\bar{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ – вектор-столбец, удовлетворяющий системе ограничений прямых задач (2.31)-(2.34) и обеспечивающий оптимум целевой функции $Z(\bar{x})$; $\bar{y}^* = [y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*]^T$ – вектор-столбец, удовлетворяющий системе ограничений двойственных задач (2.31)-(2.34) и обеспечивающий оптимум целевой функции $U(\bar{y})$.

Теорема 2.2 (вторая теорема двойственности): Для того чтобы прямая и двойственная задачи были разрешимы, достаточно, чтобы их многогранники решений содержали хотя бы по одной точке.

Применение взаимно двойственных задач особенно эффективно при анализе моделей на чувствительность. Решение двойственной задачи целесообразно при $m \gg n$, или когда условие типа $x_i \geq 0$ выполняется не для всех переменных в прямой задаче. При этом между переменными **прямой** и **двойственной** задач имеется следующее соответствие:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & \dots & x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_{m+1} & \dots & y_{n+m} & y_1 & \dots & y_m \end{array} \quad (2.34^*)$$

Как составляются двойственные симметричные задачи, рассмотрим на примере следующей задачи.

Прямая (исходная) задача: предприятие собирается наладить выпуск n видов продукции из m видов сырьевых ресурсов. Запасы сырьевых ресурсов каждого вида составляют b_i единиц ($i = \overline{1, \dots, m}$). Предполагаемые расходы каждого вида сырьевых ресурсов, которые будут затрачены на выпуск единицы каждого вида продукции, составляют a_{ij} единиц ($i = \overline{1, \dots, m}; j = \overline{1, \dots, n}$). Маркетинговое исследование рынка показало, что вся произведенная предприятием продукция будет пользоваться спросом. Ожидаемая прибыль от реализации единицы каждого вида произведенной предприятием продукции составляет c_j единиц ($j = \overline{1, \dots, n}$). Требуется найти такой план выпуска

предприятием n видов продукции из m видов сырьевых ресурсов, чтобы суммарная прибыль от реализации произведенной продукции была наибольшей.

$$Z(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_i \cdot x_i + \dots + c_n \cdot x_n. \quad (2.35)$$

1) расход сырья i -го вида на выпуск суммарного объема продукции всех n видов не должен превышать его запасов b_i . Эти условия в математической форме выражаются системой линейных неравенств:

2) объем выпущенной продукции не может быть отрицательной величиной, т.е. переменные x_i должны быть неотрицательными:

Следовательно, математическая формулировка прямой задачи следующая: найти вектор-столбец $\bar{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$, удовлетворяющий системе ограничений (2.36)–(2.37) и обеспечивающий максимум целевой функции $Z(\bar{x})$ (2.35).

1) общая оценка (условная стоимость) имеющегося количества сырья всех видов должна быть наименьшей:

2) суммарная оценка всех видов сырья, расходуемого на выпуск единицы продукции любого вида, должна быть не ниже прибыли от реализации единицы продукции данного вида. В противном случае предприятие откажется от выпуска данного вида продукции. Математически эти требования выражаются следующей системой n линейных неравенств:

[illegible]

3) оценки y_i должны быть неотрицательными:

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.40)$$

Таким образом, математическая формулировка двойственной задачи следующая: найти такой вектор-столбец $\bar{y}^* = [y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*]^T$, удовлетворяющий системе ограничений (2.39)–(2.40) и обеспечивающий минимум функции $U(\bar{y})$ (2.38).

Между решениями прямой (2.35)–(2.37) и двойственной (2.38)–(2.40) задач имеется ряд важных соотношений, полезных при исследовании общих свойств оптимального решения задачи ЛП и проверки оптимальности допустимого решения. Кроме соотношений, установленных в теоремах 2.1 и 2.2, справедливы еще следующие соотношения:

1) Положительную оценку имеют лишь те виды сырья, которые полностью используются в оптимальном плане:

если $y_i^* > 0$ то $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i, i = \overline{1, m}$.

2) Двойственные оценки характеризуют дефицитность используемого сырья. Наибольшей оценке соответствует наиболее дефицитное сырье.

3) Если данный вид продукции вошел в оптимальный план, то оценка ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции, равна прибыли от ее реализации и производство его рентабельно:

если $x_j > 0$, то $\sum_{i=1}^m a_{ji} y_i = c_j$, $j = \overline{1, n}$.

4) Если $x_j = 0$, то в двойственной задаче j -ое ограничение выполняется как неравенство. Суммарная оценка ресурсов, затрачиваемых на выпуск единицы этой продукции, выше прибыли от ее реализации. Производство данного вида продукции убыточно.

Величина двойственной оценки y_i^* в оптимальном решении двойственной задачи численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего свободного члена b_i системы ограничений прямой задачи на единицу:

$$\frac{\partial Z(x^*)}{\partial b_i} = y_i^*$$

При одновременном изменении ресурсов всех видов на величину Δb_i можно оценить их суммарное влияние на изменение значения целевой функции при условии неизменности двойственных оценок:

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^m \Delta b_i \cdot y_i$$

Таким образом, экономические свойства оценок y_i^* оптимального плана следующие:

- мера дефицитности ресурсов и продукции;
- мера влияния ограничений на целевую функцию;
- инструмент определения эффективности отдельных вариантов.

Двойственные оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов, тем самым гарантируя рентабельность оптимального плана.

Реализацию вышеизложенного подхода для построения двойственной задачи по прямой и применения ее для анализа моделей на чувствительность, рассмотрим на следующем примере.

Пример. Предприятие выпускает два вида продукции: P_1 и P_2 . Для их изготовления используются три типа сырья, запасы которых ограничены и составляют соответственно: $b_1 = 580$, $b_2 = 680$, $b_3 = 430$ условных единиц. Известны затраты каждого типа сырья на производство единицы каждого вида продукции a_{ij} , где i – порядковый номер сырья, j – порядковый номер продукции, $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, 2}$. Значения a_{ij} приведены в нижеследующей матрице:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить план производства этих двух видов продукции с целью получения максимальной прибыли, если известна прибыль от реализации единицы каждого вида готовой продукции $c_1 = 30$, $c_2 = 40$.

Построим математическую модель задачи. Пусть x_1 , x_2 – количество выпускаемой продукции вида P_1 и P_2 , соответственно. Тогда затраты сырья первого типа на производство продукции запишутся в виде: $2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$, второго типа в виде: $4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$, третьего типа в виде: $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$. Эти затраты не должны превышать имеющихся запасов сырьевых ресурсов соответствующего типа. Запишем эти требования в виде следующих ограничений:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 580, \\ 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 680, \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 430. \end{cases} \quad (2.41)$$

Суммарная прибыль от реализации произведенной продукции, которая определяется выражением $30 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2$, должна быть наибольшей:

$$f(x_1, x_2) = 30 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 \rightarrow \max. \quad (2.42)$$

Для решения задачи (2.41)–(2.42) симплекс-методом приведем ее к каноническому виду. Для этого ограничения типа неравенства приведем к ограничениям типа равенства путем добавления дополнительных переменных $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$. Дополнительные переменные выражают количество сырья соответствующего типа, которое может остаться в производстве не использованным в излишках:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_3 = 580, \\ 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 = 680, \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_5 = 430. \end{cases} \quad (2.43)$$

Из постановки задачи вытекает условие не отрицательности всех переменных: $x_i \geq 0, i = \overline{1, 5}$. Целевая функция задачи (2.41)–(2.42), приведенной к канонической форме, примет вид:

$$f(\bar{x}) = 30 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max. \quad (2.44)$$

Определяем количество базисных переменных. Количество базисных переменных равно числу линейно независимых уравнений в системе. Каждая базисная переменная входит только в одно уравнение системы с коэффициентом 1. В целевой функции базисные переменные отсутствуют. Если ограничения заданной системы до приведения ее к каноническому виду имели вид неравенств \leq , то в качестве первоначальных базисных переменных выбираются дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 . В других случаях, когда в задаче присутствуют ограничения типа \geq и $=$ для определения первоначального базиса приходится формулировать и решать вспомогательную задачу. Как это осуществляется подробно, описано в разделе 2.2 настоящего учебного пособия.

Решим задачу (2.43)–(2.44) симплекс методом с использованием симплекс-таблиц. Первая симплекс-таблица задачи будет иметь вид:

№	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B_i
1	x_3	2	4	1	0	0	580
2	x_4	4	4	0	1	0	680
3	x_5	3	2	0	0	1	430
		30	40	0	0	0	$-f = 0$

Базисное решение, соответствующее первой симплекс-таблице, есть: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 580, x_4 = 680, x_5 = 430$. Значение целевой функции для этого базисного решения есть: $f(\bar{x}) = 0$. Выясним, не является ли данное базисное решение оптимальным базисным решением. Для чего проанализируем строку коэффициентов целевой функции задачи. Два коэффициента перед небазисными переменными в строке коэффициентов целевой функции задачи положительны, это свидетельствует о том, что данное базисное решение не оптимально. Среди этих коэффициентов наибольшим является коэффициент 40, стоящий в столбце небазисной переменной x_2 . Это означает, что в следую-

шей симплекс-таблице переменная x_2 должна быть в базисе. Теперь определим, какая из базисных переменных должна быть исключена из базиса. Для этого находим минимум отношений правых частей ограничений к положительным коэффициентам, стоящим в столбце переменной, входящей в базис:

$$\min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{B_i}{a_{ij}} \right\} = \min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{580}{4}, \frac{680}{4}, \frac{430}{2} \right\} = \min_{a_{ij} > 0} \{145, 170, 215\} = 145.$$

Минимальное отношение, равное 145, находится в строке первого ограничения, в которой базисной является переменная x_3 , значит, из базиса должна быть исключена эта переменная. Проводим симплекс-преобразования над первой симплекс-таблицей и получаем вторую симплекс-таблицу, которая имеет вид:

№	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B_i
1	x_2	$1/2$	1	$1/4$	0	0	145
2	x_4	2	0	-1	1	0	100
3	x_5	2	0	$-1/2$	0	1	140
		10	0	-10	0	0	$-f = -5800$

Базисное решение соответствующее второй симплекс-таблице есть: $x_1 = 0$, $x_2 = 145$, $x_3 = 0$, $x_4 = 100$, $x_5 = 140$. Значение целевой функции для этого базисного решения есть $f(\bar{x}) = 5800$. Данное базисное решение оптимальным базисным решением не является, поскольку коэффициент перед небазисной переменной x_1 в строке коэффициентов целевой функции задачи положителен. Это означает, что в следующей симплекс-таблице переменная x_1 должна быть в базисе. Теперь определим, какая из базисных переменных должна быть исключена из базиса. Для этого находим минимум отношений правых частей ограничений к положительным коэффициентам, стоящим в столбце переменной x_1 , входящей в базис:

$$\min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{B_i}{a_{ij}} \right\} = \min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{145}{1/2}, \frac{100}{2}, \frac{140}{2} \right\} = 50.$$

Минимальное отношение, равное 50, находится в строке второго ограничения, в которой базисной является переменная x_4 , значит, из базиса должна быть исключена эта переменная. Проводим симплекс-преобразования над второй симплекс-таблицей и получаем третью симплекс-таблицу, которая имеет вид:

№	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B_i
1	x_2	0	1	$1/2$	$-1/4$	0	120
2	x_1	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	50
3	x_5	0	0	$1/2$	-1	1	40
		0	0	-5	-5	0	$-f = -6300$

Базисное решение соответствующее третьей симплекс-таблице есть: $x_1 = 50$, $x_2 = 120$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 40$. Значение целевой функции для этого базисного решения есть $f(\bar{x}) = 6300$. Данное базисное решение является опти-

мальным базисным решением, поскольку в строке целевой функции задачи стоят только нулевые и отрицательные коэффициенты.

Таким образом, оптимальный план выпуска двух видов продукции следующий: $x_1 = 50$, $x_2 = 120$. При этом максимальная прибыль составляет $f_{max} = 6300$. Значения переменных x_3 , и x_4 равны нулю, т.е. сырье первого и второго типов полностью израсходованы. Сырье третьего типа оказалось не израсходованным полностью, в остатке $x_5 = 40$.

Составим задачу, взаимно двойственную к рассмотренной. Для этого припишем единице каждого i -го типа сырья оценку y_i ($i = \overline{1, 3}$). Эти оценки должны удовлетворять следующим условиям:

1) Суммарная оценка общего количества всех типов сырья, используемых в производстве должна быть минимальной:

$$g(\bar{y}) = 580 \cdot y_1 + 680 \cdot y_2 + 430 \cdot y_3 \rightarrow \min. \quad (2.45)$$

2) Суммарная оценка всех типов сырья, расходуемых на выпуск единицы продукции любого вида, должна быть не ниже прибыли от реализации единицы продукции данного вида. В противном случае предприятие откажется от выпуска данного вида продукции. Оценка сырья – это количество прибыли, которую можно получить с единицы сырья. Математически ограничения двойственной задачи запишутся в следующем виде:

$$\begin{cases} 2 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \geq 30, \\ 4 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \geq 40. \end{cases} \quad (2.46)$$

3) Оценки $y_i \geq 0, i = \overline{1, 3}$.

Для получения решений взаимно двойственных задач можно решить только одну из них и из ее решения найти решение другой. Мы решили прямую задачу, теперь из ее решения определим решение двойственной задачи. Решение двойственной задачи находится в строке коэффициентов целевой функции последней симплекс-таблицы, согласно соответствию (2.34*) в столбцах, соответствующих свободным переменным x_3, x_4, x_5 . Таким образом, значения двойственных оценок, при которых достигается решение двойственной задачи, равны: $y_1 = 5$, $y_2 = 5$, $y_3 = 0$. Минимальная условная оценка стоимости запасов всех видов сырья составляет: $g_{min} = 6300$.

Далее, используя решение прямой задачи, определим интервалы устойчивости двойственных оценок к изменению запасов сырья.

Если \bar{x}^* – оптимальный план прямой задачи, то справедливо равенство [8]:

$$\bar{x}^* = R^{-1} \cdot \bar{B},$$

здесь R^{-1} – подматрица из последней симплекс-таблицы с оптимальным решением (обратная матрица, квадратная) прямой задачи, \bar{B} – вектор-столбец запасов сырья. Столбцы подматрицы R^{-1} располагаются на местах столбцов единичной матрицы первоначального базиса.

Номенклатура выпускаемой продукции сохранится, если $\bar{x}^* > 0$. Поэтому двойственные оценки различных типов сырья, т.е. значения $y_i (i=\overline{1,m})$, обеспечивающие оптимальное значение целевой функции двойственной задачи, будут устойчивы к изменению запасов ресурсов (не поменяют своих значений), если выполняется условие:

$$R^{-1} \cdot (\bar{B} + \Delta \bar{B}) > 0. \quad (2.47)$$

С учетом полученного решения прямой задачи (смотрите последнюю симплекс-таблицу) условие (2.47) примет вид:

$$\begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 580 + \Delta B_1 \\ 680 + \Delta B_2 \\ 430 + \Delta B_3 \end{bmatrix} > 0.$$

После выполнения умножения матрицы R^{-1} на вектор-столбец $(B + \Delta B)$ получим вектор-столбец, каждая компонента которого должна быть строго больше нуля:

$$\begin{bmatrix} 0,5 \cdot (580 + \Delta B_1) - 0,25 \cdot (680 + \Delta B_2) + 0 \cdot (430 + \Delta B_3) \\ -0,5 \cdot (580 + \Delta B_1) + 0,5 \cdot (680 + \Delta B_2) + 0 \cdot (430 + \Delta B_3) \\ 0,5 \cdot (580 + \Delta B_1) - 1 \cdot (680 + \Delta B_2) + 1 \cdot (430 + \Delta B_3) \end{bmatrix} > 0. \quad (2.48)$$

Рассмотрим устойчивость двойственных оценок к изменению запасов только первого типа сырья, т.е. $\Delta B_1 \neq 0, \Delta B_2 = \Delta B_3 = 0$. Выполнение условия (2.48) приводит к следующему соотношению:

$$-80 < \Delta B_1 < 100.$$

Изменение запасов только второго типа сырья $\Delta B_2 \neq 0, \Delta B_1 = \Delta B_3 = 0$ дает нам следующий интервал устойчивости двойственных оценок:

$$-100 < \Delta B_2 < 40.$$

Аналогично, изменение запасов только третьего типа сырья $\Delta B_3 \neq 0, \Delta B_1 = \Delta B_2 = 0$ приводит к следующему интервалу устойчивости двойственных оценок:

$$-40 < \Delta B_3 < \infty$$

Как и следовало ожидать, произвольное увеличение третьего типа сырья не изменит его нулевой двойственной оценки.

При одновременном изменении всех типов сырья ΔB_i следует подставить в вектор-столбец (2.48) и решить получившуюся систему неравенств.

Далее изучим вопрос об устойчивости оптимального плана прямой задачи (2.41)–(2.42) к изменению стоимости отдельных видов выпускаемой продукции. Знать это необходимо, поскольку рынок является динамическим организмом и цены на нем в зависимости от конъюнктуры постоянно меняются. Определим, в каких пределах могут меняться значения коэффициентов целевой функции c_1 и c_2 так, чтобы оптимальный план оставался неизменным. Для рассматриваемой нами задачи он является следующим: $x_1 = 50$ и $x_2 = 120$.

Допустим, значение c_1 изменяется, а значение $c_2 = \text{const}$, т.е. фиксировано. При этом вектор $\text{grad } f(x_1, x_2)$ также будет менять направление и величину. Нужно определить, в каких пределах может изменяться значение c_1 ($c_1^{\min} < c_1 < c_1^{\max}$), чтобы оптимальный план задачи $x_1 = 50$ и $x_2 = 120$ оставался неизменным. Изменение значения c_1 приведет к такому расположению линейной формы (целевой функции $f(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$), когда она станет параллельной поочередно сначала одной из прямых, ограничивающих область допустимых решений в оптимальном плане, потом другой. Значение c_1 будем изменять таким образом, чтобы линейная форма поочередно стала параллельной прямой, на пересечении которых находится оптимальный план. Из условия параллельности линейной формы $f(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2$ к прямой $2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2 = 580$ (условие пропорциональности коэффициентов перед соответствующими переменными в уравнениях этих прямых), имеем:

$$\frac{c_1}{2} = \frac{40}{4} \Rightarrow c_1 = 20.$$

Условие параллельности линейной формы ко второй прямой, записывается в виде:

$$f = c_1 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 \parallel 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 680.$$

$$\text{Из этого выражения: } \frac{c_1}{4} = \frac{40}{4} \Rightarrow c_1 = 40.$$

Таким образом, при изменении c_1 в диапазоне: $20 < c_1 < 40$ оптимальный план остается тем же самым. При этом значение целевой функции в точке оптимума $x_1 = 50$ и $x_2 = 120$ меняется в пределах: $20 \cdot 50 + 40 \cdot 120 < f(\bar{x}^*) < 40 \cdot 50 + 40 \cdot 120 \Rightarrow 5800 < f(\bar{x}^*) < 6800$. В задаче максимальное значение целевой функции $f_{\max} = 6300$.

После выполнения аналогичного анализа можно установить, в каких пределах $c_2^{\min} < c_2 < c_2^{\max}$ может изменяться значение c_2 , при $c_1 = \text{const}$, чтобы оптимальный план задачи $x_1 = 50$ и $x_2 = 120$ оставался неизменным. Значение c_2 будем изменять таким образом, чтобы линейная форма поочередно стала параллельной двум прямой, на пересечении которых находится оптимальный план задачи. Из условия параллельности прямых $f(\bar{x}) = 30 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$ и $2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2 = 580$ имеем:

$$\frac{30}{2} = \frac{c_2}{4} \Rightarrow c_2 = 60.$$

Условие параллельности линейной формы ко второй прямой записывается в виде:

$$f(\bar{x}) = 30 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \parallel 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 680.$$

$$\text{Из этого выражения имеем: } \frac{30}{4} = \frac{c_2}{4} \Rightarrow c_2 = 30.$$

Таким образом, при изменении c_2 в диапазоне: $30 < c_2 < 60$ и при $c_1 = \text{const}$ оптимальный план задачи (2.41)–(2.42) будет оставаться неизменным. При этом значение целевой функции в точке оптимума $x_1 = 50$ и $x_2 = 120$ будет изменяться в диапазоне: $30 \cdot 50 + 30 \cdot 120 < f(\bar{x}^*) < 30 \cdot 50 + 60 \cdot 120 \Rightarrow 5100 < f(\bar{x}^*) < 8700$.

Теперь рассмотрим, как можно решить эту пару взаимно двойственных задач и определить интервалы устойчивости двойственных оценок с помощью табличного процессора **Excel**. Для этого запустим табличный процессор **Excel** и в появившуюся на экране монитора таблицу введем задачу (2.41)–(2.42). Запишем в ячейки B2 и C2 начальные значения переменных x_1 и x_2 . В ячейки B5:B7 записываем левые части ограничений (2.41), в ячейки D5:D7 правые части этих же ограничений. В ячейку E2 записываем выражение целевой функции задачи (2.42) и в результате получим таблицу, приведенную на рис. 13.

	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2		целевая функция	
2		0.5	1		=30*B2+40*C2	
3		Левые части	Знак отнош-я	Правые части		
4		ограничений		ограничений		
5		=2*B2+4*C2	=<	580		
6		=4*B2+4*C2	=<	680		
7		=3*B2+2*C2	=<	430		
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						

Рис. 13

Далее запускаем надстройку **Поиск решения** и заполняем окошечки появившегося диалогового окна, как показано на рис. 14.

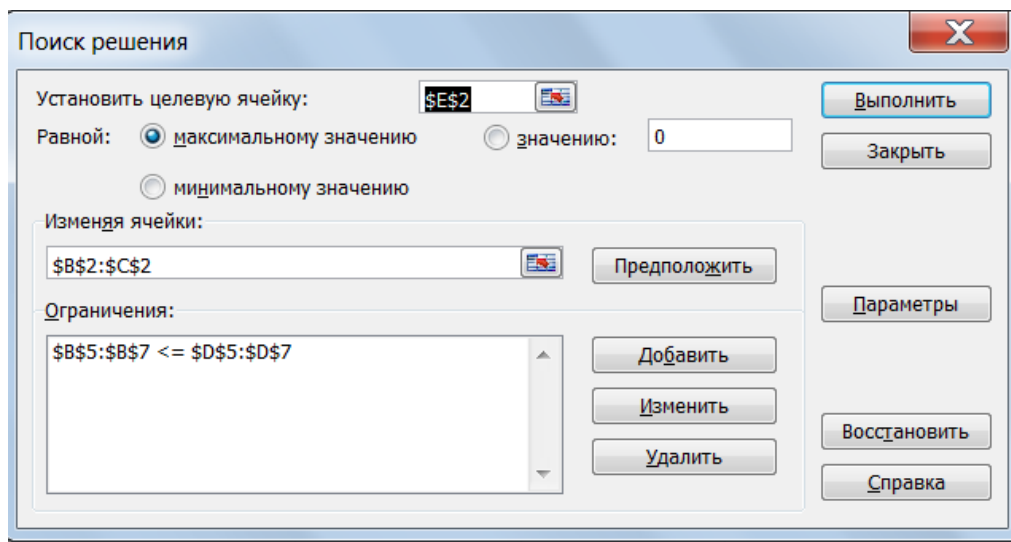


Рис. 14

После заполнения соответствующих окошек щелкаем левой кнопкой мыши по пункту «Параметры», в результате чего появляется диалоговое окно, изображенное на рис. 15. В этом диалоговом окне ставим галочки в окошечках рядом с надписями «Линейная модель», «Неотрицательные значения». Затем нажимаем на кнопку «ОК». Во вновь появившемся окне рис. 14 щелкаем левой кнопкой мыши по пункту «Выполнить» и получаем решение задачи (2.41)–(2.42), которое приведено на рис. 16. Как видно из рис. 16, полученное решение $x_1 = 50$, $x_2 = 120$, $f_{\max} = 6300$ совпадает с решением, найденным вручную.

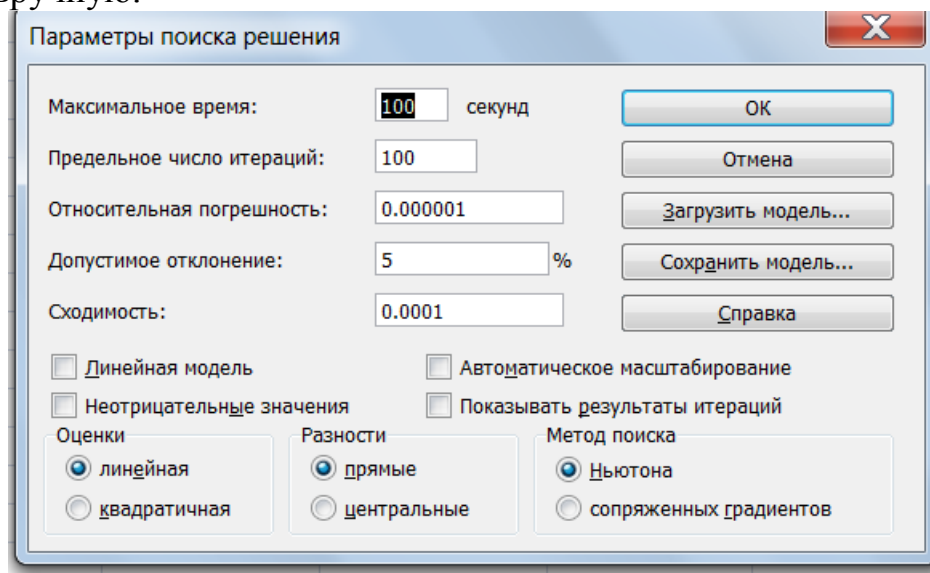


Рис. 15

Аналогично, с помощью табличного процессора **Excel**, решается и задача (2.45)–(2.46). В таблицу, появившуюся на экране монитора после запуска **Excel**, задачу записываем следующим образом. В ячейки B2:D2 запишем начальные значения переменных y_1 , y_2 , y_3 . В ячейку F2 запишем выражение целевой функции (2.45). В ячейки B5:B6; C5:C6; D5:D6 левые части ограничений, знаки отношений-неравенств, правые части ограничений (2.46) соот-

ответственно, как показано на рис. 17. Далее запускаем надстройку **Поиск решения**, и в появившемся диалоговом окне заполняем окошечки, как показано

	A	B	C	D	E	F	G
1		x1	x2		целевая функция		
2		50	120		6300		
3		Левые части	Знак отнош-я	Правые части			
4		ограничений		ограничений			
5		580	<=	580			
6		680	<=	680			
7		390	<=	430			
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							

Рис. 16

на рис. 18. После этого щелкаем левой кнопкой мыши по пункту «Параметры», в результате чего появляется диалоговое окно, изображенное на рис. 15.

	A	B	C	D	E	F	G
1		y1	y2	y3		целевая функция	
2		0.5	1	2		=580*B2+680*C2+430*D2	
3		Левые части	Знак отнош-я	Правые части			
4		ограничений		ограничений			
5		=2*B2+4*C2+3*D2	>=	30			
6		=4*B2+4*C2+2*D2	>=	40			
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							

Рис. 17

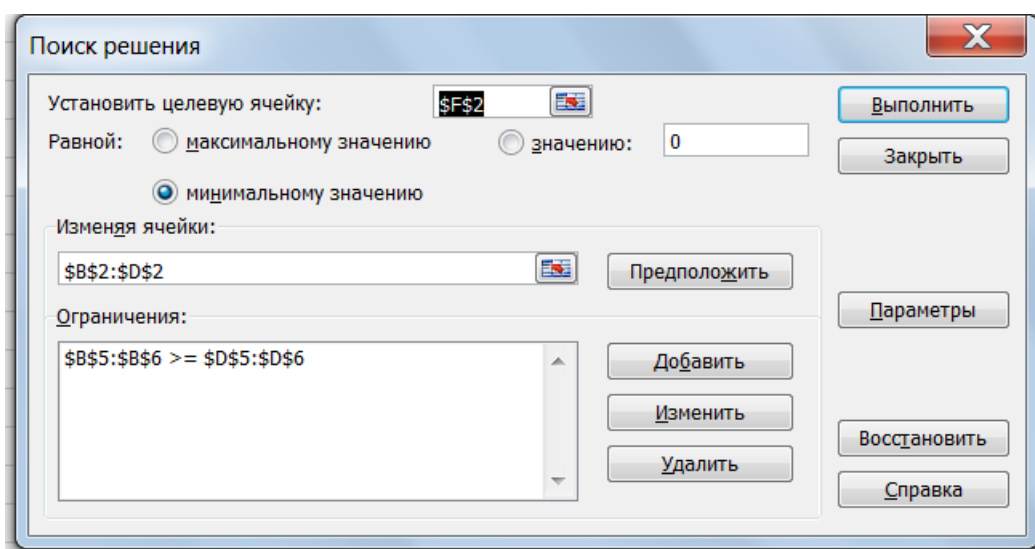


Рис. 18

В этом диалоговом окне ставим галочки в окошечках рядом с надписями «Линейная модель», «Неотрицательные значения». Затем нажимаем на пункт «ОК». Во вновь появившемся окне (рис. 18) щелкаем левой кнопкой мыши по пункту «Выполнить» и получаем решение задачи (2.45)–(2.46), которое приведено на рис. 19. В диалоговом окне, приведенном на этом рисунке, выделяем, щелкнув по нему один раз левой кнопкой мыши, пункты: «Результаты», «Устойчивость», «Пределы». Далее щелкаем по кнопке «ОК» и получаем:

	A	B	C	D	E	F	G
1		y1	y2	y3		целевая функция	
2		5	5	0		6300	
3		Левые части	Знак отнош-я	Правые части			
4		ограничений		ограничений			
5		30	>=	30			
6		40	>=	40			
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							

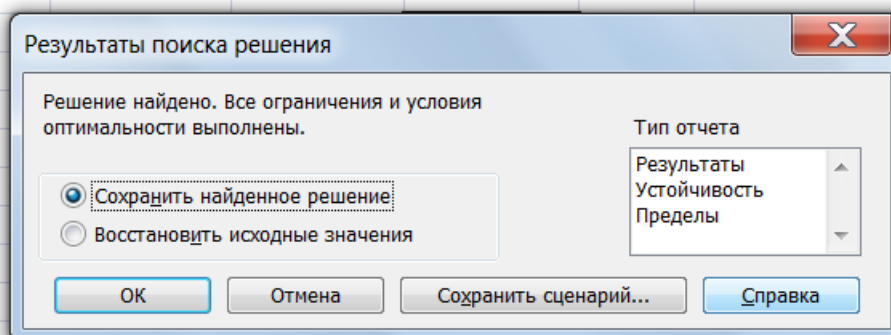


Рис. 19

решение задачи (2.45)–(2.46), а также установленные пределы устойчивости двойственных оценок. Решение задачи приведено на рис. 20 и оно следующее: $y_1=5$, $y_2=5$, $y_3=0$, при этом $g_{\min}=6300$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		y1	y2	y3		целевая функция		
2		5	5	0		6300		
3		Левые части	Знак отнош-я	Правые части				
4		ограничений		ограничений				
5		30	>=	30				
6		40	>=	40				
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								

Рис. 20

Для того чтобы посмотреть установленные пределы устойчивости двойственных оценок нужно в таблице, приведенной на рис. 20, перейти на рабочую страницу «Отчет по устойчивости 1». Для этого необходимо щелкнуть левой кнопкой мыши по пункту «Отчет по устойчивости 1», расположенному в нижней строке таблицы. В результате этих действий на экране монитора появится таблица с данными, приведенными на рис. 21. Из этих данных следует, что оптимальное решение прямой задачи (2.41)–(2.42) $x_1 = 50$, $x_2 = 120$ не поменяется при изменении коэффициентов целевой функции (2.42) в пределах $30-10 < c_1 < 30+10$ и $40-10 < c_2 < 40+20$. Также из этих данных следует, что оптимальное решение двойственной задачи (2.45)–(2.46)

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$2	y1	5	0	580	100	80
\$C\$2	y2	5	0	680	40	100
\$D\$2	y3	0	40	430	1E+30	40

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$5	ограничений	30	50	30	10	10
\$B\$6	ограничений	40	120	40	20	10

Рис. 21

$y_1=5, y_2=5, y_3=0$ не поменяется при изменении коэффициентов целевой функции (2.45) в пределах: $580-80 < B_1 < 580+100, 680-100 < B_2 < 680+40, 430-40 < B_3 < 430+\infty$.

Сравнивая решения задач (2.41)–(2.42) и (2.45)–(2.46), полученные при решении вручную и с помощью **Excel**, можно увидеть, что они совпадают.

Задания по теме «Линейное программирование»

Задание № 1

Предприятие выпускает два вида продукта: P_1 и P_2 . Для их изготовления используются три типа сырья, запасы которых ограничены и составляют: $b_1 = 580 + 10 \cdot m$, $b_2 = 680 + 10 \cdot m$, $b_3 = 430 + 10 \cdot m$ ед. Известны затраты каждого типа сырья на производство единицы каждого вида продукта a_{ij} , где i – порядковый номер сырья, j – порядковый номер продукта, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,2}$. Значения элементов матрицы A следующие:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Требуется найти оптимальный план производства продукции с целью получения максимальной прибыли, если известна прибыль от реализации единицы каждого вида готового продукта $c_1 = 30 + m$, $c_2 = 40 + m$.

1. Составить математическую модель задачи, а затем решить ее графическим и симплекс-методами.
2. По прямой (исходной) задаче ЛП сформулировать двойственную задачу и решить ее двухэтапным симплекс-методом.
3. Определить интервалы устойчивости двойственных оценок по отношению к изменению запасов сырья.
4. Определить интервалы изменения стоимости каждого вида продукции, при которых оптимальный план исходной задачи будет оставаться неизменным.

В задании значение m – номер варианта.

Задание № 2

Три завода строительных материалов региона, проектные мощности которых соответственно равны $100 + m$, $150 - 2 \cdot m$, $125 + m$ ед., выпускают железобетонное изделие. Запасы сырья, из которого изготавливается это изделие, составляют: железа $1700 - 10 \cdot m$ ед., цемента $2200 - 20 \cdot m$ ед. Затраты железа на производство единицы изделия на каждом заводе соответственно равны 3, 4 и 5 ед., а затраты цемента 5, 6 и 8 единиц. Требуется составить в этих условиях план выпуска изделия на каждом заводе x_1, x_2, x_3 с целью получения максимальной прибыли от его реализации, если для каждого завода прибыль от реализации единицы продукции составляет, соответственно,

$2 - a/2$, $3 + a/2$ и $2,5 - a/4$ единиц. Здесь $a = 0,01 \cdot m$; где m – номер варианта.

1. Составить математическую модель задачи и решить ее симплекс методом.
2. По прямой (исходной) задаче ЛП сформулировать двойственную, составить ее математическую модель и решить ее двухэтапным симплекс-методом.

Задание № 3

Завод стройматериалов выпускает четыре вида конструкций. На изготовление арматурных каркасов единицы каждого типа конструкций затрачивается соответственно $0,25$; $0,1$; $0,09$; $0,15 + 0,01 \cdot m$ чел.-дн., а на изготовление самих конструкций затрачивается соответственно $2,5$; $1,9$; 3 ; $8 - 0,01 \cdot m$ чел.-дн. Завод для изготовления арматурных каркасов может затратить в сумме 11 чел.-дн., а для конструкций – 210 чел.-дн. На изготовление единицы каждого типа конструкций затрачивается соответственно $1,6$; $1,5$; $1,6$; $1,9 + 0,01 m^3$ бетона, общее количество которого на заводе не превышает $200 m^3$. Для ускорения твердения конструкций используется пропаривание, причем расход пара для конструкции соответственно равен $0,28$; $0,24$; $0,2$; $0,2 + 0,01 m^3$. Общий запас пара $22 m^3$. Требуется в этих условиях составить план выпуска конструкций на заводе x_1, x_2, x_3, x_4 для обеспечения возведения максимального количества зданий, если эффективность всех типов конструкций при строительстве одинакова, и $C_1 = 1 + 0,1 \cdot a$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1 + 0,1 \cdot a$, $C_4 = 1 + 0,1 \cdot a$. Здесь $a = 0,01 \cdot m$; $b = 0,1 \cdot m$; где m – номер варианта.

1. Составить математическую модель задачи и решить ее симплекс методом.
2. По прямой (исходной) задаче ЛП сформулировать двойственную задачу, составить ее математическую модель и решить ее двухэтапным симплекс-методом.

Вопросы для самопроверки

1. Какая задача называется задачей ЛП?
2. Какая форма называется стандартной формой записи задачи ЛП?
3. Какая форма называется канонической формой записи задачи ЛП?
4. Какие переменные в задачах ЛП называются базисными?
5. Какие переменные в задачах ЛП называются свободными?
6. Какие переменные в задачах ЛП называются искусственными?
7. Сущность графического метода решения задач ЛП.
8. Сущность симплекс-метода для решения задач ЛП.
9. Сущность двухэтапного симплекс-метода для решения задач ЛП.
10. По каким правилам формулируется взаимно двойственная задача ЛП из прямой?

11. Как формируется несимметричная двойственная задача ЛП из прямой?
12. Правила формирования симметричной двойственной задачи ЛП из прямой.
13. Определение интервалов устойчивости двойственных оценок.
14. Какие взаимно двойственные задачи называются симметричными, а какие несимметричными?
15. Экономическая интерпретация переменных в симметричной двойственной задаче ЛП.

3. ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО (ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО) ПРОГРАММИРОВАНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Математическая формулировка задач оптимизации с дискретными (целочисленными) переменными в общем случае имеет вид:

$$\text{найти } \max(\min) f(\bar{x}) \quad (3.1)$$

$$\text{при } \begin{aligned} \varphi_i(\bar{x}) &\geq 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ \psi_i(\bar{x}) &= 0, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\bar{x} \in G_x; \quad (3.3)$$

здесь $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, G_x – дискретное множество.

При рассмотрении задачи оптимизации (3.1)–(3.3) сразу возникает вопрос: а нельзя ли для ее решения использовать те же самые методы, которые применяются для решения аналогичных задач с непрерывными переменными? Например, решить задачу (3.1)–(3.3), как задачу с непрерывными переменными, и если в векторе решения будут содержаться компоненты со значениями, не принадлежащими к G_x , то в качестве решения дискретной задачи (3.1)–(3.3) следует взять вектор, в котором компоненты, не принадлежащие множеству G_x , будут заменяться наиболее близкими значениями из этого множества. На этот вопрос однозначно отрицательный ответ дает следующий пример, приведенный в [9]:

$$\text{найти } \max (x_1 - 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3), \quad (3.4)$$

$$\text{при } 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \quad (3.5)$$

$$4 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 2, \quad (3.6)$$

$$-3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 \leq 3, \quad (3.7)$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (3.8)$$

Решение задачи без учета целочисленности переменных, т.е. в предположении, что вместо условия (3.8) имеется условие:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad (3.9)$$

так: $x_1 = 0,5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 4,5$.

Легко проверить, что никакое округление не приводит не только к оптимальному, но даже и к допустимому плану (как бы мы не округляли, найденные значения x_1, x_2, x_3 , все равно не сможем удовлетворить всем неравенствам (3.5)–(3.7)).

Целочисленные значения переменных, обеспечивающие максимум целевой функции (3.4) и найденные с учетом ограничений (3.5)–(3.8), таковы: $x_1 = x_2 = 2$; $x_3 = 5$.

Метод округления может быть применен только в тех случаях, когда заведомо известно, что все переменные в оптимальном плане примут достаточно большие значения [6]. Так, если, решив задачу (3.4) – (3.7), (3.9), мы получили бы значения всех переменных в решении больше чем, скажем, 20

или 30, т. е. $x_{opt} = 20 - 30$, то в качестве приближенного решения дискретной задачи можно было бы рассматривать вектор: $[x_i + 0,5], i = 1, 2, 3, \dots$

Это общее правило для всех задач дискретного программирования, не содержащих булевых переменных.

В случае, когда хотя бы одна переменная в решении задачи имеет нулевое значение или если она принимает в оптимальном нецелочисленном плане значение, меньшее по абсолютной величине 20, то для поиска оптимального плана задачи целочисленного программирования необходимы специальные методы.

Методы решения задач целочисленной оптимизации можно условно разделить на три основных класса: **отсечения, комбинаторные, приближенные**.

В настоящее время эти классы методов достаточно полно разработаны лишь для решения задач линейного целочисленного программирования. И это неудивительно, поскольку для задач целочисленного программирования в общем случае неприменимы принципы дифференциального исчисления для определения точек оптимума целевой функции. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только задачи линейного целочисленного программирования (ЛЦП) и методы, предназначенные для их решения.

