МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра механики

Сборник задач по теоретической механике

для подготовки к защите расчетно-графических работ

Учебно-методическое пособие
для студентов всех направлений подготовки
и форм обучения

Казань
2020

УДК
ББК
Г

Гумеров А.В., Хамитов Т.К., Хайруллин Л.Р.

Г Сборник задач по теоретической механике для подготовки к защите расчетно-графических работ: Учебно-методическое пособие для студентов всех направлений подготовки и форм обучения / А.В. Гумеров, Т.К. Хамитов, Л.Р. Хайруллин. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2020. – 96 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Учебно-методическое пособие содержит задачи по статике, кинематике и динамике дисциплины «теоретическая механика». В начале каждого раздела дается небольшой объем теоретического материала необходимого для решения приведенных задач. В пособии имеются примеры решения типовых задач по всем рассмотренным разделам.

Пособие предназначено для проведения практических занятий, оперативного контроля знаний на зачетах, при приеме расчетно-графических работ, при допуске к экзамену и могут быть использованы студентами для самоконтроля.

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
кафедры механики КГАСУ
Р.А. Каюмов

Доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теоретической и прикладной
механики и математики КНИТУ-КАИ
И.Н. Сидоров

УДК
ББК

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2020

© Гумеров А.В., Хамитов Т.К., Хайруллин Л.Р., 2020

Содержание

Содержание ……..……...3

Предмет теоретической механики……..…...5

Раздел I. СТАТИКА

Глава 1. Основные понятия статики…….....6

1.1. Примеры связей……6

1.2. Система сходящихся сил…….....7

1.3. Момент силы…….……...…….....8

1.4. Пара сил…….....9

1.5. Условия равновесия системы сил……...9

1.6. Равновесие систем тел……..10

Глава 2. Задачи для самостоятельного решения……..…....11

2.1. Плоская система сил…….……11

2.1.1. Равновесие плоской системы сходящихся сил…….……11

2.1.2. Равновесие произвольной плоской системы сил……..……13

2.2. Равновесие систем тел……...17

2.3. Пространственная система сил…….....21

2.3.1. Равновесие произвольной пространственной системы сил……23

2.3.2. Равновесие пространственной системы сходящихся сил……...25

Раздел II. КИНЕМАТИКА

Глава 1. Основные понятия кинематики……...26

1.1. Кинематика точки……...……26

1.2. Поступательное движение……..……...29

1.3. Вращательное движение твердого тела вокруг оси……29

1.4. Плоскопараллельное движение твердого тела…….……...31

1.5. Сложное движение точки……..……33

Глава 2. Задачи для самостоятельного решения……..35

2.1. Кинематика точки……...35

2.2. Вращательное движение твердого тела……...37

2.3. Плоскопараллельное движение…….....40

2.4. Сложное движение точки…….....47

Раздел III. ДИНАМИКА

Глава 1. Динамика материальной точки……52
1.1. Законы динамики……52
1.2. Дифференциальные уравнения движения точки…….52
1.3. Движение тела по заданной траектории..……53
1.4. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, без учета сопротивления воздуха.……...……...53
1.5. Общие теоремы динамики материальной точки…….....54
1.6. Относительное движение материальной точки..….……...56
Глава 2. Динамика системы материальных точек……...57
2.1. Теорема о движении центра масс…….57
2.2. Общие теоремы динамики системы……...……..57
2.3. Принцип Даламбера……...……60
2.4. Связи. Обобщенные координаты……...……...60
2.5. Возможные перемещения……..……60
2.6. Возможная работа силы. Обобщенные силы……..……61
2.7. Принцип возможных перемещений…...……...61
2.8. Уравнение Лагранжа II рода ……62
Глава 3. Задачи для самостоятельного решения ……63
3.1. Примеры и задачи на составление дифференциальных уравнений движения точки ……...63
3.2. Примеры и задачи на применение общих теорем динамики точки……..67
3.3. Примеры и задачи на относительное движение материальной точки…….....72
3.4. Примеры и задачи на применение законов сохранение механической системы……..74
3.5. Примеры и задачи на общие теоремы динамики системы…….79
3.6. Задачи на принцип Даламбера для механической системы……...84
3.7. Примеры и задачи на принцип возможных перемещений…….....86
3.8. Примеры и задачи на общее уравнение динамики, уравнение Лагранжа II рода……..91

Литература……...95

Предмет теоретической механики

Теоретическая механика – это наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механическим движением называется изменение с течением времени взаимного положения материальных тел в пространстве.

Механическим взаимодействием называется такое взаимодействие материальных тел, которое изменяет или стремится изменить характер их механического движения.

В теоретической механике при рассмотрении того или иного явления в нем выделяют главное, определяющее, а от остального абстрагируются. В результате вместо реального явления или объекта рассматривают некоторую его модель, вводя такие понятия как:

материальная точка – материальная тело, размеры которого в рассматриваемых конкретных условиях можно не учитывать;

абсолютное твердая тело – тело, расстояния между любыми точками которого остаются неизменными;

сплошная изменяемая среда – пренебрегают молекулярной структурой среды.

По характеру рассматриваемых задач теоретическую механику принято разделять на статику, кинематику и динамику. В статике излагается учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил. В кинематике рассматриваются движение тел с геометрической стороны, без учета сил, вызывающих это движение. В динамике изучается движение материальных тел под действием сил.

Теоретическая механика является базой для многих обще-профессиональных дисциплин: сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика и др.

Раздел I. СТАТИКА

Глава 1. Основные понятия

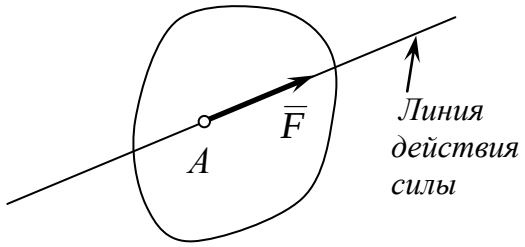
Статика есть учение о равновесии сил приложенных к твердому телу. В статике рассматриваются 2 задачи:

1) как данную систему сил заменить ей эквивалентной системой;
2) определить условие равновесия системы сил, действующих на тело.

Силой называется мера механического взаимодействия двух тел.

Сила характеризуется тремя признаками:

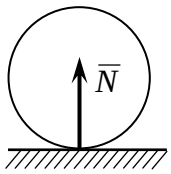
1) числовым значением (модулем) $|\overline{F}|$,
2) направлением,
3) точкой приложения.

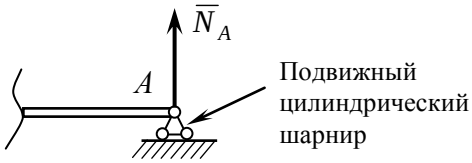


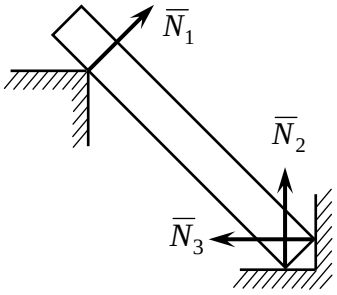
Реакция связи это сила, с которой связь действует на рассматриваемое тело. Эта сила направлена противоположно тому направлению по которому связь препятствует перемещению тела.

1.1. Примеры связей

1) Реакция гладкой поверхности.

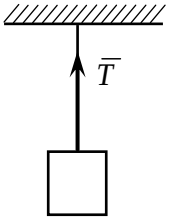


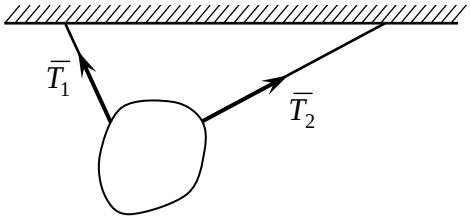




Если поверхность гладкая и на этой поверхности лежит рассматриваемое тело, реакция направлена перпендикулярно поверхности. Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой, то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

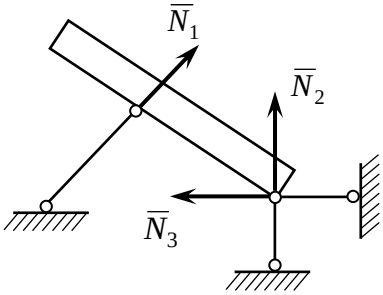
2) Реакция нити.