Математическая формулировка задач линейного программирования с дискретными (целочисленными) переменными имеет вид:

$$\text{найти } \max(\min) (f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i) \quad (3.10)$$

$$\text{при} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m_1}; \quad (3.11)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{m_1 + 1, m}; \quad (3.12)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}; \quad (3.13)$$

$$x_j - \text{целые}, j = \overline{1, n}; \quad (3.14)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — независимые целочисленные переменные; $a_{ij}, b_j \geq 0$ — константы; $n_1, m - n_1$ — количество ограничений типа неравенств и равенств соответственно.

Рассмотрим методы из класса отсечения, предназначенные для решения задач ЛЦП. Идея методов из класса отсечения принадлежит Данцигу и состоит в следующем. Вначале решается задача ЛП без учета дискретности переменных. Это первый шаг. Если в результате решения задачи ЛП получен нецелочисленный план, то к ограничениям исходной задачи добавляется новое линейное ограничение, которое должно обладать двумя следующими свойствами:

- 1) полученный нецелочисленный план его не удовлетворяет;

2) любой целочисленный план, удовлетворяющий всем ограничениям задачи ЛЦП, его заведомо удовлетворяет.

Второй шаг состоит в решении возникающей при этом новой задачи ЛП. Последующие шаги заключаются в добавлении новых ограничений и в решении вновь возникающих задач. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найдено целочисленное решение или не будет установлен факт, что задача целочисленного решения не имеет. Задача не будет иметь целочисленного решения в том случае, если после решения очередной задачи мы установим, что в левой части строки, в которой стоит нецелочисленная компонента решения с максимальной дробной частью, находятся только целочисленные коэффициенты.

Геометрически добавленное линейное ограничение (неравенство) означает проведение гиперплоскости, отсекающей от исходного многогранника решений точку, оптимальную для задачи, решенной на предыдущем шаге. При этом гиперплоскость не должна затрагивать ни одного из допустимых целочисленных планов.

При реализации методов из класса отсечения возникают следующие основные проблемы:

- 1) разработка обобщенного алгоритма формирования ограничений, представляющих собой отсекающие гиперплоскости;
- 2) доказательство конечности процедуры;
- 3) разработка приемов борьбы с постоянным возрастанием размерности задачи в связи с добавлением дополнительных ограничений.

В результате решения этих проблем может быть построен численный алгоритм решения задачи ЛЦП. Впервые это было сделано Гомори. Впоследствии алгоритмы метода Гомори были усовершенствованы и созданы их различные модификации.

Рассмотрим подробнее суть метода Гомори для решения задачи ЛЦП. Нахождение решения задачи ЛЦП методом Гомори начинают с определения симплексным методом оптимального плана задачи (3.10)–(3.13) без учета целочисленности переменных. После того, как этот план найден, просматривают его компоненты. Если среди компонентов нет дробных чисел, то найденный план является оптимальным планом задачи ЛЦП (3.10)–(3.14). Если же в оптимальном плане задачи (3.10)–(3.13) переменная x_i принимает дробное значение, то к системе ограничений (3.11)–(3.12) добавляют неравенство:

$$\sum_{j=1}^n \{a_{ij}\} \cdot x_j \geq \{b_i\} \quad (3.15)$$

и находят решение задачи (3.10)–(3.13), (3.15).

В неравенстве (3.15) $\{a_{ij}\}$ и $\{b_i\}$ означают дробные части величин a_{ij} и b_i , значения которых взяты из последней симплекс-таблицы. Под **дробной частью числа t** понимается наименьшее неотрицательное число P ,

такое, что разность между t и P целое число, например: $\{1,33\} = 0,33$, $\{-3,75\} = 0,25$. Если в плане, обеспечивающем решение задач (3.10)–(3.13) дробные значения принимают несколько переменных, то дополнительное неравенство (3.15) формируется в строке с наибольшей дробной частью этих переменных.

Если в найденном плане решения задачи (3.10)–(3.13), (3.15) какие-то переменные принимают нецелочисленные значения, то снова добавляют дополнительное ограничение в систему ограничений задачи, и процесс вычислений повторяется. Проведя конечное число итераций, либо получают план – решение задачи ЛЦП (3.10)–(3.14), либо устанавливают ее неразрешимость. Задача ЛЦП будет неразрешимой, если в строке, в которой стоит компонента решения с максимальной дробной частью стоят только целочисленные коэффициенты.

Рассмотрим реализацию метода Гомори на примере решения следующей задачи:

$$\text{Найти } \max (f(\bar{x}) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2), \quad (3.16)$$

$$\text{при условии: } x_1 + x_2 \leq 13,$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 6, \\ -3 \cdot x_1 + x_2 &\leq 9, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1, 2}), \quad (3.18)$$

$$x_j - \text{целые}, (j = \overline{1, 2}). \quad (3.19)$$

После записи в канонической форме задача (3.16)–(3.19) примет вид:

$$\text{Найти } \max (f(\bar{x}) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5), \quad (3.20)$$

$$\text{при условии: } x_1 + x_2 + x_3 = 13,$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_4 &= 6, \\ -3 \cdot x_1 + x_2 + x_5 &= 9, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1, 5}), \quad (3.22)$$

$$x_j - \text{целые} (j = \overline{1, 5}). \quad (3.23)$$

Для определения оптимального плана задачи (3.20)–(3.23) сначала найдем оптимальный план задачи (3.20)–(3.22). Для этого воспользуемся симплекс-таблицами, предварительно преобразовав задачу нахождения максимума на задачу нахождения минимума целевой функции $f(\bar{x})$ при ограничениях (3.21)–(3.22).

№	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_3	13	1	1	1	0	0
2	x_4	6	1	-1	0	1	0
3	x_5	9	-3	1	0	0	1
		$f = 0$	-3	-2	0	0	0

№	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_3	7	0	2	1	-1	0
2	x_1	6	1	-2	0	1	0
3	x_5	27	0	-2	0	3	1
		$f = 18$	0	-5	0	3	0

№	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_2	3,5	0	1	0,5	-0,5	0
2	x_1	9,5	1	0,0	0,5	0,5	0
3	x_5	34	0	10	1	2	1
		$f = 35,5$	0	0	2,5	0,5	0

Как видно из последней симплекс-таблицы, найденный оптимальный план $\bar{x} = [9,5; 3,5; 0; 34]^T$ задачи (3.20)–(3.22) не является оптимальным планом задачи (3.20)–(3.23), поскольку две компоненты x_1 и x_2 имеют нецелочисленные значения.

При этом дробные части этих чисел равны между собой. Поэтому дополнительное ограничение может быть составлено в той строке, в которой стоит одна из этих переменных. Составим дополнительное ограничение, например, в строке, где стоит переменная x_2 . Из последней симплекс-таблицы имеем:

$$x_2 + 0,5 \cdot x_3 - 0,5 \cdot x_4 = 3,5.$$

Значит, к ограничениям задачи (3.20)–(3.22) нужно добавить ограничение:

$$\{1\} \cdot x_2 + \{0,5\} \cdot x_3 + \{-0,5\} \cdot x_4 \geq \{3,5\} \quad \text{или}$$

$$0,5 \cdot x_3 + 0,5 \cdot x_4 \geq 0,5,$$

$$\text{т.е. } x_3 + x_4 \geq 1. \quad (3.24)$$

Преобразуем ограничение-неравенство (3.24) в ограничение-равенство:

$$x_3 + x_4 - x_6 = 1 \quad (3.25)$$

и добавим его к ограничениям задачи (3.20)–(3.22). Решение новой задачи приведено далее. Мы должны продолжить решать задачу (3.20)–(3.22), (3.25) симплекс-методом. Как это сделать? Ведь как свидетельствуют коэффициенты, стоящие в строке целевой функции последней симплекс-таблицы, оптимальный план задачи уже найден. В данной ситуации поступаем следующим образом. Поскольку добавление в систему ограничений исходной задачи дополнительного ограничения (3.25) приводит к отсечению из многогранника решений вершины, в которой достигалось оптимальное значение целевой функции решаемой задачи (3.20)–(3.22), то на новом многограннике решений оптимальное значение целевой функции задачи будет заведомо хуже. И зада-

ча заключается в том, чтобы меньше всего ухудшить оптимальное значение целевой функции задачи. Поэтому выбор небазисной переменной, которая должна войти в базис, осуществляется следующим образом. Среди положительных коэффициентов, стоящих в строке целевой функции задачи, находим наименьший, и небазисная переменная, в столбце которой он стоит, будет включена в базис. Далее реализуется алгоритм симплекс-метода. Такая процедура определения небазисной переменной, включаемой в базис, будет реализовываться после каждого добавления дополнительного ограничения в систему ограничений задачи.

№	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_2	3,5	0	1	0,5	-0,5	0	0
2	x_1	9,5	1	0	0,5	0,5	0	0
3	x_5	34	0	0	1	2	1	0
4	x_6	1	0	0	1	1	0	-1
		$f=35,5$	0	0	2,5	0,5	0	0

№	Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_2	4	0	1	1	0	0	-1/2
2	x_1	9	1	0	0	0	0	1/2
3	x_5	32	0	0	-1	0	1	2
4	x_4	1	0	0	1	1	0	-1
		$f=35$	0	0	2	0	0	1/2

Из последней симплекс-таблицы видно, что исходная задача (3.16)–(3.19) ЛЦП имеет оптимальный план $\bar{x}^* = [9, 4]^T$. При этом плане значение целевой функции равно $f(x_1, x_2) = 35$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию решения задачи (3.16)–(3.19). Ее областью допустимых решений является многоугольник OABCD (рис. 22).

Из рис. 22 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в точке $C[9, 5; 3, 5]^T$, т.е. $\bar{x} = [9, 5; 3, 5; 0; 0; 34]^T$ является оптимальным планом задачи (3.20)–(3.22), но не является оптимальным планом задачи (3.20)–(3.23) (числа 9,5 и 3,5 – дробные), поэтому вводится дополнительное ограничение $x_3 + x_4 \geq 1$. Исключая из него x_3 и x_4 и подставляя вместо них соответствующие им выражения из уравнений системы ограничений (3.17), получим неравенство $x_1 < 9$. Данному неравенству соответствует полуплоскость, лежащая слева от прямой $x_1 = 9$. Областью допустимых значений полученной задачи является многоугольник OABEFD. В точке $E[9; 4]^T$ этого многоугольника целевая функция данной задачи принимает максимальное значение. Так как ко-

ординаты точки E – целые числа и неизвестные x_3 , x_4 и x_5 принимают целочисленные значения при подстановке в уравнения системы (3.21) значений $x_1 = 9$ и $x_2 = 4$, то точка $\bar{x}^* = [9, 4, 0, 1, 32]^T$ является оптимальным планом задачи (3.20)–(3.23).

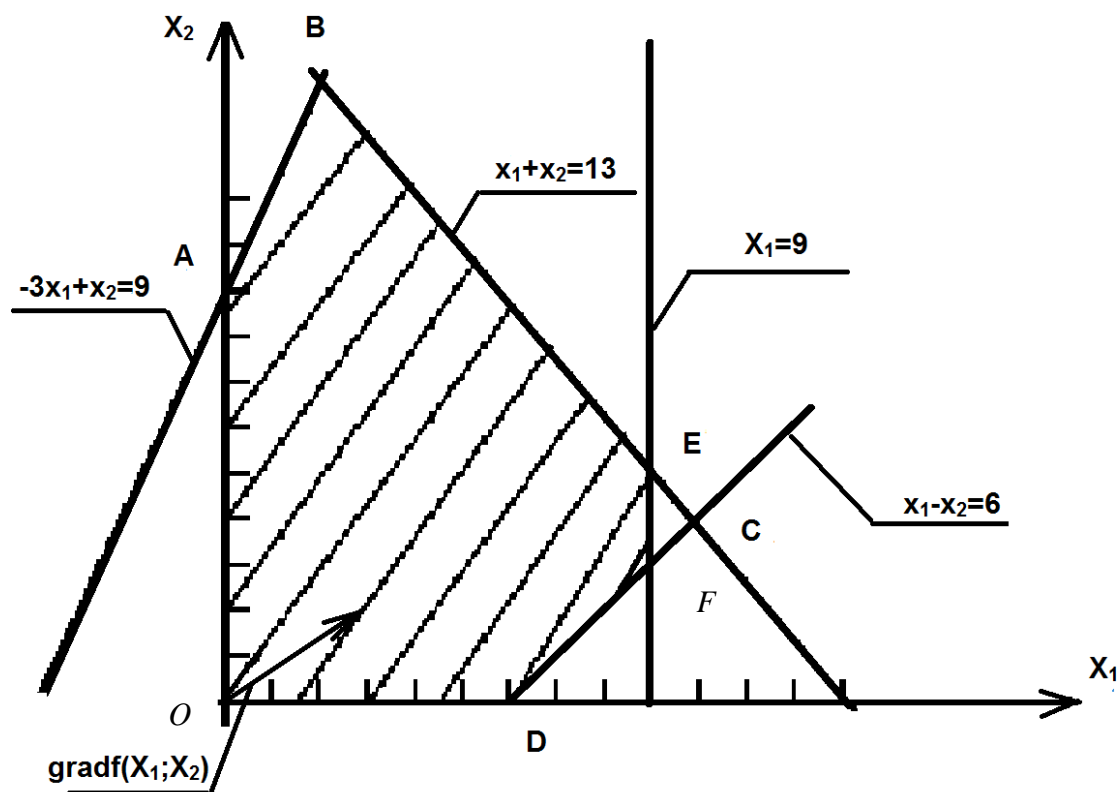


Рис. 22

Теперь рассмотрим решение задачи целочисленной линейной оптимизации средствами табличного процессора **Excel** [10]. Решение задачи осуществляется надстройкой **Поиск решения** из пункта главного меню **Данные** так же, как это делалось при решении задач линейного программирования без учета условия целочисленности переменных. Однако при решении целочисленных задач необходимо в форму представления данных ввести требование целочисленности переменных, и это требование занести в список ограничений задачи.

После ввода исходных данных задачи (3.20)–(3.23) в таблицу **Excel**, например, в таком виде, как показано на рис. 23, вызываем диалоговое окно надстройки **Поиск решения** (рис. 24) и заполняем в этом окне соответствующие окошки. Закончив ввод ограничений, командой «Добавить» вводим условие целочисленности переменных.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Переменные							
2	Имя	Прод 1	Прод 2	Прод 3	Прод 4	Прод 5			
3	Пере- мен.	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5			
4	Значе- ние	0	0	0	0	0			
5	Нижн. гр.	0	0	0	0	0			
6	Цело- числ.	целое	целое	целое	целое	целое			
7	При- быль	3	2	0	0	0	=сумма произв (B\$4: F\$4; B7:F7)	Макс	
8		Ограничение							
9	Вид						Левая часть	знак	Объ- ем
10		1	1	1	0	0	=сумма произв (B\$4:F\$4 ;B10:F10)	=	13
11		1	-1	0	1	0	=сумма произ (B\$4:F\$4; B11:F11)	=	6
12		-3	1	0	0	1	=сумма произв (B\$4:F\$4; B12:F12)	=	9

Рис. 23

Для этого в диалоговом окне «Ограничения» вводим в окно «Ссылка на ячейку» адреса ячеек B4:F4, где записаны значения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Далее курсор переводим в среднее окно, в котором находятся виды ограничений (\leq , $=$, \geq) и требования (целое и двоичное). Устанавливаем курсор на требование «целое» и выполняем один щелчок левой кнопкой мыши по пункту «ОК». Далее, сделав щелчок левой кнопкой мыши по пункту «Параметры», устанавливаем необходимые параметры в диалоговом окне «Параметры поиска решения». Возвращаемся в диалоговое окно **Поиск решения** и, щелкнув левой кнопкой мыши по пункту «Выполнить», находим целочисленное решение задачи (рис. 25): $x_1 = 9, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 32, f_{\max} = 35$.

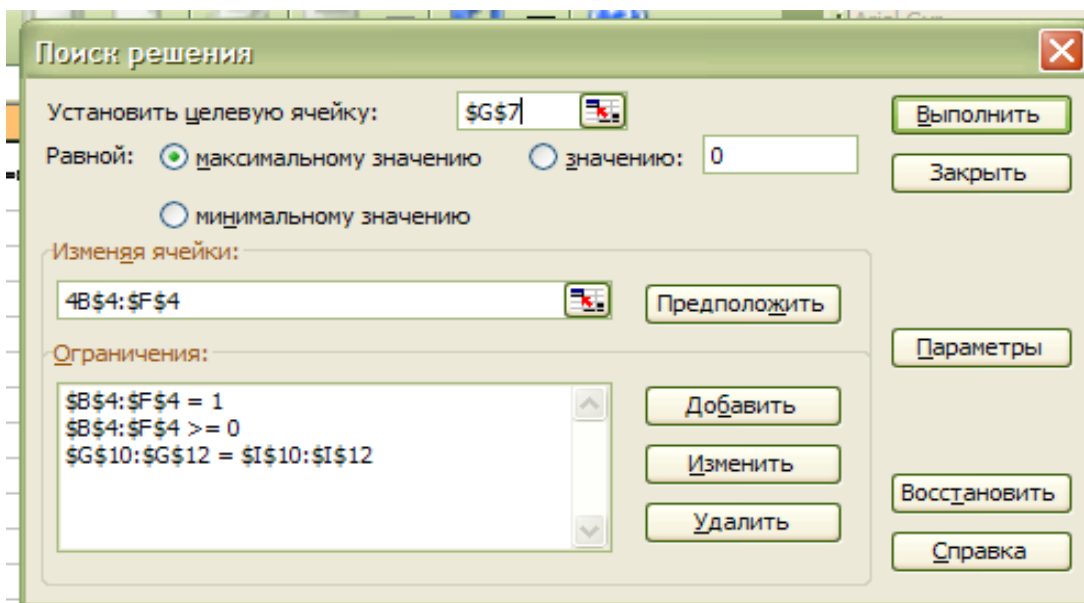


Рис. 24

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Переменные							
2	Имя	Прод1	Прод2	Прод3	Прод4	Прод5			
3	Перем.	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5			
4	Значение	9	4	0	1	32			
5	Нижн.гр.	0	0	0	0	0			
6	Целочисл.	целое	целое	целое	целое	целое			
7	Прибыль	3	2	0	0	0	35	макс	
8		Ограничения							
9	Вид						Левая часть	знак	Объем
10		1	1	1	0	0	13	=	13
11		1	-1	0	1	0	6	=	6
12		-3	1	0	0	1	9	=	9

Рис. 25

Задание по теме «Дискретное (целочисленное) программирование»

Задание № 1

Найти целочисленное решение задачи

$$Z = (70 - m) \cdot x_1 + (80 - 2 \cdot m) \cdot x_2 + (110 - 3 \cdot m) \cdot x_3 + (60 - m) \cdot x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 30 + m, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 28 + 2 \cdot m, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 50 - m, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 45 - m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z} \quad j = \overline{1, 4}; \quad m - \text{номер варианта.}$$

Задание № 2

Морское судно грузоподъемностью 20 тыс. т и вместимостью 28 тыс. м³ может быть использовано для перевозки пяти видов груза. Данные о массе, объеме и стоимости единицы груза каждого вида приведены в таблице (n – номер варианта).

Параметры единицы груза	Номер груза				
	1	2	3	4	5
Масса, т	95- m	70+ m	90- m	105+ m	75
Объем, м ³	125+ m	90	110- m	100	120
Стоимость, млн. руб.	270	280	440	350	400

Определить, сколько единиц груза каждого вида следует загрузить на судно, чтобы суммарная стоимость груза была максимальной, и выполнялись ограничения по вместимости и грузоподъемности судна. Здесь m – номер варианта.

Вопросы для самопроверки

1. В чем принципиальное отличие задач целочисленного программирования от задач математического программирования с непрерывными переменными?
2. В чем сущность метода Гомори?
3. Что такое «дробная часть числа»?
4. Как добавляется дополнительное ограничение в систему ограничений задачи ЛЦП?
5. Каким образом определяется отсутствие у задачи ЛЦП решения?
6. Для чего добавляется дополнительное ограничение в систему ограничений задачи ЛЦП?

4. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Математическая формулировка задач нелинейного программирования (НЛП) в общем случае имеет следующий вид:

$$\text{найти } \min(\max) (f(\bar{x})) \quad (4.1)$$

$$\text{при } \begin{cases} \varphi_i(\bar{x}) \geq 0, & i = \overline{1, m_1}, \\ \psi_i(\bar{x}) = 0, & i = \overline{m_1 + 1, m}, \end{cases} \quad (4.2)$$

здесь $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ – вектор-столбец или точка пространства R^n и хотя бы одна из функций $f(\bar{x})$, $\varphi_i(\bar{x})$, $\psi_i(\bar{x})$ является нелинейной.

Пусть $G_x \in R^n$ и $G_x = \{\bar{x} : \varphi_i(\bar{x}) \geq 0, i = \overline{1, m_1}; \psi_i(\bar{x}) = 0, i = \overline{m_1 + 1, m}\}$. Множество G_x называется допустимой областью $f(\bar{x})$. Любая точка $\bar{x} \in G_x$ называется допустимой, а любая точка $\bar{x} \notin G_x$ называется недопустимой. Условный оптимум представляет собой оптимум, лежащий на границе допустимой области (на границе множества G_x). Если все ограничения (4.2) имеют вид равенств, то допустимая точка (допустимый вектор) \bar{x} должна лежать на пересечении всех гиперповерхностей, соответствующих $\psi_i(\bar{x}) = 0, i = \overline{m_1 + 1, m}$. Если все ограничения (4.2) представляют ограничения неравенства, то точка \bar{x} может быть либо внутренней точкой (допустимой точкой), либо граничной точкой (тоже допустимой точкой), либо внешней точкой (недопустимой точкой) множества G_x . Для внутренней точки множества G_x выполняются $\varphi_i(\bar{x}) > 0, i = \overline{1, m_1}$, для граничной точки удовлетворяется хотя бы одно равенство $\varphi_i(\bar{x}) = 0$, для внешней точки удовлетворяется хотя бы одно неравенство $\varphi_i(\bar{x}) < 0$. Множество точек, удовлетворяющих равенствам $\varphi_i(\bar{x}) = 0, i = \overline{1, m_1}$, определяет граничные поверхности системы ограничений, заданных в виде неравенств. Активным или связывающим ограничивающим неравенством называется такое, которое, для данного \bar{x} , превращается в равенство $\varphi_i(\bar{x}) = 0$.

Множество G_x в задачах нелинейного программирования (4.1)–(4.2) может быть не только не выпуклым, но и не односвязным множеством [12]. Поскольку в задачах (4.1)–(4.2) оптимальное значение целевой функции $f(\bar{x})$ может находиться как на границе, так и во внутренних точках множества G_x , то решение их является более сложным процессом, чем задач линейного программирования. Сложность процесса решения задач НЛП по сравнению с задачами ЛП также определяется особенностями нелинейных функций, входящих в математическую модель задачи, а также особенностями их поведения.

Трудности, связанные с решением задач НЛП, можно разделить на **две группы** [12]: одна группа связана с особенностями нелинейных функций, входящих в математическую модель этих задач, а другая – с методами их решения.

Среди трудностей, относящихся к первой группе, можно выделить следующие:

1. Целевая функция, выраженная нелинейной функцией, может оказаться нечувствительной к изменению параметров оптимизации из-за чего не удастся определить четко выраженный экстремум.

2. Некоторые функции, входящие в математическую модель задачи или их первые производные, могут принимать неограниченные значения на множестве G_x . Подвержены этой трудности задачи НЛП, в математическую модель которых входят дробно рациональные функции. Так, например, значения дробно рациональной целевой функции

$$f(\bar{x}) = \frac{a_0 + a_1 \cdot x_1}{a_2 \cdot x_1 + a_3 \cdot x_2}$$

и ее первой частной производной по x_1

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} = \frac{-a_0 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 \cdot x_1}{(a_2 \cdot x_1 + a_3 \cdot x_2)^2}$$

обращаются в бесконечность при выполнении соотношения $a_2 \cdot x_1 = -a_3 \cdot x_2$. Эту трудность можно преодолеть путем введения в задачу дополнительного ограничения.

3. Параметры оптимизации могут быть разных порядков. Это происходит в том случае, когда разные члены в выражении целевой функции имеют разный порядок. Так, например, для целевой функции

$$f(\bar{x}) = -10000 \cdot x_1^2 - 0,0001 \cdot x_2^2 \quad (4.3)$$

ее значения слабо будут зависеть от изменения x_2 , если только из физического содержания решаемой задачи не следует, что значения x_2 во много раз больше значений x_1 . Если же x_1 и x_2 есть величины одного порядка, то либо одну переменную, либо обе переменные умножают на соответствующие множители с тем, чтобы оба члена в выражении целевой функции стали величинами одного и того же порядка. Так например, для целевой функции (4.3) применим преобразования:

$$y_1 = 100 \cdot x_1, \quad y_2 = 0,01 \cdot x_2 \Rightarrow x_1 = 10^{-2} \cdot y_1, \quad x_2 = 10^2 \cdot y_2.$$

Тогда члены в выражении целевой функции (4.3) становятся величинами одного порядка. После того, как определен оптимум целевой функции

$$f(\bar{y}) = -y_1^2 - y_2^2,$$

по значениям y_1 и y_2 можно выразить значения x_1 и x_2 . Конечно, так легко изменить масштаб функций в математической модели реально решаемой физической задачи, как в рассмотренном примере, удастся далеко не всегда.

4. В математической модели переменные могут оказаться взаимосвязанными. Взаимное влияние параметров оптимизации можно увидеть на примере достаточно простой целевой функции, в которую входит произведение двух переменных:

$$f(\bar{x}) = 50 - x_1 \cdot x_2.$$

Здесь каждая из переменных может принимать разные значения для фиксированного значения их произведения. Тогда, когда имеет место взаимное влияние переменных, проводить масштабирование намного сложнее. В случае, когда целевая функция является квадратичной функцией, для исключения члена, содержащего произведение, можно привести эту функцию к каноническому виду. Проиллюстрируем это на следующем примере. Пусть целевая функция имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = 10 + 4 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 - 8 \cdot x_1 \cdot x_2 + 8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2.$$

Путем перемещения начала координат и поворота координатных осей эта функция может быть приведена к следующему виду:

$$g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 15 + \tilde{x}_1^2 - 2 \cdot \tilde{x}_2^2.$$

В новой системе координат $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ масштабирование каждого члена функции $g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ гораздо проще, чем в исходной системе координат (x_1, x_2) членов функции $f(x_1, x_2)$. Нелинейные целевые функции путем подбора соответствующих преобразований или разложения их в ряд Тейлора, с сохранением конечного числа членов, можно сделать квадратичными.

Вторая группа трудностей при решении задач НЛП связана с численными методами, применяемыми для их решения.

1. Первая трудность заключается в следующем. Если целевая функция $f(\bar{x})$ задачи НЛП является нелинейной, она может иметь несколько экстремумов. Следовательно, если точка начального приближения к решению задачи выбрана далеко от глобального экстремума, то процесс оптимизации может закончиться не в точке искомого глобального экстремума, а в некоторой точке локального экстремума. В определенных случаях приблизительно оптимальные значения параметров оптимизации удастся определить из предварительного анализа математической модели задачи или исходя из физических соображений. Если этого не удастся сделать, то можно выбрать несколько различных точек начального приближения и, стартовав с них, определить, дают ли они одно и то же значение целевой функции в точке экстремума. Если при старте со всех выбранных точек начального приближения получается одно и то же значение экстремума, тогда это значение можно принять за значение искомого глобального экстремума. Если же при старте с различных начальных точек получаются разные значения целевой функции, то в качестве значения искомого глобального экстремума выбирают наилучшее из найденных значений локальных экстремумов целевой функции. В этом случае исходят из принципа: глобальный экстремум является наилучшим из локальных экстремумов. Надо отметить, что и при реализации данного подхода имеются определенные сложности, например он не гарантирует стопроцентного нахождения искомого значения глобального экстремума. Обойти эту трудность можно путем использования специальных методов, предназначенных для нахождения глобального оптимума целевой функции задачи, например, метода « ψ -преобразования» [13].

2. Второй трудностью, связанной с методами решения задач НЛП, является трудность, связанная с уменьшением погрешности вычислительной процедуры (эффективность численных методов) т.е. выбором эффективных численных методов. Погрешности, связанные с оставлением лишь конечного числа членов в разложениях функций, входящих в математическую модель задач НЛП, в ряды, приводят к снижению эффективности многих методов. По этой же причине может возникнуть и проблема устойчивости решения задачи НЛП. Могут возникнуть неприятности, связанные с ошибками округления, особенно при замене производных их конечно-разностными аналогами.

Учитывая большое количество особенностей нелинейных функций (недифференцируемость, многоэкстремальность, овражность, взаимозависимость параметров оптимизации, отсутствие аналитического выражения) и видов множества G_x , необходимо отметить огромное разнообразие задач НЛП, поэтому к настоящему времени не разработан универсальный метод, который бы мог одинаково эффективно решать любые задачи из этого класса.

К настоящему времени разработано очень много методов, предназначенных для решения задач НЛП, но каждый из них более эффективно решает задачи НЛП, обладающие одними особенностями, и менее эффективно или вообще не решает задачи НЛП, обладающие другими свойствами. Например: градиентные методы могут решать только задачи НЛП, в математическую модель которых входят только дифференцируемые функции и непригодны для решения задач НЛП, в математическую модель которых входят не дифференцируемые функции.

Поэтому методы решения задач НЛП нельзя применять для решения искомой задачи, без проведения ее тщательного анализа. Выбор подходящего метода решения задачи НЛП требует от исследователя определенного искусства, зависит также от постановки решаемой задачи и опыта исследователя.

Классификация задач оптимизации по различным признакам приведена в первой главе данного учебного пособия, поэтому на ней здесь не будем останавливаться, а перейдем непосредственно к классификации методов решения задач НЛП.

4.1. Классификация методов решения задач нелинейного программирования

Далее будут рассматриваться только итерационные методы оптимизации, потому что подавляющее большинство практически значимых задач НЛП решаются с их помощью. Рабочей для итерационных методов является формула:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta \bar{x}^k, \quad i = \overline{1, n}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

где k – номер итерации, $\Delta \bar{x}^k$ – вектор, определяющий величину и направление перемещения от точки текущего приближения \bar{x}^k , к точке следующего при-

ближения \bar{x}^{k+1} при поиске решения задачи НЛП. Величина и направление вектора $\Delta \bar{x}^k$ определяются положением точки текущей итерации \bar{x}^k , значением целевой функции и значениями функций, входящих в ограничения задачи НЛП в этой точке.

Общая схема реализации алгоритмов итерационных методов оптимизации имеет следующий вид [15].

1. Начало алгоритма: задаем начальное значение счетчика итераций $k = 0$, точки начала поиска решения задачи \bar{x}_i^0 ($i = \overline{1, s}$), а также значения параметров метода, где s – количество точек, используемых в методе на каждой итерации.

2. Применяем переместительные операторы алгоритма метода для перевода точки (точек) текущего приближения к решению задачи в точку (точки) следующего приближения к решению задачи:

$$\bar{x}_i^{k+1} = \phi(\bar{x}_j^k, f(\bar{x}_j^k), \varphi_1(\bar{x}_j^k), \dots, \varphi_{m_1}(\bar{x}_j^k), \psi_{m_1+1}(\bar{x}_j^k), \dots, \psi_m(\bar{x}_j^k), j = \overline{1, s}, i = \overline{1, s}, k+1 \leq k_{end}); \quad (4.4)$$

где k_{end} – предельно допустимое число итераций, разрешенное при реализации метода.

3. Проверяем выполнение критерия достижения решения задачи. Если критерий не выполнен и $k < k_{end}$, то полагаем $k = k + 1$ и возвращаемся ко второму пункту алгоритма. В случае, когда критерий выполнен или $k \geq k_{end}$, принимаем лучшую из точек текущего приближения в качестве приближенного решения задачи. Выполнение алгоритма на этом заканчивается.

С общей точки зрения переместительные операторы метода вычисляют координаты точек следующего приближения к решению задачи с помощью функции $\phi(\cdot)$. Суть формулы (4.4) заключается в том, что положение точек следующего приближения к решению задачи определяется через положение точек текущего приближения, через значение целевой функции задачи, а также значений функций, входящих в ограничения задачи в точках текущего приближения. Формула (4.4) справедлива только для одношаговых методов оптимизации, то есть методов, в которых на каждой итерации для определения точек следующего приближения используется информация, связанная только с точками текущего приближения.

В случае, когда используется многоточечный и многошаговый итерационный метод оптимизации, формула (4.4) приобретает вид формулы:

$$\bar{x}_i^{k+1} = \phi(\bar{x}_j^v, f(\bar{x}_j^v), \varphi_1(\bar{x}_j^v), \dots, \varphi_{m_1}(\bar{x}_j^v), \psi_{m_1+1}(\bar{x}_j^v), \dots, \psi_m(\bar{x}_j^v), j = \overline{1, s}, v \in [0, k], i = \overline{1, s}, k+1 \leq k_{end}). \quad (4.4^*)$$

В качестве приближенного решения задачи (4.1)–(4.2) принимаем точку $\bar{x}^* \in G_x$, которая определяется из соотношения:

$$f_{\min} = f(\bar{x}^*) = \min_{k \in [0, k_{end}], i = \overline{1, s}} f(\bar{x}_i^k). \quad (4.5)$$

При реализации итерационных методов оптимизации важной является проблема выбора критерия достижения с нужной точностью решения задачи. Наиболее простыми критериями, используемыми для определения достижения решения задачи оптимизации с нужной точностью, являются:

$$\|\bar{x}^k - \bar{x}^{k+1}\| < \varepsilon_x, \quad (4.6)$$

$$|f(\bar{x}^k) - f(\bar{x}^{k+1})| < \varepsilon_f, \quad (4.7)$$

где $\|\bullet\|$ – векторная норма, $\varepsilon_x, \varepsilon_f$ – величины, определяющие точность нахождения решения задачи по параметрам оптимизации и критерию оптимизации, соответственно.

Итерационные методы оптимизации классифицируются по многим признакам. Далее приведем некоторые из них.

Классификация по характеру решения задачи оптимизации. Метод оптимизации называется **локальным**, если схема определения оптимума (4.4*)–(4.5) предназначена для нахождения локального минимума целевой функции $f(\bar{x})$. В случае, когда она предназначена для нахождения глобального минимума, метод называется **глобальным**.

Классификация по порядку используемых производных. Метод оптимизации называют **прямым** или **методом нулевого порядка**, если при реализации его алгоритма используются только значения целевой функции и функций, входящих в ограничения решаемой задачи, а значения производных соответствующих функций не используются. В случае, когда при реализации алгоритма метода используются значения производных k -го порядка, этот метод называют **методом k -го порядка**. Методы оптимизации первого порядка называют также **градиентными**.

Классификация по характеру ограничений. Метод называется **методом безусловной оптимизации**, если он предназначен только для решения задач безусловной оптимизации. В случае, когда с помощью метода можно решать и задачи условной оптимизации, он называется **методом условной оптимизации**.

Классификация по характеру функции $\phi(\bullet)$. В случае, когда функция $\phi(\bullet)$ является детерминированной, метод оптимизации также называется **детерминированным**. Если функция $\phi(\bullet)$ содержит один или несколько случайных параметров с определенными законами распределения, то метод называется **стохастическим** или **случайным**.

Классификация по числу используемых шагов. В случае, когда при вычислении координат точки следующего приближения \bar{x}^{k+1} используется только информация по текущему шагу \bar{x}^k , метод называется **одношаговым**. Если при вычислении координат точки следующего приближения \bar{x}^{k+1} используется информация по $m > 1$ предыдущим шагам, метод называется **многошаговым** или **m -шаговым**. Необходимо отметить, что **m -шаговый** метод на первых $m - 1$ своих шагах не может быть применен, поэтому на начальных этапах реализации алгоритмов таких методов приходится применять одношаговые методы.

Классификация по числу точек, положения которых изменяются от итерации к итерации. По этой классификации методы оптимизации делятся

на **траекторные и популяционные**. **Траекторные методы** – это методы, в которых на каждой итерации происходит изменение положения лишь одной точки. При этом общее число точек, используемых на каждой итерации, может быть больше единицы, и на разных итерациях могут перемещаться разные точки. В соответствии с количеством точек, используемых на каждой итерации, траекторные методы делятся на **одноточечные и многоточечные**. **Популяционные методы** – это методы, в которых число точек, используемых на каждой итерации, больше единицы, а также на каждой из итераций перемещаются все точки, за исключением, возможно, лишь некоторых из них (например, «лучших» точек).

Популяционные методы (в разных литературных источниках используются следующие альтернативные названия: поведенческие, интеллектуальные, вдохновленные природой, роевые и т.д.) – это класс стохастических методов для решения задач глобальной оптимизации, который начал интенсивно разрабатываться с 80-х годов 20-го столетия. Они предполагают одновременную обработку нескольких вариантов решения задачи оптимизации и представляют собой альтернативу классическим «траекторным» методам оптимизации. Все популяционные методы относятся к классу эвристических методов, то есть методов, для которых сходимость к глобальному решению задачи НЛП не доказана, но экспериментально установлено, что в большинстве случаев они дают достаточно хорошее решение [15].

Популяционные методы оптимизации по сравнению с классическими методами имеют существенное преимущество, особенно при решении задач большой размерности и плохо формализованных задач. Для таких задач популяционные методы, как правило, обеспечивают высокую вероятность локализации глобального экстремума оптимизируемой функции. Стоит также отметить, что популяционные методы позволяют лучше классических методов определять близкое к оптимальному решение. При решении практических задач, как правило, приемлемым является именно такое решение.

4.2 . Методы для решения задач безусловной нелинейной оптимизации

Методы, ориентированные на решение задач безусловной нелинейной оптимизации, можно условно разделить на два широких класса в соответствии с типом используемой информации при реализации того или иного метода [7]:

1. **Методы прямого поиска** (нулевого порядка), основанные на вычислении только значений целевой функции $f(\bar{x})$ – безградиентные методы.
2. **Методы k -го порядка** ($k > 0$), в которых кроме точного значения целевой функции $f(\bar{x})$ используются еще точные значения производных k -го порядка целевой функции (в частном случае, при $k = 1$, градиентные методы).

Методы, реализующие процедуру поиска оптимума на основе вычисления только значений целевой функции, с общих позиций можно разделить на эвристические и теоретические. Эвристические методы, как это следует из их названия, реализуют процедуры поиска с помощью интуитивных геометрических представлений, случайного или локального случайного поиска и обеспечивают получение частных эмпирических результатов. Теоретические методы основаны на фундаментальных математических теоремах и обладают такими операционными свойствами, как сходимость (по крайней мере, при выполнении некоторых определенных условий). К эвристическим относятся популяционные методы, симплексного поиска, Нелдера-Мида, комплексов, Хука-Дживса; к теоретическим относится, например, метод сопряженных направлений Пауэлла.

Для того чтобы лучше познакомиться с методами решения задач безусловной нелинейной оптимизации, поподробнее рассмотрим три из них: метод Нелдера-Мида (метод относится к классу методов прямого поиска), метод наискорейшего спуска (относится к классу градиентных методов), метод пчелиного роя (популяционный метод).

4.2.1. Метод Нелдера-Мида

Метод Нелдера-Мида является модификацией метода поиска по симплексу, предложенного Спендли, Хекстом и Химсвортом [12]. Реализация алгоритма метода Нелдера-Мида предполагает выполнение двух типов вычислений: построение первоначального симплекса при заданной начальной точке поиска и заданном масштабном множителе; расчет координат отраженной точки.

Построение первоначального симплекса при заданной начальной (базовой) точке \bar{x}^0 и масштабном множителе α является достаточно несложной процедурой. Из элементарной геометрии известно, что координаты остальных n вершин симплекса в n -мерном пространстве вычисляются по формуле:

$$x_j^i = \begin{cases} x_j^0 + \delta_1, & \text{если } j \neq i, \\ x_j^0 + \delta_2, & \text{если } j = i, \end{cases} \quad (4.8)$$

для i и $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Величины приращений δ_1 и δ_2 , зависящие только от n и выбранного масштабного множителя α , вычисляются по формулам:

$$\delta_1 = \left[\frac{(n+1)^{1/2} + n - 1}{n \cdot \sqrt{2}} \right] \cdot \alpha, \quad (4.9)$$

$$\delta_2 = \left[\frac{(n+1)^{1/2} - 1}{n \cdot \sqrt{2}} \right] \cdot \alpha. \quad (4.10)$$

Стоит отметить, что величина масштабного множителя α устанавливается самим исследователем исходя из особенностей решаемой задачи. При $\alpha = 1$ ребра первоначального симплекса имеют единичную длину.

Надо заметить, что хотя формула для построения вершин регулярного симплекса оказывается весьма удобной при генерации первоначального симплекса, однако нет никаких веских причин для сохранения регулярности симплекса в процессе поиска. Поэтому при отражении симплекса существует возможность как его растяжения, так и сжатия. При реализации алгоритма метода будем использовать следующие обозначения вершин симплекса: \bar{x}^h – вершина, которой соответствует наибольшее значение целевой функции f^h ; \bar{x}^g – вершина, которой соответствует следующее по величине значение целевой функции f^g ; \bar{x}^l – вершина, которой соответствует наименьшее значение целевой функции f^l .

Отражение вершины симплекса \bar{x}^h осуществляется по прямой:

$$\bar{x}_{\text{нов}} = \bar{x}^h + \lambda \cdot (\bar{x}^c - \bar{x}^h), \quad (4.11)$$

$$\text{или } \bar{x}_{\text{нов}} = \bar{x}^h + (1 + \theta) \cdot (\bar{x}^c - \bar{x}^h), \quad (4.12)$$

здесь $\bar{x}^c = \frac{1}{n} \cdot \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^n \bar{x}^i$ – центр тяжести остальных n вершин симплекса, кроме вершины \bar{x}^h .

При $\theta=1$ осуществляется нормальное отражение симплекса, так как точка $\bar{x}_{\text{нов}}$ располагается на расстоянии $\|\bar{x}^c - \bar{x}^h\|$ от точки \bar{x}^c (рис. 26а). При $\theta>1$ осуществляется растянутое отражение, или растяжение симплекса (рис. 26 б). При $-1 \leq \theta \leq 1$ осуществляется сжатое отражение, или сжатие симплекса. На рис. 2в) приведено сжатое отображение симплекса при $0 \leq \theta \leq 1$, а на рис. 26г) приведено сжатое отображение симплекса при $-1 \leq \theta \leq 0$. Три значения параметра θ , используемые при нормальном отражении, сжатии и растяжении, обозначаются соответственно как α , β , γ .

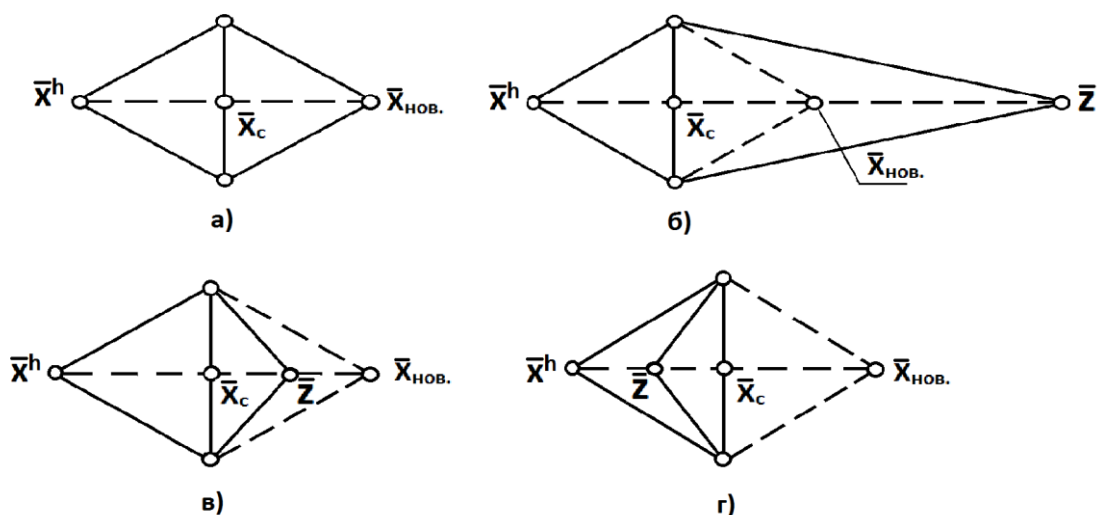


Рис. 26

Реализация алгоритма метода начинается с построения первоначального симплекса и определения точек $\bar{x}^h, \bar{x}^g, \bar{x}^l, \bar{x}^c$. После нормального отражения точки \bar{x}^h относительно точки \bar{x}^c и получения точки $\bar{x}_{нов}$ вычисляется значение целевой функции $f(\bar{x}_{нов})$. Если выполняется двойное неравенство $f(\bar{x}^l) < f(\bar{x}_{нов}) < f(\bar{x}^g)$, то положение точки $\bar{x}_{нов}$ оставляется неизменным т.е. $\theta = \alpha = 1$ (рис. 26 а). Если выполняется неравенство $f(\bar{x}_{нов}) < f(\bar{x}^l)$, тогда точка $\bar{x}_{нов}$ заново вычисляется со значением параметра $\theta = \gamma > 1$ (рис. 26 б). Если выполняется неравенство $f(\bar{x}_{нов}) \geq f(\bar{x}^h)$, тогда точка $\bar{x}_{нов}$ заново вычисляется, при этом значение параметра $\theta = \beta < 0$ (рис 26г). Если выполняется двойное неравенство $f(\bar{x}^g) < f(\bar{x}_{нов}) < f(\bar{x}^h)$, тогда точка $\bar{x}_{нов}$ заново вычисляется, при этом параметр $\theta = \beta > 0$ (рис. 26в). Строится новый симплекс, с включением в него точек предыдущего симплекса, за исключением точки \bar{x}^h и добавлением точки $\bar{x}_{нов}$. Для вновь построенного симплекса осуществляется проверка выполнения критерия окончания поиска минимума целевой функции. Если критерий окончания поиска минимума целевой функции не выполнен, то наихудшая вершина вновь построенного симплекса отражается относительно центра тяжести остальных вершин симплекса нормально, со сжатием или растяжением, по результатам сравнения значения целевой функции во вновь полученной точке $\bar{x}_{нов}$ со значениями целевой функции в вершинах симплекса. Итерации продолжаются до тех пор, пока модуль разности между значениями целевой функции в вершинах симплекса не станет меньше заданной точности $\varepsilon > 0$, с которой определяется решение задачи. Разработчики метода рекомендуют использовать следующие значения параметров: $\alpha = 1$, $\beta = 0,5$ и $\gamma = 2$ [7].

Изложенный метод обладает следующими достоинствами:

- расчеты и логическая структура метода отличаются сравнительной простотой;
- уровень требований к объему памяти ЭВМ небольшой, массив, используемый в алгоритме метода, имеет размерность $(n+1, n+2)$;
- используется небольшое количество, заранее задаваемых параметров: a – масштабный множитель; α, β, γ – параметры, определяющие деформацию симплекса при его отражении; ε – параметр, определяющий точность нахождения решения задачи;
- алгоритм является эффективным даже в тех случаях, когда ошибки в вычислениях значений целевой функции задачи велики, поскольку при его реализации оперируют наибольшими значениями целевой функции, а не наименьшими.

У метода имеются следующие недостатки:

- при реализации алгоритма метода могут возникнуть трудности, связанные с масштабированием, так как все координаты вершин симплекса зависят от одного и того же масштабного множителя a ;

– алгоритм метода достаточно медленно сходится к решению задачи, так как не используется информация, полученная на предыдущих итерациях.

Как утверждают многие исследователи, метод Нелдера-Мида является одним из наиболее эффективных методов последовательной оптимизации.

Теперь на конкретном примере рассмотрим реализацию метода.

Пример. Найти минимум функции $f(\bar{x}) = (3 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2$ с точностью $\varepsilon = 0,100$.

Решение. Для построения первоначального симплекса зададим начальную точку $\bar{x}^0 = [0, 0]^T$ и масштабный множитель $a = 2$. Тогда

$$\delta_1 = \left[\frac{(n+1)^{1/2} + n - 1}{n \cdot \sqrt{2}} \right] \cdot a = \left[\frac{\sqrt{2+1} + 2 - 1}{2 \cdot \sqrt{2}} \right] \cdot 2 = 1,932;$$

$$\delta_2 = \left[\frac{(n+1)^{1/2} - 1}{n \cdot \sqrt{2}} \right] \cdot a = \left[\frac{\sqrt{2+1} - 1}{2 \cdot \sqrt{2}} \right] \cdot 2 = 0,518.$$

Вычислим координаты остальных двух вершин симплекса с помощью найденных значений δ_1 и δ_2 :

$$\bar{x}^1 = [x_1^1, x_2^1]^T = [x_1^0 + \delta_2, x_2^0 + \delta_1]^T = [0 + 0,518; 0 + 1,932]^T = [0,518; 1,932]^T;$$

$$\bar{x}^2 = [x_1^2, x_2^2]^T = [x_1^0 + \delta_1, x_2^0 + \delta_2]^T = [0 + 1,932; 0 + 0,518]^T = [1,932; 0,518]^T.$$

Вычислим значения целевой функции задачи в вершинах первоначального симплекса:

$$f(\bar{x}^0) = (3 - x_1^0)^2 + (1 - x_2^0)^2 = (3 - 0)^2 + (1 - 0)^2 = 10,000;$$

$$f(\bar{x}^1) = (3 - x_1^1)^2 + (1 - x_2^1)^2 = (3 - 0,5176)^2 + (1 - 1,9318)^2 = 7,031;$$

$$f(\bar{x}^2) = (3 - x_1^2)^2 + (1 - x_2^2)^2 = (3 - 1,9318)^2 + (1 - 0,5176)^2 = 1,374.$$

Так как для вычисленных значений целевой функции в вершинах первоначального симплекса выполняется двойное неравенство $f(\bar{x}^0) > f(\bar{x}^1) > f(\bar{x}^2)$, нужно вершину \bar{x}^0 отразить относительно центра тяжести вершин \bar{x}^1 и \bar{x}^2 , т. е. относительно точки:

$$\bar{x}^c = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^2 \bar{x}^i = \frac{1}{2} \cdot (\bar{x}^1 + \bar{x}^2).$$

Используя формулу (4.12) при $\theta = 1$, получим:

$$\bar{x}^3 = \bar{x}^1 + \bar{x}^2 - \bar{x}^0 = [x_1^1 + x_1^2 - x_1^0, x_2^1 + x_2^2 - x_2^0]^T =$$

$$[0,518 + 1,932 - 0; 1,932 + 0,518 - 0]^T = [2,450; 2,450]^T.$$

В полученной точке \bar{x}^3 значение целевой функции будет равно:

$$f(\bar{x}^3) = (3 - x_1^3)^2 + (1 - x_2^3)^2 = (3 - 2,450)^2 + (1 - 2,450)^2 = 2,409.$$

Если для вновь полученной точки \bar{x}^3 и точек первоначального симплекса выполняются соотношения: $f(\bar{x}^1) = f(\bar{x}^2) < f(\bar{x}_{\text{нов}}) = f(\bar{x}^3) < f(\bar{x}^0) = f(\bar{x}^s) = f(\bar{x}^1)$, то отражение не следует ни сжимать, ни растягивать. Таким образом, новый симплекс будет образован точками \bar{x}^1 , \bar{x}^2 , \bar{x}^3 .

В качестве критерия нахождения минимума целевой функции (критерия «накрытия текущим симплексом» точки экстремума целевой функции) будем использовать критерий:

$$|f^h - f^l| < \varepsilon. \quad (4.13)$$

Для вновь построенного симплекса критерий окончания поиска экстремума целевой функции не выполняется, так как $|f^h - f^l| = |f(\bar{x}^1) - f(\bar{x}^2)| = |7,031 - 1,374| = 5,657 > \varepsilon = 0,100$. Поэтому процесс поиска минимума целевой функции нужно продолжить. Поскольку для вновь построенного симплекса выполняются неравенства: $f(\bar{x}^1) > f(\bar{x}^3) > f(\bar{x}^2)$, то нужно вершину симплекса \bar{x}^1 отразить относительно центра тяжести вершин \bar{x}^2 и \bar{x}^3 , т. е. точки:

$$\bar{x}^c = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^2 \bar{x}^i = \frac{1}{2} \cdot (\bar{x}^2 + \bar{x}^3).$$

Используя формулу (4.12) при $\theta=1$, получим:

$$\begin{aligned} \bar{x}^4 &= \bar{x}^2 + \bar{x}^3 - \bar{x}^1 = [x_1^2 + x_1^3 - x_1^1, x_2^2 + x_2^3 - x_2^1]^T = \\ &= [1,932 + 2,450 - 0,518; 0,518 + 2,450 - 1,932]^T = [3,864; 1,036]^T. \end{aligned}$$

В полученной точке \bar{x}^4 вычислим значение целевой функции:

$$f(\bar{x}^4) = (3 - x_1^4)^2 + (1 - x_2^4)^2 = (3 - 3,864)^2 + (1 - 1,036)^2 = 0,747.$$

Так как для вновь полученной точки \bar{x}^4 и точек текущего симплекса выполняются соотношения: $f(\bar{x}^1) = f(\bar{x}^2) > f(\bar{x}_{\text{нов}}) = f(\bar{x}^4)$, отражение следует растянуть в выбранном направлении. Положив в формуле (4.12) $\theta=2$, получим следующую формулу для нахождения координат новой отраженной точки $\bar{x}_{\text{нов}}$:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\text{нов}} &= \frac{3}{2} \cdot \bar{x}^2 + \frac{3}{2} \cdot \bar{x}^3 - 2 \cdot \bar{x}^1 = \left[\frac{3}{2} \cdot x_1^2 + \frac{3}{2} \cdot x_1^3 - 2 \cdot x_1^1, \frac{3}{2} \cdot x_2^2 + \frac{3}{2} \cdot x_2^3 - 2 \cdot x_2^1 \right]^T = \\ &= \left[\frac{3}{2} \cdot 1,932 + \frac{3}{2} \cdot 2,450 - 2 \cdot 0,518; \frac{3}{2} \cdot 0,518 + \frac{3}{2} \cdot 2,450 - 2 \cdot 1,932 \right]^T = [5,537; 0,588]^T. \end{aligned}$$

Во вновь полученной точке $\bar{x}_{\text{нов}}$ вычислим значение целевой функции:

$$f(\bar{x}_{\text{нов}}) = (3 - x_{1\text{нов}})^2 + (1 - x_{2\text{нов}})^2 = (3 - 5,534)^2 + (1 - 0,588)^2 = 6,591.$$

Так как в точке $\bar{x}_{\text{нов}}$ значение целевой функции больше, чем в точке \bar{x}^4 , то приходим к выводу, что отражение с растяжением эффекта в данном конкретном случае не дало. Поэтому останавливаемся на варианте с нормальным отражением. Таким образом, текущий симплекс составят точки \bar{x}^2 , \bar{x}^3 и \bar{x}^4 . Для значений целевой функции в вершинах текущего симплекса выполняются неравенства $f(\bar{x}^3) > f(\bar{x}^2) > f(\bar{x}^4)$. Значит, вершину текущего симплекса \bar{x}^3 нужно отразить относительно центра тяжести вершин \bar{x}^2 и \bar{x}^4 . И этот процесс преобразования текущего симплекса в следующий будет продолжаться до тех пор, пока для текущего симплекса не будет выполнено соотношение

(4.13). В результате получено следующее оптимальное решение:
 $\bar{x}_{opt} = [3,044; 0,968]^T$, $f(x_{opt}) = 0,003$.

4.2.2. Метод наискорейшего спуска

В основе методов решения задач безусловной нелинейной оптимизации, относящихся ко второму классу, то есть методов k – го порядка ($k > 0$) лежат положения теории дифференциального исчисления, определяющие месторасположение экстремумов функций с помощью значений ее производных различных порядков.

Пусть целевая функция $f(\bar{x})$ задачи безусловной нелинейной оптимизации является k раз непрерывно дифференцируемой функцией. Если точка \bar{x}^* является точкой экстремума функции $f(\bar{x})$, то она является ее стационарной точкой, т.е. точкой, в которой первые ее частные производные равны нулю [12]:

$$\frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1, n}. \quad (4.14)$$

Таким образом, экстремумы целевой функции $f(\bar{x})$ задачи безусловной нелинейной оптимизации нужно искать среди ее стационарных точек. Однако не любая стационарная точка функции является точкой экстремума. Для решения вопроса о наличии экстремума функции многих переменных в стационарной точке находят значения вторых ее частных производных в этой точке, и из полученных значений этих частных производных составляют матрицу, называемую матрицей Гессе:

$$H(\bar{x}^*) = \nabla^2 f(\bar{x}^*) = f''(\bar{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Для того чтобы функция $f(\bar{x})$ имела в стационарной точке \bar{x}^* локальный минимум, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке все главные диагональные миноры матрицы Гессе были положительны.

Для того чтобы функция $f(\bar{x})$ имела в стационарной точке \bar{x}^* локальный максимум, необходимо и достаточно, чтобы у матрицы Гессе главные диагональные миноры нечетных степеней были отрицательны в этой точке, а миноры четных степеней – положительны.

Рассмотрим, на следующем примере, как можно найти решения задачи безусловной нелинейной оптимизации с использованием этих положений теории дифференциального исчисления.

Пример. Найти: $\min (f(\bar{x}) = 4 \cdot x_1^3 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2)$.

Решение. Найдем стационарные точки функции $f(\bar{x})$ из условий равенства нулю первых ее частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} = 12 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_2 = 0, \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} = -2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{6}, \\ x_2 = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

В результате решения системы найдены две стационарные точки $A(0, 0)^T$ и $B(1/3, 1/3)^T$. Определим, являются ли они точками минимума целевой функции $f(\bar{x})$ искомой задачи. Составим матрицу Гессе и вычислим ее значение в точке A .

$$f''(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \cdot x_1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$f''(A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Вычислим главные диагональные миноры матрицы $f''(A)$.

$$M_1 = 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Так как минор первого порядка $M_1 = 0$, то точка A не является точкой минимума целевой функции $f(\bar{x})$ решаемой задачи.

Теперь составим матрицу Гессе в точке B :

$$f''(B) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Вычислим главные диагональные миноры матрицы $f''(B)$.

$$M_1 = 4 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0.$$

Так как в точке B оба главных минора M_1 и M_2 матрицы Гессе положительны, то она является точкой минимума целевой функции $f(\bar{x})$ решаемой задачи. Таким образом, решением задачи является точка $\bar{x}_{\min} = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right]^T$ и в ней

значение целевой функции равно $f(\bar{x}_{\min}) = -\frac{1}{108}$.

В случае, когда целевая функция задачи безусловной нелинейной оптимизации более сложная и размерность задачи больше двух, так просто решить ее удастся очень редко. В этом случае нужно применять специальные методы. Одним из таких методов является метод наискорейшего спуска, который относится к классу градиентных методов.

Метод наискорейшего спуска (Коши) относится к классу градиентных методов. Все градиентные методы основаны на итерационной процедуре, реализуемой в соответствии с формулой:

$$\bar{x}_i^{k+1} = \bar{x}_i^k + \Delta \bar{x}^k, (i = \overline{1, n}), \quad (4.16)$$

где \bar{x}^k – текущее приближение к решению \bar{x}^* ; $\Delta \bar{x}^k$ – вектор, направление которого определяется градиентом целевой функции в точке текущего приближения к решению задачи. Способ определения длины вектора $\Delta \bar{x}^k$ на каждой итерации связан с особенностями применяемого метода.

В основе простейшего градиентного метода лежит формула:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \alpha \cdot \nabla f(\bar{x}^k), (i = \overline{1, n}), \quad (4.17)$$

где α – заданный положительный параметр, $\nabla f(\bar{x}^k)$ – градиент целевой функции задачи в точке текущего приближения. Методу присущи следующие недостатки: во первых, возникает необходимость выбора подходящего значения α , и во вторых, ему свойственна медленная сходимость вблизи точки минимума вследствие малости ∇f в окрестности этой точки. В связи с чем целесообразно определять значение α на каждой итерации:

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k - \alpha^k \cdot \nabla f(\bar{x}^k), \quad (4.18)$$

значение α^k определяется путем решения задачи минимизации $f(\bar{x})$ вдоль направления $\nabla f(\bar{x}^k)$ с помощью того или иного метода одномерного поиска.

В отличие от других градиентных методов движение в методе наискорейшего спуска осуществляется в выбранном направлении градиента до тех пор, пока наблюдается улучшение значения целевой функции. В этой точке вновь определяют направление поиска (с помощью вектора градиента) и ищут новую точку минимума целевой функции и т.д. Таким образом, в методе наискорейшего спуска поиск минимума целевой функции происходит более крупными шагами, и градиент целевой функции вычисляется в меньшем числе точек. При этом перемещения от точки текущего приближения к точке следующего приближения осуществляются в направлении, перпендикулярном предыдущему направлению перемещения. Вычисления заканчиваются тогда, когда выполнится одно из условий (4.6) или (4.7).

Рассмотрим реализацию алгоритма метода наискорейшего спуска на примере решения следующей задачи.

Пример. Определить с точностью $\varepsilon=0,100$, методом наискорейшего спуска, минимум функции:

$$f(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 10,$$

начиная итерационный процесс с точки $\bar{x}^0 = [1, 0]^T$.

Решение. Определим градиент функции $f(\bar{x})$ в точке начала поиска $\bar{x}^0 = [1, 0]^T$.

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 2 \cdot x_1 - 4 \\ 2 \cdot x_2 + 2 \end{bmatrix},$$

$$\nabla f(\bar{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 \cdot x_1^0 - 4 \\ 2 \cdot x_2^0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 4 \\ 2 \cdot 0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения \bar{x}^1 точки следующего приближения к минимуму функции $f(\bar{x})$ имеем формулу:

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^0 - \alpha^0 \cdot \nabla f(\bar{x}^0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha^0 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \cdot \alpha^0 \\ -2 \cdot \alpha^0 \end{bmatrix}.$$

Найдем градиент функции $f(\bar{x})$ в точке \bar{x}^1 :

$$\nabla f(\bar{x}^1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot x_1^1 - 4 \\ 2 \cdot x_2^1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (1 + 2 \cdot \alpha^0) - 4 \\ 2 \cdot (-2 \cdot \alpha^0) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot \alpha^0 - 2 \\ -4 \cdot \alpha^0 + 2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку точка \bar{x}^1 должна выбираться как точка минимума $f(\bar{x})$ в направлении вектора $\nabla f(\bar{x}^0)$, для нахождения значения α^0 имеем уравнение:

$$\frac{d\nabla f}{d\alpha^0} = \nabla f(\bar{x}^0) \cdot \nabla f(\bar{x}^1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \cdot \alpha^0 - 2 \\ -4 \cdot \alpha^0 + 2 \end{bmatrix} = 0.$$

Решив его относительно α^0 , получаем:

$$(-2) \cdot (4 \cdot \alpha^0 - 2) + 2 \cdot (-4 \cdot \alpha^0 + 2) = -8 \cdot \alpha^0 + 4 - 8 \cdot \alpha^0 + 4 = 0 \Leftrightarrow -16 \cdot \alpha^0 = -8 \Rightarrow \alpha^0 = 1/2.$$

Таким образом:

$$\bar{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 + 2 \cdot \alpha^0 \\ -2 \cdot \alpha^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \cdot (1/2) \\ -2 \cdot (1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Выясним, нельзя ли точку \bar{x}^1 считать с точностью $\varepsilon = 0,100$ минимумом целевой функции $f(\bar{x})$, для этого проверим выполнение условия (4.7) т.е.:

$$|f(\bar{x}^0) - f(\bar{x}^1)| < \varepsilon.$$

Вычисляем значения $f(\bar{x})$ в точках \bar{x}^0 и \bar{x}^1 :

$$f(\bar{x}^0) = f(x_1^0, x_2^0) = 1^2 + 0^2 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 10 = 7,$$

$$f(\bar{x}^1) = f(x_1^1, x_2^1) = 2^2 + (-1)^2 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 10 = 5.$$

Так как справедливо соотношение:

$$|f(\bar{x}^0) - f(\bar{x}^1)| = |7 - 5| = 2 > \varepsilon = 0,100,$$

то точку \bar{x}^1 нельзя считать точкой минимума $f(\bar{x})$, нужно вычислять следующее приближение. Для этого вначале вычисляем вектор-градиент функции $f(\bar{x})$ в точке \bar{x}^1 :

$$\nabla f(\bar{x}^1) = \begin{bmatrix} 4 \cdot \alpha^0 - 2 \\ -4 \cdot \alpha^0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot (1/2) - 2 \\ -4 \cdot (1/2) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Далее вычисляем \bar{x}^2 по формуле:

$$\bar{x}^2 = \bar{x}^1 - \alpha^1 \cdot \nabla f(\bar{x}^1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \alpha^1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку компоненты вектора-градиента $\nabla f(\bar{x}^1)$ в точке \bar{x}^1 оказались нулевыми, то точка второго приближения к минимуму функции $f(\bar{x})$ \bar{x}^2 совпала с точкой первого приближения \bar{x}^1 . Проверим для точек \bar{x}^1 и \bar{x}^2 выполнение условия (4.7):

$$|f(\bar{x}^1) - f(\bar{x}^2)| = |5 - 5| = 0 < \varepsilon = 0,100.$$

Условие (4.7) выполняется, значит с требуемой точностью $\varepsilon = 0,100$, второе приближение \bar{x}^2 может считаться точкой минимума целевой функции задачи.

4.2.3. Популяционные методы

В настоящее время при решении задач глобальной оптимизации все чаще применяется класс стохастических методов, алгоритмы которых основаны на использовании биологических законов и процессов. Этот класс методов в разных работах называют поведенческим, роевым, инспирированным природой, популяционным. Последний термин наиболее точно отражает суть этого класса методов. Среди наиболее известных методов, относящихся к классу популяционных, можно назвать такие: метод роя частиц (Particle Swarm Optimization), метод «Искусственного рыбьего косяка» (Artificial Fish Swarm Algorithm), обезьяний метод (Monkey search), метод бактериальной оптимизации (Bacterial Optimization Method), метод пчелиного роя (Bees Algorithm).

Основная идея популяционных методов оптимизации заключается в моделировании поведения скопления особей, обладающих простейшим искусственным интеллектом. Они различаются правилами поведения элементов и наличием (отсутствием) структуры популяции.

Из достоинств популяционных методов можно выделить:

- отсутствие ограничения на типы функций, входящих в математическую модель задачи,
- не локальность,
- простота реализации,
- возможность распараллеливания.

Из недостатков популяционных методов нужно отметить:

- решение задач оптимизации невысокой размерности,
- зависимость от значений свободных параметров, число которых в большинстве методов достаточно велико.

Рассмотрим один из наиболее широко используемых популяционных методов, который подробно описан в монографии [15].

Метод пчелиного роя можно лишь условно отнести к методам решения задач безусловной нелинейной оптимизации, потому что при реализации алгоритма метода оптимизация целевой функции осуществляется в гиперпараллелепипеде $G_x \in R^n$. При практической реализации алгоритма метода размеры гиперпараллелепипеда приходится брать конечными, тогда решаемая задача оптимизации будет являться задачей условной оптимизации. Но теоретически размеры гиперпараллелепипеда можно считать бесконечными, тогда решаемая задача оптимизации будет являться задачей безусловной оптимизации, поэтому отнесем этот метод к классу методов для решения задач безусловной оптимизации и рассмотрим в данном параграфе.

Метод пчелиного роя был предложен Д.Т. Фамом с соавторами в 2006 году [16]. По своей сути алгоритм этого метода моделирует поведение роя пчел при сборе ими меда. Процесс сбора меда роем пчел осуществляется следующим образом. Вначале из улья в случайном направлении для поиска нектара направляется некоторое количество пчел-разведчиков. Через некоторое время они возвращаются в улей и информируют определенным образом (путем исполнения ритуального танца) остальных пчел, где и сколько нектара они обнаружили. После этого на обследованные участки направляются завербованные (рабочие) пчелы для сбора нектара. Количество рабочих пчел, летящих на тот или иной участок, зависит от того, какое количество нектара там было обнаружено и на каком удалении от улья он находится. Пчелы-разведчики улетают на обследование других участков. После этого процесс повторяется.

Формализуем представленную схему алгоритма метода пчелиного роя. Рассмотрим задачу глобальной оптимизации (максимизации объема собранного меда) в гиперпараллелепипеде $G_x \in R^n$, т.е. число параметров оптимизации есть n . Предположим, что в рое m пчел из них p разведчиков и соответственно $s = m - p$ рабочих (сборщиков нектара). Обозначим множество пчел в рое $S = \{s_i, i = \overline{1, m}\}$, множество пчел-разведчиков $S^r = \{s_i^r, i = \overline{1, p}\}$ и множество рабочих пчел $S^c = \{s_i^c, i = \overline{p+1, m}\}$. Между этими множествами выполняется соотношение $S = S^r + S^c$.

Тогда $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть значение целевой функции (количество нектара, которое обнаружит пчела-разведчик или соберет рабочая пчела) в точке $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$;

$f(\bar{x}_i^r)$ – значение целевой функции, соответствующее положению пчелы-разведчика $s_i^r, i = \overline{1, p}$;

$f(\bar{x}_i^c)$ – значение целевой функции, соответствующее положению пчелы-сборщика $s_i^c, i = \overline{p+1, m}$.

В точках $\bar{x}_j^r, j = \overline{1, p}$, где оказались пчелы-разведчики, вычисляем значения целевой функции и ранжируем эти точки в порядке убывания значений целевой функции. Разбиваем множество этих точек на три подмножества:

множество элитных точек – это множество, состоящее из b точек с наибольшими значениями целевой функции; множество перспективных точек – это множество, состоящее из d точек со значениями целевой функции, идущими в ранжированном линейном списке за значениями целевой функции в точках элитного множества; множество бесперспективных точек – это множество, состоящее из оставшихся $m - b - d$ точек с наименьшими значениями целевой функции.

Вокруг элитных точек создаем множество элитных участков: $A^e = \{a_j^e, j = \overline{1, b}\}$, представляющих гиперпараллелепипеды, центры которых находятся в точках $\overline{x_j^e}$ ($j = \overline{1, b}$) с радиусами r_i^e ($i = \overline{1, n}$) и гранями параллельными плоскостям координат. Для обследования каждого из элитных участков направляем n_b пчел.

Аналогично, вокруг перспективных точек создаем множество перспективных участков: $A^p = \{a_j^p, j = \overline{1, d}\}$, представляющих гиперпараллелепипеды, центры которых находятся в точках $\overline{x_j^p}$ ($j = \overline{1, d}$) с радиусами r_i^p ($i = \overline{1, n}$) и гранями, параллельными плоскостям координат. Для обследования каждого из перспективных участков направляем n_p пчел.

При формировании элитных участков может возникнуть ситуация, когда евклидово расстояние $\|\overline{x_{i_1}^e} - \overline{x_{i_2}^e}\|$ между центрами некоторых участков оказывается меньше заданной величины $\varepsilon_e > 0$:

$$\|\overline{x_{i_1}^e} - \overline{x_{i_2}^e}\| \leq \varepsilon_e, i_1, i_2 \in [1, b], i_1 \neq i_2.$$

В таком случае поступаем следующим образом: ставим в соответствие этим двум точкам один участок a_j^e с центром в той точке $\overline{x_{i_1}^e}$ или $\overline{x_{i_2}^e}$, в которой значение целевой функции больше.

Точно так же разрешаем ситуацию, когда при формировании перспективных участков a_k^p сталкиваемся с неравенством:

$$\|\overline{x_{k_1}^p} - \overline{x_{k_2}^p}\| \leq \varepsilon_p, k_1, k_2 \in [1, p], k_1 \neq k_2,$$

где $\varepsilon_p > 0$ – свободный параметр, определяющий условие отличия разных перспективных участков.

В случае встречи с ситуацией, когда малым оказывается евклидово расстояние между точками $\overline{x_i^e}$ и $\overline{x_k^p}$, поступаем следующим образом: просто исключаем точку $\overline{x_k^p}$ из рассмотрения.

При принятых обозначениях алгоритм метода будет иметь следующий вид.

1) В гиперпараллелепипеде $G_x \in R^n$ с помощью генератора равномерно распределенных случайных чисел генерируются p точек $\overline{x_j^r}$ ($j = \overline{1, p}$), отправляем в эти точки пчел-разведчиков. Вычисляем в этих точках значения

целевой функции $f(\bar{x}_j^r)$ ($j=\overline{1,p}$). Ранжируем эти точки в порядке убывания в них значений целевой функции.

2) Вокруг первых b точек с наибольшими значениями целевой функции генерируем элитные участки a_j^e ($j=\overline{1,b}$) с центрами в этих точках. А вокруг m последующих точек создаем перспективные участки a_j^p ($j=\overline{1,d}$).

3) В каждый из элитных участков a_j^e и перспективных участков a_j^p направляем по n_b и n_p рабочих пчел, соответственно. При этом должно выполняться соотношение: $n_b \cdot b + n_p \cdot p = m - p$. Координаты точек, куда направляются эти рабочие пчелы, определяются случайным образом внутри соответствующих участков, с помощью генератора равномерно распределенных чисел. В тех точках, куда были посланы пчелы, вычисляем значения целевой функции.

4) Проверяем выполнение критерия нахождения решения задачи. Если критерий выполнен, то решение задачи найдено. В качестве решения задачи среди всех сгенерированных на данной итерации точек выбираем ту, в которой достигается наибольшее значение целевой функции, и на этом реализация алгоритма метода заканчивается. Если же критерий достижения решения задачи не выполнен, то ранжируем все сгенерированные на данной итерации точки по убыванию значений целевой функции и переходим к пункту 2 алгоритма. В качестве критерия нахождения решения задачи может использоваться условие невозрастания значения целевой функции в течение v – последних итераций или достижения числа итераций предельного значения t_{end} .

Поскольку методы, относящиеся к классу популяционных, не предъявляют жестких требований к функциям, входящим в математическую модель решаемых задач оптимизации они наиболее подходят для решения задач топологической оптимизации, потому что в задачах топологической оптимизации целевые функции являются многоэкстремальными, а популяционные методы наиболее эффективны при решении таких задач.

В связи с прикладной ценностью в последнее время усиленно исследуются задачи структурной и топологической оптимизации конструкций. Проблема оптимизации сложных конструкций является актуальной для многих отраслей современной промышленности и в частности – строительной отрасли. На этапе проектирования нового изделия, особенно, включающего высоконагруженные элементы с жесткими ограничениями на допустимую массу, важно провести анализ распределения материала в деталях, то есть оптимизировать их топологию.

Задачи топологической оптимизации ориентированы на экономичность конструкций. Если сначала эти задачи решались по большей части интуитивно, то сейчас появились научные подходы к их решению.

Структурная оптимизация предполагает определение геометрических свойств конструкций, оптимальных в соответствии с заданными критериями

[34]. В зависимости от изменения свойств конструкции выделяют оптимизацию размеров (рис. 27а), формы (рис. 27б) и топологии (рис. 27с) [35].

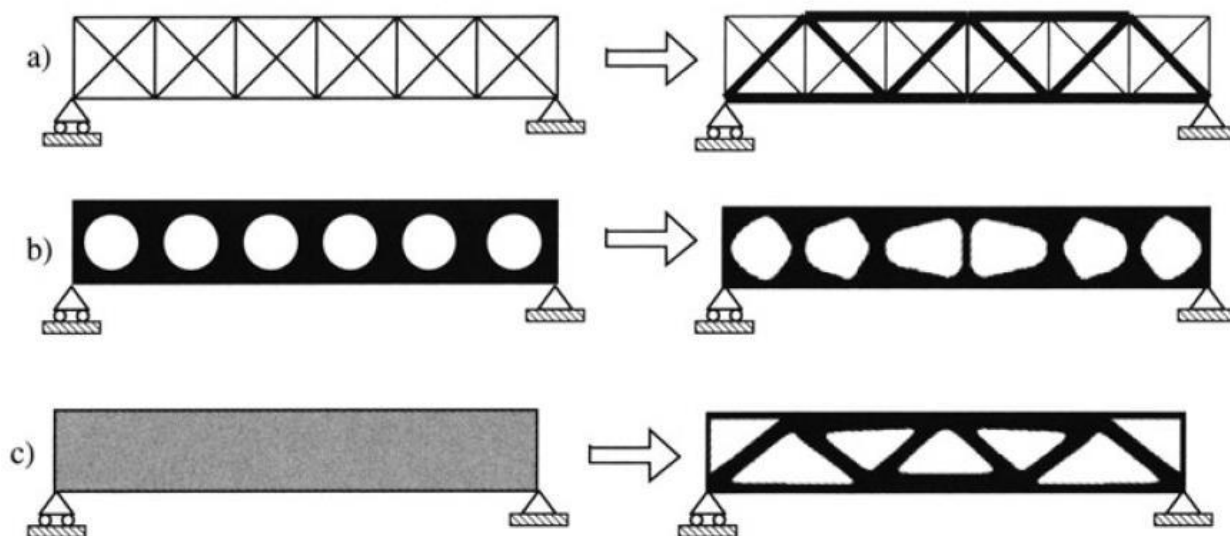


Рис. 27. а) Оптимизация размеров, б) оптимизация формы, с) оптимизация топологии

Оптимизация размеров состоит в определении значений параметров конструкции, дающих оптимальную структуру. Изначально использовались простые методы изменения геометрии конструкции и оптимизировались лишь простейшие структуры, такие как фермы, пластины [36].

Под оптимизацией формы понимают сохранение неизменной топологии при изменении формы. Форма конструкции задается переменными оптимизации.

Под топологической оптимизацией подразумевают оптимальное распределение материала в данной области при заданных нагрузках и определенных ограничениях [34, 35]. Зачастую задача наилучшего размещения материала в определенной области формулируется как минимизация податливости (максимизация жесткости) конструкции. Целевая функция задачи определяет податливость конструкции, испытывающей один или несколько вариантов нагружения, ограничения по деформациям или по главной собственной частоте.

Оптимизация топологии – наиболее сложный тип задач по сравнению с оптимизацией размеров и форм. Она включает в себя определение формы и расположения «пустот» в конструкции, также связность в структуре (рис. 28). Переменные топологической оптимизации должны определять топологию конструкции. Следовательно, оптимизация состоит в определении таких значений переменных детали, которые дают оптимальную топологию детали.

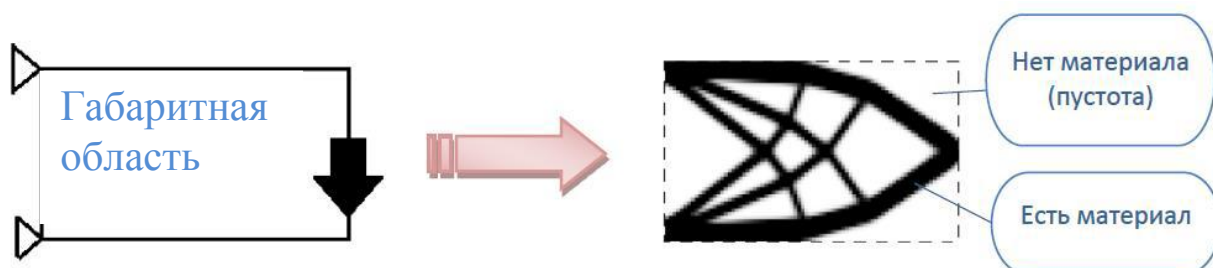


Рис. 28 Пример: Топологическая оптимизация плоского кронштейна

Целью топологической оптимизации является увеличение или уменьшение выбранного свойства конструкции (например, уменьшение энергии деформации, увеличение главной собственной частоты) при удовлетворении определенных ограничений (например, неперевышения массы конструкции определенного значения).

Первые исследования по оптимизации топологии деталей относились к проектированию скелетообразных структур. Достаточно полный обзор литературы, посвященной оптимизации скелетообразных структур, представлен Топпингом [37]. При оптимизации топологии конструкций актуально использование *подхода базовой структуры*. Согласно этому подходу, пространство конструкции покрывается решеткой узлов, в которых действует нагрузка и задаются ограничения. Создание базовой конструкции происходит путем соединения каждого узла с остальными. Такой относительно простой алгоритм поиска позволяет оптимизировать базовую структуру для получения минимального веса при требовании, что нагрузка на конструкцию не превысит предел пластичности.

Мартин Бэнсоу и Нобору Кикучи в своей работе [38] предположили, что материал является пористым, и нашли решение задачи оптимизации относительно степени пористости. Согласно их подходу, плоскость конструкции определяется в качестве пространства, внутрь которого помещается деталь. Это пространство делится на сетку ячеек, к которым прикладывается нагрузка. Целевой функцией является податливость структуры, а ограничением предстает максимальный вес. Подразумевается, что материал состоит из бесконечного количества особых ячеек со своей микроструктурой.

Для решения задачи наилучшего распределения пористости используется *алгоритм критерия оптимальности* [34, 38]. Свойства материала являются непрерывными функциями размеров полостей. Для определения коэффициентов при каждом значении размера полости нужно выполнение анализа методом конечных элементов. Идея алгоритма оптимизации заключается в том, что увеличиваются размеры полостей в тех элементах, где нагрузка на материал недостаточно высока, и уменьшаются размеры полостей там, где нагрузка слишком сильна [39]. Направленность полостей в единичных ячейках выбирается таким образом, чтобы жесткость детали была максимальной.