Связь не дает телу удаляться от точки подвеса нити. Поэтому реакция $\overline{T}$ натянутой нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса.

3) Реакция невесомых стержней.

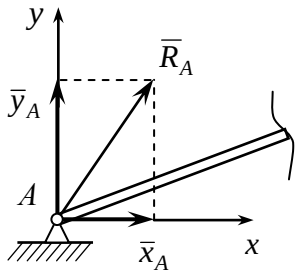


Невесомым называют стержень весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь.

Реакция связи направлена по стержню.

В отличие от нити стержень может работать и на сжатие.

4) Реакция неподвижного цилиндрического шарнира.



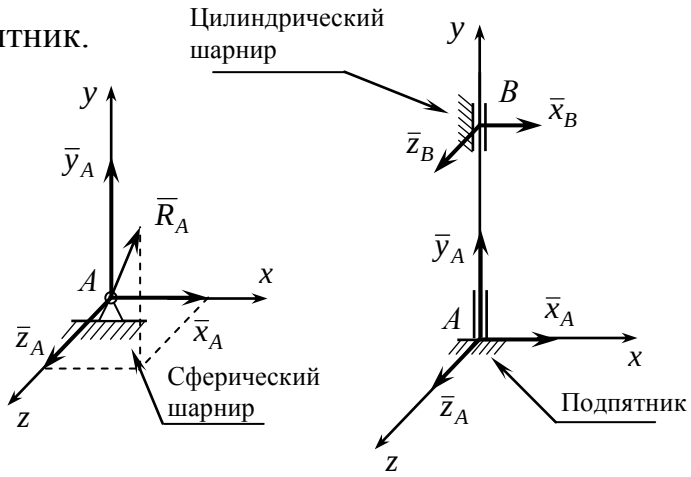
Такая связь позволяет телу поворачиваться вокруг оси шарнира (точки A), но не позволяет точке закрепления перемещаться в плоскости, перпендикулярной оси шарнира.

Реакция $\overline{R}_A$ лежит в плоскости Axy, и проходит через точку A. Как правило, $\overline{R}_A$ заменяют двумя взаимно перпендикулярными составляющими $\overline{x}_A$ и $\overline{y}_A$.

5) Сферический шарнир и подпятник.

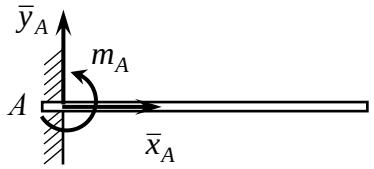
Сферический шарнир не дает точке закрепления тела перемещаться ни в одном из направлений. Реакцию $\overline{R}_A$ представляют тремя взаимно перпендикулярными составляющими.

Подпятник есть совокупность цилиндрического шарнира и упорной плоскости.



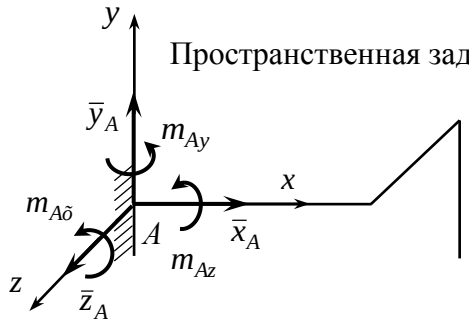
6) Жесткая заделка.

Плоская задача



В плоскости жесткая заделка препятствует перемещению и повороту вокруг точки закрепления A. Поэтому заделка заменяется двумя реакциями x_A, y_A и парой с моментом m_A.

Пространственная задача



В трехмерном случае жесткая заделка заменяется тремя реакциями x_A, y_A, z_A и тремя моментами m_{Ax}, m_{Ay}, m_{Az}.

1.2. Система сходящихся сил

<u>Сходящимися</u> называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке.

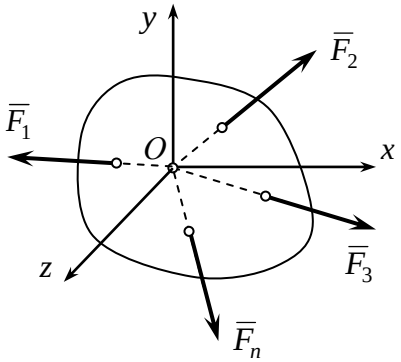
Аналитические условия равновесия системы сходящихся сил:

– если силы расположены в плоскости

$$\boxed{\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0,\\ \sum F_{ky} &= 0;\end{aligned}} \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

– если силы расположены в пространстве

$$\boxed{\sum F_{kx} = 0,\ \ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0.}$$



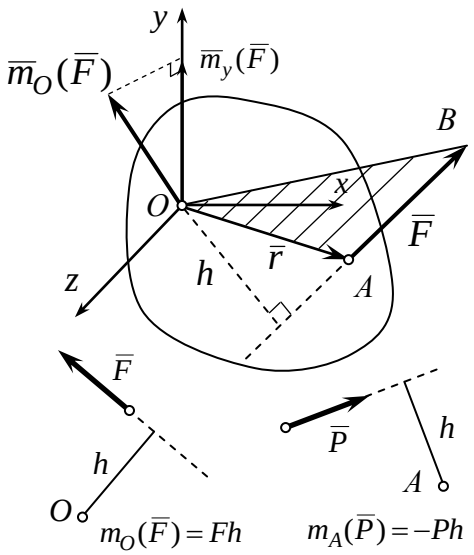
1.3. Момент силы

<u>Момент силы</u> $\overline{F}$ относительно центра O называется приложенный в центре O вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$, который направлен перпендикулярно плоскости OAB, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки.

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F},$$

$$\left|\overline{m}_O(\overline{F})\right| = rF\sin(\overline{r}, \overline{F}) = Fh,$$

где h – плечо силы (кратчайшее расстояние от центра O до линии действия силы).



Если силы расположены в одной плоскости, то используется понятие алгебраического момента силы. <u>Алгебраическим моментом силы относительно центра</u> называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля силы на плечо. Знак плюс выбирается в том случае, если сила стремится поворачивать плоскость относительно центра против хода часовой стрелки.

Момент силы относительно оси это алгебраическое величина, равная проекции вектора момента силы относительно произвольной точки оси на эту ось:

$$m_y(\overline{F}) = Пр_y \overline{m}_O(\overline{F}).$$

Момент силы относительно оси можно вычислить двумя способами:

1) Аналитический.

По правилу векторного произведения:

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\overline{i} + (zF_x - xF_z)\overline{j} + (xF_y - yF_x)\overline{k},$$

где $m_x(\overline{F}) = (yF_z - zF_y)\overline{i}$, $m_y(\overline{F}) = (zF_x - xF_z)\overline{j}$, $m_z(\overline{F}) = (xF_y - yF_x)\overline{k}$.

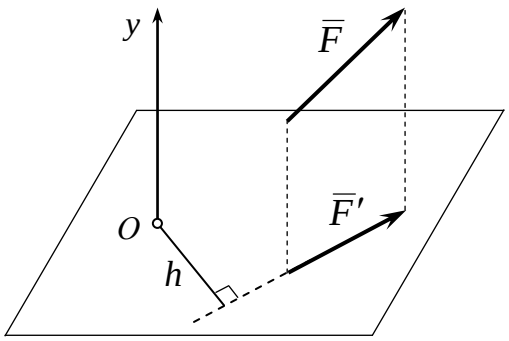
Модуль момента силы относительно центра О:

$$m_O(\overline{F}) = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}.$$

2) Геометрический.

Провести плоскость перпендикулярную оси Oy, спроецировать силу $\overline{F}$ на эту плоскость и вычислить момент проекций $\overline{F}'$ относительно точки O (точки пересечения оси с плоскостью).