Рассмотрим пример на решение задачи топологической оптимизации с помощью метода пчелиного роя, относящегося к классу популяционных методов.

Пример. В качестве примера рассмотрим топологическую оптимизацию конструкции кронштейна, изображение которого приведено на рис. 28. Задача решалась на основе степенной модели (power-law approach) [40].

Рассматривалась следующая формулировка задачи топологической оптимизации кронштейна.

Найти такое распределение материала кронштейна, обеспечивающее минимум податливости $c(x)$ конструкции, которое определяется на основе специальной реализации метода конечных элементов для расчета напряженно-деформированного состояния конструкции:

$$\left(c(\bar{x}) = U^T \cdot K \cdot U = \sum_{el=1}^N (x_{el})^p \cdot K_{el} \cdot u_{el} \right) \rightarrow \min,$$

при заданной величине заполнения материалом объема конструкции

$$\frac{V(\bar{x})}{V_0} = f,$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2 \dots x_N)$ – степень заполнения материалом элемента конструкции; N – число элементов; $el = 1, 2, \dots N$ – номер элемента; $x_{\min} \leq x_{el} \leq 1$; x_{\min} – минимально возможное заполнение материалом, не равное нулю для исключения сингулярностей ($x_{\min} = 0,001$); K_{el} – матрица жесткости элемента; K – глобальная матрица жесткости; u_{el} – вектор узловых смещений элемента; U – глобальный вектор узловых смещений; p – штрафной фактор степенной модели, заданный в диапазоне $p = 2 \div 5$, ($p = 3$).

Узловые смещения U находятся методом конечных элементов, решением системы линейных уравнений вида:

$$K_{free} \cdot U_{free} = F_{free},$$

где U_{free} – сокращенный глобальный вектор узловых смещений, из которого удалены переменные, фиксированные граничными условиями; K_{free} – сокращенная глобальная матрица жесткости; F_{free} – сокращенный вектор узловых нагрузок.

При решении задачи использовались квадратные 4-узловые двумерные конечные элементы с 8 степенями свободы (узловыми смещениями по осям x и y). Нумерация элементов, узлов и степеней свободы задана: по вертикали сверху вниз, по горизонтали слева направо.

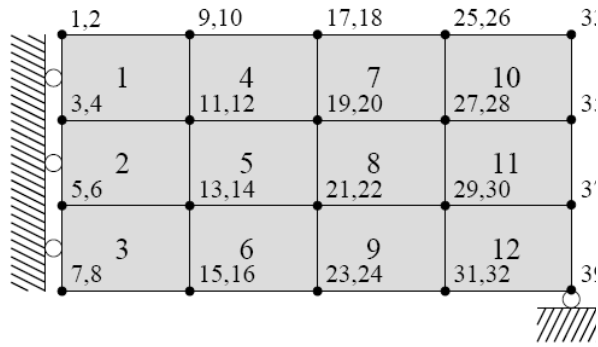


Рис. 29. Схема нумерации элементов
и узловых смещений

Для выбранного типа конечного элемента и способа нумерации степеней свободы матрица жесткости имеет вид:

$$K_{el} = k_0 \cdot \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ k_2 & k_1 & k_8 & k_7 & k_6 & k_5 & k_4 & k_3 \\ k_3 & k_8 & k_1 & k_6 & k_7 & k_4 & k_5 & k_2 \\ k_4 & k_7 & k_6 & k_1 & k_8 & k_3 & k_2 & k_5 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_6 & k_5 & k_4 & k_3 & k_2 & k_1 & k_8 & k_7 \\ k_7 & k_4 & k_5 & k_2 & k_3 & k_8 & k_1 & k_6 \\ k_8 & k_3 & k_2 & k_5 & k_4 & k_7 & k_6 & k_1 \end{pmatrix},$$

где

$$k_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad k_2 = \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8}, \quad k_3 = -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12}, \quad k_4 = -\frac{1}{8} + \frac{3\nu}{8}, \quad k_5 = -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12}, \\ k_6 = -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8}, \quad k_7 = \frac{\nu}{6}, \quad k_8 = \frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8};$$

E – модуль Юнга материала; ν – коэффициент Пуассона материала конструкции.

Глобальная матрица жесткости размерности $8 \cdot N_{el} \times 8 \cdot N_{el}$ вычисляется по формуле:

$$K = \sum_{el=1}^N (x_{el})^p \cdot K_{el}$$

с учетом нумерации степеней свободы.

Системы линейных уравнений для узловых смещений U решались методом Гаусса. Задача условной оптимизации функции податливости $c(x)$ решалась методом пчелиного роя в совокупности с методом штрафных функций.

Условие-ограничение для фиксированного объема материала учитывалось методом штрафных функций, т.е. целевая функция заменялась на функцию, включающую выражение, положительное значение которого возрастает при нарушении условия-ограничения:

$$(Z(x) = c(x) + A(\frac{V(x)}{V_0} - f)^2) \rightarrow \min,$$

где $A > 0$ – достаточно большое число.

1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,86	0,36	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,76	0,45	0,36	0,37	0,40	0,48	0,69	0,81	0,94	1,00	0,63	0,18	0,02	0,00	0,00
0,04	0,09	0,12	0,30	0,81	1,00	0,77	0,29	0,11	0,13	0,44	0,73	0,46	0,25	0,62	1,00	0,98	0,43	0,10	0,01
0,00	0,00	0,00	0,01	0,12	0,49	0,99	0,99	0,62	0,45	0,74	0,58	0,16	0,02	0,06	0,27	0,81	1,00	0,79	0,36
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,24	0,71	0,99	0,95	0,70	0,23	0,02	0,00	0,00	0,01	0,11	0,45	1,00	1,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,24	0,71	0,99	0,95	0,70	0,23	0,02	0,00	0,00	0,01	0,11	0,45	1,00	1,00
0,00	0,00	0,00	0,01	0,12	0,49	0,99	0,99	0,62	0,45	0,74	0,58	0,16	0,02	0,06	0,27	0,81	1,00	0,79	0,36
0,04	0,09	0,12	0,30	0,81	1,00	0,77	0,29	0,11	0,13	0,44	0,73	0,46	0,25	0,62	1,00	0,98	0,43	0,10	0,01
1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,76	0,45	0,36	0,37	0,40	0,48	0,69	0,81	0,94	1,00	0,63	0,18	0,02	0,00	0,00
1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,86	0,36	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00

Рис. 30. Результаты оптимизации

На рис. 30 изображены результаты оптимизации со значениями степени заполнения материалом конечных элементов кронштейна. Они вычислялись путем решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. На основе этих значений строилась сама конструкция кронштейна, т.е. задавалось распределение материала конструкции кронштейна. Графическое изображение конструкции кронштейна приведено на рис. 31. На нем цвет ячеек изменяется в зависимости от значений заполненности конечных элементов материалом. Белый цвет означает отсутствие материала в точках данного элемента.

Оптимизация конструкции кронштейна была выполнена с помощью программного кода топологической оптимизации [36], который находится в открытом доступе.

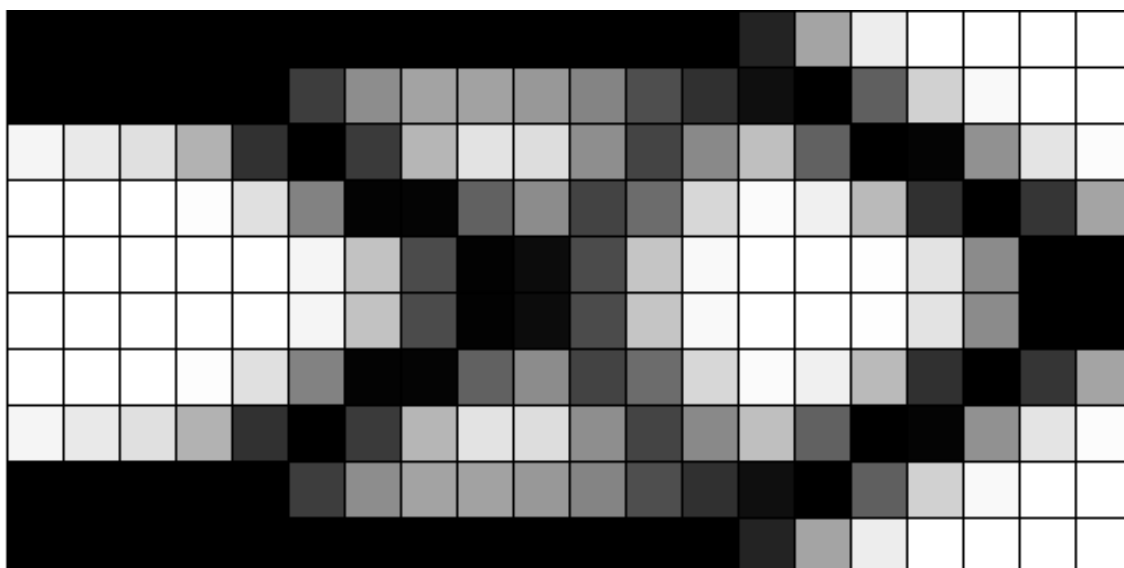


Рис. 31

На рис. 31 показан итог расчетов. На нем показана конструкция кронштейна, полученная путем решения одним из популяционных методов (методом пчелиного роя) задачи топологической оптимизации. Ячейки белого цвета означают отсутствие материала.

4.3. Методы для решения задач условной нелинейной оптимизации

Существует два подхода к решению задач условной нелинейной оптимизации [12]:

- сведение исходной задачи НЛП при помощи штрафных функций к задаче безусловной оптимизации;
- решение напрямую исходной условной задачи НЛП.

Исторически раньше начал развиваться первый подход, поэтому в настоящее время более разработанным является этот подход, хотя в последнее время интенсивней разрабатываются методы, реализующие второй подход.

4.3.1. Метод штрафных функций

Первый подход. Для того чтобы подробнее познакомиться с ним, необходимо разобраться с понятием штрафных функций.

Штрафные функции. Все рассмотренные ранее методы решения задач могут быть применены только для решения задач безусловной оптимизации. Чтобы решить этими методами задачи условной оптимизации, необходимо их предварительно свести к задачам безусловной оптимизации. Условные задачи НЛП преобразуются в безусловные задачи НЛП, потому что они решаются легче. Для этой цели может быть использован метод штрафных функций. В этом методе все ограничения включаются в целевую функцию, и в результате формируется безусловная задача с обобщенной целевой функцией:

$$P(\bar{x}, R) = f(\bar{x}) + \Omega(R, \varphi(\bar{x}), \psi(\bar{x})), \quad (4.19)$$

где R – набор штрафных параметров, а так называемый штраф Ω является функцией R и функций $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$, задающих ограничения задачи НЛП (4.1)–(4.2). Методы штрафных функций классифицируются в соответствии с учетом ограничений неравенств. Штрафные функции Ω строятся таким образом, чтобы они в допустимой области задачи (4.1)–(4.2) равнялись нулю и стремились к ∞ в недопустимой области. В любом случае штрафные функции Ω формируются так, чтобы допустимые точки задачи (4.1)–(4.2) имели преимущество перед не допустимыми, в отношении безусловной минимизации обобщенной целевой функции. Методы внутренней точки связаны с такими штрафными функциями Ω , для которых стационарные точки обобщенной целевой функции $P(\bar{x}, R)$ оказываются заведомо допустимыми. Эти методы также называют методами барьеров, поскольку здесь штраф как бы создает вдоль границы допустимой области барьер из бесконечно больших значений функции $P(\bar{x}, R)$. Очевидно, что любой метод, базирующийся на преобразовании задачи условной оптимизации в последовательность подзадач безусловной оптимизации, может представлять интерес лишь при выполнении следующих требований:

1. Решения последовательности подзадач безусловной оптимизации должны стремиться к решению исходной задачи нелинейного программирования $\lim \bar{x} = \bar{x}^*$.

2. Сложность оптимизации $P(\bar{x}, R)$ должна быть того же порядка, что и для функции $f(\bar{x})$. Даже при наличии исчерпывающего теоретического обоснования сходимости метод будет не особенно полезен, если подзадачи безусловной оптимизации поддаются решению с большим трудом, чем исходная задача условной оптимизации.

3. Правило пересчета набора штрафных параметров от итерации к итерации $R^{T+1} = F(R^T)$ должно быть простым.

Основные виды штрафов. Рассмотрим несколько видов штрафных функций, которые наиболее часто используются при решении задач условной нелинейной оптимизации методом штрафных функций.

Для учета ограничений типа равенств используется квадратичный штраф:

$$\Omega = \sum_{i \in J} r_{ik} \cdot \psi_i(\bar{x})^2 \text{ при } \psi_i(\bar{x}) \neq 0, i \in J, \quad (4.20)$$

где J – множество нарушенных ограничений задачи $\psi_i(\bar{x})$ (4.1)–(4.2), r_{ik} – штрафной параметр для i -го ограничения на k -ой итерации. Штрафные параметры r_{ik} представляют собой монотонно возрастающие последовательности ($r_{i1} < r_{i2} < r_{i3} < \dots$, $r_{ik} \dots$). Они выбираются следующим образом: $r_{ik} = r_{i0} \cdot q^{k-1}$ ($q > 1$, $r_{i0} \approx \text{от } 10^{-4} \text{ до } 10^{-2}$).

При минимизации этот штраф препятствует отклонению величины $\psi_i(\bar{x})$ от нуля как в сторону положительных, так и отрицательных значений.

На начальной стадии решения штрафные параметры R берутся малыми и затем с каждой итерацией увеличиваются, что обеспечивает сходимость стационарной точки соответствующей обобщенной целевой функции $P(\bar{x}, R)$ к \bar{x}^* , поскольку $\psi_i(\bar{x}^*) = 0$.

К ограничениям типа неравенств применяется несколько видов штрафов.

Бесконечный барьер (рис. 32):

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi_i(\bar{x}) \geq 0, \quad i = \overline{1, m_1} \\ 10^{20} \cdot \sum_{i \in J} |\varphi_i(\bar{x})| & \text{при } \varphi_i(\bar{x}) < 0, i \in J, \end{cases} \quad (4.21)$$

где J – множество нарушенных ограничений задачи (4.1)–(4.2).

Штраф типа квадрата срезки (рис. 33):

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi_i(\bar{x}) \geq 0, \quad i = \overline{1, m_1} \\ \sum_{i \in J} r_{ik} \cdot \varphi_i(\bar{x})^2 & \text{при } \varphi_i(\bar{x}) < 0, i \in J, \end{cases} \quad (4.22)$$

где J – множество нарушенных ограничений $\varphi_i(\bar{x})$ задачи (4.1)–(4.2), r_{ik} – штрафной параметр для i -го ограничения на k -ой итерации. Штрафные параметры r_{ik} представляют собой монотонно убывающие и сходящиеся к нулю последовательности ($r_{i1} > r_{i2} > r_{i3} > \dots > 0$, $r_{ik} \rightarrow +0$ при $k \rightarrow \infty$). Обычно r_{ik} выбираются следующим образом: а) $r_{ik} = r_{i0} / q^{k-1}$ ($q > 1$, $r_{i0} \approx \text{от } 50 \text{ до } 100$), б) $r_{ik} = r_{i, k-1} / 2$, $r_{i0} \approx \text{от } 50 \text{ до } 100$. Этот штраф является внешним, стационарные точки функции $P(\bar{x}, R)$ могут оказаться недопустимыми. Надо отметить, что недопустимые точки не создают дополнительных трудностей по сравнению с допустимыми: разница между ними состоит лишь в том, что в допустимых и граничных точках штраф равен нулю. Данный вид штрафа удобен тем, что функция $P(\bar{x}, R)$ определена и непрерывна всюду в случае, когда такой является функция $f(\bar{x})$.

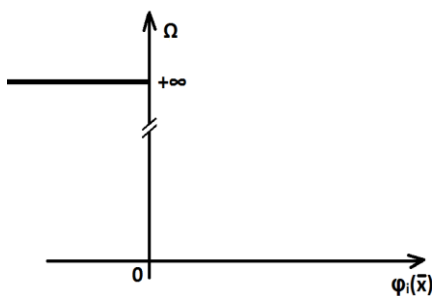


Рис. 32. Бесконечный барьер

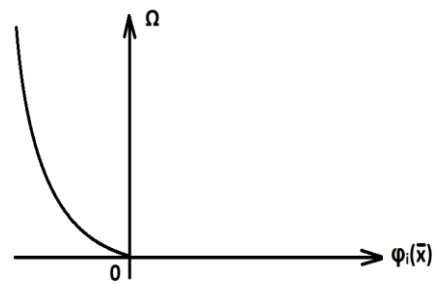


Рис. 33. Штраф типа квадрата срезки

Штраф, заданный обратной функцией (рис. 34):

$$\Omega = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{r_{ik}}{\varphi_i(\bar{x})}. \quad (4.23)$$

Этот штраф, как и первый штраф, является барьером. Значения штрафных параметров r_{ik} определяются так же, как и в случае штрафа типа квадрата

та срезки. При использовании этого вида штрафа возникают проблемы, связанные с появлением недопустимых точек. При появлении недопустимых точек необходимо использование специальных процедур, обеспечивающих попадание их в допустимую область. На границе допустимой области $P(\bar{x}, R)$ и ∇P не определены. Итерации должны начинаться с допустимой точки.

Логарифмический штраф (рис. 35):

$$\Omega = - \sum_{i=1}^{m_1} r_{ik} \cdot \ln \varphi_i(\bar{x}). \quad (4.24)$$

Этот штраф положителен при всех \bar{x} таких $0 < \varphi_i(\bar{x}) < 1$ ($i = \overline{1, m_1}$) и отрицателен при $\varphi_i(\bar{x}) > 1$ ($i = \overline{1, m_1}$). В данном виде штрафа как бы вводится искусственная дискриминация точек допустимой области: внутренние точки оказываются более предпочтительными, чем граничные. Отрицательных значений штрафа удалось бы избежать, положив $\Omega = 0$ для таких \bar{x} , что $\varphi_i(\bar{x}) > 1$ ($i = \overline{1, m_1}$), но в этом случае у градиента $\nabla P(\bar{x}, R)$ появились бы разрывы в прилегающей к границе части допустимой области. Логарифмический штраф – это барьерная функция, не определенная для недопустимых точек. Поэтому в тех случаях, когда приходится иметь дело с недопустимыми точками, требуется использование специальных процедур, обеспечивающих попадание точки в допустимую область. Значения штрафных параметров r_{ik} могут быть определены так же, как и в случае штрафа типа квадрата срезки.

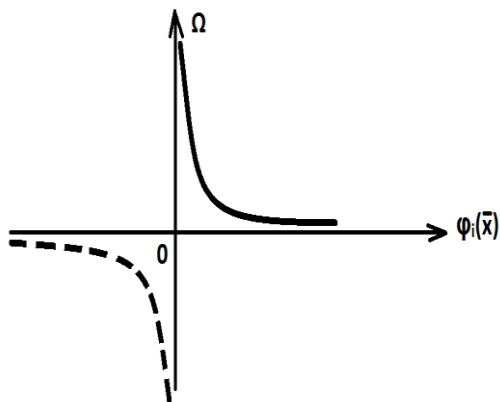


Рис. 34. Штраф, заданный обратной функцией

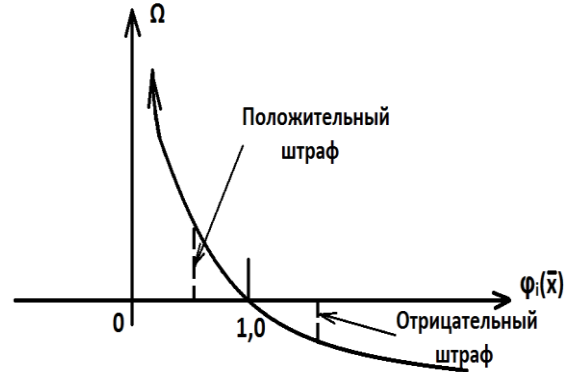


Рис. 35. Логарифмический штраф

Таким образом, с помощью штрафных функций задача условной оптимизации сводится к задаче безусловной оптимизации и далее она решается методами решения задач безусловной оптимизации.

4.3.2. Методы для непосредственного решения условной задачи нелинейного программирования

Второй подход. Он заключается в непосредственном решении задачи условной нелинейной оптимизации без сведения ее к безусловной. Интуитивно понятно, что для произвольной допустимой точки \bar{x}^0 можно так видоизменить схему метода безусловной оптимизации, что точки, получающиеся

на последующих итерациях, будут также являться допустимыми. Пусть пробная точка \bar{x} , получившаяся на текущей итерации, не удовлетворяет какому-либо ограничению-неравенству, тогда ее можно заменить другой, изменив величину шага таким образом, чтобы это ограничение выполнилось. В этом плане ограничения вида равенств доставляют больше сложностей, так как даже если \bar{x}^0 и \bar{x} удовлетворяют ограничениям-равенствам, то точки на прямой:

$$\bar{x} = \bar{x}^0 + \alpha \cdot (\bar{x} - \bar{x}^0) \text{ для } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4.25)$$

необязательно им удовлетворяют, за исключением линейных ограничений-равенств. Если \bar{x} получается недопустимой точкой, то оперируя лишь значениями входящих в ограничения функций, тяжело изменить ее координаты таким образом, чтобы добиться выполнения нелинейных ограничений-равенств. Проблема в этом случае сводится к нахождению решения системы уравнений для задачи (4.1)–(4.2):

$$\psi_i(\bar{x}) = 0, \quad i = \overline{m_1 + 1, m} \quad (4.26)$$

путем использования лишь значений функций $\psi_i(\bar{x})$ и подбора значений координат точки \bar{x} так, что найденное решение системы было лучше, чем базовая точка \bar{x}^0 . Трудности получения допустимой точки в задаче НЛП с ограничениями в виде равенств приводят к тому, что по существу, все методы, относящиеся к классу методов прямого поиска, требуют, чтобы все ограничения задачи были заданы в виде ограничений типа неравенств. Поэтому ограничения типа равенств должны быть явно или неявно исключены перед началом решения задачи НЛП.

Наиболее простой способ исключения ограничения типа равенства из системы ограничений заключается в решении его относительно одной из переменных с дальнейшим исключением этой переменной путем подстановки полученного для нее выражения в остальные соотношения задачи. Но при этом надо помнить, что ограничения, задающие верхние и нижние границы изменения этой переменной, сохраняются в задаче в виде ограничений-неравенств.

Во многих случаях подстановка вместо переменной ее выражения через остальные переменные алгебраически недопустима или непосредственное решение ограничения-равенства относительно одной из переменных трудно реализуемо. В этом случае можно осуществить исключение ограничений-равенств неявным образом, путем численного решения ограничений-равенств относительно зависимых переменных при заданных значениях независимых переменных (параметров оптимизации) или ввести дополнительные переменные.

Вторая проблема, которая возникает при решении условных задач НЛП методами прямого поиска, заключается в том, что большинство из них начинает работать с допустимой точки. В большинстве решаемых практических задач НЛП допустимую начальную точку можно найти из априорных сведе-

ний о моделируемом оригинале. В случае, когда этого не удастся сделать, необходимо применять специальные методы нахождения допустимой точки.

Для отыскания допустимой начальной точки обычно используются следующие три метода: случайный поиск, минимизация штрафной функции при отсутствии ограничений, последовательная минимизация при наличии ограничений. Наиболее простым среди трех перечисленных методов нахождения допустимой начальной точки является метод случайного поиска. Реализация этого метода осуществляется достаточно просто. Генерируется с помощью датчика псевдослучайных чисел пробная точка и осуществляется проверка ее допустимости подстановкой в ограничения задачи. По заданным нижним и верхним границам каждой переменной осуществляется вычисление:

$$x_i = x_i^H + r_i \cdot (x_i^G - x_i^H), \quad i=1, \dots, n, \quad (4.27)$$

где r_i – случайные числа, равномерно распределенные на интервале $(0, 1)$; x_i^H, x_i^G – нижняя и верхняя границы изменения i -ой переменной. Полученная точка проверяется на допустимость вычислением функций, входящих в ограничения задачи. Процесс генерации пробной точки продолжается до тех пор, пока сгенерированная точка не будет допустимой. Вероятность получения таким способом допустимой пробной точки, удовлетворяющей системе ограничений в виде равенств, невелика, поэтому необходимо перед началом решения задачи ограничения типа равенств из нее исключить. Изложенным методом, конечно, определяются только независимые переменные. Этот метод нахождения начальной допустимой точки может потребовать больших затрат машинного времени, поэтому для решения задач большой размерности или с узкой допустимой областью, в которой удовлетворяются все ограничения задачи, необходимо использовать другие методы поиска допустимой начальной точки.

В принципе, любой из методов прямого поиска можно модифицировать таким образом, что он станет пригодным для решения задач НЛП с ограничениями в виде неравенств. В самом деле, прежде чем выбрать какую-то точку в качестве начальной, можно подставить ее в ограничения решаемой задачи НЛП и, если хотя бы одно из них нарушается, взять другую допустимую точку. На практике, конечно, нужно разработать четкие правила, задающие алгоритмы перехода от недопустимых точек к допустимым. Иначе алгоритм, реализующий метод прямого поиска, может иметь не только медленную скорость сходимости к решению задачи НЛП, но и вообще не сходиться.

Рассмотрим, как осуществляется модификация методов прямого поиска с тем, чтобы ими без преобразования можно было решать условные задачи НЛП на примере метода комплексов. Метод комплексов, предложенный Боксом [20], является модификацией метода поиска по симплексу.

В методе комплексов выбирается допустимая начальная точка \bar{x}^0 и строится множество пробных точек p ($p > n+1$) случайным образом и после-

довательно. Генерируются координаты пробной точки по формуле (4.27) с учетом нижней и верхней границ значений переменных. Каждая построенная пробная точка проверяется на допустимость, и если какое-то из ограничений для нее нарушается, то она сдвигается к центру тяжести уже построенных пробных точек до тех пор, пока не получится допустимая точка.

После того, как множество из p пробных точек построено (сгенерирован первоначальный комплекс), вычисляются значения целевой функции в точках комплекса. И точка с наибольшим значением целевой функции из комплекса исключается. Новая точка получается путем отражения исключаемой точки комплекса через центр тяжести остальных точек. Если \bar{x}^u – исключаемая точка комплекса, а \bar{x}^y – центр тяжести остальных точек комплекса, то новая (отраженная) точка определяется по формуле:

$$\bar{x}^{omp} = \bar{x}^y + \alpha \cdot (\bar{x}^y - \bar{x}^u). \quad (4.28)$$

Параметр α задает расстояние отражения: при $\alpha = 1$ выполняется равенство $|\bar{x}^{omp} - \bar{x}^y| = |\bar{x}^y - \bar{x}^u|$; $\alpha > 1$ соответствует растяжению, $\alpha < 1$ соответствует сжатию.

Когда определены координаты отраженной точки, вычислены значения целевой функции и функций, входящих в ограничения, возможны различные случаи:

1. Отраженная точка является допустимой и значение целевой функции в ней меньше наибольшего значения целевой функции в точках комплекса. Это означает, что построен новый комплекс. В новом комплексе находим точку с максимальным значением целевой функции и отражаем ее относительно центра тяжести остальных точек комплекса.

2. Отраженная точка является допустимой и значение целевой функции в ней не меньше наибольшего значения целевой функции в точках комплекса. В этом случае перемещаем отраженную точку на половину расстояния до ранее найденного центра тяжести (в противном случае возможно заикливание).

3. Отраженная точка является недопустимой. В этом случае уменьшаем в два раза расстояние до найденного ранее центра тяжести. Процедура поиска решения условной задачи НЛП продолжится до тех пор, пока комплекс не будет стянут в центр тяжести в пределах заданной точности или пока разница между значениями целевой функции в точках комплекса не станет достаточно малой.

Бокс [20] провел численные эксперименты по изложенному алгоритму и на основе анализа их результатов рекомендует выбирать $\alpha = 1,3$ и $p = 2n$. Выбор α большим единицы компенсирует сжатие комплекса, обусловленное сокращением в два раза расстояния до центра тяжести. Большое количество точек в комплексе необходимо для предотвращения «уплощения» и вырождения его, когда поиск решения задачи производится вблизи границы допустимой области. Использование нижней и верхней границ изменения значений

переменных в процессе поиска решения задачи также позволяет предотвратить чрезмерное сжатие комплекса.

Алгоритм метода комплексов для непосредственного решения задач условной нелинейной оптимизации.

Этап 1. Задать строго допустимую точку \bar{x}^0 ; параметр отражения α , параметры окончания поиска решения задачи ε и δ , p – число точек в комплексе; x_i^u, x_i^g – нижние и верхние границы изменения переменных, $i = \overline{1, n}$.

Этап 2. Построить начальный комплекс, состоящий из p допустимых точек. Для каждой точки $k = 1, \dots, p-1$

а) случайным образом определить координаты x_i^k $i = \overline{1, n}$;

б) если \bar{x}^k – недопустимая точка, найти центр тяжести \bar{x}^u уже найденных точек и положить:

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k + \frac{1}{2} \cdot (\bar{x}^u - \bar{x}^k),$$

повторяя процедуру до тех пор, пока \bar{x}^k не станет допустимой точкой;

в) если \bar{x}^k – допустимая точка, повторять пункт а) до тех пор, пока $k = p$;

г) вычислить $f(\bar{x}^k)$ для $k = 0, \dots, p-1$.

Этап 3. Отражение комплекса:

а) выбрать исключаемую из комплекса точку \bar{x}^u , для которой

$$f(\bar{x}^u) = \max f(\bar{x}^k) = f_{\max};$$

б) найти центр тяжести остальных точек комплекса \bar{x}^u и новую (отраженную) точку по формуле:

$$\bar{x}^{omp} = \bar{x}^u + \alpha \cdot (\bar{x}^u - \bar{x}^u);$$

в) если \bar{x}^{omp} – допустимая точка и $f(\bar{x}^{omp}) \geq f_{\max}$, уменьшить в два раза расстояние между \bar{x}^u и центром тяжести \bar{x}^u и продолжать этот процесс пока $f(\bar{x}^{omp}) < f_{\max}$;

г) если \bar{x}^u – допустимая точка и $f(\bar{x}^{omp}) < f_{\max}$, перейти к этапу 5;

д) если \bar{x}^u – недопустимая точка, перейти к этапу 4.

Этап 4. Корректировка координат отраженной точки \bar{x}^{omp} для обеспечения ее допустимости:

а) если $x_i^{omp} < x_i^u$ положить $x_i^{omp} = x_i^u$; если $x_i^{omp} > x_i^g$, положить $x_i^{omp} = x_i^g$;

б) если \bar{x}^{omp} – недопустимая точка, уменьшить в два раза расстояние до центра тяжести, продолжать процесс до тех пор, пока \bar{x}^{omp} не станет допустимой точкой.

Этап 5. Проверка условия окончания решения задачи:

а) положить $\bar{f} = \frac{1}{P} \cdot \sum_{k=1}^P f(\bar{x}^k)$ и $x^c = \frac{1}{P} \cdot \sum_{k=1}^P \bar{x}^k$,

б) если $\sum_{k=1}^P (f(\bar{x}^k) - \bar{f})^2 \leq \varepsilon$ или $\sum_{k=1}^P \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^k - x_i^c)^2} \leq \delta$, вычисления прекращаются ввиду нахождения решения условной задачи НЛП с требуемой точностью и осуществляется переход к этапу 6, в противном случае возвращаемся к этапу 2.

Этап 6. Конец алгоритма.

Пример. Рассмотрим задачу проектирования нагруженной балки (задача взята из [7]).

Постановка задачи: балка B крепится к жесткой опоре A (рис. 36)

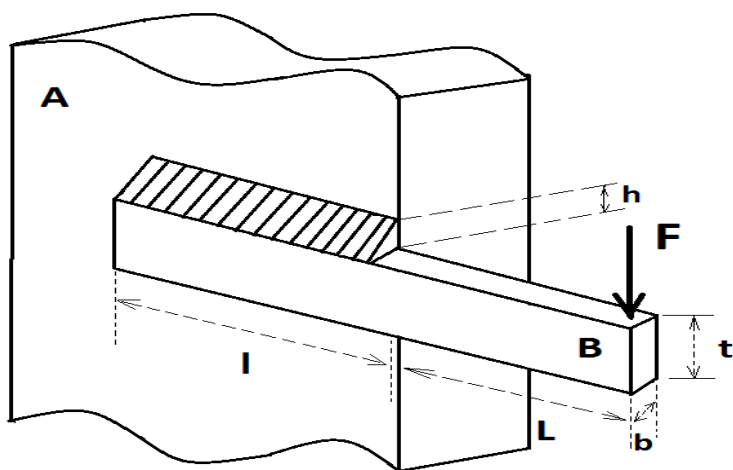


Рис. 36

с помощью сварного соединения. Балка изготовлена из стали марки 1010 и должна выдержать нагрузку $F = 6000$ фунт, приложенную к ее свисающему концу. Свободная длина балки является заданной величиной, равной $L=14$ дюйм. Необходимо подобрать следующие размеры балки: l – длину привариваемой части, t – высоту, b – толщину; а также h – толщину сварного шва (сварной шов наносится в виде равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом h), чтобы полные затраты на сооружение этой конструкции были минимальными. Под полными затратами понимаются затраты на подготовительные работы, затраты на выполнение работ по сооружению конструкции и затраты на материалы.

Построим математическую модель оригинала. Проектируемая конструкция состоит из балки B и сварного шва, необходимого для крепления балки к опоре A . Независимыми переменными или параметрами оптимизации служат размеры h, l, t, b , которые показаны на рис. 36. Для удобства записи представим перечисленные параметры как компоненты неизвестного вектора \bar{x} :

$$\bar{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [h, l, t, b]^T.$$

Характеристическим показателем качества проекта служат полные затраты на построение конструкции – целевая функция. Основными стоимостными характеристиками такой группы являются затраты на подготовитель-

ные работы, затраты на сварочные работы и затраты на материалы, т.е.

$$f(x) = C_0 + C_1 + C_2,$$

где $f(x)$ – функция полных затрат, C_0 – затраты на подготовительные работы, C_1 – затраты на сварочные работы, C_2 – стоимость материалов.

Затраты на подготовительные работы C_0 . Пусть у нас имеется сварочный аппарат, а также имеются в наличии все устройства, предназначенные для установки и поддержания балки в положении, удобном для проведения сварочных работ. В этом случае C_0 можно не учитывать при построении математической модели конструкции.

Затраты на сварочные работы C_1 . Предположим, что сварка будет проводиться аппаратом, при использовании которого полные расходы составляют 10 долл./час (включая эксплуатационные расходы и издержки на техническое обслуживание и ремонт). Пусть сварочный аппарат накладывает один кубический дюйм сварного шва за 6 мин. Тогда затраты на сварочные работы равны:

$C_1 = (10 \text{ долл./час}) (1/60 \text{ ч/мин}) (6 \text{ мин/дюйм}^3) V_c = 1 \text{ долл./дюйм}^3 \cdot V_c$, где V_c – объем сварного шва, дюйм³.

Затраты на материалы C_2

$$C_2 = C_3 \cdot V_c + C_4 \cdot V_B,$$

где $C_3 = 0,10471 \text{ долл./дюйм}^3$ – стоимость единицы объема сварного шва (долл./дюйм³);

$C_4 = 0,04811 \text{ долл./дюйм}^3$ – стоимость единицы объема балки;

V_B – объем балки, дюйм³.

Из геометрических соотношений следует, что

$$V_c = 2 \cdot (h^2 \cdot l / 2) = h^2 \cdot l; \quad V_B = t \cdot b \cdot (L + l).$$

Тогда получаем следующую формулу для нахождения затрат на материалы:

$$C_2 = C_3 \cdot h^2 \cdot l + C_4 \cdot t \cdot b \cdot (L + l).$$

Следовательно, целевая функция, выражающая полные затраты на сооружение конструкции, принимает следующий вид:

$$f = h^2 \cdot l + C_3 \cdot h^2 \cdot l + C_4 \cdot t \cdot b \cdot (L + l)$$

или (если выразить параметры оптимизации через \bar{x})

$$f(\bar{x}) = (1 + C_3) \cdot x_1^2 \cdot x_2 + C_4 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (L + x_2). \quad (4.29)$$

Заметим, что все комбинации положительных значений x_1, x_2, x_3, x_4 могут оказаться допустимыми, если балка выдерживает заданную нагрузку. Необходимо построить несколько функциональных соотношений между параметрами оптимизации, позволяющими сузить область их допустимых значений. Сначала приведем эти неравенства, а затем интерпретируем их. Имеем:

$$H_1(\bar{x}) = \tau_d - \tau(\bar{x}) \geq 0, \quad (4.30)$$

$$H_2(\bar{x}) = \sigma_d - \sigma(\bar{x}) \geq 0, \quad (4.31)$$

$$H_3(x) = x_4 - x_1 \geq 0, \quad (4.32)$$

$$H_4(x) = x_2 - 0,000000001 \geq 0, \quad (4.33)$$

$$H_5(x) = x_3 - 0,000000001 \geq 0, \quad (4.34)$$

$$H_6(\bar{x}) = P_c(\bar{x}) - F \geq 0, \quad (4.35)$$

$$H_7(x) = x_1 - 0,125 \geq 0, \quad (4.36)$$

$$H_8(x) = 0,250 - \delta(x) \geq 0, \quad (4.37)$$

где τ_d – предельно допустимое напряжение в сварном шве при сдвиге;

$\tau(\bar{x})$ – расчетное напряжение в сварном шве при сдвиге;

σ_d – предельно допустимое нормальное напряжение в балке;

$\sigma(\bar{x})$ – расчетное нормальное напряжение для материала балки;

$P_c(x)$ – критическая нагрузка на балку;

$\delta(\bar{x})$ – величина прогиба конца балки.

Соотношения (4.30)–(4.37), записанные в форме неравенств, вместе с функцией полных затрат на сооружение конструкции (4.29) представляют **математическую модель проектируемой конструкции**.

Для того чтобы расшифровать некоторые функции, входящие в математическую модель конструкции, необходимо ввести в рассмотрение несколько формул из теории сопротивления материалов.

Напряжение в сварном шве при сдвиге $\tau(\bar{x})$. Напряжение в сварном шве при сдвиге вычисляется в соответствии с формулой:

$$\tau(\bar{x}) = \sqrt{(\tau')^2 + (\tau'')^2} + \tau' \cdot \tau'' \cdot \frac{x_2}{R}, \quad (4.38)$$

здесь τ' – первичное напряжение в плоскости поперечного сечения сварного шва, а τ'' – вторичное напряжение при кручении.

Первичное напряжение в плоскости поперечного сечения сварного шва вычисляется по формуле:

$$\tau' = \frac{F}{(\sqrt{2} \cdot x_1 \cdot x_2)}. \quad (4.39)$$

Вторичное напряжение при кручении вычисляется по формуле:

$$\tau'' = \frac{M \cdot R}{J},$$

где $M = F \cdot \left(L + \frac{x_2}{2} \right), \quad R = \sqrt{\frac{x_2^2}{4} + \frac{(x_3 + x_1)^2}{4}},$

$$J = 2 \left\{ 0,707 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \left(\frac{x_2^2}{12} + \frac{(x_3 + x_1)^2}{4} \right) \right\},$$

здесь M – момент силы F относительно центра тяжести сварной группы; J – полярный момент инерции сварной группы.

Нормальное напряжение при изгибе балки $\sigma(\bar{x})$. Можно показать, что нормальное напряжение при изгибе балки вычисляется по формуле:

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{6 \cdot F \cdot L}{(x_4 \cdot x_3^2)}. \quad (4.40)$$

Критическая нагрузка на балку $P_c(\bar{x})$. С ростом отношения $t/b = x_3/x_4$ наблюдается тенденция к потере устойчивости балки. Те комбинации значений переменных x_3 и x_4 , при которых возможна потеря устойчивости, необходимо исключить из числа допустимых. Для балок, близких к прямоугольным, критическая нагрузка приближенно описывается следующим выражением:

$$P_c(\bar{x}) = \frac{4.013 \sqrt{E \cdot I \cdot \alpha}}{L^2} \left(1 - \frac{x_3}{2 \cdot L} \sqrt{\frac{E \cdot I}{\alpha}} \right), \quad (4.41)$$

где $E = 3 \cdot 10^7$ фунт / дюйм² – модуль Юнга; $I = x_3 \cdot x_4^3 / 12$; $\alpha = G \cdot x_3 \cdot x_4^3 / 3$; $G = 12 \cdot 10^6$ фунт / дюйм² – модуль сдвига.