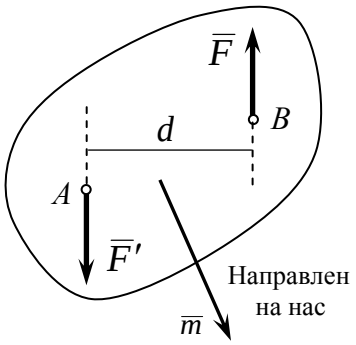
$$m_y(\overline{F}) = F'h.$$



Момент положителен, поскольку $\overline{F}'$ стремится повернуть плоскость против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси Oy.

1.4. Пара сил

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело. Для характеристики действия пары сил на твердое тело вводится понятие момента пары.



Моментом пары сил называется вектор $\overline{m}$, который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки. Момент пары свободный вектор может быть приложен в любой точке.

$$\overline{m} = m_A(\overline{F}) = m_B(\overline{F}') = A\overline{B} \times \overline{F} = B\overline{A} \times \overline{F}'.$$

$|\overline{m}| = |\overline{F}|d$, где d – плечо пары.

Алгебраический момент пары сил равен взятому со знаком плюс или минус произведению модуля одной из сил пары на плечо. Момент пары положителен, если пара стремится повернуть плоскость против хода часовой стрелки.

Свойства пары сил:

1) пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно переносить куда угодно в плоскости действия пары.
2) у данной пары можно произвольно менять модули сил или длину плеча, сохраняя неизменным ее момент.
3) пару можно перенести из данной плоскости в любую другую плоскость, параллельную данной.

1.5. Условия равновесия системы сил

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы равнялись нулю:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0, \quad \overline{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k) = 0.$$

В аналитической форме, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = 0. \end{aligned}}$$

Для плоской системы сил условия равновесия сил:

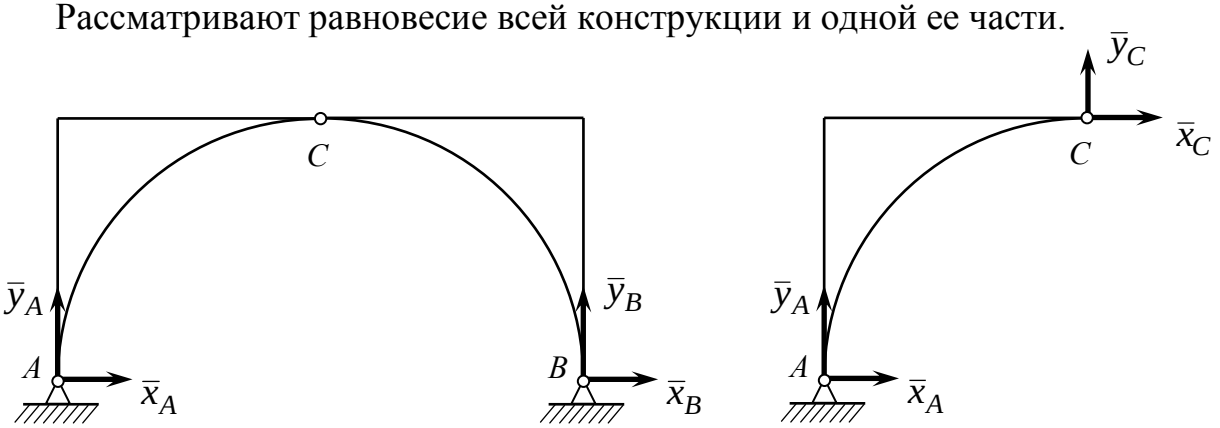
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_O(\overline{F}_k) = 0.}$$

1.6. Равновесие систем тел

Если в равновесии находится не одно тело, а система тел, то для определения всех неизвестных величин необходимо расчленять систему, вводя в рассмотрение реакции внутренних связей. При этом возможны два способа составлений уравнений равновесия двух тел. Рассмотрим трехшарнирную арку.

1-й способ.

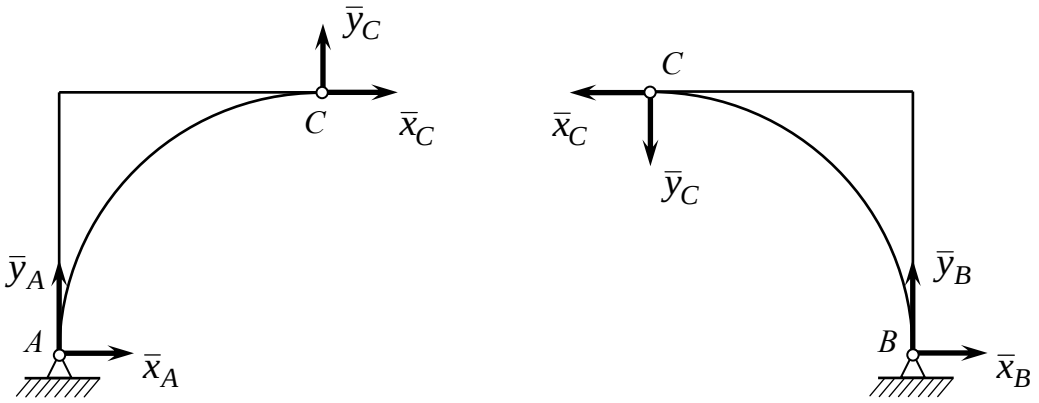
Рассматривают равновесие всей конструкции и одной ее части.



Из равновесия сил, действующих на трехшарнирую арку, получаем 3 уравнения с 4-мя неизвестными x_A, y_A, x_B, y_B. Рассмотрев дополнительно условия равновесия, например, левой ее половины, получим еще 3 уравнения, содержащие 2 новых неизвестных x_C, y_C. Решая полученную систему 6-ти уравнений, найдем все 6 неизвестных.

2-й способ.

Рассматривают равновесие каждой части конструкции.



Конструкцию расчленяют на отдельные тела и составляют условия равновесия каждого из тел в отдельности. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

Способ выбираем из соображений удобства решения системы уравнений равновесия.

Глава 2. Задачи для самостоятельного решения

2.1. Плоская система сил

2.1.1. Равновесие плоской системы сходящихся сил

Пример 1. Один конец стержня *AB* закреплен шарнирно в точке *A*. К другому концу *B* привязан груз весом 50 Н. Стержень удерживается в равновесии веревкой *BC*. Определить натяжение веревки *BC* и реакцию стержня *AB*, если угол α = 30° (рис. 1, *а*).

Решение. Покажем на схеме (рис. 1, *б*) все силы приложенные к узлу *B*. Направим все реакции от узла. Ответ со знаком минус укажет, что стержень *AB* не растянут, а сжат. Для сил приложенных к узлу *B* составим уравнение равновесия сходящихся сил, расположенных в плоскости.