Прогиб балки $\delta(\bar{x})$. Чтобы вычислить величину прогиба, предположим, что балка представляет собой консоль с вылетом L . Тогда

$$\delta(\bar{x}) = \frac{(4 \cdot F \cdot L^3)}{(E \cdot x_3^3 \cdot x_4)}. \quad (4.42)$$

После приведения всех необходимых формул перейдем к интерпретации ограничений-неравенств (4.30)–(4.37). Ограничение $H_1 \geq 0$ устанавливает требование, что напряжения в сварном шве, возникающие при сдвиге, не могут превышать предельно допустимой величины τ_d . Ограничение $H_2 \geq 0$ устанавливает требование, что нормальные напряжения в балке, возникающие из-за приложенной к ее свисающему концу нагрузки F , не могут превышать предельно допустимой величины σ_d . Ограничение $H_3 \geq 0$ устанавливает практическую невозможность получения сварного шва, ширина которого превышает ширину балки. Ограничения $H_4 \geq 0$ и $H_5 \geq 0$ отражают требования положительности x_2 и x_3 , вытекающие из формул (4.39), (4.40) и (4.42) из-за того, что во время решения задачи мы будем оперировать приближенными значениями этих параметров, в эти ограничения заложены более сильные условия: $x_2 \geq 0,00000001$ и $x_3 \geq 0,00000001$. Отметим, что положительность x_1 и x_4 следует из ограничений $H_3 \geq 0$ и $H_7 \geq 0$. Ограничение $H_6 \geq 0$ гарантирует, что нагрузка F , не будет превышать критическую нагрузку на балку $P_c(\bar{x})$. Ограничение $H_7 \geq 0$ отражает тот факт, что физически невозможно сделать сварной шов, ширина которого меньше некоторого порогового значения. Наконец, значения параметров τ_d и σ_d , фигурирующих в ограничениях $H_1 \geq 0$ и $H_2 \geq 0$, зависят от материала конструкции: для стали марки 1010 соответствующие значения этих параметров равны $\tau_d = 13600$ фунт / дюйм² и $\sigma_d = 30000$ фунт / дюйм².

Задача оптимизации (4.29)–(4.37) относится к классу задач нелинейного программирования, поскольку ее целевая функция и некоторые функции, входящие в ограничения, являются нелинейными. Целевая функция задачи

(4.29)–(4.37) является кубичной относительно независимых переменных, поэтому она может иметь несколько локальных оптимумов. Следовательно, решать задачу будем с помощью метода сопряженных градиентов – нужно будет стартовать с нескольких начальных точек, чтобы определенно гарантировать нахождение глобального минимума целевой функции.

Решим задачу (4.29)–(4.37) с помощью табличного процессора **Excel** методом сопряженных градиентов в совокупности с методом штрафных функций. Для этого запустим табличный процессор **Excel**, и в появившуюся таблицу введем задачу (4.29)–(4.37), для чего в ячейки C3:F3 занесем координаты точки начала поиска решения задачи $\bar{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0]^T$. В ячейки B3:B10 занесем значения $F, L, \tau_d, \sigma_d, c_3, c_4, E, G$. В ячейки B11:B18 запишем формулы для вычисления значений $\tau(\bar{x}), \sigma(\bar{x}), \delta(\bar{x}), P_c(x), \tau'', \alpha, I, \tau'$. В ячейки D15:D18 запишем формулы для вычисления значений M, J, R . В ячейки C6:C13 запишем, соответственно, левые части ограничений (4.30)–(4.37). В ячейку G2 запишем формулу целевой функции задачи (4.29).

Вариант введенной в таблицу **Excel** задачи (4.29)–(4.37) с выбранной точкой начала поиска решения задачи $\bar{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0]^T = [0,345; 0,567; 0,988; 0,444]^T$ приведен на рис. 37 и рис. 38. На рис. 37 приведен вариант таблицы **Excel** с задачей (4.29)–(4.37), когда в соответствующих ячейках отражены значения введенных величин и результаты вычислений по формулам, занесенным в эти ячейки. На рис. 38 приведен вариант таблицы **Excel** с задачей (4.29)–(4.37), когда в соответствующих ячейках отражены значения введенных величин и приведены формулы, введенные в ячейки.

После окончания ввода задачи в таблицу **Excel** запустим ее на выполнение. Для этого выберем пункт **Данные** главного меню, затем в правом верхнем углу щелкнем левой кнопкой мыши по пункту **Поиск решения**. В результате этих действий появится диалоговое окно (рис. 39). Занесем в соответствующие окошечки информацию о задаче: адрес ячейки целевой функции G2; направление оптимизации – минимизировать; адреса ячеек, в которых записаны координаты точки начала поиска до решения задачи и в которые будут записаны координаты точки оптимума целевой функции после решения задачи C3:F3; адреса ячеек, в которых записаны левые части ограничений задачи C6:C13.

G7							
	A	B	C	D	E	F	G
1	Исходные данные		Параметры оптимизации			Целевая функция	
2			X1	X2	X3	X4	1.394938461
3	F=	6000	0.345	2.567	2.988	0.444	
4	L=	14	Левые части огр-ий	Знак огр-ий	Правые части огр-ий		
5	td=	13600					
6	sigmad=	30000	-35776.48064	>=	0		
7	c3=	0.10471	-97141.22164	>=	0		
8	c4=	0.04811	0.099	>=	0		
9	E=	30000000	2.56699999	>=	0		
10	G=	12000000	2.98799999	>=	0		
11	$\tau(x)=$	49376.48064	9504.756607	>=	0		
12	$\sigma(x)=$	127141.2216	0.22	>=	0		
13	$\delta(x)$	0.185331544	0.064668456	>=	0		
14	$P_c(x)=$	15504.75661					
15	$\tau'='=$	46307.24787	M=	91701			
16	Alfa=	1046139.246	J=	4.165449162			
17	l=	0.021794568	R=	2.103472011			
18	$\tau'='=$	4790.615208					
19							

Рис. 37

H8							
	A	B	C	D	E	F	G
1	Исходные д		Параметры оптимизации			Целевая функция	
2			X1	X2	X3	X4	$= (1+B7)*C3^2*D3 + (D3+B4)*E3*F3*B8$
3	F=	6000	0.345	2.567	2.988	0.444	
4	L=	14	Левые части огр-ий Знак огр-ий		Правые части о		
5	td=	13600					
6	sigmad=	30000	=B5-B11	>=	0		
7	c3=	0.10471	=B6-B12	>=	0		
8	c4=	0.04811	=F3-C3	>=	0		
9	E=	=3*10^7	=D3-0.00000001	>=	0		
10	G=	=12*10^6	=E3-0.00000001	>=	0		
11	τ(x)=	$= (B18^2 + B15^2 + D3*B18*B15/D17)^C$	=B14-B3	>=	0		
12	sigma(x)=	$= 6*B3*B4/E3^2/F3$	=C3-0.125	>=	0		
13	delta(x)	$= 4*B3*B4^3/(B9*E3^3*F3)$	=0.25-B13	>=	0		
14	Pc(x)=	$= 4.013*(B9*B17*B16)^{0.5}/B4^2*(1-E$					
15	τ'='=	=D15*D17/D16	M=	=B3*(B4+D3/2)			
16	Alfa=	=B10*E3*F3^3/3	J=	$= 2*(0.707*C3*D3*(D3^2/12 +$			
17	l=	=E3*F3^3/12	R=	$= (D3^2/4 + (C3+E3)^2/4)^{0.5}$			
18	τ'='=	=B3/C3/D3/2^(0.5)					
19							

Готово

Отчет по устойчивости 1

Отчет по результатам 1

Лист1

Лист2

Лист3

100%

Рис. 38

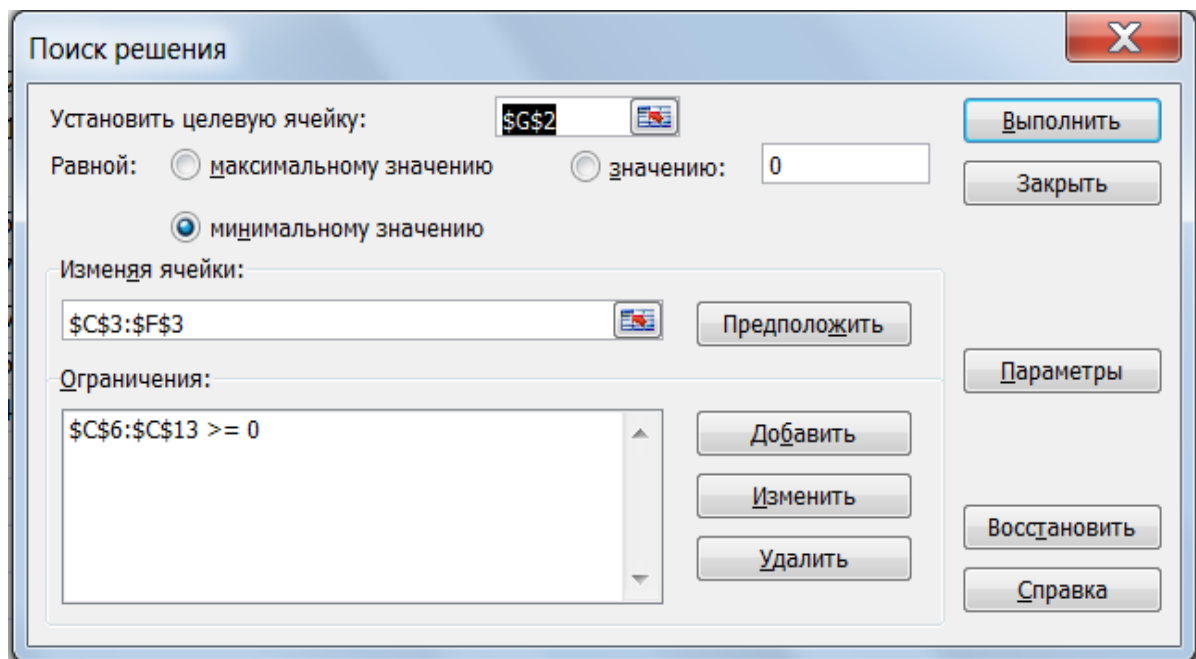


Рис. 39

Далее щелкнем левой кнопкой мыши по кнопке «Параметры». В результате этого появится новое диалоговое окно (рис. 40), в котором установим флажки: «Неотрицательные значения», «Автоматическое масштабирование», «Сопряженных градиентов» (выбранный метод решения задачи) и, щелкнув левой кнопкой мыши по пункту «ОК», возвратимся в диалоговое окно **Поиск решения** (рис. 38). Щелкнув в нем левой кнопкой мыши по пункту «Выполнить», получим решение задачи (рис. 41).

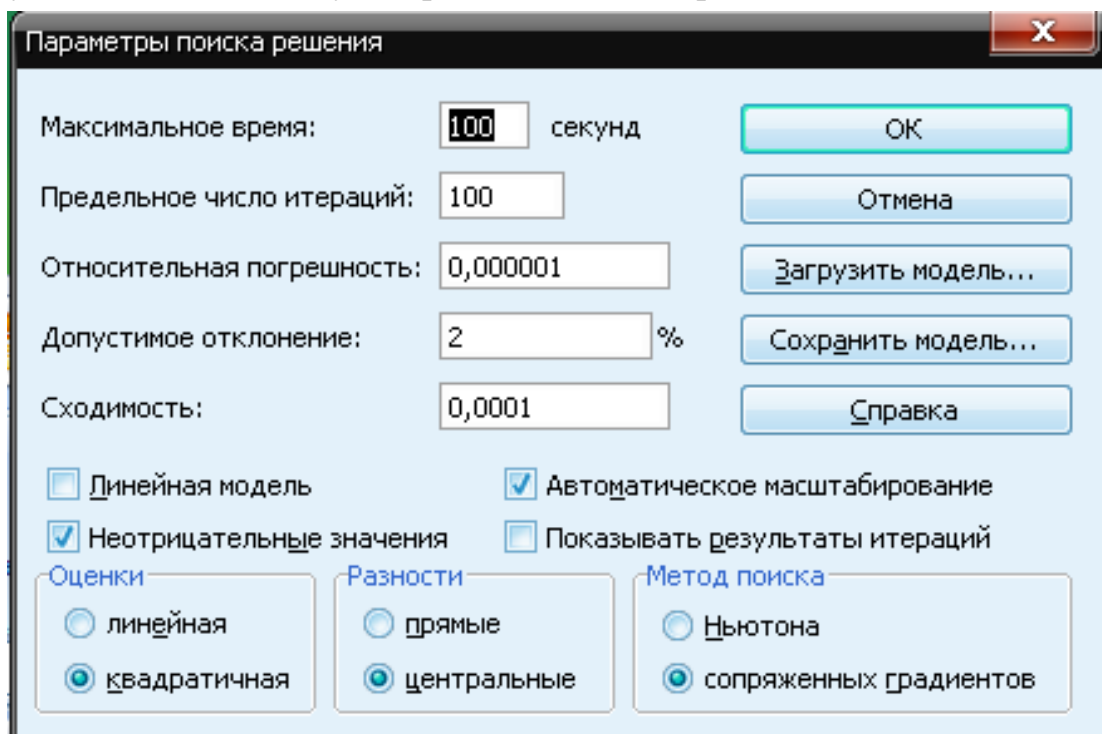


Рис. 40

	A	B	C	D	E	Строка формул	G
1	Исходные данные			Параметры оптимизации			Целевая функция
2			X1	X2	X3	X4	2.381134211
3	F=	6000	0.244368976	6.218606486	8.29147139	0.244368976	
4	L=	14	Левые части огр-ий	Знак огр-ий	Правые части огр-ий		
5	$\tau d=$	13600					
6	$\sigma_{\text{max}}=$	30000	0	\geq	0		
7	$c_3=$	0.10471	0	\geq	0		
8	$c_4=$	0.04811	0	\geq	0		
9	E=	30000000	6.218606486	\geq	0		
10	G=	12000000	8.29147139	\geq	0		
11	$\tau(x)=$	13600	0	\geq	0		
12	$\sigma(x)=$	30000	0.119368976	\geq	0		
13	$\delta(x)=$	0.015759165	0.234240835	\geq	0		
14	$P_c(x)=$	6000					
15	$\tau''=$	11767.52786	M=	102655.8195			
16	Alfa=	483982.6618	J=	46.06460827			
17	I=	0.010082972	R=	5.280427004			
18	$\tau'=$	2791.88232					

Рис. 41. Результаты решения задачи (4.29)–(4.37)

Метод сопряженных градиентов позволяет находить точки локального оптимума целевой функции задачи оптимизации. Для надежной оптимизации моделей, которые могут иметь несколько локальных экстремумов, нужно определять их глобальный экстремум. В случае, когда целевая функция модели является многоэкстремальной, для того чтобы быть уверенными в том, что найден глобальный экстремум целевой функции, применяют подход, заключающийся в многократном решении искомой задачи. При этом каждый раз поиск решения задачи начинают с другой начальной точки. Если каждый раз получается одно и то же решение, то в качестве решения задачи выбирается оно самое. Если же каждый раз получаются разные решения, то в качестве решения задачи выбирается такое, которое обеспечивает наилучшее значение целевой функции. Такой подход дает определенные гарантии, хотя и не стопроцентные, что в результате решения задачи найден глобальный оптимум ее целевой функции. Этот подход называется методом с несколькими начальными точками. При реализации метода начальные точки выбираются на определенной решетке или же генерируются случайным образом. В первом случае выбора начальных точек допустимая область изменения параметров оптимизации делится на непересекающиеся подобласти, и оптимизация выполняется в каждой такой подобласти по отдельности. Во втором случае начальные точки выбираются случайным образом, считая, что они равномерно распределены в допустимой области изменения параметров оптимизации.

Для реализации вышеописанного подхода задача (4.29)–(4.37) была решена 10 раз со случайным образом выбранными точками начала поиска решения задачи (правда, не все начальные точки принадлежат допустимой области из-за сложности определения границ этой области). Выбранные координаты точек начала поиска и координаты найденных при этом решений задачи приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

№	Координаты точки начала поиска				Координаты решения задачи				Значение целевой функции
	x_1^0	x_2^0	x_3^0	x_4^0	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	
1	0,345	2,567	2,988	0,444	0,244	6,219	8,291	0,244	2,3811
2	1,000	2,000	3,000	4,000	0,244	6,219	8,291	0,244	2,3811
3	2,000	0,500	1,247	2,050	0,244	6,219	8,291	0,244	2,3811
4	3,200	2,000	4,000	2,000	0,244	6,219	8,291	0,244	2,3811
5	5,500	3,152	2,450	1,523	0,244	6,219	8,291	0,244	2,3811
6	4,000	3,000	2,000	2,000	0,244	6,219	8,291	0,244	2,3811
7	5,000	1,025	5,243	2,000	0,244	6,219	8,291	0,244	2,3811
8	9,000	7,000	2,000	10,00	Решение не найдено				
9	8,000	0,555	7,000	0,500	0,244	6,219	8,291	0,244	2,3811
10	0,888	8,000	2,000	1,345	0,244	6,219	8,291	0,244	2,3811

Как видно из данных табл. 4.1, при старте с 9 различных точек процесс поиска оптимума целевой функции задачи (4.29)–(4.37) приводит к одной и той же точке оптимума целевой функции. И лишь для одной точки начала поиска ($\bar{x}^0 = [9,000; 7,000; 2,000; 10,000]^T$) процесс завершился на третьей итерации из-за обращения в минус бесконечности ограничения (4.30). Это позволяет с большой долей уверенности утверждать, что найдена точка глобального оптимума целевой функции задачи. Вместе с тем необходимо констатировать, что множество G_x для данной задачи является достаточно сложным и имеет ряд особенностей.

Таким образом, в результате решения задачи получены следующие характеристики конструкции: балка должна иметь следующие размеры $l = 6,219$ дюйм; $t = 8,291$ дюйм; $b = 0,244$ дюйм; а ширина сварного шва должна составить $h = 0,244$ дюйм. При этих размерах балки и ширине сварного шва суммарные затраты на сооружение конструкции будут минимальными и составят 2,381 долл. Для этих значений параметров конструкции первые три ограничения и шестое ограничение являются активными, а остальные пассивными:

$$H_1(x) = \tau_d - \tau(x) = 0;$$

$$H_2(x) = \sigma_d - \sigma(x) = 0;$$

$$H_3(x) = x_4 - x_1 = 0;$$

$$H_4(x) = x_2 - 0,001 = 6,219;$$

$$H_5(x) = x_3 - 0,001 = 8,292 ;$$

$$H_6(x) = P_c(x) - F = 0 ;$$

$$H_7(x) = x_1 - 0,125 = 0,119 ;$$

$$H_8(x) = 0,250 - \delta(x) = 0,234 .$$

При этом сооруженная конструкция будет удовлетворять всем предъявляемым к ней по условию задачи требованиям.

Пример. Рассмотрим следующую задачу из области производства строительных материалов.

По результатам экспериментальных исследований требуется определить значения технологических параметров приготовления бетона, обеспечивающие требуемую прочность на 28-е сутки твердения ($28 \text{ мПа} \leq R_{28} \leq 31 \text{ мПа}$) при минимальной его себестоимости. Технологическими параметрами (параметрами оптимизации), от значений которых зависят прочность и себестоимость бетона являются расход цемента x_1' кг/м³; удобоукладываемость бетонной смеси x_2' см и время пропаривания x_3' час. В ходе экспериментов их значения изменялись в следующих пределах:

$$360 \leq x_1' \leq 440 \text{ кг/м}^3, \quad 2 \leq x_2' \leq 10 \text{ см}, \quad 8 \leq x_3' \leq 14 \text{ час}.$$

Экспериментальные исследования были реализованы по плану ВЗ, в ходе их в качестве откликов контролировались R_{28} – прочность бетона на 28-е сутки твердения, мПа и C – себестоимость 1 м³, бетонной смеси, в руб. Матрица планирования эксперимента ВЗ с кодированными значениями факторов ($-1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3$) и натуральными значениями откликов представлена в табл. 4.2.

Таблица 4.2

№ / №	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
x_2	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	0
x_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	0
R_{28}	35,2	29,8	41,4	36,0	27,4	22,0	27,6	22,2	35,6
C	2270	2190	1860	1780	2030	2010	1670	1650	2070

Окончание табл. 4.2

№ / №	10	11	12	13	14	15	16	17
x_1	-1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	1	1	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	1	-1	0	0	0
R_{28}	24,8	25,6	28,8	29,9	24,5	27,2	28,2	29,2
C	1980	2250	1800	2060	1890	1950	2000	1990

Для построения зависимости прочности R_{28} от кодированных значений технологических параметров x_1, x_2, x_3 нужно обработать экспериментальные

данные при помощи специального программного модуля, написанного на языке VBA (см. приложение 1) и реализующего алгоритм построения уравнения регрессии и проведения его статистического анализа. Для этого необходимо запустить табличный процессор **Excel** и в ячейки A2:A18 появившейся таблицы его рабочего листа ввести значения R_{28} из табл. 4.2, в порядке возрастания номеров опытов. Далее войти в пункт главного меню «Разработчик», щелкнуть левой кнопкой мыши по пункту «Макросы». В появившемся диалоговом окне необходимо набрать имя макроса, например, ВЗ, и в появившемся окне набрать программный код из приложения 1. Завершив набор программного модуля, запустить его на выполнение, щелкнув левой кнопкой мыши по пункту меню «Run». После выполнения программного модуля получаем результаты обработки экспериментальных данных, они приведены на рис. 42.

Аналогично строится модель, описывающая зависимость себестоимости бетона C от кодированных значений технологических параметров x_1, x_2, x_3 . Только на этот раз в ячейки A2:A18, рабочего листа **Excel** вводятся значения C из табл. 4.2 в порядке возрастания номеров опытов. После окончания ввода значений C щелкаем левой кнопкой мыши на панели инструментов по пункту «Макросы». В появившемся диалоговом окне выбираем макрос с именем ВЗ и далее щелкаем левой кнопкой мыши по пункту «Выполнить». В результате этого программный модуль выполняется и получаются результаты, которые приведены на рис. 43.

Как видно из результатов обработки экспериментальных данных, приведенных на рис. 42 и рис. 43, отклики R_{28} и C выражаются через кодированные факторы x_1, x_2, x_3 зависимостями:

$$R_{28} = 27,63 + 5,40 \cdot x_1 - 1,60 \cdot x_2 + 2,70 \cdot x_3 + 2,57 \cdot x_1^2 - 1,50 \cdot x_1 \cdot x_2, \quad (4.43)$$

$$C = 2005,71 + 83,00 \cdot x_1 + 199,00 \cdot x_2 + 37,00 \cdot x_3 - 64,71 \cdot x_3^2. \quad (4.44)$$

Если модели (4.43) и (4.44) являются адекватными, то их можно использовать для прогнозирования значений прочности и себестоимости бетона и, соответственно, при решении задачи подбора оптимальных значений технологических параметров приготовления бетона. Поэтому, прежде чем начать использовать их, нужно проверить их на адекватность. Адекватность построенных уравнений регрессии (4.43) и (4.44) проверяется по критерию Фишера. Для этого расчетные значения критерия Фишера, вычисляемые для моделей по формуле $F_{расч} = S_{ост}^2 / S_{воспр}^2$, где $S_{ост}^2 = \sum_{i=1}^N (Y_{iэк} - Y_{ипас})^2 / (N - l)$ – остаточная дисперсия, $S_{воспр}^2 = \sum_{i=1}^m (Y_{0i} - Y_{0cp})^2 / (m - 1)$ – дисперсия воспроизводимости опытов в центре плана, сравниваются с $F_{кр} = F(\alpha, f_1, f_2)$, где α – уровень значимости, f_1, f_2 – числа степеней свободы. Здесь $f_1 = N - l$, $f_2 = m - 1$, где $N = 15$ – число опытов в плане, l – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии, $m = 3$ – число параллельных опытов в центре плана.

Yэкc	X1	X2	X3	Yэкc	Ypac	(Yэкc-Ypac)/Yэкc*100%			
35.20	1	1	1	35.20	35.20		0.00		
29.80	1	1	-1	29.80	29.80		0.00		
41.40	1	-1	1	41.40	41.40		0.00		
36.00	1	-1	-1	36.00	36.00		0.00		
27.40	-1	1	1	27.40	27.40		0.00		
22.00	-1	1	-1	22.00	22.00		0.00		
27.60	-1	-1	1	27.60	27.60		0.00		
22.20	-1	-1	-1	22.20	22.20		0.00		
35.60	1	0	0	35.60	35.60		0.00		
24.80	-1	0	0	24.80	24.80		0.00		
25.60	0	1	0	25.60	26.03		-1.67		
28.80	0	-1	0	28.80	29.23		-1.49		
29.90	0	0	1	29.90	30.33		-1.43		
24.50	0	0	-1	24.50	24.93		-1.75		
27.20	0	0	0	27.20	27.63		-1.58		
28.20	0	0	0	28.20	27.63		2.03		
29.20	0	0	0	29.20	27.63		5.38		
Значимые коэффициенты уравнения регрессии									
B(0)	B(1)	B(2)	B(3)	B(1,1)	B(2,2)	B(3,3)	B(1,2)	B(1,3)	B(2,3)
27.62857	5.4	-1.6	2.7	2.571429	0	0	-1.5	0	0
Fpac=	0.22								

Рис. 42

Если $F_{расч} < F_{кр}$, то модель признается адекватной, в случае выполнения соотношения $F_{расч} > F_{кр}$ модель признается неадекватной, когда $F_{расч} = F_{кр}$ – это случай неопределенности, тогда адекватность модели нужно проверять с помощью других критериев (например, с помощью критерия средней относительной погрешности).

Уравнение регрессии (4.43) является адекватным, так как для него выполняется соотношение: $F_{расч.} = 0,22 < F_{кр} = F(0,05; 9; 2) = 19,40$; здесь $\alpha = 0,05$; $f_1 = N - l = 15 - 6 = 9$; $f_2 = m - 1 = 3 - 1 = 2$. Уравнение регрессии (4.44) так же является адекватным, поскольку выполняется соотношение $F_{расч} = 1,838 < F_{кр} = F(0,05; 10; 2) = 19,40$; здесь $\alpha = 0,05$; $f_1 = N - l = 15 - 5 = 10$; $f_2 = m - 1 = 3 - 1 = 2$.

После перехода к натуральным значениям факторов x_1', x_2', x_3' по формуле:

$$x_i = \frac{2 \cdot (x_i' - x_{i0}')}{(x_{i\max} - x_{i\min})}, \quad (4.45)$$

где $x_{i0}' = \frac{x_{i\max}' + x_{i\min}'}{2}$, $x_{i\max}'$ и $x_{i\min}'$ – максимальное и минимальное значения

Yэкc	X1	X2	X3	Yэкc	Ypac	(Yэкc-Ypac)/Yэкc*100%			
2270.00	1	1	1	2270.00	2260.00	0.4405			
2190.00	1	1	-1	2190.00	2186.00	0.1826			
1860.00	1	-1	1	1860.00	1862.00	-0.108			
1780.00	1	-1	-1	1780.00	1788.00	-0.449			
2030.00	-1	1	1	2030.00	2094.00	-3.153			
2010.00	-1	1	-1	2010.00	2020.00	-0.498			
1670.00	-1	-1	1	1670.00	1696.00	-1.557			
1650.00	-1	-1	-1	1650.00	1622.00	1.697			
2070.00	1	0	0	2070.00	2088.71	-0.904			
1980.00	-1	0	0	1980.00	1922.71	2.8932			
2250.00	0	1	0	2250.00	2204.71	2.0127			
1800.00	0	-1	0	1800.00	1806.71	-0.373			
2060.00	0	0	1	2060.00	1978.00	3.9806			
1890.00	0	0	-1	1890.00	1904.00	-0.741			
1950.00	0	0	0	1950.00	2005.71	-2.857			
2000.00	0	0	0	2000.00	2005.71	-0.286			
1990.00	0	0	0	1990.00	2005.71	-0.79			
Значимые коэффициенты уравнения регрессии									
B(0)	B(1)	B(2)	B(3)	B(1,1)	B(2,2)	B(3,3)	B(1,2)	B(1,3)	B(2,3)
2005.71	83	199	37	0	0	-64.71	0	0	0
Fpac=	1.84								

Рис. 43

факторов в натуральных величинах ($i = 1, 2, 3$), модели (4.43) и (4.44) приобретают вид:

$$R'_{28} = 200,63 - 1,09 x_1' + 3,35 x_2' + 0,90 x_3' + 0,0016 x_1'^2 - 0,0094 x_1' x_2', \quad (4.46)$$

$$C' = -128,45 + 2,08 x_1' + 49,75 x_2' + 170,51 x_3' - 7,19 x_3'^2. \quad (4.47)$$

В дальнейшем для удобства в формулах (4.46), (4.47) и других формулах математической модели опустим штрихи. Тогда задача подбора значений технологических параметров приготовления бетона, обеспечивающих его минимальную себестоимость C и попадание прочности R_{28} в требуемый интервал, в математической форме запишется в виде:

Найти $\min (C(\bar{x}) = -128,45 + 2,08 x_1 + 49,75 x_2 + 170,51 x_3 - 7,19 x_3^2)$, (4.49) при ограничениях:

$$H_1(\bar{x}) = x_1 - 360 \geq 0, \quad (4.50)$$

$$H_2(\bar{x}) = 440 - x_1 \geq 0, \quad (4.51)$$

$$H_3(\bar{x}) = x_2 - 2 \geq 0, \quad (4.52)$$

$$H_4(\bar{x}) = 10 - x_2 \geq 0, \quad (4.53)$$

$$H_5(\bar{x}) = x_3 - 8 \geq 0, \quad (4.54)$$

$$H_6(\bar{x}) = 14 - x_3 \geq 0, \quad (4.55)$$

$$H_7(\bar{x}) = 31 - R_{28} \geq 0, \quad (4.56)$$

$$H_8(\bar{x}) = R_{28} - 28 \geq 0. \quad (4.57)$$

Ограничения (4.50)–(4.57) обеспечивают выполнение исходных условий задачи: ограничения $H_1(\bar{x})$ и $H_2(\bar{x})$ гарантируют, что расход цемента в 1 м^3 будет находиться в диапазоне $360 \leq x_1 \leq 440 \text{ кг}$; ограничения $H_3(\bar{x})$ и $H_4(\bar{x})$ гарантируют, что удобоукладываемость бетона будет находиться в диапазоне $2 \leq x_2 \leq 10 \text{ см}$; ограничения $H_5(\bar{x})$ и $H_6(\bar{x})$ гарантируют, что время пропаривания бетона будет находиться в диапазоне $8 \leq x_3 \leq 14 \text{ час}$; ограничения $H_7(\bar{x})$ и $H_8(\bar{x})$ гарантируют, что прочность бетона будет находиться в диапазоне $28 \leq R_{28} \leq 31 \text{ МПа}$.

Для решения задачи (4.49)–(4.57) на ПЭВМ используем табличный процессор **Excel**. Искомую задачу в таблицу **Excel** можно записать, например, так, как показано на рис. 44.

Здесь в ячейки A2, B2, C2 введены значения независимых переменных в точке начала поиска $x_1 = 380$, $x_2 = 4$, $x_3 = 14$ соответственно. В ячейки B5:B12 введены формулы, задающие выражения, стоящие в левых частях ограничений $H_1(\bar{x}):H_8(\bar{x})$, соответственно. В ячейку E2 записана формула, определяющая целевую функцию задачи оптимизации. В ячейку B15 записана формула модели прочности бетона (4.46).

Далее входим в пункт главного меню «Данные, затем в правом верхнем углу щелкаем по пункту «Поиск решения» в результате на экране появляется диалоговое окно, изображенное на рис. 45.

Заполняем окошки этого диалогового окна, как показано на рис. 45. Затем щелкаем левой кнопкой мыши по пункту «Параметры», в результате чего на экране появляется еще одно диалоговое окно, изображенное на рис. 46.

	A	B	C	D	E
1	x1	x2	x3		Целевая функция
2	380	4	14		1838.84
3	Ограничения:				
4		Левые части	Знак отн-я	Правые части	
5	H1=	20	>=	0	
6	H2=	60	>=	0	
7	H3=	2	>=	0	
8	H4=	6	>=	0	
9	H5=	6	>=	0	
10	H6=	0	>=	0	
11	H7=	0.27	>=	0	
12	H8=	2.73	>=	0	
13					
14					
15	R28'=	28.27			
16					
17					

Рис. 44

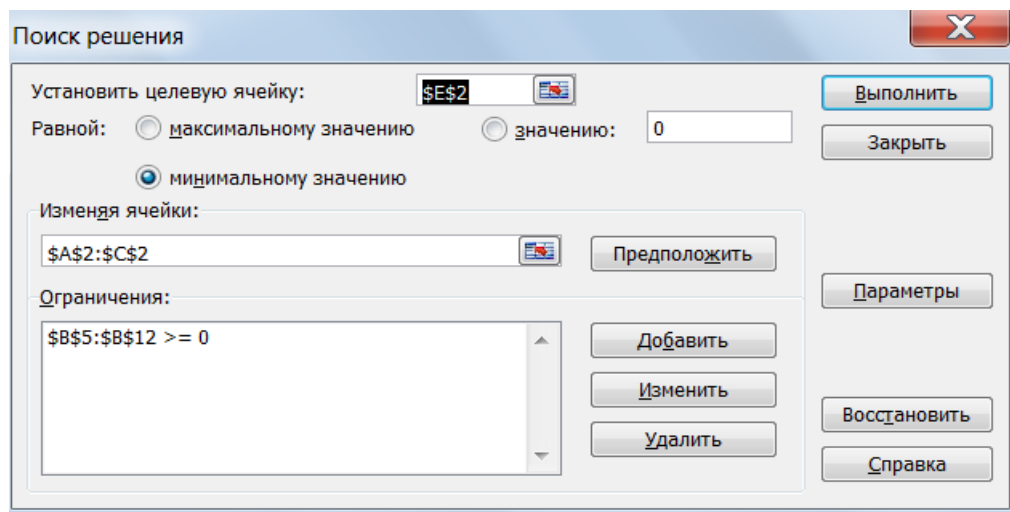


Рис. 45

Заполняем окошечки этого диалогового окна так, как это сделано на рис. 46. В качестве метода решения можно выбрать любой из двух методов: Ньютона или сопряженных градиентов. Далее щелкаем левой кнопкой мыши по пункту «ОК» данного диалогового окна, в результате чего возвращаемся в диалоговое окно, изображенное на рис. 45. В этом диалоговом окне щелкаем по пункту «Выполнить», и в результате получаем решение задачи (4.49) – (4.57), которое изображено на рис. 47.

Поскольку методы Ньютона и сопряженных градиентов позволяют найти только локальный оптимум целевой функции, то для нахождения значения глобального оптимума необходимо решить задачу несколько раз с разными точками начала поиска оптимума целевой функции, т.е. при различных значениях x_1, x_2, x_3 . Если результаты решения задачи совпадут при различных значениях точки начального приближения параметров оптимизации, то можно надеяться, что получен глобальный экстремум целевой функции задачи.

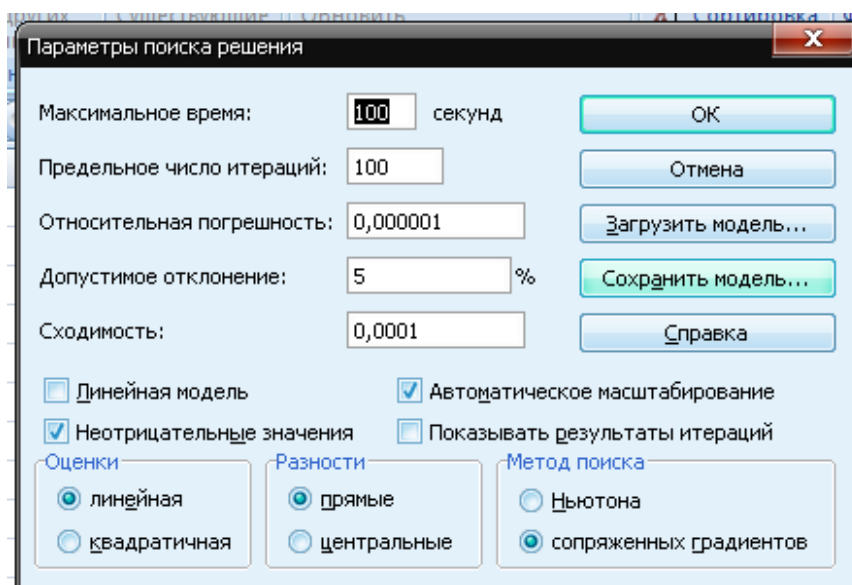


Рис. 46

	A	B	C	D	E
1	x1	x2	x3		Целевая функция
2	375.7843	2	14		1730.57128
3	Ограничения:				
4		Левые части	Знак отн-я	Правые части	
5	H1=	15.78426925	>=	0	
6	H2=	64.21573075	>=	0	
7	H3=	0	>=	0	
8	H4=	8	>=	0	
9	H5=	6	>=	0	
10	H6=	0	>=	0	
11	H7=	-1.8068E-07	>=	0	
12	H8=	3.000000181	>=	0	
13					
14					
15	R28'=	27.99999982			
16					

Рис. 47. Результаты решения задачи (4.49)–(4.57)

Результаты десятикратного решения задачи оптимизации (4.49)–(4.57) с разными точками начального приближения к решению приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

№	Координаты точки начала поиска			Координаты решения задачи			Значение целевой функции
	$x_1^{'0}$	$x_2^{'0}$	$x_3^{'0}$	$x_1^{'*}$	$x_2^{'*}$	$x_3^{'*}$	
1	440	8	13	412.11	2	8	1732.16
2	362	7	9	375.78	2	14	1730.57
3	400	10	9	412.11	2	8	1732.16
4	428	7.5	13.2	375.78	2	14	1730.57
5	391	5	11	375.78	2	14	1730.57
6	383	9	9	412.11	2	8	1732.16
7	411	6	8.5	412.11	2	8	1732.16
8	439	2	11	412.11	2	8	1732.16
9	407	5.5	11.7	375.78	2	14	1730.57
10	440	8	13	412.11	2	8	1732.16

Как видно из данных, приведенных в табл. 4.3, своих локальных минимумов целевая функция задачи (4.49) достигает в двух граничных точках об-

ласти, где удовлетворяются ограничения (4.50)–(4.57). В качестве решения задачи выбираем ту из этих точек, в которой значение целевой функции наименьшее. Такой является точка с координатами: $x_1 = 375,78 \text{ кг/м}^3$; $x_2 = 2,00 \text{ см}$; $x_3 = 14,00 \text{ час}$. Стоимость 1 м^3 бетона в ней равна $C(\bar{x}^*) = 1730,57 \text{ руб}$. При этом прочность бетона составляет $R_{28} = 28,00 \text{ МПа}$.

Пример.* Проектируется скоростной теплообменник типа «труба в трубе» (рис. 48) для подогрева холодной воды с температурой $t_{x.вх} = t_{21} = 15^\circ \text{C}$ до температуры $t_{x.вых} = t_{22} = 45^\circ \text{C}$ с расчетным расходом тепла $Q = 500 \text{ кВт}$. Температура горячей воды на входе равна $t_{г.вх} = t_{11} = 95^\circ \text{C}$, а на выходе $t_{г.вых} = t_{12} = 50^\circ \text{C}$. В конструкции теплообменника используется секционная противоточная схема движения теплоносителей. Толщина стенок труб составляет $\delta = 0,001 \text{ м}$, теплопроводность материала труб равна $\lambda_{тр} = 42 \text{ Вт/(м·К)}$.

Необходимо подобрать такие размеры диаметров d_1 и $d_{2\text{экв}}$ внутренней трубы и эквивалентный диаметр кольцевого канала теплообменника, чтобы затраты на его изготовление и эксплуатацию были минимальными.