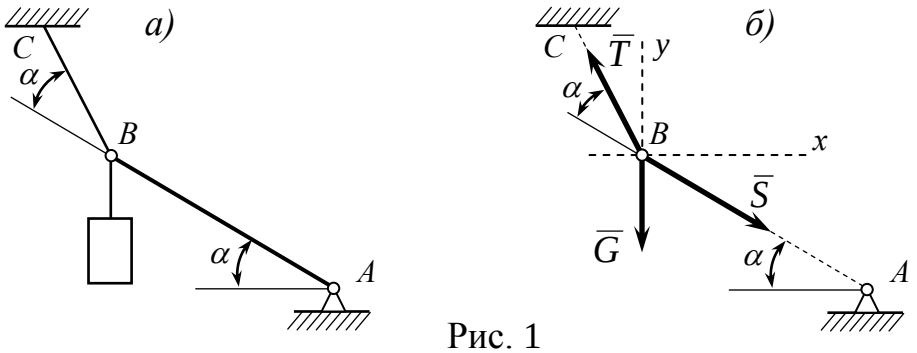


Рис. 1

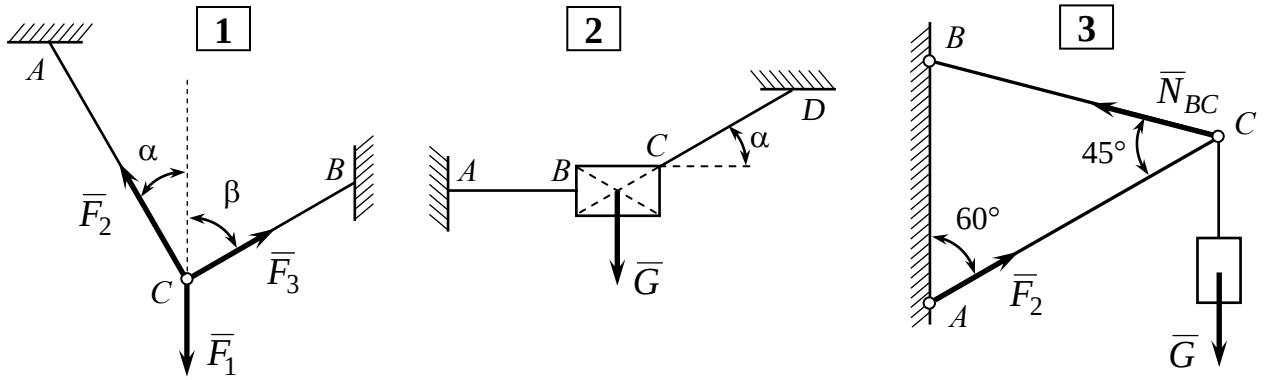
$\sum F_{kx} = 0$: $S\cos\alpha - T\cos 2\alpha = 0$; $\rightarrow$ $S = T\cos 2\alpha / \cos\alpha$.

$\sum F_{ky} = 0$: $T\sin 2\alpha - G - S\sin\alpha = 0$ $\rightarrow$ $T = G/(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha) = 86.6\,\text{Н}$.

Подставляя найденное натяжение веревки *T* в первое уравнение, определяем реакцию стержня $S = 50\sqrt{3}\cos 60° / \cos 30° = 50\,\text{Н}$ (стержень растянут).

Ответ: $T = 86.6\,\text{Н}$, $S = 50\,\text{Н}$.

Задачи для самостоятельного решения

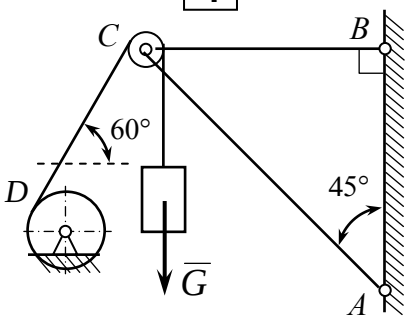


α = 30°, β = 60°, $F_2 = 15\text{Н}$. F_3 = ? (7,76)

$\alpha = 30°, G = 8\text{Н}$. $N_{CD} = ?$ (16)

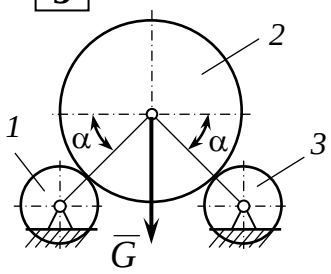
$F_2 = 25\text{Н}$. $N_{BC} = ?$ (48,3)

4



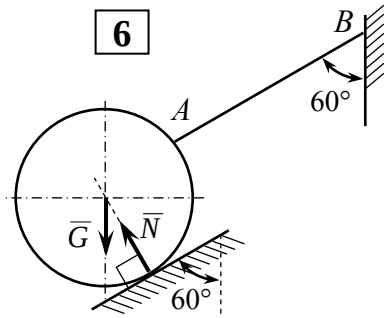
$G = 10$H.
$N_{AC} = ?$ (– 26,4)

5



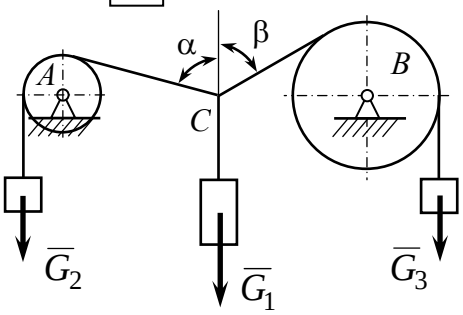
$G = 36$H, $\alpha = 45°$.
$N_1 = ?$ (25,5)

6



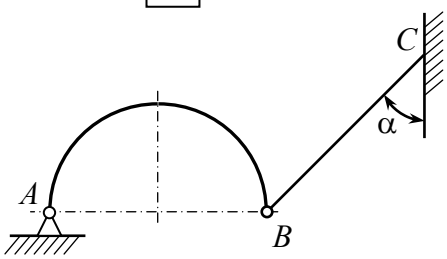
$G = 12$H, $\alpha = 45°$.
$N = ?$ (10,4)

7



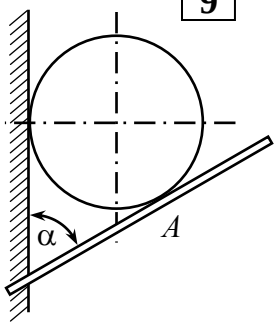
$\alpha = 75°$, $\beta = 60°$,
$G_2 = 55$H. $G_3 = ?$ (61,3)

8



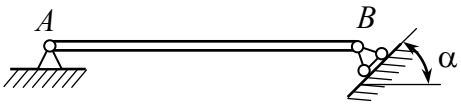
$\alpha = 45°$, $G_{AB} = 5$H.
$R_A = ?$ (3,54)

9



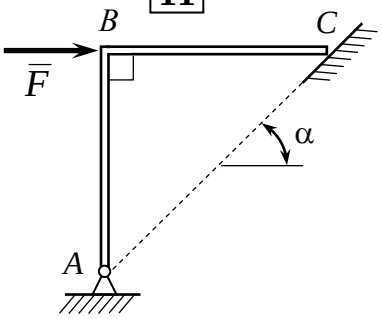
$\alpha = 60°$, $G = 40$H.
$N_A = ?$ (46,19)

10



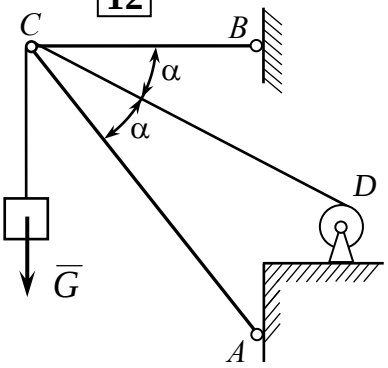
$\alpha = 45°$, $G_{AB} = 180$H.
$R_A = ?$ (127)

11



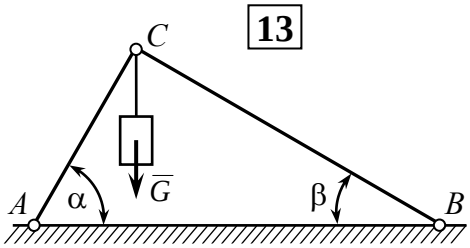
$\alpha = 45°$, $F = 10$H.
$R_A = ?$ (7,07)

12



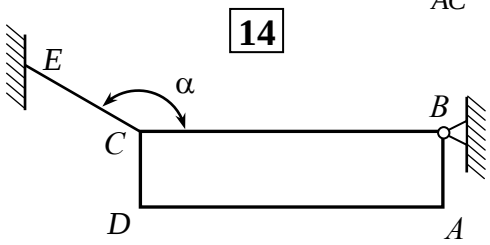
$\alpha = 30°$, $F = 14$H.
$N_{AC} = ?$ (– 24,25)

13



$\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $G = 20$H.
$N_{AC} = ?$, $N_{BC} = ?$

14



$\alpha = 150°$, $G_{ABCD} = 200$H,
$4AB = AD$. $R_B = ?$ (200)

2.1.2. Равновесие произвольной плоской системы сил

Пример 2. Определить реакции опор *A* и *C* балки *AB*, находящейся под действием двух сосредоточенных сил $F_1 = 1\,\text{кН}$, $F_2 = 2\,\text{кН}$ и пары сил с моментом $M = 1\,\text{кН}\cdot\text{м}$. (рис.2, *а*).