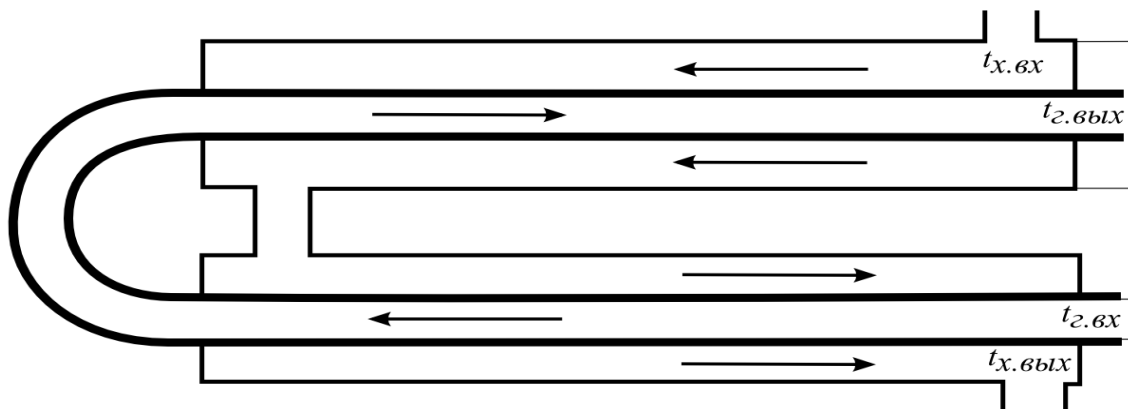


Рис. 48. Схема теплообменника типа «труба в трубе»

Решение. При конструировании теплообменников часто стремятся получить конструкцию с наименьшими размерами и, следовательно, металлоемкостью. Этого можно добиться, если обеспечить достаточно большие скорости течения теплоносителей и, тем самым, высокую интенсивность теплопередачи. Но такой компактный теплообменник может потребовать слишком больших затрат энергии на прокачку теплоносителей. Поэтому при проектировании теплообменника целевую функцию построим в виде функции затрат, включающей материальные затраты, пропорциональные площади поверхности теплообмена F , м^2 и эксплуатационные затраты, пропорциональные затратам мощности P на прокачку теплоносителей, Вт:

$$Z = c_1 \cdot F + c_2 \cdot P \rightarrow \min \quad (4.58)$$

* Пример и его решение авторам любезно предоставил доцент И.В. Маланичев

с варьируемыми параметрами: d_1 – внутренний диаметр внутренней трубы; $d_{2экв}$ – эквивалентный диаметр кольцевого канала (коэффициенты $c_1 = 0,5$ и $c_2 = 10$ заданы).

Основными соотношениями при проектировании теплообменника являются:

Уравнение баланса тепловой энергии:

$$Q = G_1 \cdot C_{p1} \cdot (t_{2,6X} - t_{2,6bIX}) = G_2 \cdot C_{p2} \cdot (t_{x,6bIX} - t_{x,6X}). \quad (4.59)$$

Уравнение теплопередачи:

$$Q = K \cdot \Delta t_{ln} \cdot F, \quad (4.60)$$

где

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda_{mp}} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (4.61)$$

$$F = \pi \cdot d_p \cdot L \quad (4.62)$$

$$\Delta t_{ln} = \frac{(t_{2,6X} - t_{x,6bIX}) - (t_{2,6bIX} - t_{x,6X})}{\ln \left(\frac{t_{2,6X} - t_{x,6bIX}}{t_{2,6bIX} - t_{x,6X}} \right)}, \quad (4.63)$$

$$d_p = d_1 + \frac{2 \cdot \delta}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad (4.64)$$

здесь K – коэффициент теплопередачи, $Вт/(м^2 \cdot К)$; L – длина теплообменника, м; δ – толщина стенки внутренней трубы, м; λ_{mp} – коэффициент теплопроводности стенки внутренней трубы, $Вт/(м \cdot К)$; Δt_{ln} – среднелогарифмическая разность температур, $^{\circ}C$; d_p – расчетный диаметр поверхности теплообмена, м.

Уравнение затрат мощности на прокачку:

$$P = \left(\xi \cdot \frac{L}{d_1} \cdot \frac{\rho_1 \cdot w_1^2}{2} \right) \cdot \frac{G_1}{\rho_1} + \left(\xi \cdot \frac{L}{d_{2экв}} \cdot \frac{\rho_2 \cdot w_2^2}{2} \right) \cdot \frac{G_2}{\rho_2}, \quad (4.65)$$

где скорости течения w_1, w_2 теплоносителей определяются из уравнений расхода:

$$G_1 = \rho_1 \cdot w_1 \cdot \frac{\pi \cdot d_1^2}{4}, \quad G_2 = \rho_2 \cdot w_2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d_{кол.нар}^2 - d_{кол.внут}^2), \quad (4.66)$$

$$d_{2экв} = 4 \cdot \frac{(\text{поперечное сечение кольцевого канала})}{(\text{смоченный периметр})} = d_{кол.нар.} - d_{кол.внут.}. \quad (4.67)$$

Коэффициенты теплоотдачи α и сопротивления трения ξ в трубе и в кольцевом канале определяются по следующим формулам:

при $Re > 10000$ – (турбулентный режим)

$$\alpha = 0,023 \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot \text{Re}^{0,8} \cdot \text{Pr}^{0,43}, \quad \xi_T = 0,316 / \text{Re}^{0,25}; \quad (4.68)$$

при $\text{Re} < 2300$ – ламинарный режим

$$\alpha = 0,15 \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot \text{Re}^{0,33} \cdot \text{Pr}^{0,43} \cdot \text{Gr}^{0,1}, \quad (4.69)$$

для круглой трубы $\xi_T = 64 / \text{Re}$; для кольцевого канала

$$\xi_K = 96 / \text{Re};$$

при $2300 < \text{Re} < 10000$ – (переходной режим)

$$\alpha = 0,008 \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot \text{Re}^{0,9} \cdot \text{Pr}^{0,43}, \quad \xi = \gamma \cdot \xi_T + (1 - \gamma) \cdot \xi_K, \quad (4.70)$$

где $\gamma = 1 - e^{-\frac{\text{Re}}{2300}}$ – коэффициент перемежаемости;

$$\text{Re} = \frac{w \cdot d}{\nu} - \text{число Рейнольдса}; \quad \text{Pr} = \frac{c_p \cdot \rho \cdot \nu}{\lambda} - \text{число Прандтля}; \quad (4.71)$$

$$\text{Gr} = \frac{g \cdot d^3 \cdot \beta}{\nu^2} \cdot \Delta t - \text{число Грасгофа} \quad \text{при} \quad \alpha \cdot \Delta t = K \cdot \Delta t_{\text{лн}},$$

где Δt – разность температур теплоносителя и стенки трубы.

Зависимости теплофизических свойств воды от температуры определяются формулами:

плотность:

$$\rho(t) = \frac{995,7}{0,984 + 0,483 \cdot 10^{-3} t}, \text{ кг/м}^3; \quad (4.72)$$

теплоемкость:

$$C_p(t) = 4194 - 1,15 \cdot t + 1,5 \cdot 10^{-2} t^2, \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}; \quad (4.72)$$

теплопроводность:

$$\lambda(t) = 0,553 \cdot (1 + 0,003 \cdot t), \text{ Вт/(м} \cdot \text{K)}; \quad (4.73)$$

коэффициент объемного расширения:

$$\beta(t) = 4 \cdot 10^{-6} t^2 + 61,15 \cdot 10^{-5} t - 5 \cdot 10^{-4}; \quad (4.74)$$

коэффициент кинематической вязкости:

$$\nu(t) = \frac{1,78 \cdot 10^{-6}}{1 + 0,0337 \cdot t + 0,000221 \cdot t^2}, \text{ м}^2/\text{с}. \quad (4.75)$$

Варьируемыми геометрическими характеристиками теплообменника «труба в трубе» являются d_1 и $d_{2 \text{ экв}}$.

Алгоритм решения задачи

1. Вводим исходные данные $t_{2, \text{вх}} = t_{11} = 95^\circ \text{C}$, $t_{2, \text{вых}} = t_{12} = 50^\circ \text{C}$, $t_{1, \text{вх}} = t_{21} = 15^\circ \text{C}$, $t_{1, \text{вых}} = t_{22} = 45^\circ \text{C}$, $c_1 = 0,5$, $c_2 = 10$, $Q = 500 \text{ кВт}$, $\delta = 0,001 \text{ м}$, $\lambda_{\text{тр}} = 42 \text{ Вт/(м} \cdot \text{K)}$.

2. Задаем начальные значения d_1 , $d_{2 \text{ экв}}$.

3. Находим $d_{\text{кол.нар.}}$, $d_{\text{кол.внут.}}$.

4. Вычисляем средние температуры:
 $t_{cp1} = (t_{11} + t_{12}) / 2$, $t_{cp2} = (t_{21} + t_{22}) / 2$, и среднелогарифмическую разность температур Δt_{\ln} по (4.64).
5. Рассчитываем теплофизические свойства теплоносителя (воды) при температурах t_{cp1} , t_{cp2} по формулам (4.72)–(4.75).
6. Находим расходы G_1 , G_2 из (4.59).
7. Определяем скорости течения w_1 , w_2 из (4.66).
8. Вычисляем значения характерных чисел Re , Pr , Gr по (4.71).
9. Определяем значения коэффициентов теплоотдачи и сопротивления трения в трубе по (4.68)–(4.70).
10. Находим значение коэффициента теплопередачи K по формуле (4.61) при $\alpha_1 \cdot \Delta t_1 = \alpha_2 \cdot \Delta t_2$.
11. Определяем площадь поверхности теплообмена F из (4.60).
12. Находим диаметр поверхности теплообмена d_p из (4.64).
13. Находим длину теплообменника L по (4.62).
14. Вычисляем затраты мощности P по формуле (4.65).
15. Вычисляем затраты $Z = c_1 F + c_2 P$.
16. Решаем задачу минимизации функции затрат на изготовление и эксплуатацию теплообменника.

Поскольку реализация алгоритма решения задачи минимизации функции затрат на изготовление и эксплуатацию теплообменника является сложным процессом, осуществим его с помощью надстройки «Поиск решения» табличного процессора **Excel**. Для этого активизируем **Excel**. Записываем в редакторе VBA коды для вычисления значений функций $\rho(t)$, $C_p(t)$, $\lambda(t)$, $\beta(t)$, $\nu(t)$ (коды этих функций приведены в приложении № 2). Далее в таблицу рабочей страницы введем исходные данные задачи и все соотношения, определяемые формулами (4.58)–(4.75). Например, это можно сделать так, как показано на рис. 49, 50. В ячейки B1:B10 вводим значения t_{11} , t_{12} , t_{21} , t_{22} , c_1 , c_2 , Q , δ , λ_{mp} , соответственно. В ячейки E2, F2, E4 и F4 вводим начальные значения d_1 , $d_{2экв.}$, Δt_1 и Δt_2 , соответственно. В ячейки G2 и H2 введем формулы для вычисления $d_{1внеш}$ и d_2 . В ячейки B12:B25, C12:C25 вводим формулы для вычисления значений величин t_{cp1} , c_{p1} , ρ_1 , ν_1 , λ_1 , β_1 , G_1 , w_1 , Δt_{\ln} , Re_1 , Gr_1 , Pr_1 , ξ_1 , α_1 , t_{cp2} , c_{p2} , ρ_2 , ν_2 , λ_2 , β_2 , G_2 , w_2 , $\Delta t_{2\ln}$, Re_2 , Gr_2 , Pr_2 , ξ_2 , α_2 . В ячейку B26 вводим формулу для вычисления K . В ячейки B28:B30 вводим формулы для вычисления F_1 – площади поверхности внутренней трубы, L , P_1 . В ячейки C28 и C30 вводим формулы для вычисления F_2 – площади поверхности внешней трубы, и P_2 . В ячейки E25, F25, E28, E30 записываем формулы для вычисления $\alpha_1 \cdot \Delta t_1$, $\alpha_2 \cdot \Delta t_2$, F и P . В ячейки F6 и F7 записываем левые части ограничений, устанавливающих не отрицательность параметров оптимиза-

ции d_1 , $d_{2экв}$. В ячейку J2 записываем формулу целевой функции задачи Z. После окончания ввода данных задачи в таблицу нажимаем на кнопку «Поиск решения». В результате на экране монитора появится диалоговое окно, изображенное на рис. 51. Занесем в соответствующие окошечки информацию о задаче: адрес ячейки целевой функции J2; направление оптимизации – минимизировать; адреса ячеек, в которых записаны координаты точки начала поиска до решения задачи и в которые будут записаны координаты точки оптимума целевой функции после решения задачи E2:F2; адреса ячеек, в которых записаны левые части ограничений задачи F6:F7. Далее щелкнем левой кнопкой мыши по кнопке «Параметры». В результате этого появится новое диалоговое окно (рис. 52), в котором установим флажки: «Неотрицательные значения», «Автоматическое масштабирование», «Сопряженных градиентов» (выбранный метод решения задачи) и, щелкнув левой кнопкой мыши по кнопке «ОК», возвратимся в предыдущее диалоговое окно. Щелкнув в нем левой кнопкой мыши по пункту «Выполнить», получим решение задачи (рис. 53). Метод сопряженных градиентов предназначен для нахождения значений локальных оптимумов, поэтому решим задачу несколько раз, начиная процедуру поиска оптимума с различных точек. Многократное решение задачи с различными начальными точками приводило к решению, полученному на рис. 53. Оно позволяет утверждать с определенной долей уверенности, что найден глобальный минимум целевой функции.

Как следует из данных, приведенных на рис. 53, минимальные затраты на изготовление и эксплуатацию теплообменника с расчетным расходом тепла в $Q = 500 \text{ кВт}$ составляют 20,367 условных единиц и они достигаются при $d_1 = 0,140 \text{ м}$ и $d_{2экв} = 0,081 \text{ м}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	T11(г.вх)	95			d1	d2экв	d1внеш	d2		Z	
2	T12(г.вых)	50			0.1	0.1	0.102	0.202		26.1089	
3	T21(х.вх)	15			dT1	dT2					
4	T22(х.вых)	45			1	1					
5	C1	0.5									
6	C2	10			H1=	0.1	>=	0			
7	Q	500000			H2=	0.1	>=	0			
8	tct	0.001									
9	Ltr	42									
10											
11		1	2								
12	Tcp	72.5	30								
13	Cp	4189.46875	4173								
14	rho	977.1176648	997.2057807								
15	nu	3.86546E-07	8.05466E-07								
16	lambda	0.6489275	0.58097								
17	beta	0.024875	0.0049								
18	G=	2.652152761	3.993929228								
19	w	0.345590495	0.167745977								
20	Tln	96.83544354									
21	Re	89404.6736	20825.94572								
22	Gr	1633160857	74091830.86								
23	Pr	2.43843514	5.769349457								
24	ksi	0.018274564	0.026304854		alfa1*dT1	alfa2*dT2					
25	alfa	2002.027377	809.1888172		2002.03	809.189					
26	K	568.4697015									
27											
28	F	9.082979537	18.34761866		27.4306						
29	L	28.34511944									
30	P	0.820384481	0.418975652		1.23936						
31											

Рис. 49

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	T11(r.вх)	95			d1	d2эвв	d1внеш	d2	Z		
2	T12(r.вых)	50			0.1	0.1	=E2+2*B8	=G2+F2	=B5*E28+B6*E30		
3	T21(x.вх)	15			dT1	dT2					
4	T22(x.вых)	45			1	1					
5	C1	0.5									
6	C2	10			H1=	=E2	>=	0			
7	Q	500000			H2=	=F2	>=	0			
8	tct	0.001									
9	Ltr	42									
10											
11		1	2								
12	Tcp	=B1+B2)/2	=B3+B4)/2								
13	Cp	=Cp(B12)									
14	rho	=rho(B12)									
15	nu	=nu(B12)									
16	lambda	=lambda(B12)									
17	beta	=beta(B12)									
18	G=	=DD(B7;B13;B1;B2)									
19	w	=4*B18/(PI()*E2^2*B14)									
20	Tln	=((B1-B4)-(B2-B3))/LOG((B1-B4)/(B2-B3))									
21	Re	=B19*E2/B15									
22	Gr	=9.81*E2^3*B17/B15^2*E4									
23	Pr	=B13*B14*B15/B16									
24	ksi	=ksi(B21;1)									
25	alfa	=alfa(B21;B22;B23;B16;E2)									
26	K	=1/(1/B25+B8/B9+1/C25)									
27											
28	F	=B7/B26/B20									
29	L	=B28/(PI()*G2)									
30	P	=B18*B24*B29/E2*B19^2/2									
31											
32											

Рис. 50

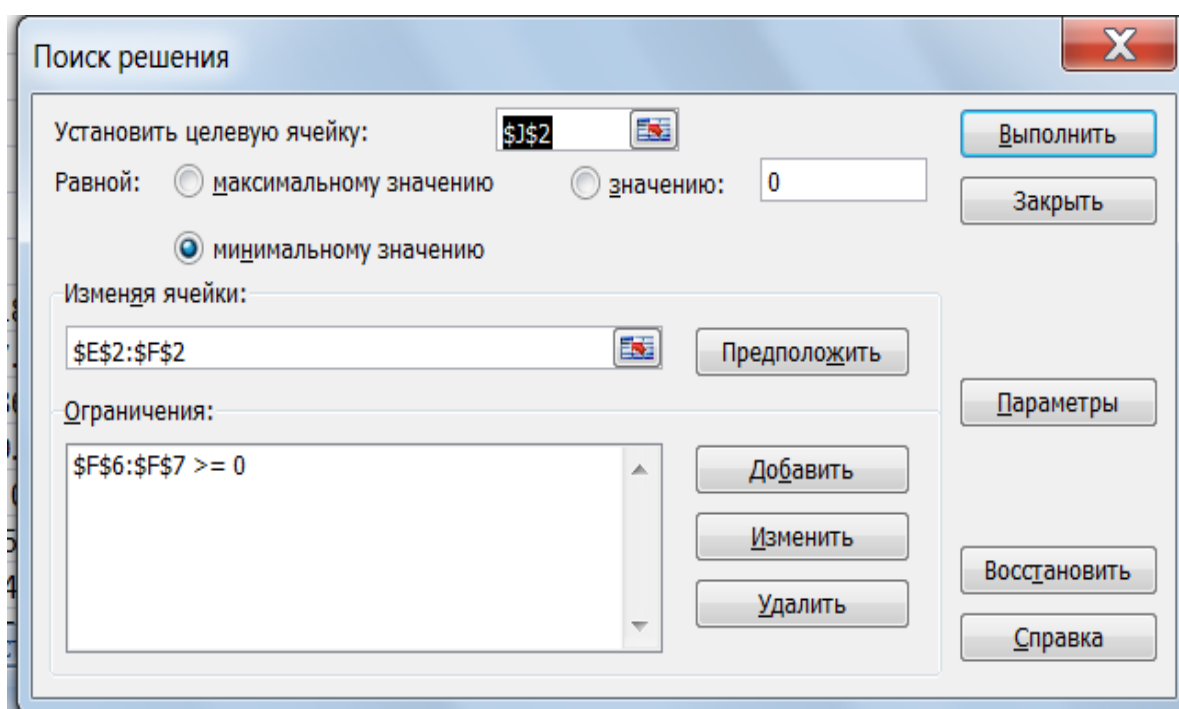


Рис. 51

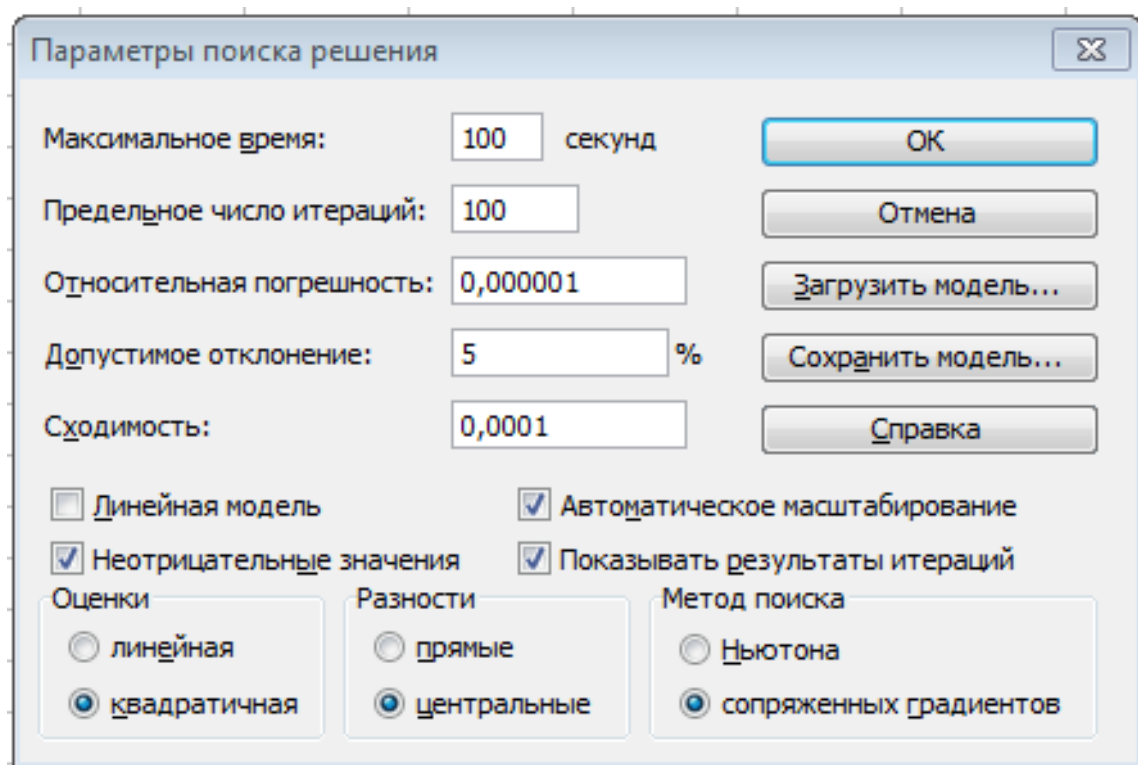


Рис. 52

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	T11(г.вх)	95			d1	d2экв	d1внеш	d2		Z
2	T12(г.вых)	50			0.13956	0.08139	0.14156	0.22295		20.367
3	T21(х.вх)	15			dT1	dT2				
4	T22(х.вых)	45			1	1				
5	C1	0.5								
6	C2	10			H1=	0.13956	>=	0		
7	Q	500000			H2=	0.08139	>=	0		
8	tct	0.001								
9	Ltr	42								
10										
11		1	2							
12	Tcp	72.5	30							
13	Cp	4189.46875	4173							
14	rho	977.1176648	997.2057807							
15	nu	3.86546E-07	8.05466E-07							
16	lambda	0.6489275	0.58097							
17	beta	0.024875	0.0049							
18	G=	2.652152761	3.993929228							
19	w	0.177432456	0.171881236							
20	Tln	96.83544354								
21	Re	64061.31655	17368.55486							
22	Gr	4439377221	39950123.06							
23	Pr	2.43843514	5.769349457							
24	ksi	0.019862692	0.027526194		alfa1*dT1	alfa2*dT2				
25	alfa	1098.738038	859.7940516		1098.74	859.794				
26	K	476.8685838								
27										
28	F	10.82771825	17.29762216		28.1253					
29	L	24.34687165								
30	P	0.144661042	0.485773738		0.63043					
31										

Рис.53. Результаты решения задачи

Задания по теме «Нелинейное программирование»

Задание № 1

Решить задачу проектирования нагруженной балки, рассмотренную выше, со следующими данными: $L = 14 + 0,2 \cdot n$, $F = 6000 - 10 \cdot n$, $E = 3 \cdot 10^7$, $G = 12 \cdot 10^6$, $\tau_a = 13600 + 10 \cdot n$, $\sigma_d = 30000 - 20 \cdot n$, $C_3 = 0.10471 + 0.002 \cdot n$, $C_4 = 0.04811 + 0.0003 \cdot n$ (n – номер варианта). При составлении математической модели сооружаемой конструкции учесть, что сварочный шов наносится и с торцевой части балки, а также дополнительное условие, что расходы на материалы должны быть более чем в два раза больше, чем расходы на сварочные работы.

Задание № 2

На основе реализованного планового эксперимента В3 (табл. 4.4) построить уравнения регрессии для прочности и стоимости бетона с учетом ограничений:

$$360 + m \leq x_1' \leq 440 - m; \quad 2 + 0,1m \leq x_2' \leq 10 - 0,1m, \quad 8 + 0,1m \leq x_3' \leq 14 + 0,1m; \\ 28 - 0,1m \leq R_{28} \leq 32 + 0,1m, \text{ здесь } m - \text{ номер варианта.}$$

Сформулировать задачу оптимального проектирования процесса приготовления бетона в виде задачи (4.49)–(4.57) и решить ее на ПЭВМ.

Таблица 4.4

Номер опыта	1	2	3	4	5	6
мПа	35,2-0,1m	29,8+0,1m	41,4+0,2m	36	27,4	22-0,001n
С, руб.	22,7+0,1m	21,9	18,6-0,1m	17,8	20,3	20,1-0,1m

Продолжение табл. 4.4

Номер опыта	7	8	9	10	11
мПа	27,6+0,1m	22,4	35,8	24,9	25,5
С, руб.	16,7-0,1m	16,5+0,04m	20,7	19,8	22,5

Окончание табл. 4.4

Номер опыта	12	13	14	15	16	17
мПа	28,7	29,8	24,4	27,2	28,2	29,0
С, руб.	18,0	20,6	18,9-0,01m	19,5	20-0,02m	19,9 - 0,01m

здесь m – номер варианта.

Задание № 3

Смоделировать оптимальный по затратам на проектирование и эксплуатацию скоростной теплообменник типа «труба в трубе» для подогрева холодной воды с температурой $t_{x,ex} = t_{21} = (15 + m)^\circ C$ до температуры $t_{x,вых} = t_{22} = (45 - m)^\circ C$, с расчетным расходом тепла Q . Температура горячей воды на входе равна $t_{г,ex} = t_{11} = (100 - m)^\circ C$, а на выходе $t_{г,вых} = t_{12} = (60 - m)^\circ C$. В конструкции теплообменника используется секционная противоточная схема движения теплоносителей. Толщина стенки труб составляет $\delta = 0,001 \cdot m$ м, теплопроводность материала стенки труб равна $\lambda_{mp} = 42$ Вт/(м·К). m – номер варианта. Значения Q – производительность теплообменника (Ватт) и значения C_1 , C_2 по вариантам:

C_1	10,2	9,3	7,5	6,1	5,2	2,5	1,1
C_2	10,1	20,5	31,3	45,3	50,1	75,5	100
Q, ватт	В	а	р	и	а	н	т
100000	1	3	6	10	15	21	28
150000	2	5	9	14	20	27	35
200000	4	8	13	19	26	34	
250000	7	12	18	25	32		
300000	11	17	24	31			
350000	16	23	30				
400000	22	29					

Вопросы для самопроверки

1. В чем принципиальное отличие задач нелинейного программирования от задач линейного программирования?
2. В чем отличие популяционных методов оптимизации от траекторных методов?
3. Какие методы называются методами нулевого порядка, а какие методы называются методами k -го порядка?
4. Суть метода симплексного поиска для решения задач нелинейного программирования.
5. Сущность метода Нелдера-Мида.
6. Что такое «градиент функции»?
7. Каким свойством обладает вектор-градиент?
8. Какая точка называется стационарной точкой функции?
9. Какое условие является необходимым условием достижения экстремума нелинейной функцией?
10. Достаточные условия достижения минимума нелинейной функцией.
11. Достаточные условия достижения максимума нелинейной функцией.
12. Сущность градиентных и безградиентных методов.
13. Сущность метода штрафных функций.
14. С помощью каких критериев определяется окончание итерационных методов для решения задач оптимизации?

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Изучить классы методов прямого поиска, популяционных методов и градиентных методов для решения задач нелинейной безусловной оптимизации. Из каждого класса взять по одному методу и провести их сравнительный анализ в плане определения их преимуществ и недостатков относительно друг друга.

5. ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

В этой главе рассматриваются математическая постановка задачи многокритериальной оптимизации с непрерывными переменными, к которой, как правило, сводятся задачи оптимального проектирования конструкций (ОПК) и многие другие технические и технологические задачи оптимального проектирования (оформления) и основные подходы к решению таких задач.

5.1. Системный анализ и задачи оптимального проектирования конструкций

При разработке строительных и других конструкций перед проектировщиками возникает сложнейшая задача комплексного учета противоречивых требований.

Сущность комплексного проектирования сооружений заключается в процессе интеграции различных противоречащих друг другу требований, представляемых в виде критериев качества: конструктивно-технологических, функциональных, производственно-технических, экономических и социальных [16]. В свою очередь, каждый из них состоит из подмножества частных критериев. Например, конструктивно-технологический критерий включает в себя прочность, устойчивость, жесткость, виброактивность, долговечность и т.д.

Очевидно, что задача состоит не столько в простом учете противоречивых требований, сколько в их оптимальном (наилучшем в некотором смысле) удовлетворении. Более точно задачу оптимального проектирования можно определять как поиск конструкции и соответствующих параметров по заданным критериям качества. Реальная конструкция всегда будет каким-то компромиссом, каким-то сочетанием требуемых качеств. Но каких – проектировщик заранее не знает. В этом и заключается основная проблема многокритериальности (неопределенности целей).

Если раньше решение задач проектирования во многом зависело от опыта, интуиции и, наконец, искусства проектировщика, то в настоящее время процесс проектирования все больше опирается на научные исследования. Научный подход к конкретным задачам проектирования стал возможным благодаря появлению ЭВМ и таких новых научных направлений, как системный анализ (исследование операций, теория управления), математическое программирование и др.

Современные конструкции типа структурных, многослойных, вафельных плит и оболочек настолько сложны и разнообразны, что они и являются подсистемами больших искусственных систем (сооружений, комплексов и т.п.), сами в полной мере могут быть отнесены к последним. Естественно, возникает вопрос о разработке комплексного, или системного, научного под-

хода к решению проектных задач. Другими словами, речь идет о научной постановке так называемых системных задач независимо от того, что разрабатывается – ответственный объект или типовая конструкция.

Описание и анализ больших искусственных систем требует решения сложнейших проблем, связанных с большим числом изменчивых и противоречивых целей, неопределенностью внешней среды и внутренних свойств системы, ее целей.

При решении этих проблем целесообразно использовать методы системного анализа, в частности, теорию исследования операций.

Системный анализ – это дисциплина, развивающая методы проектирования сложных технических, народнохозяйственных, экологических систем, организационных структур принятия решений в условиях, когда выбор альтернативы требует анализа сложной информации различной физической природы. Одним из основных истоков и составных частей системного анализа является исследование операций. Операция – это любое целенаправленное действие. Термин «исследование операций» родился, когда стало очевидно, что задачи широкого класса, возникающие в самых различных сферах человеческой деятельности, имеют, несмотря на их качественное различие, одно общее – они сводятся к выбору способа действия, варианта плана, параметров конструкции, т.е. к принятию решений. Этого общего достаточно для построения единой теории и единой системы методов. Основное содержание исследования операций или этапы, которые всегда присутствуют при исследовании, следующие:

- 1) математическое описание – создание модели операции;
- 2) анализ неопределенностей и формализация понятия цели (формирование целевых функций, критериев);
- 3) решение возникающих оптимизационных и других математических задач [17].

Следовательно, заключительным и одним из важнейших этапов оптимального проектирования с позиций системного анализа является решение оптимизационных задач, которые обычно являются многокритериальными.

Анализ основных особенностей задач ОПК с позиций системного анализа позволяет выделить их главные черты: неопределенность, декомпозиционность, иерархичность, многокритериальность [16].

Неопределенность задач вызвана тем, что выбор решения, как правило, происходит в условиях неполного знания проектируемой конструкции, характера и особенностей ее функционирования. Неопределенность не может быть устранена даже при предварительном изучении всей имеющейся априорной информации, т.е. она не является следствием несовершенства математической модели задачи, а отражает ее суть – противоречивость, конфликтность. Неопределенность вызывается внешними причинами, не зависящими от проектировщика (естественная), или вводится им преднамеренно (искусственная).

Следует различать: а) неопределенность обстановки, природу неопределенности исходной информации, в которой нужно выбрать решение. Она обусловлена неполным знанием модели объектов, внешних воздействий, естественных ограничений и т.п.; б) неопределенность цели (требований), которую должна достигнуть система. Это вызывается неполным знанием ряда дополнительных требований, предъявляемых к системе; в) неопределенность (случайность) самого решения, вводимая преднамеренно путем рандомизации решения.

Первые два вида неопределенности отражают формулировку задачи оптимизации, а третий – характер решения.

Декомпозиционность, т.е. способность задач ОПК разделяться на более простые, связана прежде всего с возможностью декомпозиции цели. Это в свою очередь определяет функциональное деление объекта как системы на подсистемы. Так, конструкцию можно разделить на подконструкции (подсистемы), агрегаты (блоки), узлы и т.д. Однако следует учитывать связи между подсистемами, блоками, которые могут нарушаться декомпозицией. Выбранная схема декомпозиции конструкции и проведенный анализ особенностей ее структуры не исключает, а скорее, предполагает тщательное изучение тех классов задач, для решения которых предполагается использовать соответствующий декомпозиционный подход. При этом характер изучения становится более целенаправленным и определенным.

Иерархичность задач ОПК проявляется в возможности оптимизации по нескольким уровням. Она отражает не только их декомпозиционность, но и качественное изменение при переходе из одного иерархического уровня в другой. Тесная взаимосвязь проектируемых подсистем не позволяет закончить оптимизацию за один цикл, а делает ее итерационным процессом. Она может привести к оптимальному решению (не всегда экстремальному), а для достижения более точного результата требует специальных процедур, использующих специфику свойств конкретных конструкций. Наличие иерархичности дает возможность: а) целесообразно сочетать различные локальные критерии (критериальные ограничения) каждого из уровней с глобальным критерием оптимальности системы в целом; б) приспособиться к алгоритму управления изменяющимися условиями (например, к нагрузкам); в) повысить надежность алгоритма управления; г) более или менее свободно действовать в пределах уровня системы.

Многокритериальность обусловлена неопределенностью цели и стремлением оценить качество решения с различных точек зрения, а также неопределенностью условий и параметров, динамикой и многоэтапностью процессов, сложностью и иерархичностью оптимизируемых систем. Обычное сведение задач ОПК к однокритериальной обедняет возможности проектирования. Однако многокритериальность можно преодолеть и многокритериальные задачи с помощью компромиссов снова свести к однокритериальным, но делать это необходимо на последней стадии проектирования. Нарушение

данного правила приводит к вырождению проекта, так как выбирая один из показателей в качестве критерия оптимальности, проектировщик игнорирует все возможные компромиссы между ними.

Указанные главные черты задач ОПК позволяют отнести их к задачам выбора решений по векторному критерию эффективности.

5.2. Основные особенности задач оптимального проектирования конструкций

Рассмотрим типичную постановку задачи оптимизации с векторным критерием эффективности, т.е. задачу многокритериальной оптимизации.

Пусть система зависит от n варьируемых параметров (независимых переменных) $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, где \bar{x} – точка n -мерного пространства. Предположим, что цель задачи состоит в максимизации (или минимизации) критериев $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_r(\bar{x})$:

$$f_1(\bar{x}) \rightarrow \max_{(\min)}, f_2(\bar{x}) \rightarrow \max_{(\min)}, \dots, f_r(\bar{x}) \rightarrow \max_{(\min)}, \quad (5.1)$$

где $f_i(\bar{x}), i = \overline{1, r}$ – характеристики системы, связанные с оценками ее качества монотонной зависимостью.

Также задаются параметрические ограничения:

$$x_i^* \leq x_i \leq x_i^{**}, i = \overline{1, n} \quad (5.2)$$

и функциональные ограничения:

$$C_i^* \leq \Phi_i(\bar{x}) \leq C_i^{**}, i = \overline{1, k}; \quad (5.3)$$

здесь x_i^*, x_i^{**} – заранее известные границы изменения параметров x_i ; C_i^*, C_i^{**} – заданные константы.

Могут быть заданы также и критериальные ограничения:

$$f_i^* \leq f_i(\bar{x}) \leq f_i^{**}, i = \overline{1, r}; \quad (5.4)$$

где f_i^*, f_i^{**} – границы изменения критерия $f_i(\bar{x})$.

Ограничения (5.2) выделяют в n -мерном пространстве параллелепипед с объемом $\prod_{i=1}^n (x_i^{**} - x_i^*)$. Ограничения (5.3) и (5.4) выделяют в параллелепипеде подмножество, которое в общем случае может быть не односвязным (рис. 54). Это множество $G_x \in R^n$ называют множеством альтернатив или допустимым множеством.

Задача оптимального проектирования сводится к решению многокритериальной задачи (5.1)–(5.4).

Сформулируем основные особенности задач оптимального проектирования конструкций (ОПК) [16, 18]:

1. Области поиска оптимальных решений могут быть несвязными, а целевые функции – многоэкстремальными и не дифференцируемыми.

2. Информация о конкретном задании функциональных ограничений и о границах допустимой области изменения параметров часто отсутствует.

3. Требования, предъявляемые к проектируемой конструкции, и область допустимых значений критериев обычно уточняются с заказчиком в процессе решения задачи ОПК.

4. Из-за отсутствия информации об аргументированном назначении констант C_i^* , C_i^{**} и о возможностях проектируемой конструкции, предъявляемые к ней требования носят противоречивый характер, и ясного представления о том, что считать функциональными ограничениями, а что критериями качества, нет.

5. До постановки задачи ОПК сформулировать один критерий, который учитывал бы все желаемые качества проектируемой конструкции, практически невозможно, так как каждый показатель характеризует решение частично и, следовательно, функциональной полнотой обладает лишь их совокупность.

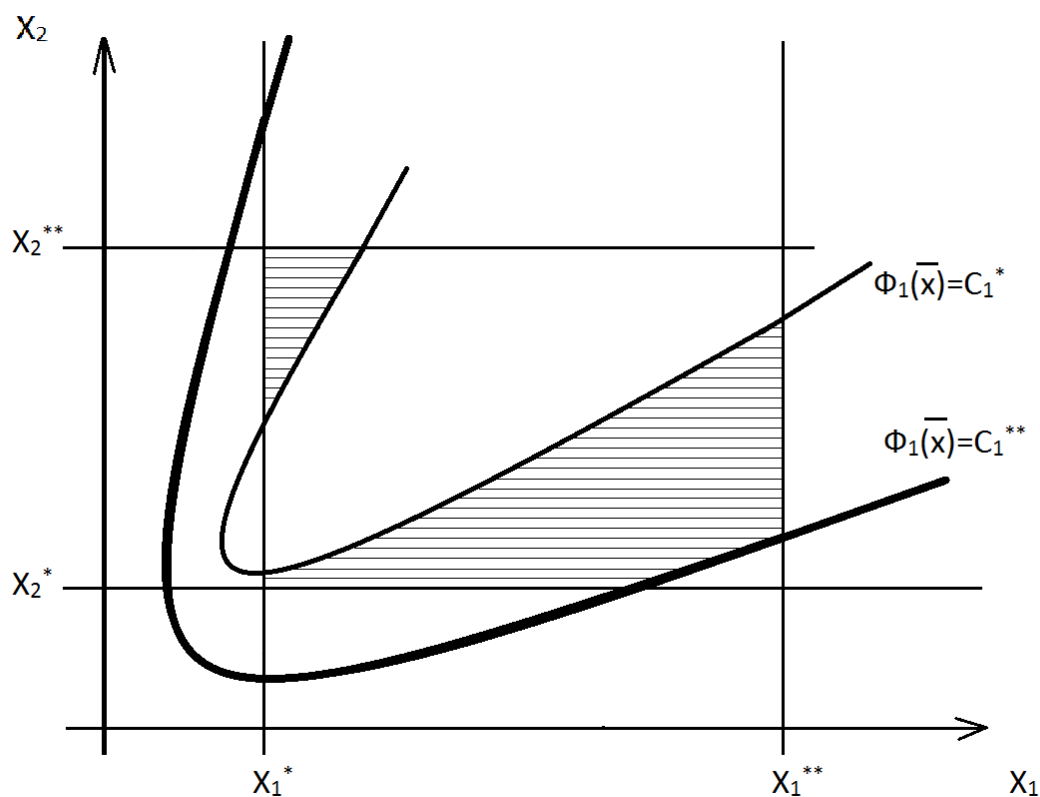


Рис. 54

6. Многие классы конструкций имеют пологие функции цели в районе оптимума, что обеспечивает свободу выбора параметров проектирования и возможность поэтапной оптимизации по другим критериям.

7. Реальное проектирование требует учета традиционных условий прочности, устойчивости и жесткости, а также конструктивных и технологических ограничений. Однако «активность» этих условий, т.е. какие из них и в каком сочетании будут ограничивать действительные, поперечные размеры элементов конструкции, заранее не известны.

8. Условия равной прочности статически неопределимых конструкций, как правило, несовместимы с требованием минимума веса при их расчете на

несколько сочетаний или неподвижную нагрузку, а также с требованием минимума стоимости конструкции с учетом ее изготовления.

9. При решении задач ОПК необходим более глубокий, чем в задачах строительной механики, анализ уравнений состояния: геометрических соотношений, физических зависимостей и уравнений равновесия. Проектируя пластины и оболочки, следует учитывать, что уравнения состояния образуют не алгебраическую, а дифференциальную систему. Все элементы, усложняющие задачи строительной механики (геометрическая и физическая нелинейность, сложные физические модели материала и т.п.), также усложняют и соответствующие задачи ОПК.