Решение. Мысленно отбрасываем связи: шарнирно-неподвижную опору *A* и опору на катках *C*, – заменяя их действие соответствующими реакциями (рис. 2, *б*).

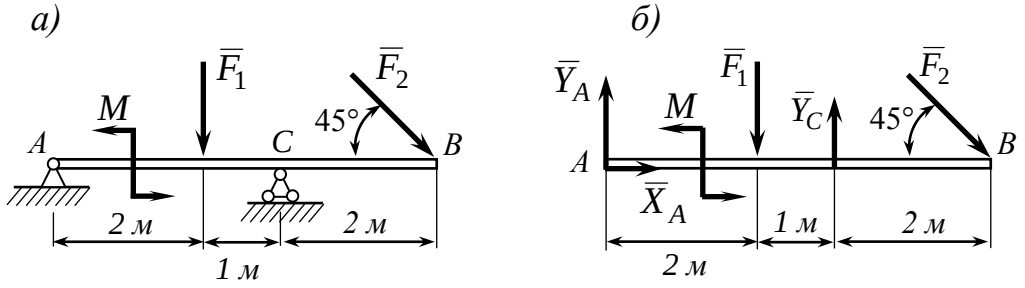


Рис. 2

Составляя три уравнения равновесия сил и решая их, получаем:

$\sum F_{kx} = 0$: $X_A + F_2\cos 45° = 0$; $\rightarrow$ $X_A = -F_2\cos 45°$; $\rightarrow$ $X_A = -1.41\,\text{кН}$.

$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0$: $M - F_1\cdot 2 + Y_C\cdot 3 - F_2\sin 45°\cdot 5 = 0$;

$Y_C = (F_2\sin 45°\cdot 5 + F_1\cdot 2 - M)/3$; $\rightarrow$ $Y_C = 2.7\,\text{кН}$.

$\sum F_{ky} = 0$: $Y_A - F_1 + Y_C - F_2\sin 45° = 0$; $\rightarrow$ $Y_A = -0.28\,\text{кН}$.

Ответ: $X_A = -1.41\,\text{кН}$, $Y_A = -0.28\,\text{кН}$, $Y_C = 2.7\,\text{кН}$.

Пример 3. Определить реакции заделки консольной балки *AB*, находящейся под действием распределенной нагрузки $q = 2\,\text{кН/м}$ и сосредоточенной силы $F = 3\,\text{кН}$ (рис. 3, *а*).

Решение. Рассматриваем равновесие сил, приложенных к балке *AB*. Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $Q = q\cdot l = 6\,\text{кН}$. Реакцию заделки заменяют наперед неизвестными реакциями $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и парой сил с моментом m_A, препятствующая вращению балки *AB* вокруг точки *A* (рис. 3, *б*). Составим три уравнения равновесия сил:

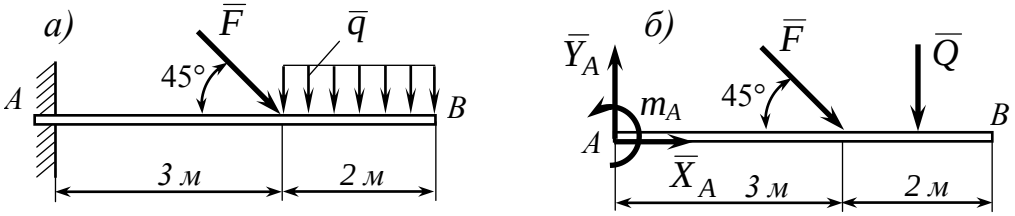


Рис. 3

$\sum F_{kx} = 0$: $X_A + F\cos 45° = 0$; $\rightarrow$ $X_A = -F\cos 45° = -2.12\,\text{кН}$.

$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0$: $m_A - Q\cdot 4 - F\sin 45°\cdot 3 = 0$; $\rightarrow$ $m_A = 22.36\,\text{кН}\cdot\text{м}$.

$\sum F_{ky} = 0$: $Y_A - Q - F\sin 45° = 0$; $\rightarrow$ $Y_A = Q + F\sin 45° = 6.12\,\text{кН}$.

Ответ: $X_A = -2.12\,\text{кН}$, $Y_A = 6.12\,\text{кН}$ и $m_A = 22.36\,\text{кН}\cdot\text{м}$.

Пример 4. Невесомая балка *AB* с грузом на конце удерживается в горизонтальном положении стержнем *CD*. Определить усилие в стержне *CD*, если вес груза *G* = 1 кН (рис. 4, а).

Решение. Рассмотрим равновесие сил, приложенных к балке *AB*. Реакция стержня *CD* приложена в точке *C* и направлена по прямой *CD*. Неизвестную по направлению реакцию шарнира *A* разложим на составляющие X_A, Y_A (рис. 4, б).

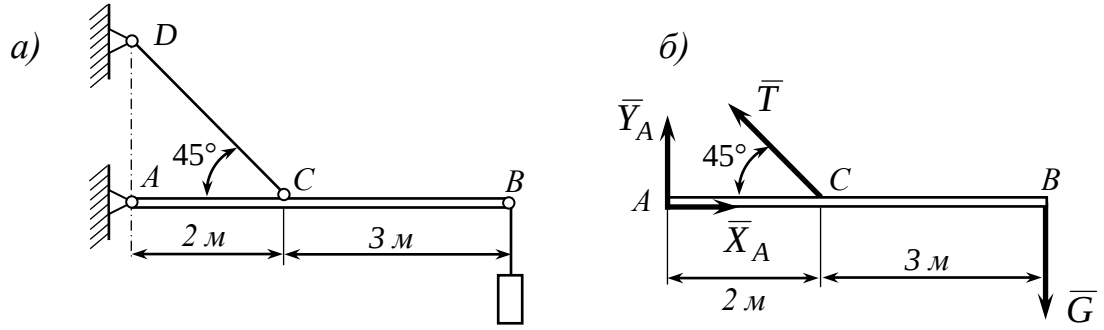


Рис. 4

Составляя три уравнения равновесия сил и решая их, получаем:

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0:\ T\sin 45° \cdot 2 - G \cdot 5 = 0;\ \rightarrow\ T = 5 \cdot G/(2 \cdot \sin 45°) = 3.54\ \text{кН}.$$

$$\sum F_{kx} = 0:\ X_A - T\cos 45° = 0;\quad \rightarrow\quad X_A = T\cos 45° = 2.5\ \text{кН}.$$

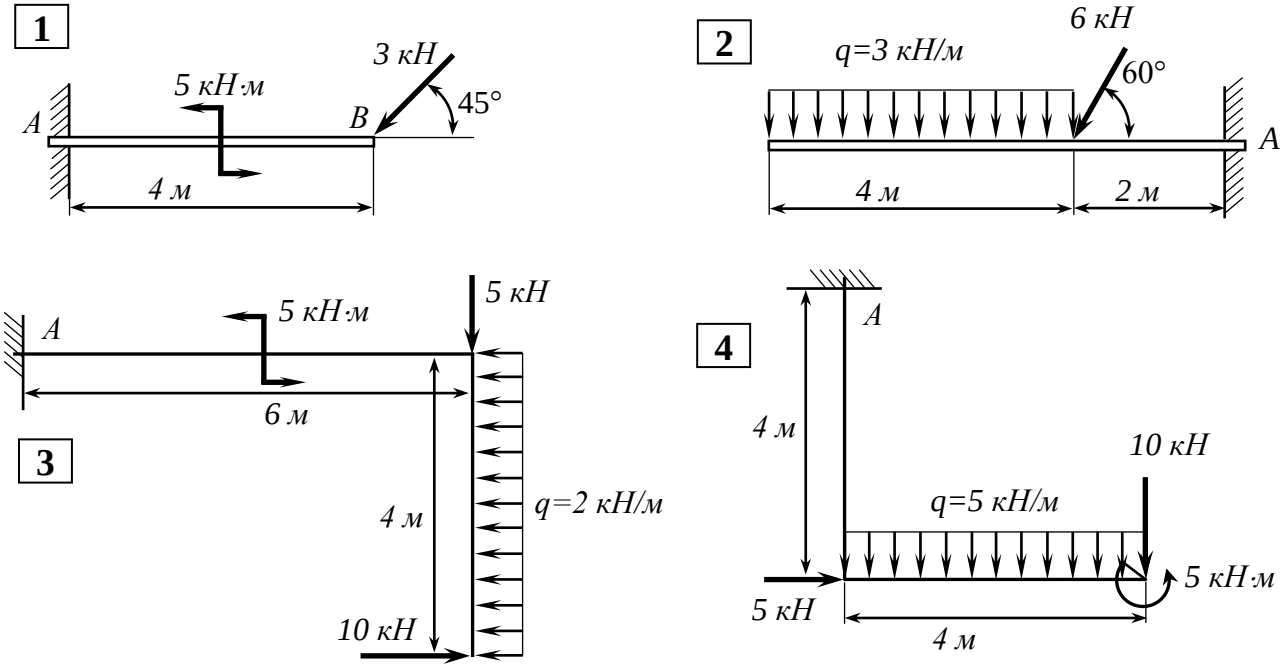
$$\sum F_{ky} = 0:\ Y_A + T\sin 45° - G = 0;\quad \rightarrow\quad Y_A = G - T\sin 45° = -1.5\ \text{кН}.$$

Знак минус указывает на то, что вертикальная составляющая $\overline{Y}_A$ реакции шарнира *A* направлена не вверх, а вниз. Действительные направления остальных сил совпадают с указанными на схеме (рис. 4, б).

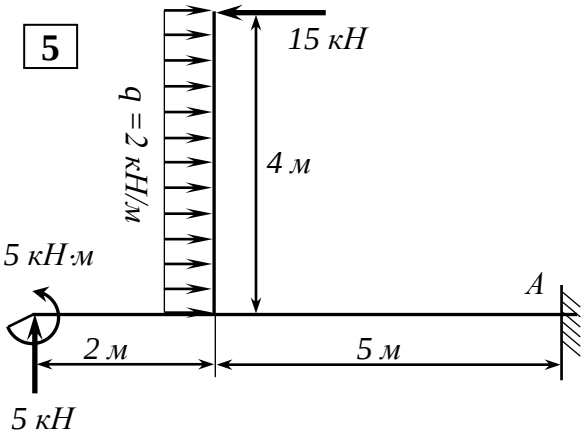
Ответ: $X_A = 2.5\ \text{кН}, Y_A = -1.5\ \text{кН}$ и $T = 3.54\ \text{кН}$.

Задачи для самостоятельного решения

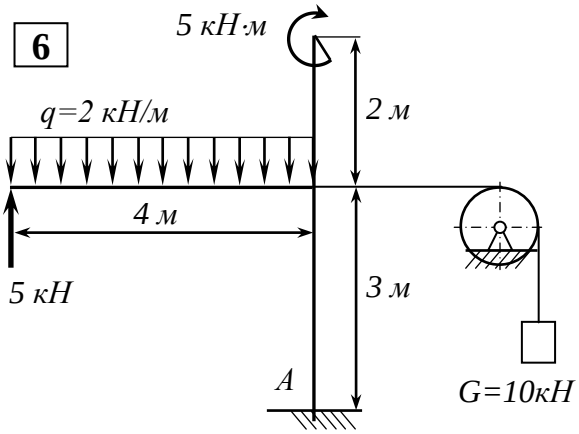
Определить реакции жесткой заделки *A*.