5.3. Основные подходы к решению задач многокритериальной оптимизации

Многокритериальные задачи очень разнообразны по содержанию, по объему и качеству информации. Неслучайно до сих пор нет общепринятой классификации многокритериальных задач и подходов к их решению.

Основная трудность при решении многокритериальных задач связана с недостатком информации, требуемой для уменьшения неопределенности цели. Здесь возникает вопрос: а что же следует считать наилучшей альтернативой в задаче с несколькими целевыми функциями, которые противоречивы и достигают минимума (максимума) в различных точках множества альтернатив?

Основываясь на различных определениях наилучшей альтернативы, можно провести некоторую классификацию известных процедур решения многокритериальных задач [19].

1. Априорные процедуры (сведение многокритериальной задачи к однокритериальной с помощью компромисса и решающих правил).

2. Построение множества оптимальных по Парето альтернатив и выбор из этого множества альтернативы наиболее предпочтительной с точки зрения лица, принимающего решения (ЛПР).

3. Апостериорные процедуры (аксиоматический подход на базе теории полезности для построения функции предпочтений ЛПР).

4. Адаптивный подход (человеко-машинные процедуры для выявления предпочтений ЛПР одновременно с исследованием множества альтернатив).

Предлагаемая классификация не охватывает всех известных процедур, кроме того, приведенные классы процедур частично пересекаются.

Априорные процедуры многокритериальной оптимизации

Идея всех априорных процедур – это сведение задачи многокритериальной оптимизации к задаче однокритериальной оптимизации, потому что методы для решения задач однокритериальной оптимизации хорошо разработаны.

В процедурах априорного типа делается явное или неявное предположение, что вся информация, позволяющая определить наилучшее решение,

скрыта в формальной модели задачи, т.е. в описании множества альтернатив и целевых функций. Следовательно, с помощью некоторых преобразований эта информация может быть извлечена из этой формальной модели и конструктивно использована. Традиционная схема рассуждений в значительно упрощенном виде выглядит следующим образом.

Каждый критерий $f_i(\bar{x})$ $i = 1, 2, \dots, r$ характеризует некоторое локальное качество на множестве альтернатив G_x , например, вес, надежность, стоимость, быстродействие и т.д. Наилучшая альтернатива, по-видимому, характеризуется наиболее удачным сочетанием всех этих локальных качеств, т.е. имеет максимальное значение «глобального» качества. Таким образом, для выбора наилучшей альтернативы достаточно понять, каким образом глобальное качество зависит от локальных качеств, после чего многокритериальная задача будет сведена к задаче скалярной оптимизации.

Понятно, что вид глобальной функции качества существенно зависит от типа решаемой задачи.

Остановимся здесь на некоторых наиболее часто применяемых способах построения глобальной функции качества, т.е. на преодолении неопределенности цели.

Пусть задача многокритериальной оптимизации имеет вид:

$$\begin{aligned} \max_{\bar{x} \in G_x} f_i(\bar{x}), i = \overline{1, r} \quad (r \geq 2) \end{aligned} \quad (5.5)$$

а). Простейший способ преодоления неопределенности цели (выделение главного критерия)

Очень часто в задачах проектирования задается некоторая система нормативов $f_1^*, f_2^*, \dots, f_r^*$. Это значит, например, что параметры будущей конструкции должны быть таковы, чтобы максимизировать функции $f_i(\bar{x})$ при условиях:

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i^*, \quad i = \overline{1, r}, \quad (5.6)$$

где f_i^* – некоторая система контрольных показателей.

Предположим, что, помимо того, среди критериев f_i мы выделили некоторый главный, например, $f_1(\bar{x})$. Тогда мы приходим к однокритериальной задаче:

$$\text{Найти } f_1(\bar{x}) \rightarrow \max \quad (5.7)$$

$$\text{при условии: } \bar{x} \in G_x, f_i(\bar{x}) \geq f_i^*, \quad i = \overline{2, r}. \quad (5.8)$$

Данная схема сведения задачи (5.5) к однокритериальной задаче (5.7)–(5.8) является, вероятно, самой простой и наиболее употребительной в инженерной практике. Недостатками этого способа являются трудности выбора главного критерия и определения критериальных ограничений (назначения допустимых границ используемых показателей f_i^*). Также к недостаткам нужно отнести возможность варианта, что введенные ограничения окажутся несовместными.

Если задача (5.7)–(5.8) разрешима, то ее решение принимается в качестве решения задачи (5.5), либо на основе полученного решения (например, при помощи двойственных оценок ограничений) устанавливаются новые пределы f_i^* ($\bar{f}_i^* \geq f_i^*$), и задача решается снова.

Если задача (5.7)–(5.8) решения не имеет, то приходится назначать новые пределы $\bar{f}_i^* \leq f_i^*$ и задачу перерешать с \bar{f}_i^* вместо f_i^* .

Задача проектировщика в данном подходе сводится только к назначению допустимых границ используемых показателей.

б). Линейная свертка

Вместо r частных критериев $f_i(\bar{x})$ предлагается рассматривать один критерий вида:

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^r c_i \cdot f_i(\bar{x}), \quad (5.9)$$

где $c_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^r c_i = 1$.

Такой способ свертки вводит, по существу, отношение эквивалентности различных критериев, так как величины c_i показывают, насколько изменяется целевая функция $F(\bar{x})$ при изменении критерия $f_i(\bar{x})$ на единицу.

Коэффициенты c_i – результаты экспертизы, они отражают представление лица, принимающего решение о содержании компромисса, который он вынужден принять.

Если же критерии $f_i(\bar{x})$ не выражаются в одних и тех же единицах измерения, то для использования формулы (5.9) их приводят к безразмерному виду. Известны разные способы. Например, путем деления каждого критерия на его максимальное значение на допустимом множестве G_x :

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^r c_i \frac{f_i(\bar{x})}{f_i^M},$$

где f_i^M – оптимальные значения функций $f_i(\bar{x})$ $i = 1, 2, \dots, r$ на G_x .

Более сложный способ – введение функции:

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^r c_i \cdot \frac{f_i(\bar{x}) - f_i^m}{f_i^M - f_i^m},$$

где f_i^M – максимальное, а f_i^m – минимальное значения критерия $f_i(\bar{x})$ на G_x . При этом вклад «локального» качества $f_i(\bar{x})$ в «глобальное» качество $F(\bar{x})$ зависит от того, насколько сильно меняется локальное качество на допустимом множестве G_x .

в). Принцип справедливого компромисса

Основным недостатком предыдущего способа является возможность компенсации недопустимо малых значений некоторых критериев достаточно большими значениями других. Действительно, если \bar{x} характеризует проект самолета, а критерии f_1 и f_2 представляют собой его надежность и скорость,

соответственно, то очень высокой надежностью может обладать самолет, который никогда не сможет взлететь, и, следовательно, будет иметь нулевую скорость. Несмотря на явную бесполезность такого устройства, значение функции

$$F(\bar{x}) = c_1 f_1(\bar{x}) + c_2 f_2(\bar{x})$$

может быть довольно большим.

В таких случаях необходимо использовать другие принципы. Например,

$$F(\bar{x}) = \prod_{i=1}^r f_i(\bar{x}), \quad .$$

Этот принцип получил название принципа справедливого компромисса. Применение этого обобщенного критерия позволяет преодолеть указанные недостатки (например, присваивает нулевое значение качества самолету, который не может летать).

г). Принцип гарантированного результата

Предположим, что мы ввели некоторую систему контрольных показателей f_i^* , относительно которых критерии $f_i(\bar{x})$ должны удовлетворять условиям $f_i(\bar{x}) \geq f_i^*$, $i = 1, 2, \dots, r$.

В таких случаях целевую функцию удобно представлять в виде:

$$F(\bar{x}) = \min_{1 \leq i \leq r} \frac{f_i(\bar{x})}{f_i^*}$$

и искать вектор \bar{x} , который обеспечивает максимальное значение $F(\bar{x})$. Смысл здесь достаточно прост. При данном значении вектора \bar{x} величина $F(\bar{x})$ дает нам значение наихудшего из показателей $f_i(\bar{x})$. Максимизация $F(\bar{x})$ обеспечивает наибольшее значение для наихудшего из показателей $f_i(\bar{x})$ т.е. гарантированный результат.

д). Метод идеальной точки в пространстве критериев

Предположим, что мы решили систему однокритериальных задач

$$f_i(\bar{x}) \rightarrow \max, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

и нашли идеальную точку $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где $\xi_i = \max_{x \in X} f_i(\bar{x})$.

Точка $\bar{\xi}$ является недостижимой в пространстве критериев. Введем положительно определенную матрицу $R = \{r_{ij}\}$. Тогда скалярная величина

$$H = \sqrt{\sum_{i,j} (f_i(\bar{x}) - \xi_i) r_{ij} (f_j(\bar{x}) - \xi_j)} \quad (5.10)$$

определяет некоторое расстояние от точки, соответствующей данному вектору \bar{x} , до идеальной точки. В частном случае, когда R – единичная матрица

$$H = \sqrt{\sum_i (f_i(\bar{x}) - \xi_i)^2}$$

есть евклидово расстояние до точки $\bar{\xi}$.

В качестве нового скалярного критерия мы можем принять функцию (5.10). Ее минимизация дает определенную полезную информацию: показывает наши предельные возможности достижения идеальной точки.

е). Метод ранжирования критериев

Предположим, что локальные критерии упорядочены по важности:

$$f_1(\bar{x}) > f_2(\bar{x}) > \dots > f_r(\bar{x}),$$

здесь $(f_i(\bar{x}) > f_{i+1}(\bar{x}))$ означает, что $f_i(\bar{x})$ важнее $f_{i+1}(\bar{x})$.

Тогда решение задачи сводится к тому, чтобы

найти $\max f_1(\bar{x}) = f_1^* ;$
 $\bar{x} \in G_x$

найти $\max f_2(\bar{x}) = f_2^* \text{ при } f_1(\bar{x}) = f_1^* ;$
 $\bar{x} \in G_x$

и т.д.;

найти $\max f_n(\bar{x}) = f_n^* \text{ при } f_i(\bar{x}) = f_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, r-1,$
 $\bar{x} \in G_x$

т.е. к многоэтапному алгоритму с оптимизацией каждого критерия при фиксированных предыдущих.

На практике для получения приемлемых решений по менее важным критериям приходится делать уступки по другим, наиболее важным. Данный подход реализуется в алгоритме последовательных уступок, который сводится к последовательному решению задач однокритериальной нелинейной оптимизации:

найти $f_1^* = \max f_1(\bar{x}) ;$
 $\bar{x} \in G_x$

найти $f_2^* = \max f_2(\bar{x}) \text{ при } f_1(\bar{x}) \geq f_1^* - \Delta_1$
 $\bar{x} \in G_x$

и т. д.;

найти $f_r^* = \max f_r(\bar{x}) \text{ при } f_i(\bar{x}) \geq f_i^* - \Delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, r-1.$
 $\bar{x} \in G_x,$

где Δ_i – величина уступки по i -му критерию.

Другими словами, решается скалярная задача оптимизации по критерию $f_1(\bar{x})$. Если $\max f_1(\bar{x}) = f_1^*$, то по критерию $f_1(\bar{x})$ устанавливается уступка Δ_1 , на которую согласно ЛПР, чтобы упростить решение по следующим критериям (в первую очередь, по $f_2(\bar{x})$) и т. д.

Следовательно, процедуры рассмотренного типа основаны на предположении возможности априорного (до решения задачи) определения наилучшего соотношения между требованиями, предъявляемыми различными критериями. Понятно, что такая возможность существует далеко не всегда. Кроме того, выбор конкретного вида глобальной функции цели не может быть произведен в отрыве от решаемой задачи.

Следует отметить, что методы сведения задач МКО к однокритериальным могут быть выбраны по разному, и заранее неизвестно, который из них

окажется более подходящим для решения данной задачи (окончательное решение в выборе метода остается за ЛПР).

Построение множества оптимальных по Парето альтернатив

Наличие нескольких критериев задает на множестве альтернатив частичное упорядочение. Подозрительными на наилучшее соответствие цели проектирования являются максимальные по этому упорядочению альтернативы. Поясним сказанное.

Предположим, что мы должны сделать выбор на допустимом множестве альтернатив G_x , так, чтобы

$$f_1(\bar{x}) \rightarrow \max, \dots, f_r(\bar{x}) \rightarrow \max.$$

Допустим, мы сделали некоторый выбор. Обозначим его \bar{x}^* и предположим, что существует некоторый другой выбор \bar{x}^+ , такой, что для всех критериев $f_i(\bar{x})$ имеет место неравенство:

$$f_i(\bar{x}^+) \geq f_i(\bar{x}^*), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (5.11)$$

причем, хотя бы одно неравенство – строгое.

Очевидно, что выбор \bar{x}^+ предпочтительнее \bar{x}^* . Поэтому все векторы \bar{x}^* , удовлетворяющие (5.11), следует исключить из рассмотрения. Имеет смысл заниматься сопоставлением, подвергать неформальному анализу только те векторы \bar{x}^* , для которых не существует \bar{x}^+ такого, что для всех критериев удовлетворяются неравенства (5.11). Множество всех таких векторов \bar{x}^* называют множеством Парето, а вектор \bar{x}^* называют не улучшаемым вектором результатов (оптимальный по Парето), если $f_i(\bar{x}^+) \geq f_i(\bar{x}^*)$ для любого i следует $f_i(\bar{x}^+) = f_i(\bar{x}^*)$. Очевидно, что векторы множества Парето являются максимальными по частичному упорядочению, заданному критериями $f_i(\bar{x})$, $i = 1, 2, \dots, r$. Оптимальность по Парето означает, что нельзя дальше улучшить значение одного из частных критериев, не ухудшая при этом значение хотя бы одного из остальных. Применительно к поведению людей суть дела ясно выразил японский ученый Никайдо: предпочтительнее поведение, при котором одному (неважно, кому именно) становится лучше, если никому другому не становится при этом хуже.

В теории принятия решений существует термин «принцип Парето», заключающийся в том, что выбирать в качестве решения следует только тот вектор \bar{x} , который принадлежит множеству Парето. Принцип Парето не выделяет единственного решения, он только сужает множество альтернатив. Окончательный выбор остается за лицом, принимающим решение. Но исследователь, построив множество Парето, облегчает процедуру выбора решения. Таким образом, возникает задача построения множества Парето.

Приближенное построение множества Парето относится к числу очень важных и трудных задач численного анализа. Рассмотрим несколько простых примеров, поясняющих процесс построения множества Парето. Пусть решается задача:

$$f_1(\bar{x}) \rightarrow \max, f_2(\bar{x}) \rightarrow \max, \quad \bar{x} \in G_x.$$

Каждой точке $\bar{x} \in G_x$ соотношения $f_1 = f_1(\bar{x}), f_2 = f_2(\bar{x})$ ставят в соответствие некоторую точку $\bar{f} = (f_1, f_2) \in E$ в плоскости критериев и определяют отображение G_x на G_F (рис. 55).

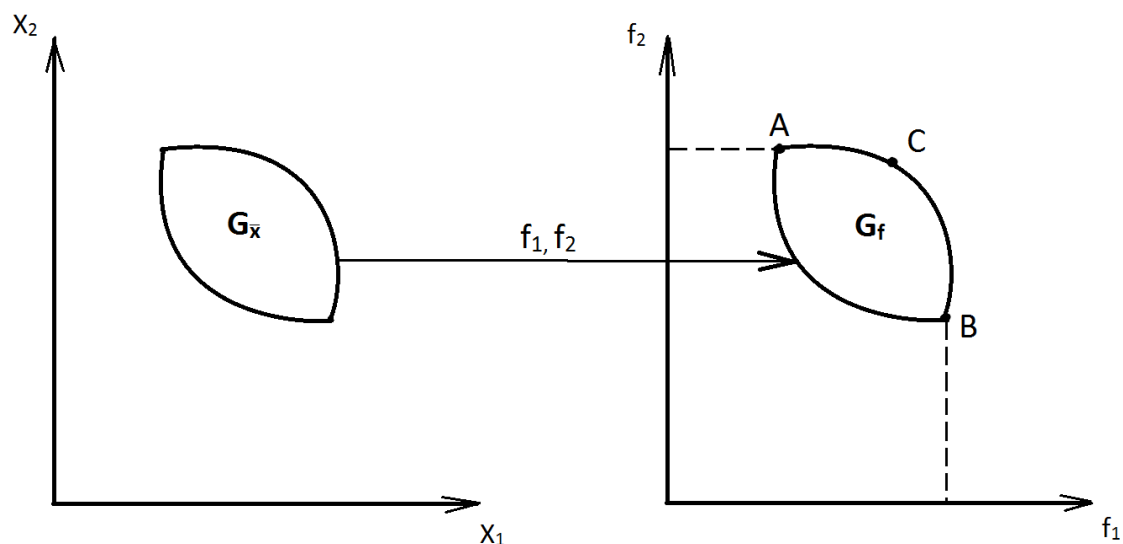


Рис. 55

Множество G_F носит название множества достижимости или множества предельных возможностей, или пространства критериев. Изучение структуры этого множества может оказаться весьма полезным при исследовании различных задач проектирования. Заметим, что образ множества Парето в множестве G_F представляет собой лишь часть множества G_F (на рис. 55 – дуга ACB).

Приближенное построение образа множества Парето сводится к последовательному решению ряда задач математического программирования. Опишем две из возможных схем расчета. Фиксируем некоторое желательное значение критериев f_1 и f_2 ; $f_1 = C_1, f_2 = C_2$. Значения C_1 и C_2 следует выбрать так, чтобы они принадлежали множеству достижимости. Далее решаются две оптимизационные задачи:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } f_1(\bar{x}) \rightarrow \max & \text{II. } f_2(\bar{x}) \rightarrow \max \\ \bar{x} \in G_x, f_2(\bar{x}) = C_2 & \bar{x} \in G_x, f_1(\bar{x}) = C_1. \end{array}$$

Решив эти задачи, мы определим точки A и B в множестве достижимости. Проведя через них прямую, получим простейшую аппроксимацию образа множества Парето в множестве G_F .

Для уточнения аппроксимации решаются следующие задачи:

$$\begin{array}{ll} \text{III. } f_1(\bar{x}) \rightarrow \max & \text{IV. } f_2(\bar{x}) \rightarrow \max \\ \bar{x} \in G_x, f_2(\bar{x}) = C_4 & \bar{x} \in G_x, f_1(\bar{x}) = C_3 \end{array}$$

Находим еще две точки – C и D . Через точки A, C, D, B (рис. 56) проведем ломаную, которая и будет следующим приближением образа множества Парето. Данная процедура может быть продолжена.

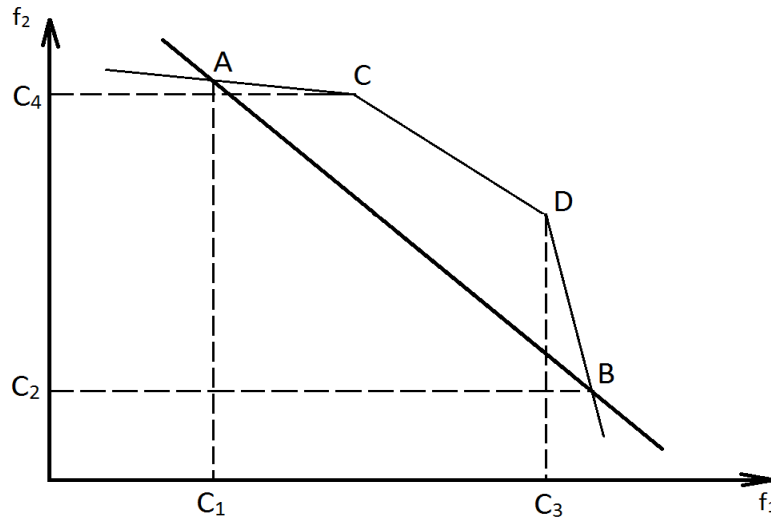


Рис. 56

Очень часто подобной информации о структуре образа множества Парето уже бывает достаточно для решения практических задач.

Другой способ приближенного построения образа множества Парето. Пусть λ_i $i = 1, 2, \dots, r$ – неотрицательные числа, такие, что $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$. Составим новый критерий:

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot f_i(\bar{x})$$

и решим следующую задачу:

$$F(\bar{x}) \rightarrow \max, \quad \bar{x} \in G_x.$$

Оказывается, что решение этой задачи определяет такой вектор \bar{x}^* , что точка с координатами $(f_1(\bar{x}^*), f_2(\bar{x}^*), \dots, f_r(\bar{x}^*))$ принадлежит образу множества Парето. Поэтому, варьируя значения коэффициентов λ_i можно получить любое количество точек образа множества Парето. Следовательно, как и в предыдущем случае, можно построить ломаную, являющуюся приближением образа множества Парето в пространстве F . При этом соответствующие описанные способы можно распространить и на случай большего числа критериев.

Если образ множества Парето выпуклый, то увеличивая количество точек, которые определяются одним из описанных выше способов, можно построить ломаную (или многогранник для большего числа критериев), аппроксимирующую это множество с любой степенью точности. Но, к сожалению, практика дает примеры множеств Парето, которые не являются выпуклыми. Тогда задача их аппроксимации резко усложняется.

Подведем итог. В результате полного использования всей информации, заложенной в формальной постановке задачи, получается множество не сравнимых между собой альтернатив (множество Парето или множество компромиссов, или множество не улучшаемых точек, или эффективное мно-

жество). Следовательно, выделение множества Парето не решает поставленной задачи. Однако благодаря этой процедуре, во-первых, сужается множество исходных вариантов, во-вторых, анализ множества Парето может подтолкнуть проектировщика (ЛПР) к дополнительной информации о своих предпочтениях.

Область Парето содержит, как правило, очень много элементов, в связи с чем возникает необходимость в дальнейшем сужении этой области. Эта проблема является одной из основных проблем в задачах многокритериальной оптимизации [22]. Как правило, выбор Парето-оптимальных решений возможен лишь за счет привлечения дополнительной информации о предпочтениях ЛПР. Одним из наиболее распространенных видов дополнительной информации является информация об относительной важности критериев. Смысл данной информации состоит в том, что критериям приписываются некоторые коэффициенты (веса), определяющие важность критериев. К данному времени разработаны многочисленные процедуры по назначению коэффициентов и дальнейшему их использованию [23], [24]. Но, как правило, эти методы являются эвристическими и не содержат в своей основе строгой доказательной базы. Последнее обстоятельство приводит к тому, что результат задачи зависит от выбора той или иной процедуры. Другая проблема, связанная с первой, заключается в том, что принцип Парето «работает» только в определенном классе задач. Если поведение ЛПР выходит за рамки этого класса, то наилучшее решение необязательно будет Парето-оптимальным.

Окончательный выбор оптимального решения из множества Парето остается за ЛПР. В частности, для этого можно использовать, например, три типа процедур решения многокритериальных задач, которые были указаны при их классификации (с. 144).

Процедуры апостериорного типа

В основе апостериорных процедур лежит предположение, что формальная модель многокритериальной задачи не содержит информации, достаточной для однозначного выбора наилучшей альтернативы. Для того чтобы это можно было сделать, предлагается получать такую информацию извне и в качестве ее источника использовать лицо, принимающее решение (ЛПР). Название «апостериорные процедуры» объясняется тем, что сбор этой информации обычно предшествует сравнению альтернатив с целью выбора наилучшей.

Отметим, что решения, принимаемые с помощью апостериорных процедур, имеют принципиально субъективный характер. Необходимость привлечений субъективных суждений непосредственно вытекает из самой постановки задачи – вся имеющаяся в наличии объективная информация уже использована, например, выделено множество оптимальных по Парето альтернатив, а несравнимость по-прежнему сохраняется. Учет предпочтений

ЛПР в этом случае является одним из наиболее эффективных методов снятия имеющейся неопределенности.

Основная проблема, которая здесь возникает, состоит в выборе языка описания предпочтения ЛПР. В некоторых случаях предпочтения ЛПР описываются некоторой скалярной функцией $U(\bar{x})$, (обычно эту функцию называют функцией полезности), которая заранее неизвестна. Апостериорные процедуры заключаются в формулировке дополнительных требований (или аксиом), накладываемых на предпочтения ЛПР, выполнение которых позволяет однозначно восстановить функцию $U(\bar{x})$, после чего задача сводится к скалярной оптимизации [20].

Практическое использование апостериорных процедур часто наталкивается на определенные трудности, связанные с необходимостью сбора чрезвычайно большого количества информации, а также с тем, что ЛПР во многих случаях либо не может дать информацию, необходимую для реализации процедуры, либо дает ее с большими ошибками.

Адаптивные процедуры

Существенно уменьшить, а в ряде случаев и упростить требуемую от ЛПР информацию можно, если попытаться определить наилучшую или наиболее предпочтительную альтернативу, не восстанавливая функцию полезности. Процедуры, реализующие эту идею, используют подход, основанный на выявлении предпочтений одновременно с исследованием допустимого множества альтернатив.

Одна из идей, используемая здесь, сводится к тому, чтобы выбрать любой известный алгоритм математического программирования, который хорошо зарекомендовал себя при решении скалярных оптимизационных задач, и распределить функции между человеком и ПЭВМ таким образом, чтобы в результате их взаимодействия обеспечивалось получение всей необходимой для работы алгоритма информации. Например, если мы стремимся реализовать алгоритм градиентного типа, то ЛПР выступает в качестве своеобразного измерительного устройства, выдающего информацию, на основе которой можно определять градиент функции полезности в каждой точке. При реализации некоторых других методов, например, процедуры Нелдера-Мида от ЛПР требуется «всего лишь» проводить парные сравнения альтернатив [8].

Часто оказывается, что ЛПР не в состоянии отвечать на вопросы, которые предусматриваются этими процедурами без значительных и частых ошибок. Фактически эти процедуры пытаются приблизить возможности человека к потребностям вычислительной системы.

В последнее время довольно интенсивно разрабатывается другой подход к построению адаптивных процедур, ориентированный, прежде всего, на возможности ЛПР. Здесь, прежде всего, выявляются типы вопросов, на которые ЛПР может отвечать без особых затруднений и с достаточно высокой точностью, а затем на основе этих вопросов строится процедура выявления

предпочтений одновременно с исследованием множества альтернатив.

Рассмотрим, например, известную процедуру Соболя-Статникова [21]. Метод заключается в следующем. Область альтернатив (заданных ограничениями (5.2), (5.3), (5.4) покрывается равномерно распределенными точками. В каждой точке вычисляются значения целевых функций, и результаты систематизируются в виде специальных таблиц, в которых критерии упорядочены. Такие таблицы называют таблицами испытаний (ТИ). Далее решение задачи сводится к анализу ТИ. Проектировщик (ЛПР) просматривает на дисплее независимо друг от друга ТИ каждого критерия, обращая внимание на следующие факты:

- 1) в каких пределах заключены показатели $f_j(\bar{x})$ для каждого j ;
- 2) как много точек $f_j(\bar{x})$ отвечают «хорошим» проектным решениям;
- 3) каков «средний» уровень показателей в данной таблице и как сильно разбросаны вокруг него остальные решения.

В зависимости от ситуации проектировщик назначает $2r$ чисел f_i^* и f_i^{**} , $i = \overline{1, r}$, являющихся, соответственно, нижними и верхними границами, фигурирующими в тех неравенствах (5.4), которые образуют условия приемлемости проектного решения. После этого ПЭВМ в автоматическом режиме проверяет совместимость критериальных ограничений, т.е. определяет множество решений, одновременно удовлетворяющих ограничениям $f_i^* \leq f_i(\bar{x}) \leq f_i^{**}$, $i = \overline{1, r}$. Если такие точки существуют, то это говорит о том, что задача имеет решение. Если нет, то можно ослабить критериальные ограничения или же увеличить число точек в области поиска и после этого еще раз применить диалоговую процедуру определения границ. После конечного числа шагов получится допустимое множество решений D , удовлетворяющее ограничениям (5.2), (5.3), (5.4).

Каким образом использовать полученные решения?

1). Во многих случаях проектировщик (ЛПР) предпочитает сам назначить «наилучшее» решение путем тщательного изучения полученного допустимого множества решений. В этом случае есть возможность облегчить еще работу по изучению точек допустимого множества. Можно с помощью ЭВМ исключить заведомо «плохие» решения, т.е. выделить множество Парето G в множестве D . Таким образом, при поиске «наилучшего» решения ЛПР может ограничиться изучением множества G . Более того, множество G может быть использовано при назначении критериальных ограничений на каждом шаге диалоговой процедуры. После конечного числа шагов итерационной процедуры количество точек в множестве G можно сократить до минимума и тем самым облегчить принятие окончательного решения.

2) Другой способ использования множества D – это попытка сформулировать решающее правило, т.е. критерий, и искать его оптимум в допустимой области. При этом решения, полученные в результате осуществления

описанной диалоговой процедуры, можно использовать в качестве начального приближения.

Данный подход можно успешно использовать тогда, когда отсутствуют явные выражения целевых функций и ограничений задачи.

5.4. Многокритериальная оптимизация строительных конструкций

Оптимальным проектным решением называется такой допустимый проект, реализация которого приводит к созданию объекта, настолько хорошего в отношении некоторой количественной меры эффективности и полезности, насколько это возможно. Как дисциплина оптимальное проектирование представляет собой область науки, занимающуюся отысканием оптимальных проектных решений.

Проектируемая конструкция может быть выполнена в достаточно большом количестве вариантов. Из них необходимо выделить тот, который обеспечивает оптимум (*optimus* – наилучший (лат.) установленных при проектировании показателей качества решения. Такие показатели принято называть критериями оптимальности. В общем случае они должны учитывать основные требования, предъявляемые к конструкциям, и направлять поиск конструктивной формы на достижение минимальных значений массы и стоимости, минимальной трудоемкости изготовления и сборки и т.д. При этом достижение экономическими показателями оптимальных величин не должно нарушать соответствие выбранного решения его технологическому назначению.

Стоимость конструкций определяется в основном стоимостью материалов, т.е. снижение расхода материалов является важнейшим условием выбора рациональной конструктивной формы. В свою очередь снижение массы конструкции отражается на снижении трудоемкости изготовления и сборки. Однако снижение массы может ухудшить другие характеристики конструкции, например, прочность и жесткость.

Следовательно, перед проектировщиком возникает задача учета разных, иногда и противоречивых, требований. Во-первых, возникает задача рационального (оптимального) выбора комплекса критериев. От того, как составлен комплекс критериев, зависит успех постановки и решения задачи [20]. Следующая задача состоит в формализации критериев, т. е. в описании критериев оптимальности на языке математики. В теории оптимизации формализованные критерии принято называть целевыми функциями. Их значения выражаются через проектные параметры, которые однозначно определяют проектируемую конструкцию.

Например, целевыми функциями, наиболее часто рассматриваемыми при оптимизации формы упругих тел, являются функции, выражающие массу, прочность, жесткость, собственные частоты конструкций, накопленную энергию деформации и др.

Область, определяемая допустимыми значениями всех проектных параметров, называется областью проектирования. Она не так велика, как кажется, поскольку обычно ограничена рядом условий, связанных с физической сущностью задачи. Если речь идет о проектировании формы конструкций, в качестве ограничений могут выступать ограничения по массе изделия, габаритам, условиям соединения деталей и др. Как правило, пространство проектирования задается системой неравенств.

Таким образом, для постановки задач оптимального проектирования на языке математики необходимо: выбрать проектные параметры, записать целевые функции, задать при необходимости ограничения пространства проектирования, т.е. построить математическую модель объекта проектирования.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий многокритериальный подход к задачам оптимального проектирования конструкций.

Оптимизация вала по весу и жесткости. Проектируется вал, передающий крутящий момент. Вал представляет собой трубчатую конструкцию с круглым сечением (рис. 57). Его длина есть заданная величина $L = 0,8$ м. К одному из концевых сечений может быть приложен максимальный крутящий момент $T = 60$ н.м. Требуется выбрать такую конструкцию вала, т.е. подобрать такие значения радиуса сечения вала r и толщины стенки вала t , при которых он будет обладать необходимой прочностью при наименьшем весе и наибольшей жесткости. Чтобы удовлетворить этим требованиям используется материал, обладающий высокой удельной прочностью – сплав, который имеет следующие свойства: плотность $\rho = 7800$ кг/м³, модуль упругости (модуль Юнга) $E = 12,1 \cdot 10^9$ н/м²; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$ (модуль Юнга и коэффициент Пуассона совместно определяют упругостные характеристики сплава), предел прочности на сдвиг $S_{np} = 0,141 \cdot 10^8$ н/м².

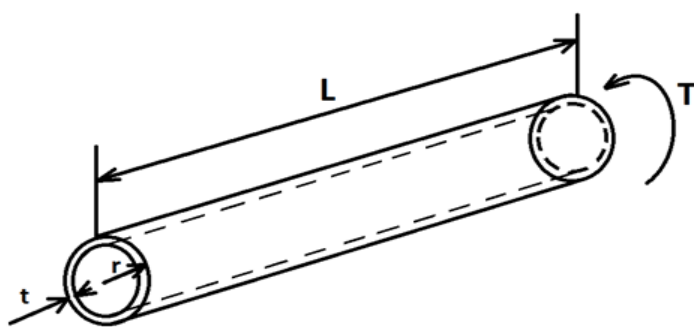


Рис. 57. Конструкция проектируемого вала

По практическим соображениям, обусловленным функциональными особенностями вала, максимальное значение радиуса r не должно превышать: $r_{max} = 0,1$ м. Согласно технологическим требованиям, толщина стенки вала t должна быть не менее $t_{min} = 0,002$ м. *Необходимо определить такие значения параметров вала r и t при коэффициенте запаса прочности $N = 2$, обеспечивающие минимальный вес и его максимальную жесткость, чтобы*

при этом он не разрушился под воздействием приложенного к нему максимального крутящего момента T и не потерял устойчивость при кручении.

Проектируемый вал может разрушиться либо под действием сдвиговых напряжений, либо в результате потери устойчивости при кручении. Сдвиговое напряжение, создаваемое крутящим моментом, определяется по формуле:

$$S_{сд} = T / (2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot t).$$

Чтобы вал не разрушился под действием сдвиговых напряжений, должно удовлетворяться условие:

$$\frac{T}{2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot t} \leq \frac{S_{нр.}}{N},$$

а чтобы он не потерял устойчивость при кручении – условие:

$$\frac{T}{2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot t} \leq \frac{S_{сд.кр.}}{N},$$

где $S_{сд.кр.}$ – критическое напряжение сдвига при кручении, для определения которого приводятся следующие формулы [19]:

$$S_{сд.кр.} = \begin{cases} E \left(\frac{t}{L} \right)^2 \left[3 + \sqrt{\left(3,4 + \frac{0,24 \cdot L}{\sqrt{r \cdot t}} \right)^3} \right] & \text{при } \frac{L}{r} \leq 7,72 \sqrt{\frac{r}{t}}; \\ 0,272 \cdot E \cdot \sqrt{(t/r)^3} & \text{при } \frac{L}{r} > 7,72 \sqrt{\frac{r}{t}}. \end{cases}$$

Другой характеристикой, определяющей работоспособность и материалоемкость вала, является жесткость. Большие деформации могут нарушить нормальную работу конструкции задолго до возникновения опасных для прочности напряжений. Нарушая равномерное распределение нагрузки, они вызывают сосредоточение усилий на отдельных участках деталей, в результате чего возникают местные, высокие напряжения, иногда значительно превосходящие величину номинального напряжения.

Жесткость – это способность системы сопротивляться действию внешних нагрузок с наименьшими деформациями. Жесткость оценивают коэффициентом жесткости, представляющим отношение силы, приложенной к системе, к максимальной деформации, вызываемой этой силой.

Для случая кручения вала постоянного сечения коэффициент жесткости определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{T}{\varphi} = \frac{GJ_{\rho}}{L},$$

где T – максимальный крутящий момент; φ – угол закручивания (взаимного поворота концевых сечений относительно друг друга); J_{ρ} – полярный момент инерции сечения вала; L – длина вала; G – модуль сдвига ($G = E/2(1 + \mu)$).

Можно также рассматривать относительный коэффициент жесткости $\lambda^I = G \cdot J_{\rho}$, представляющий условную нагрузку, вызывающую относитель-

ную деформацию бруса длины $L = 1$ м. Следовательно, целевую функцию выражающую жесткость вала, можно представить в виде:

$$\varphi(r, t) = \frac{T}{G \cdot J_{\rho}} = \frac{T \cdot (1 + \mu)}{E \cdot \pi \cdot r^3 \cdot t}.$$

Целевая функция, определяющая массу (вес) вала записывается в виде:

$$W(r, t) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \cdot L \cdot \rho.$$

Таким образом, **математическая модель** задачи оптимизации конструкции вала будет иметь следующий вид:

$$W(r, t) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \cdot L \cdot \rho \rightarrow \min, \quad (5.12)$$

$$\varphi(r, t) = \frac{T \cdot (1 + \mu)}{E \cdot \pi \cdot r^3 \cdot t} \rightarrow \min, \quad (5.13)$$

при ограничениях:

$$H_1(r, t) = S_{np} / N - \frac{T}{2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot t} \geq 0, \quad (5.14)$$

$$H_2(r, t) = S_{сд.кр.} / N - \frac{T}{2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot t} \geq 0, \quad (5.15)$$

$$H_3(r, t) = r - t \geq 0, \quad (5.16)$$

$$H_4(r, t) = r_{\max} - r \geq 0, \quad (5.17)$$

$$H_5(r, t) = t - t_{\min} \geq 0. \quad (5.18)$$

Рассмотрим решение задачи (5.12)–(5.18) следующими методами:

- 1) выделение главного критерия;
- 2) получение компромиссного решения по принципу гарантированного результата;
- 3) построение приближенного множества Парето.

Суть первых двух из перечисленных выше методов одна и та же: сведение задачи многокритериальной оптимизации к однокритериальной и решение ее методами, предназначенными для решения задач однокритериальной нелинейной оптимизации. При реализации алгоритмов перечисленных выше трех методов решения задачи используется метод сопряженных градиентов в сочетании с методом штрафных функций.

Решение задачи (5.12)–(5.18) вышеперечисленными методами при помощи табличного процессора **Excel** осуществляется надстройкой **Поиск решения**, в которой реализованы два метода: Ньютона и сопряженных градиентов. Надстройку **Поиск решения** запускаем из пункта главного меню **Данные**.

В методе Ньютона для определения направления и величины шага перемещения в новую точку используются значения вторых производных целевой функции. Применение значений вторых производных целевой функции ведет к большому объему вычислений на каждом шаге итерационного процесса, но сокращает число шагов для достижения оптимального решения.

Метод сопряженных градиентов использует только значения первых производных целевой функции, что приводит к сокращению объема вычислений на каждом шаге итерационного процесса и к возможному увеличению числа шагов.

Кроме того, используемый в программе метод поиска минимума целевой функции не гарантирует нахождения его глобального значения. Поэтому процедуру поиска экстремума нужно повторить несколько раз, задавая различные значения точки начального приближения параметров оптимизации. Если результаты счета совпадают при различных значениях начального приближения параметров оптимизации, то можно надеяться, что получен глобальный экстремум. Если результаты разные, то из них нужно выбрать тот, при котором достигается наименьшее значение целевой функции.

1. Решение задачи конструирования вала методом выделения главного критерия

Этим методом задачу (5.12)–(5.18) необходимо решить два раза, потому что в ней два критерия оптимизации: первый раз – в качестве главного критерия выбираем вес вала, второй раз – в качестве главного критерия выбираем угол закручивания концевых сечений вала относительно друг друга.

Решение задачи (5.12)–(5.18) методом выделения главного критерия первый раз.