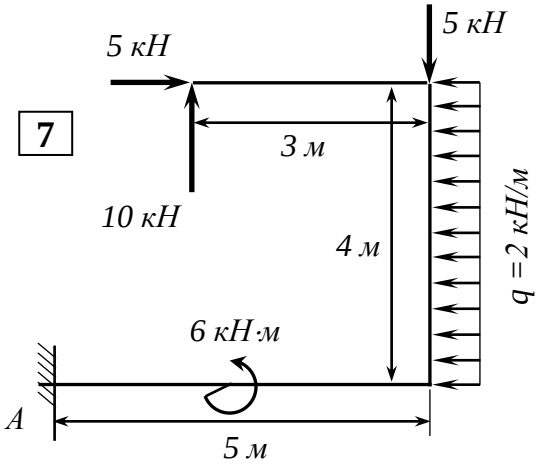
5



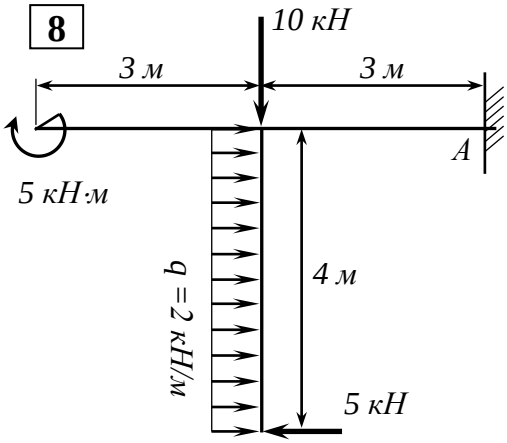
6



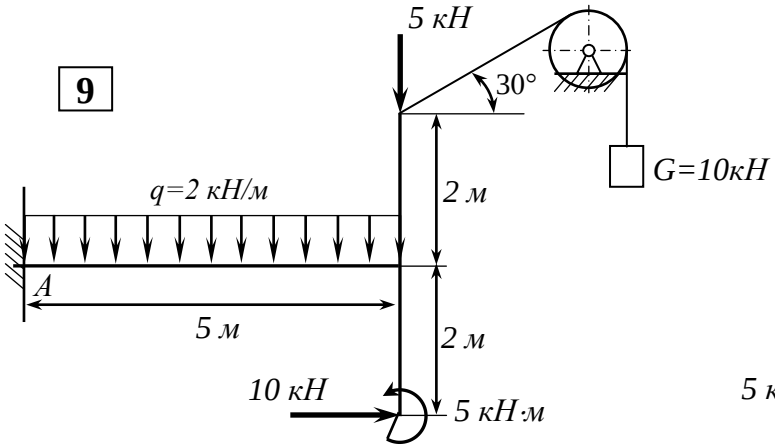
7



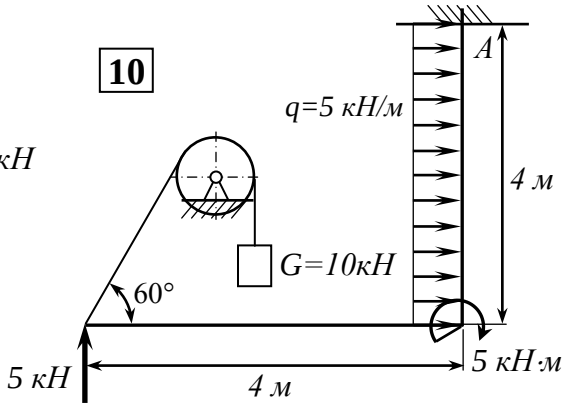
8



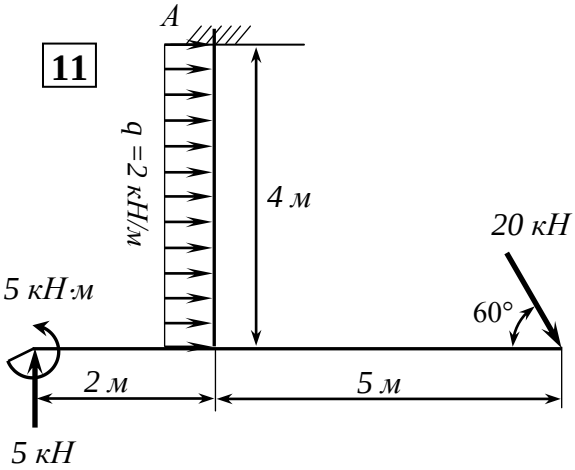
9



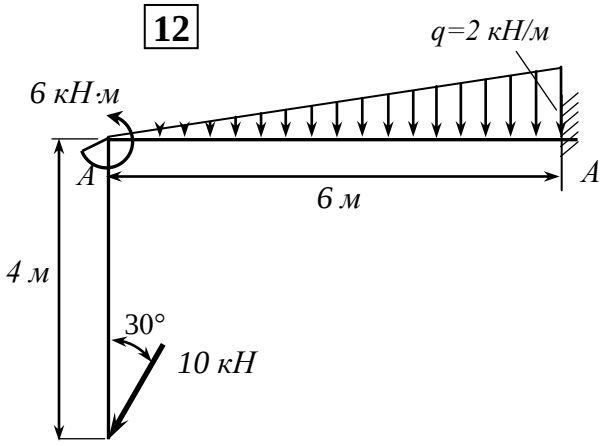
10



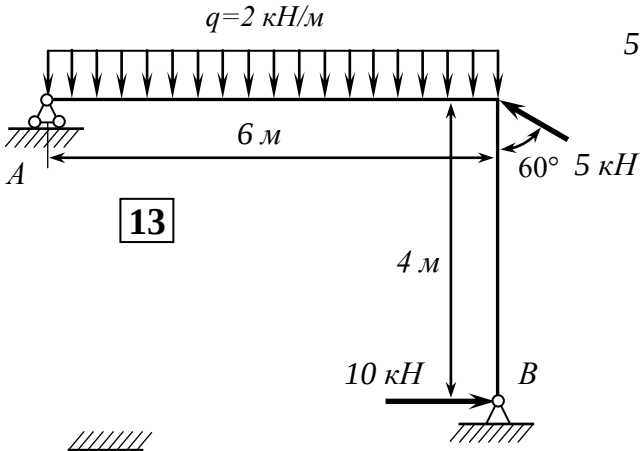
11

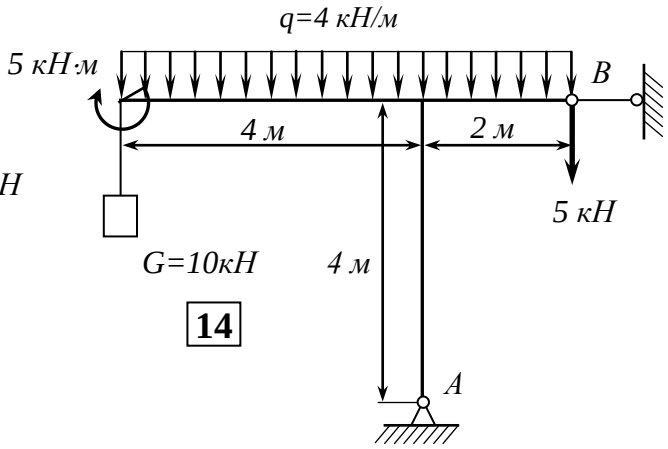


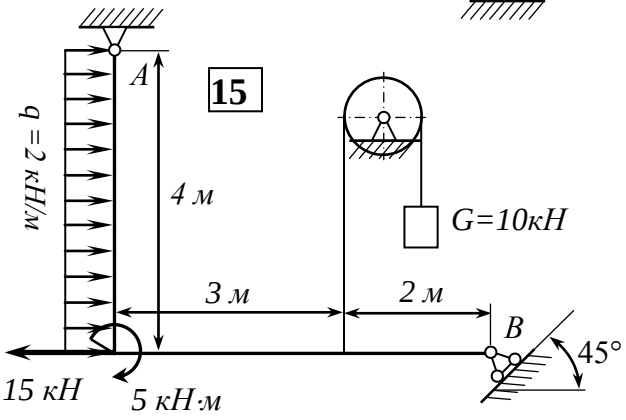
12

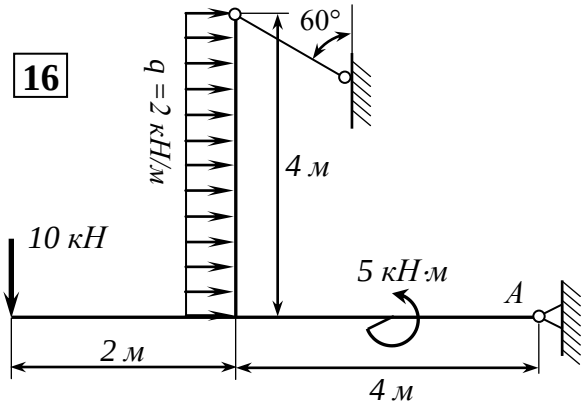


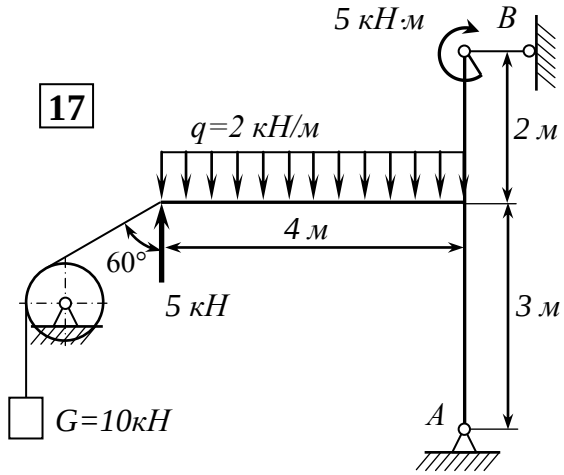
Определить реакции опор *A* и *B*.

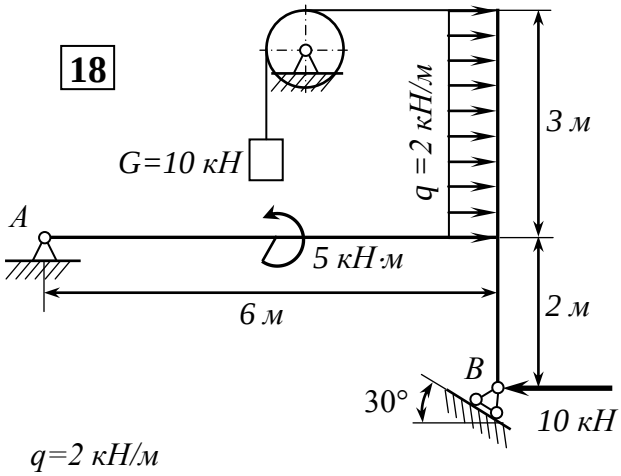


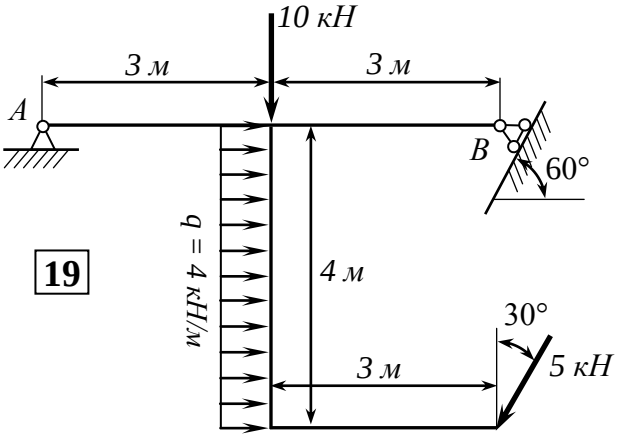


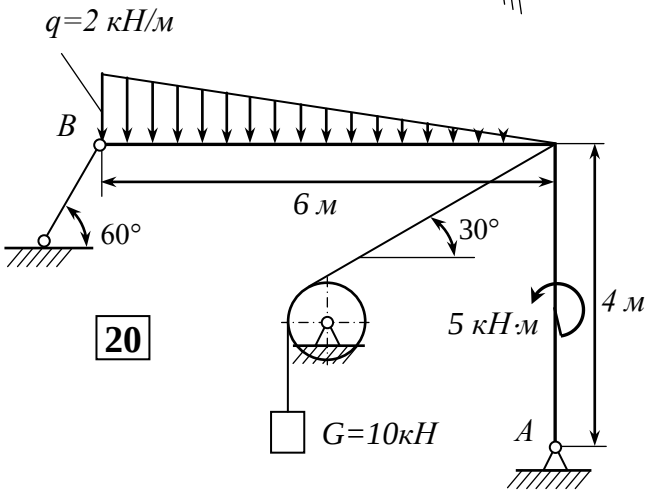












2.2. Равновесие систем тел

Пример 5. На стержень *AB* действует пара сил с моментом *M* =10 кН·м, на стержень *BC* линейно распределенная нагрузка интенсивностью $q_{\max} = 5$ кН/м. Найти момент в заделке *A* (рис. 5, а).