В качестве главного критерия выбираем вес вала:

$$W(r, t) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \cdot L \cdot \rho.$$

При этом на второй критерий $\varphi(r, t)$ наложим требование, чтобы он не превышал $0,5^\circ$, т.е. $-\pi/360$ рад и включим в систему ограничений – неравенств (5.14)–(5.18) следующее неравенство:

$$H_6(r, t) = \frac{\pi}{360} - \frac{T \cdot (1 + \mu)}{E \cdot \pi \cdot r^3 \cdot t} \geq 0. \quad (5.19)$$

Таким образом, в данном случае необходимо решить задачу однокритериальной оптимизации (5.12), (5.14)–(5.19). Для ее решения активизируем табличный процессор **Excel**, и в появившуюся таблицу записываем задачу (5.12), (5.14)–(5.19), например, так, как это сделано на рис. 58. Для этого в ячейки C2:D2 заносим начальные значения r и t . В ячейки B3:B9 и B15:B17 заносим соответственно значения исходных данных задачи: $T = 60$; $L = 0,8$; $\rho = 7800$; $E = 12100000000$; $S = 14100000$; $N = 2$; $P_i = 3,1415$; $\mu = 0,3$; $r_{\max} = 0,1$; $t_{\min} = 0,002$. В ячейки B10 и B11 запишем выражения для $W(r, t)$ и $\varphi(r, t)$. В ячейки B12:B14 введем формулы для вычисления $S_{\text{сд.кр}}$. В ячейки C6:C11 запишем выражения, стоящие в левых частях ограничений (5.14) – (5.19), соответственно. В ячейки E6:E11 запишем правые части ограничений (5.14) – (5.19). В ячейку F2 запишем выражение целевой функции $W(r, t)$. После этого запустим набранную задачу на выполнение. Для этого выберем пункт «Данные» главного меню (инструкция написана для работы в среде пакета MS Office 2007), затем в правом верхнем углу панели инструментов выберем над-

строжку **Поиск решения** и щелкнем по ней левой кнопкой мыши. Далее появится диалоговое окно (рис. 59), введем в него необходимые данные: адрес ячейки целевой функции F2; направление оптимизации – минимизация; адреса изменяемых переменных C2:D2; адреса ячеек C6:C11, в которые записаны левые части ограничений задачи.

	A	B	C	D	E	F
1	Константы	Значения	r	t		Целевая ф-ция
2			0.0567	0.01234		=B10
3	T=	60				
4	L=	0.8	Левая часть	Знаки	Правые части	
5	ρ =	7800	ограничений	отношений	ограничений	
6	E =	=12.1*10 ⁹	=B7/B8-B3/(2*B9*C2^2*D2)	>=	0	
7	S =	=0.0141*10 ⁹	=B12/B8-B3/(2*B9*C2^2*D2)	>=	0	
8	N =	2	=C2-D2	>=	0	
9	pi =	3.1415927	=B16-C2	>=	0	
10	W(r,t) =	=2*B9*C2*D2*B4*B5	=D2-B17	>=	0	
11	$\varphi(r,t)$ =	=B3*(1+0.3)/(B6*B9*C2^3*D2)	=B9/360-B11	>=	0	
12	Scd.kp =	=ЕСЛИ(B4/C2<=7.72*(C2/D2)^0.5;B13;B14)				
13		=B6*(D2/B4)^2*(3+(3.4+0.24*B4/(C2*D2)^0.5)^1.5)				
14		=0.272*B6*(D2/C2)^1.5				
15	nu=	0.3				
16	r_{max} =	0.1				
17	t_{min} =	0.002				
18						

Рис. 58

Далее щелкнем левой кнопкой мыши по пункту «Параметры» и в появившемся новом диалоговом окне (рис. 60), установим флажки «Неотрицательные значения», «Автоматическое масштабирование», «Сопряженных градиентов» (выбранный метод решения задачи) и, щелкнув левой кнопкой мыши по пункту «ОК», возвратимся в предыдущее диалоговое окно. В этом диалоговом окне щелкнем левой кнопкой мыши по пункту «Выполнить» и получим решение задачи (5.12), (5.14)–(5.19), которое приведено на рис. 61.

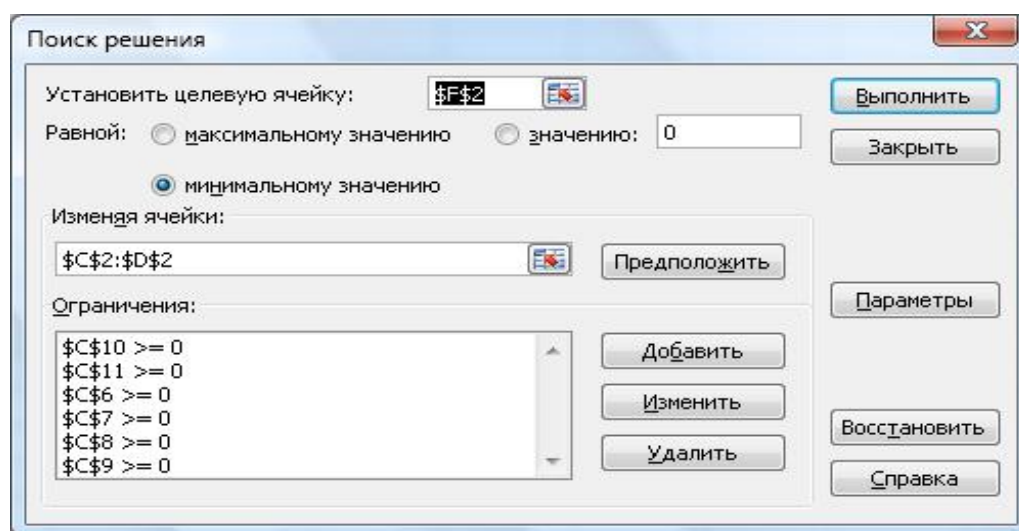


Рис. 59

Параметры поиска решения

Максимальное время: 100 секунд

Предельное число итераций: 100

Относительная погрешность: 0,000001

Допустимое отклонение: 5 %

Сходимость: 0,0001

☐ Линейная модель ☒ Автоматическое масштабирование

☒ Неотрицательные значения ☐ Показывать результаты итераций

Оценки: ☐ линейная ☒ квадратичная

Разности: ☐ прямые ☒ центральные

Метод поиска: ☐ Ньютона ☒ сопряженных градиентов

ОК Отмена Загрузить модель... Сохранить модель... Справка

Рис. 60

После многократного решения задачи (5.12), (5.14)–(5.19) с различными начальными точками поиска оптимума получено решение, приведенное на рис. 61. Из него видно, что оптимальными являются значения радиуса вала $r = 0,049$ м, толщина стенки $t = 0,002$ м. При этом минимальный вес вала равен $W_{min} = 3,841$ кг, а угол закручивания концевых сечений вала относительно друг друга составляет $\varphi = 0,009$ рад.

E15						
	A	B	C	D	E	F
1	Константы	Значения	r	t	Целевая ф-ция	
2			0.048988487	0.002		3.84139076
3	T=	60				
4	L=	0.8	Левая часть	Знаки	Правые части	
5	ρ =	7800	ограничений	отношений	ограничений	
6	E=	12100000000	5060457.024	>=	0	
7	S=	14100000	2239728.778	>=	0	
8	N=	2	0.046988487	>=	0	
9	pi=	3.1415927	0.051011513	>=	0	
10	W(r,t)=	3.841390763	0	>=	0	
11	$\varphi(r,t)$ =	0.008726644	2.0814E-09	>=	0	
12	Scd.kp=	8458543.507				
13		8458543.507				
14		27149274.36				
15	nu=	0.3				
16	r_{max} =	0.1				
17	t_{min} =	0.002				
18						

Рис. 61. Решение задачи (5.12)–(5.18) методом выделения главного критерия, когда в качестве главного критерия выбран вес вала

Решим задачу (5.12)–(5.18) методом выделения главного критерия во второй раз.

Теперь в качестве главного критерия выбираем угол закручивания концевых сечений вала относительно друг друга:

$$\varphi(r, t) = \frac{T \cdot (1 + \mu)}{E \cdot \pi \cdot r \cdot t}.$$

При этом на другой критерий оптимизации задачи $W(r, t)$ наложим ограничение, что значение его не должно превышать значение $W_{min} = 3,841$ кг более чем на 20%. В математической формулировке это ограничение запишется в виде:

$$H_6(r, t) = 1,2 \cdot 3,841 - W(r, t) \geq 0 \quad . \quad (5.20)$$

Теперь необходимо решить задачу однокритериальной оптимизации (5.13)–(5.18), (5.20). Для ее решения активизируем табличный процессор **Excel** и в появившуюся таблицу записываем задачу (5.13)–(5.18), (5.20). Заполнение таблицы осуществляется почти так же, как это показано на рис. 58, с внесением следующих изменений: в ячейку F2 записываем выражение критерия $\varphi(r, t)$, а в ячейку C11 записываем формулу левой части ограничения (5.20). Дальнейший порядок действий для решения задачи такой же, как и при решении задачи (5.12)–(5.18) методом выделения главного критерия в первый раз.

После многократного решения задачи (5.13)–(5.18), (5.20) с различными начальными точками поиска оптимума получено решение, приведенное на рис. 62. Из него видно, что оптимальными являются значения радиуса вала $r = 0,059$ м, толщина стенки $t = 0,002$ м. При этом минимальный угол закручивания концевых сечений вала относительно друг друга составляет $\varphi_{min} = 0,005$ рад, а вес вала равен $W = 4,610$ кг.

Выводы. Решения получились разными, но они отличаются друг от друга несильно, причем в обоих случаях толщина стенки вала получилась одинаковой и на границе. Как и следовало ожидать, эти решения являются несравнимыми: при решении задачи (5.12), (5.14)–(5.19) более лучшим является значение веса вала, зато более худшим – значение угла закручивания концевых сечений относительно друг друга, а при решении задачи (5.13)–(5.18), (5.20) все обстоит с точностью «до наоборот».

C13		f _*					
	A	B	C	D	E	F	G
1	Константы	Значения	r	t	Целевая ф-ция		
2			0.058786621	0.00199998		0.00505007	
3	T=	60					
4	L=	0.8	Левая часть	Знаки	Правые части		
5	ρ =	7800	ограничений	отношений	ограничений		
6	E =	12100000000	5668382.906	>=	0		
7	S =	14100000	2398499.742	>=	0		
8	N =	2	0.056786636	>=	0		
9	pi =	3.1415927	0.041213379	>=	0		
10	W(r,t) =	4.609668	-1.52302E-08	>=	0		
11	$\varphi(r,t)$ =	0.005050067	9.00346E-12	>=	0		
12	Scd.kp =	7560233.673					
13		7560233.673					
14		20652687.09					
15	nu=	0.3					
16	r_{max} =	0.1					
17	t_{min} =	0.002					
18							

Рис. 62. Решение задачи (5.12)–(5.18) методом выделения главного критерия, когда в качестве главного критерия выбран угол закручивания концевых сечений относительно друг друга

2. Решение задачи конструирования вала методом получения компромиссного решения по принципу гарантированного результата

После решения двух однокритериальных задач оптимизации (первую на минимизацию веса вала, а вторую – на минимизацию угла закручивания концевых сечений вала относительно друг друга) были получены следующие наилучшие значения критериев: $W(r, t)_{min} = 3,841$ и $\varphi(r, t)_{min} = 0,005$. Используем найденные оптимальные значения критериев для приведения их к безразмерному виду. Это необходимо сделать, так как эти критерии имеют различную природу и, соответственно, разную размерность. А для того чтобы из них сконструировать обобщенный критерий, их необходимо привести к одной мере, проще всего это сделать, приведя оба критерия к безразмерному виду.

С помощью найденных решений однокритериальных задач сформируем обобщенный критерий (обобщенную целевую функцию) в следующем виде:

$$Q(r, t) = \max_{r, t} \left(\frac{W(r, t) - 3,841}{3,841}, \frac{\varphi(r, t) - 0,005}{0,005} \right). \quad (5.21)$$

Обобщенный критерий $Q(r, t)$ сконструирован таким образом, что его значение в каждой точке пространства изменения параметров оптимизации

равнялось наибольшему (наихудшему) значению из двух обезразмеренных критериев задачи (5.12)–(5.18). Далее решаем задачу минимизации обобщенной целевой функции $Q(r, t)$ в области, где удовлетворяются ограничения (5.14)–(5.18), и получаем гарантированный результат.

Решать задачу (5.21), (5.14)–(5.18) будем с помощью табличного процессора **Excel**. Порядок решения задачи почти такой же, что и в случае ее решения методом выделения главного критерия. Для решения задачи данным методом заносим исходные данные задачи в таблицу, как это показано на рис. 58. Только в ячейку F2 записываем формулу обобщенной целевой функции (5.21). Затем запускаем задачу на выполнение. Для этого входим в пункт **Данные** главного меню, далее в правом верхнем углу выберем надстройку **Поиск решения** и щелкаем по ней левой кнопкой мыши. Далее в появившееся диалоговое окно, изображенное на рис. 59, заносим необходимые данные: адрес ячейки целевой функции F2; направление оптимизации – минимизация; адреса ячеек независимых переменных C2:D2; в окошках для ввода ограничений указываем, что левые части ограничений задачи записаны в ячейках C6:C10, знаки отношений ограничений есть " \geq ", правые части ограничений записаны в ячейках E6:E10.

В диалоговом окне (рис. 60), появляющемся после щелчка левой кнопкой мыши по кнопке «Параметры», устанавливаем флажки «Неотрицательные значения», «Автоматическое масштабирование», «Сопряженных градиентов» (выбранный метод решения задачи) и, щелкнув левой кнопкой мыши по кнопке «ОК», возвращаемся в диалоговое окно (рис. 59). В этом диалоговом окне, щелкнув левой кнопкой мыши по кнопке «Выполнить», получим решение задачи (рис. 63).

Результаты десятикратного решения задачи оптимизации (5.21), (5.14)–(5.18) с разными точками начального приближения приведены в таблице 5.1. Как видно из данных табл. 5.1, при старте с различных начальных точек получаются разные решения. Это свидетельствует о том, что обобщенная целевая функция $Q(r, t)$ является многоэкстремальной. Среди полученных решений задачи в качестве искомого решения выбираем наилучшее. Следовательно, в качестве решения задачи данным методом можно принять следующие значения параметров вала: радиус вала $r \approx 0,056$ м, толщина стенки вала $t \approx 0,002$ м. При этом вес вала $W \approx 4,404$ кг, угол закручивания $\varphi \approx 0,006$ радиан, обобщенная целевая функция принимает значение $Q(r, t) = 0,147$.

Выводы. Решение задачи (5.12)–(5.18), найденное данным методом, получилось гарантированно не хуже, чем решения задачи, полученные методом выделения главного критерия. Об этом свидетельствует тот факт, что значения обоих критериев $W(r, t)$ и $\varphi(r, t)$, найденные в методе компромиссного решения, не хуже худших значений соответствующих критериев в решениях, найденных методом выделения главного критерия.

117 $f_{\text{ц}}$

	A	B	C	D	E	F
1	Константы	Значения	r	t		Целевая ф-ция
2			0.056167261	0.002		0.146540242
3	T=	60				
4	L=	0.8	Левая часть	Знаки	Правые части	
5	ρ =	7800	ограничений	отношений	ограничений	
6	E =	12100000000	5536526.252	>=	0	
7	S =	14100000	2373559.181	>=	0	
8	N =	2	0.054167261	>=	0	
9	pi =	3.1415927	0.043832739	>=	0	
10	W(r,t) =	4.404308221	0	>=	0	
11	$\varphi(r,t)$ =	0.005790014				
12	Scd.kp =	7774065.856				
13		7774065.856				
14		22114361.37				
15	μ =	0.3				
16	r_{\max} =	0.1				
17	t_{\min} =	0.002				
18						

Лист1 Лист2 Лист3

Рис. 6.3. Решение задачи (5.12)–(5.18) полученное методом компромиссного решения по принципу гарантированного результата

Таблица 5.1

№/ №	Координаты точки начала поиска		Координаты решения задачи		Значение целевой функции
	r_0	t_0	r_k	t_k	$Q(r_k, t_k)$
1	0.0789	0.0123	0.0562	0.0020	0.1465
2	0.0050	0.0030	0.0264	0.0091	1.4414
3	0.0200	0.0090	0.0259	0.0094	1.4910
4	0.0457	0.0455	0.0186	0.0183	2.4652
5	0.0357	0.0400	0.0228	0.0121	1.8233
6	0.0900	0.0320	0.0340	0.0055	0.8940
7	0.0500	0.0500	0.0185	0.0185	2.4850
8	0.0300	0.0240	0.0199	0.0159	2.2352
9	0.0657	0.0453	0.0218	0.0133	1.9548
10	0.0122	0.0085	0.0306	0.0067	1.1057

3. Решение задачи конструирования вала методом построения приближенного множества Парето

Для построения приближенного множества Парето составляем обобщенную целевую функцию $P(r, t)$ в виде линейной свертки нормированных целевых функций $W(r, t)$ и $\varphi(r, t)$:

$$P(r, t) = \lambda \cdot \left(\frac{W(r, t) - 3.8414}{3.8414} \right) + (1 - \lambda) \cdot \left(\frac{\varphi(r, t) - 0.0051}{0.0051} \right), \quad (5.22)$$

здесь λ – параметр, удовлетворяющий условию: $0 \leq \lambda \leq 1$.

Далее решаем задачу минимизации функции $P(r, t)$ в области, где удовлетворяются ограничения (5.14) – (5.18). Для решения задачи минимизации обобщенной целевой функции (5.22) при выполнении ограничений (5.14)–(5.18) используем табличный процессор **Excel**. Параметр λ в своем диапазоне изменения принимает бесконечное множество значений. Для построения точного множества Парето нужно решить задачу (5.14)–(5.18), (5.22) при различных возможных значениях параметра λ , но их бесконечное множество. Физически нереально построить точное множество Парето, потому что для этого необходимо бесконечное число раз решить задачу (5.14)–(5.18), (5.22). Поэтому будем строить приближенное множество Парето, изменяя значения параметра λ от 0 до 1, например, с шагом 0,1.

Для решения задачи (5.14)–(5.18), (5.22) заносим исходные данные в таблицу **Excel**, как это описано при решении задачи (5.22), (5.14)–(5.18) методом получения компромиссного решения по принципу гарантированного результата. Только теперь в ячейку F2 записываем формулу целевой функции (5.22), а в ячейку B18 заносим значения параметра λ . Для каждого значения параметра λ решаем задачу многократно, стартуя с различных начальных точек поиска оптимума. Занесем результаты решения задачи для данного значения параметра λ в табл. 5.2, изменяем значение параметра λ на 0,1 и снова запускаем задачу на выполнение и т.д. Решив задачу таким образом, для одиннадцати значений параметра λ получим результаты, приведенные в табл. 5.2:

Таблица 5.2

λ	r	t	$W(r, t)$	$\varphi(r, t)$	$P(r, t)$
0,0	0.1000	0.1000	392.071	0.00002	-0.9959
0,1	0.1	0.002	7.8414	0.001	-0.613
0,2	0.1	0.002	7.8414	0.001	-0.42921
0,3	0.09136	0.002	7.16394	0.001345	-0.25403
0,4	0.081806	0.002	6.41476	0.001874	0.10938
0,5	0.07392	0.002	5.79639	0.00254	0.00595
0,6	0.066794	0.002	5.23763	0.00344	0.09078
0,7	0.059809	0.002	4.6899	0.0048	0.13949
0,8	0.052269	0.002	4.09866	0.00718	0.13812
0,9	0.042678	0.002	3.34655	0.0132	0.04542
1,0	0.026024	0.002	2.04065	0.0582	-0.46877

По данным табл. 5.2 в пространстве критериев строится ломаная, изображенная на рис. 64 – образ множества Парето. Изучая это множество, проектировщик может выбрать компромиссное решение.

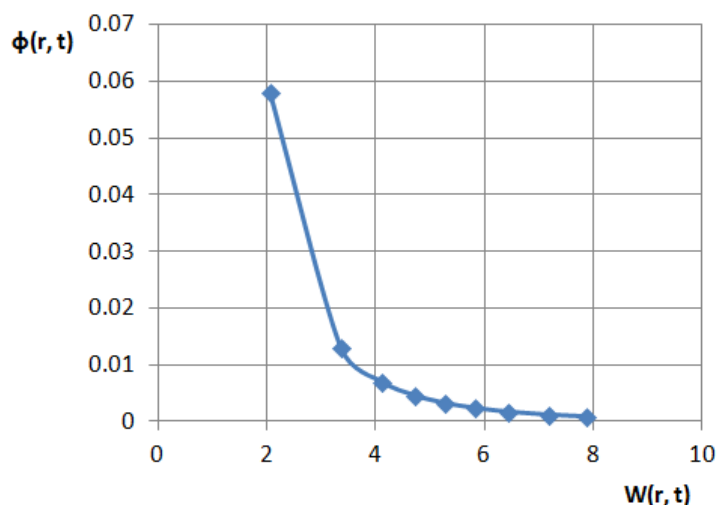


Рис. 64. Образ множества Парето

Выводы. Решение задачи (5.12)–(5.18), найденное данным методом, не единственное, оно состоит из множества точек, какое из них выбрать в качестве искомого решения задачи – это право ЛПР, для реализации которого он должен использовать имеющуюся у него дополнительную информацию. Так же необходимо отметить, что решения, полученные методами выделения главного критерия и получения компромиссного решения по принципу гарантированного результата, входят в множество Парето, приближение которого построено данным методом. Решения, полученные методом выделения главного критерия, получаются данным методом: когда в качестве главного критерия был выбран вес вала при $\lambda = 0,838$, когда в качестве главного критерия был выбран угол закручивания концевых сечений вала при $\lambda = 0,714$. Решение, определенное методом нахождения компромиссного решения по принципу гарантированного результата, получается данным методом при $\lambda = 0,750$.

Задания по теме «Методы решения задач многокритериальной оптимизации»

Сформулировать задачу проектирования оптимальной конструкции вала в виде задачи (5.12)–(5.18) и решить ее на ПЭВМ при помощи табличного процессора **Excel**, используя три метода: выделения главного критерия, получения компромиссного решения по принципу гарантированного результата, построения приближенного множества Парето.

Таблица 5.3

Параметры задания	Номер варианта				
	1	2	3	4	5
L	$0,6 - 0,01n$	$0,9 - 0,002n$	$0,8 + 0,002n$	$0,7 + 0,01 n$	$0,75 + 0,01 n$
T	$65 - n$	$70 + n$	$75 + n$	$70 + n$	$75 - n$
ρ	$445 + n$	$450 + n$	$465 + n$	$450 + n$	$455 - n$
N	$2 - 0,01n$	$2 + 0,005 n$	$2 - 0,005 n$	$2 + 0,004 n$	$2 - 0,005 n$
r_{max}	$0,2 + 0,01n$	$0,4 - 0,002n$	$0,3 - 0,001n$	$0,3 + 0,001n$	$0,3 + 0,002 n$
t_{min}	$0,003 + 0,0001 n$	$0,004 + 0,0002 n$	$0,004 - 0,0001 n$	$0,004 - 0,0002 n$	$0,004 - 0,0001n$

Продолжение табл. 5.3

Параметры задания	Номер варианта				
	6	7	8	9	10
L	$0,8 + 0,001$	$0,7 + 0,001$	$0,8 + 0,001$	$0,8 - 0,001 n$	$0,75 + 0,001 n$
T	$75 + n$	$70 + n$	$75 + n$	$75 - n$	$75 - n$
ρ	$455 + n$	$455 + n$	$460 + n$	$455 - n$	$455 - n$
N	$2 + 0,005 n$	$2 - 0,005 n$	$2 + 0,005 n$	$2,1 + 0,005 n$	$2 + 0,005 n$
r_{max}	$0,3 - 0,001n$	$0,3 - 0,001n$	$0,3 - 0,001n$	$0,35 - 0,002n$	$0,2 + 0,001 n$
t_{min}	$0,004 + 0,0002 n$	$0,004 + 0,0002 n$	$0,004 + 0,0002 n$	$0,004 - 0,0002 n$	$0,002 + 0,0001 n$

Окончание табл. 5.3

Параметры задания	Номер варианта			
	11	12	13	14
L	$0,65 - 0,001 n$	$0,6 + 0,001n$	$0,7 + 0,001n$	$0,55 + 0,001n$
T	$65 + n$	$70 + n$	$55 + n$	$80 - n$
ρ	$455 - n$	$445 + n$	$440 + n$	$470 + n$
N	$1 + 0,005 n$	$2 + 0,005 n$	$2 - 0,005 n$	$2,2 + 0,005n$
r_{max}	$0,3 + 0,001 n$	$0,4 - 0,002 n$	$0,3 - 0,001 n$	$0,4 + 0,00 n$
t_{min}	$0,003 - 0,0001 n$	$0,004 - 0,0001 n$	$0,004 + 0,0001 n$	$0,003 + 0,0001 n$

n – номер варианта.

Вопросы для самопроверки

1. Математическая постановка задач МКО.
2. Методы решения задач МКО.
3. Оптимальное проектирование и задачи МКО.
4. Какое множество называется множеством Парето?
5. Что означает «оптимальность по Парето»?
6. Какие методы называются априорными?

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике Учебник для студентов высших технических учебных заведений. – Изд. 3-е. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 496 с.
2. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. – Изд. 6-е. – М.: ЛИБРОКОМ, 2013. –152 с.
3. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем Учебник. – Мн.: Дизайн ПРО, 2004. – 640 с.
4. Плохотников К.Э. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Методология и практика. – Изд. 2-е. – М.: УРСС, 2011. – 280 с.
5. Солодовников А.С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. – М.: Просвещение, 1966. – 183 с.
6. Лихтенштейн В.Е. Дискретность и случайность в экономико-математических задачах. – М.: Наука, 1972. – 375 с.
7. Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. Оптимизация в технике. Книга 1. – М.: МИР, 1986. – 349 с.
8. Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко Математическое программирование –М.: Высшая школа, 1976. – 352с.
9. Корбут А.А., Финкельштейн Ф.Ф. Дискретное программирование М.: Наука, 1969. –351с.
10. Костевич Л.С. Математическое программирование (информационные технологии оптимальных решений).– Минск, ООО «Новое знание», 2003, – 424 с.
11. Дж. Мур, Л. Уэдерфорд, Г. Эпен, Ф. Гулд, Ч. Шимид. Экономическое моделирование в Microsoft Excel. М.–СПб.–Киев: Изд. дом «Вильямс», 2004, – 1018 с.
12. Д. Химмельблау Прикладное нелинейное программирование М.: МИР, 1975. – 535 с.
13. Чичинадзе В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. – М.: Наука, 1983. – 256 с.
14. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978.– 352 с.
15. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 446 с.
16. D. T. Pham, A. Ghanbarzadeh, E. Koc, S. Otri, S. Rahim, M. Zaidi, The Bees Algorithm – A Novel Tool for Complex Optimization Problems, Proceedings of IPROMS 2006 Conference, p. 454–461, 2006.
17. Nelder J. A., Mead R., A Simplex Method for function Minimization, Computer J., 7, 308–313 (1965).

18. Spendley W., Hext G. R., Himsworth F. R., Sequential Application of Simplex Designs in Optimization and Evolutionary Operation, *Technometrics*, 4, 441–461 (1962).
19. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1 – М.: Наука, 1970. – 608 с.
20. Box M. J. A new method of constrained optimization and a comparison with other method, *Computer J.*, 8, 42 – 52 (1965).
21. Герасимов Е.Н., Почтман Ю.М., Скалозуб В.В. Многокритериальная оптимизация конструкций. – Киев – Донецк: Вища школа, 1985. – 134 с.
22. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 487 с
23. Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. – М.: Наука, 1986. – 295 с.
24. Фурунжиев Р.И., Гугля В.А., Фурунжиев Р.И. САПР, или как ЭВМ помогает конструктору. – Минск. «Вышэйшая школа», 1987. – 205 с.
25. Дитрих Я. Проектирование и конструирование. Системный подход. – М.: Мир, 1981. – 450 с.
26. Соболев М. М., Статников Р. Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими параметрами. – М.: Наука, 1981. –108 с.
27. Климова О.Н. Сужение множества Парето на основе взаимно зависимой информации с использованием нелинейных функций. *Научные ведомости* № 9(64), 2009. С. 152–159.
28. Figueira, J. Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys / J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott. – Springer, 2005.
29. Goodwin, P. Decision analysis for management judgment (3rd Edition) / P. Goodwin, G. Wright. – John Wiley and Sons, 2004.
30. В.Н. Ашихмин М.Г., Гитман И.Э., Кэллер и др. Введение в математическое моделирование. – М.: Логос, 2005.
31. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистров экономики. – СПб.: Питер, 2006.
32. Маркин Ю.П. Математические методы и модели в экономике. – М.: Высшая школа, 2007. – 382 с.
33. Курицкий Б.К. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 – Сиб. ВHV, 1997.
34. Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE). – СПб.: Питер, 2004. – 560 с.
35. Bendsoe M.P., Sigmund O. Topology optimization: theory, methods and applications // Springer-Verlag. – 2003. – 370 p.
36. O. Sigmund A99 Line topology optimization code written in MATLAB, *Struct. Multidisc Optim.*, 21(2): PP. 120–127, 2001.
37. Topping B. H. Shape Optimization of Skelet Structures: Review / B. H. Topping/ *J. Struct. Eng.* 1983, V. 109 № 8. PP. 1933–1951.

38. Bendsoe M. P. and Kikuchi N. «Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, p. 197–224, 1988.
39. Azar B.F., Hadidi A., Gholipour L. Optimum design of plate structures using binary particle swarm optimization. *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*, 2011, Vol. 12, № 4, p. 477–486.
40. Wang S.Y., and Tai K. Structural topology design optimization using genetic algorithm with a bit-array representation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 (2005) 3749–70.

Программный модуль на VBA для обработки данных, полученных
из экспериментов, проведенных по плану В3

```

Sub В3()
ПРОГРАММА ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ СПЛАНИРОВАННОГО
‘ЭКСПЕРИМЕНТА ПРОВЕДЕННОГО ПО ПЛАНУ В3
Dim X(5, 17), Z(17, 4), R(15), T(11), Q(4), SBOS(10), FUNK1(81), FUNK2(81)
Cells(1, 1) = " Үэкс": Cells(1, 2) = "  X1": Cells(1, 3) = "  X2"
Cells(1, 4) = "  X3": Cells(1, 5) = "  Үэкс": Cells(1, 6) = "  Үрас"
Cells(1, 7) = "  (Үэкс-Үрас)/Үэкс*100%": X(1, 1) = 1: X(1, 2) = 1: X(1, 3) = 1
X(1, 4) = 1: X(1, 5) = -1
X(1, 6) = -1: X(1, 7) = -1: X(1, 8) = -1: X(1, 9) = 1: X(1, 10) = -1: X(1, 11) = 0
X(1, 12) = 0: X(1, 13) = 0: X(1, 14) = 0: X(1, 15) = 0: X(1, 16) = 0: X(1, 17) = 0
X(2, 1) = 1: X(2, 2) = 1: X(2, 3) = -1: X(2, 4) = -1: X(2, 5) = 1: X(2, 6) = 1
X(2, 7) = -1: X(2, 8) = -1: X(2, 9) = 0: X(2, 10) = 0: X(2, 11) = 1: X(2, 12) = -1
X(2, 13) = 0: X(2, 14) = 0: X(2, 15) = 0: X(2, 16) = 0: X(2, 17) = 0
X(3, 1) = 1: X(3, 2) = -1: X(3, 3) = 1: X(3, 4) = -1: X(3, 5) = 1: X(3, 6) = -1
X(3, 7) = 1: X(3, 8) = -1: X(3, 9) = 0: X(3, 10) = 0: X(3, 11) = 0: X(3, 12) = 0
X(3, 13) = 1: X(3, 14) = -1: X(3, 15) = 0: X(3, 16) = 0: X(3, 17) = 0
n = 17: k = 3: n0 = 3: ke = 1
For i = 1 To 4
  For J = 1 To 17
    X(4, J) = Cells(J + 1, 1): Cells(J + 1, i + 1) = X(i, J)
  Next J
Next i
E1 = 1: E2 = 1: E3 = 1: E4 = 1
A2 = 0#
A3 = 0#
A4 = 0#
For nu = 1 To n
  A2 = A2 + X(1, nu) ^ 2
  A3 = A3 + X(1, nu) ^ 2 * X(2, nu) ^ 2
  A4 = A4 + X(1, nu) ^ 4
Next nu
A2 = A2 / n
A3 = A3 / n
A4 = A4 / n
C = 1# / (A4 - A3)
G = A3 - A2 ^ 2
I1 = k + 1
I2 = k + ke
I3 = k - 1
I4 = 2 * k + 1

```

```

I5 = I4 + (k * (k - 1) + 1) / 2
For L = I1 To I2
  SK = k
  Y0 = 0#
  For nu = 1 To n
    Y0 = Y0 + X(L, nu)
  Next nu
  For i = 1 To k
    S = 0#
    For nu = 1 To n
      S = S + X(i, nu) * X(L, nu)
    Next nu
    R(i + 1) = S / A2 / n
  Next i
  SY = 0#
  For i = 1 To k
    S = 0#
    For nu = 1 To n
      S = S + X(i, nu) ^ 2 * X(L, nu)
    Next nu
    SY = SY + S
    Q(i) = S
  Next i
  I6 = I4
  For i = 1 To I3
    I7 = i + 1
    For J = I7 To k
      S = 0#
      For nu = 1 To n
        S = S + X(i, nu) * X(J, nu) * X(L, nu)
      Next nu
      I6 = I6 + 1
      R(I6) = S / A3 / n
    Next J
  Next i
' Расчет дисперсии воспроизводимости
S = 0#
I7 = n - n0 + 1
For nu = I7 To n
  S = S + X(L, nu)
Next nu
A = S / n0

```

```

S = 0#
For nu = I7 To n
    S = S + (X(L, nu) - A) ^ 2
Next nu
S = S / (n0 - 1)
SBOS(L) = S
T(1) = S
T(3) = T(1) / A2 / n
T(5) = T(1) / A3 / n
T(7) = 2# * Sqr(T(3))
T(9) = 2# * Sqr(T(5))
I7 = 1
For J = 1 To 2
    B = 1# / C + SK * G
    A = 1# + SK * A2 ^ 2 / B
    D = G * C / B
    B = A2 / B
    If J <> 1 Then GoTo 13
    S = A4 + (SK - 1#) * A3
    Z1 = SK * D - C
    Z2 = B ^ 2 + C ^ 2 * A4 + D * (Z1 - C) * S + 2# * B * A2 * Z1
    Z1 = A ^ 2 - 2# * A * B * SK * A2 + B ^ 2 * SK * S
    T(2) = Z1 / n * T(1)
    T(4) = Z2 / n * T(1)
    T(6) = 2# * Sqr(T(2))
    T(8) = 2# * Sqr(T(4))
13    S = -B / n * Y0 - D / n * SY
    R(1) = A / n * Y0 - B / n * SY
    If Abs(R(1)) <= E1 * T(6) And J = 1 Then I7 = 0
    For i = 1 To k
        ' Расчет коэффициентов при квадратичных членах
        I6 = i + I1
        R(I6) = S + C / n * Q(i)
        If Abs(R(I6)) > E3 * T(8) Or J = 2 Then GoTo 14
        SK = SK - 1
        SY = SY - Q(i)
        Q(i) = 0#
14    Next i
    If J <> 1 Then GoTo 15
    ' For kkk = 1 To 11: Cells(22, kkk) = T(kkk): Next kkk
15    Next J
    If I7 = 0 Then R(1) = 0#

```

```

For i = 2 To I1
    If Abs(R(i)) <= E4 * T(9) Then R(i) = 0#
Next i
For i = 1 To k
    I6 = I1 + i
    If Q(i) <= 0.00001 Then R(I6) = 0#
Next i
I7 = I4 + 1
For i = I7 To I5
    If (Abs(R(i)) <= E4 * T(9)) Then R(i) = 0#
Next i
I9 = L + ke
For nu = 1 To n
    S = R(1)
    I6 = 1
    For i = 1 To k
        I6 = I6 + 1
        I8 = I6 + k
        S = S + X(i, nu) * R(I6) + X(i, nu) ^ 2 * R(I8)
    Next i
    For i = 1 To I3
        I7 = i + 1
        For J = I7 To k
            I8 = I8 + 1
            S = S + X(i, nu) * X(J, nu) * R(I8)
        Next J
    Next i
    X(I9, nu) = S
Next nu
i = 0
For IX1 = 1 To 3
    X1 = IX1 - 2
    For IX2 = 1 To 3
        X2 = IX2 - 2
        For IX3 = 1 To 3
            X3 = IX3 - 2
            FUNK = R(1) + R(2) * X1 + R(3) * X2 + R(4) * X3 + R(5) * X1 ^ 2 +
R(6) * X2 ^ 2 + R(7) * X3 ^ 2
            FUNK = FUNK + R(8) * X1 * X2 + R(9) * X1 * X3 + R(10) * X2 * X3
            i = i + 1
            FUNK1(i) = FUNK
40         Next IX3

```

```

Next IX2
Next IX1
For J = 1 To 3
  For i = J To 27 Step 2
    I1 = i + 2 + 1
50    FUNK2(i) = (FUNK1(i) + FUNK1(I1)) / 2#
  Next i
Next J
Cells(20, 2) = "    Значимые коэффициенты уравнения регрессии"
Cells(21, 1) = "  B(0)": Cells(21, 2) = "  B(1)"
Cells(21, 3) = "  B(2)": Cells(21, 4) = "  B(3)"
Cells(21, 5) = "  B(1,1)": Cells(21, 6) = "  B(2,2)"
Cells(21, 7) = "  B(3,3)": Cells(21, 8) = "  B(1,2)"
Cells(21, 9) = "  B(1,3)": Cells(21, 10) = "  B(2,3)"
  For i = 1 To I5: Cells(22, i) = R(i): Next i
  J2 = L
  J3 = L + ke
  SOCT = 0#
  For JJ = 1 To n
54    SOCT = SOCT + (X(J2, JJ) - X(J3, JJ)) ^ 2 / n
  Next JJ
  sf = SOCT / SBOS(L)
  Cells(23, 1) = "  Fpac=": Cells(23, 2) = sf
22 Next L
I6 = k + ke * 2
For nu = 1 To n
  OSH = (X(4, nu) - X(5, nu)) / X(4, nu) * 100
30  Cells(1 + nu, 6) = X(5, nu): Cells(1 + nu, 8) = OSH
Next nu
End Sub

```


Функции VBA для расчета теплофизических свойств воды

```

Public Function Cp(t)
Cp = 4194 - 1.15 * t + 0.015 * t ^ 2
End Function
Public Function rho(t)
rho = 995.7 / (0.984 + 0.000483 * t)
End Function
Public Function nu(t)
nu = 0.00000178 / (1 + 0.0337 * t + 0.000221 * t ^ 2)
End Function
Public Function lambda(t)
lambda = 0.533 * (1 + 0.003 * t)
End Function
Public Function Beta(t)
Beta = 0.000004 * t ^ 2 + 0.00006 * t - 0.0005
End Function
Public Function ksi(Re, n)
If n = 1 Then
    rsil = 64 / Re
Else
    ksil = 96 / Re
End If
ksit = 0.316 / Re ^ 0.25
If Re <= 2300 Then
    ksi = ksil
ElseIf Re > 10000 Then
    ksi = ksit
Else
    G = 1 - Exp(1 - Re / 2300): ksi = ksit * G + ksil * (1 - G)
End If: End Function
Public Function alfa(Re, Gr, Pr, Ln, d)
If Re <= 2300 Then
    alfa = 0.15 * Ln * Re ^ 0.33 * Pr ^ 0.43 * Gr ^ 0.1 / d
ElseIf Re > 10000 Then
    alfa = 0.023 * Ln * Re ^ 0.8 * Pr ^ 0.43 / d
Else
    G = 1 - Exp(1 - Re / 2300): alfa = 0.008 * Ln * Re ^ 0.9 * Pr ^ 0.43 / d
End If: End Function
Public Function DD(Q, Cp, T1, T2)
DD = Q / Cp / Abs(T1 - T2)
End Function

```

Приложение 3

Значения F-критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости

$f_{\text{воспр}} = f_2$	$f_1 = f_{\text{ад}} = 1$	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	244.0	249.0	254.3
2	18.5	19.0	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	5.9	5.8	5.6
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5	4.4
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.0	3.8	3.7
7	5.5	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.6	3.4	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.3	3.1	2.9
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.1	2.9	2.7
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	2.9	2.7	2.5
11	4.8	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	2.8	2.6	2.4
12	4.8	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.7	2.5	2.3
13	4.7	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.6	2.4	2.2
14	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.5	2.3	2.1
15	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.5	2.3	2.1
16	4.5	3.6	3.2	3.0	2.9	2.7	2.4	2.2	2.0
17	4.5	3.6	3.2	3.0	2.8	2.7	2.4	2.2	2.0
18	4.4	3.6	3.2	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	1.9
19	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
20	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
22	4.3	3.4	3.1	2.8	2.7	2.6	2.2	2.0	1.8
24	4.3	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
26	4.2	3.4	3.0	2.7	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
28	4.2	3.3	3.0	2.7	2.6	2.4	2.1	1.9	1.7
30	4.2	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.1	1.9	1.6
40	4.1	3.2	2.9	2.6	2.5	2.3	2.0	1.8	1.5
60	4.0	3.2	2.8	2.5	2.4	2.3	1.9	1.7	1.4
120	3.9	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	1.8	1.6	1.3
∞	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	1.8	1.5	1.0

Ахмадиев Фаил Габдулбарович,
Гильфанов Рашит Махмутович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

Учебное пособие