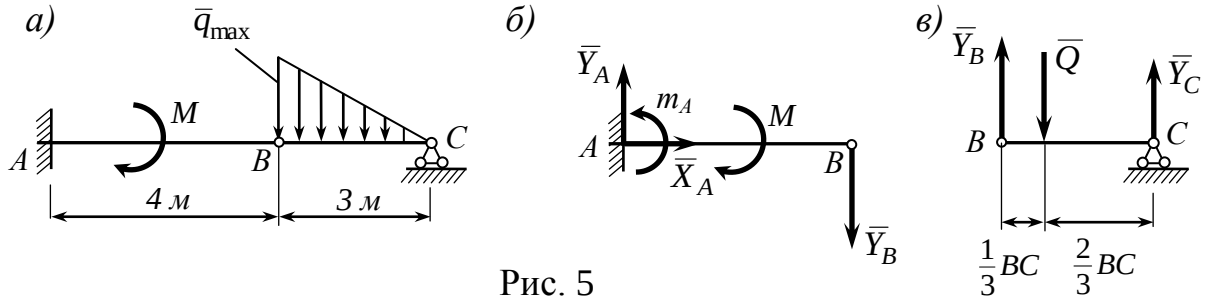


Рис. 5

Решение. Чтобы найти момент в заделке *A* нужно знать какие силы действуют на стержень *AB*. Распределенная нагрузка действующая на *BC* передается через шарнир *B* стержню *AB*. Какая сила действует на шарнир *B* можно определить мысленно расчленив конструкцию на две части: на стержень *AB* и стержень *BC*. Составим уравнение моментов для стержня *BC* относительно центра *C* (рис. 5, в):

$$\sum m_C(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-Y_B \cdot BC + Q \cdot \frac{2}{3} BC = 0; \;\rightarrow\; Y_B = 2Q/3 = 5\,\text{кН}.$$

Переходим к рассмотрению стержня *AB* (рис. 5, б). Чтобы найти момент в заделке *A* без учета неизвестных $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, составляем уравнение моментов относительно центра *A*.

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0;$$

$$m_A - M - Y_B \cdot AB = 0; \;\rightarrow\; m_A = M + Y_B \cdot AB = 30\,\text{кН}\cdot\text{м}.$$

Ответ: $m_A = 30\,\text{кН}\cdot\text{м}$.

Пример 6. Определить вертикальную составляющую реакции в шарнире *A*, если на шарнир *C* действует сила *F* = 2 кН, на стержень *CE* приложена пара сил с моментом *M* = 10 кН·м, *AE* = 6 м, *BC* = 2 м (рис. 6, а).

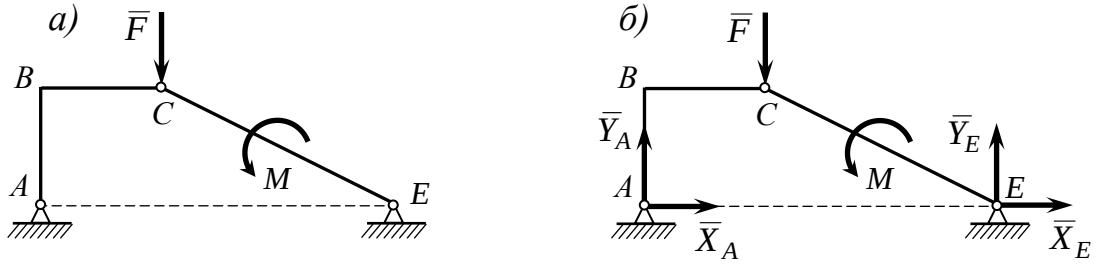


Рис. 6

Решение. По условию задачи требуется определить только вертикальную составляющую реакции $\vec{Y}_A$ в шарнире *A*, поэтому составляя уравнение

моментов для всей конструкции относительно центра E, находим искомую величину (рис. 6, б):

$$\sum m_E(\overline{F}_k) = 0;$$

$$-Y_A \cdot AE + F(AE - BC) + M = 0; \;\; Y_A = \frac{F(AE - BC) + M}{AE} = 3\,\text{кН}.$$

Ответ: $Y_A = 3\,\text{кН}$.

Пример 7. Однородный брус CD весом 1 кН свободно опирается в точке B на однородную балку AB весом 2 кН, причем $DB = 2BC$. К концу D бруса подвешен груз весом $G = 3$ кН. Чему равен момент в заделке A, если длина балки $AB = 2$ м (рис. 7, *а*).

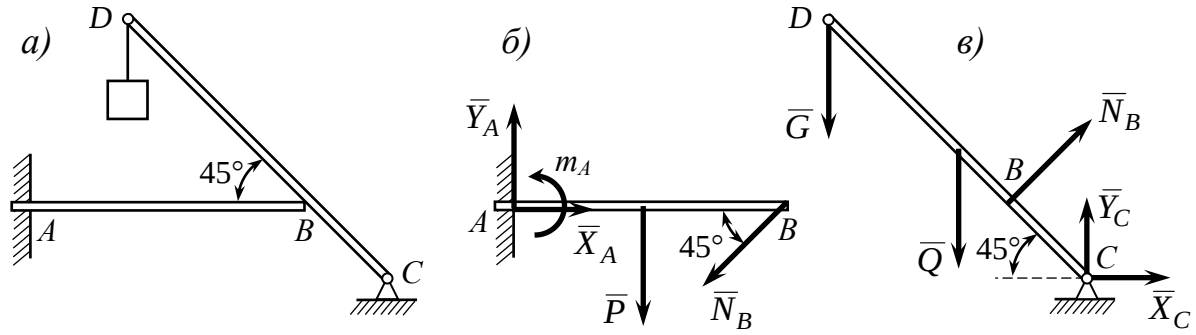


Рис. 7

Решение. Расчленим систему на две части, рассмотрим равновесие бруса CD и балки AB в отдельности. На брус CD действуют заданные силы $\vec{Q}$, $\vec{G}$ и реакции связей $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и $\vec{N}_B$. Для этого бруса из уравнения моментов относительно центра C находим N_B (рис. 7, *в*):

$$\sum m_C(\overline{F}_k) = 0;$$

$$G \cdot DC \cos 45° + Q \cdot DC/2 \cdot \cos 45° - N_B \cdot BC = 0,$$

$$N_B = \frac{G \cdot 3BC \cos 45° + Q \cdot 3BC/2 \cdot \cos 45°}{BC} = (G \cdot 3 + Q \cdot 3/2)\cos 45° = \frac{21\sqrt{2}}{4}\,\text{кН}.$$

На балку AB, если ее рассматривать отдельно, действуют сила $\vec{P}$, реакции заделки $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, m_A и сила давления $\vec{N}_B$ от бруса DC, направленная противоположно. Составляя уравнение моментов сил действующих на балку AB относительно центра A, находим m_A (рис. 7, *б*):

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0;$$

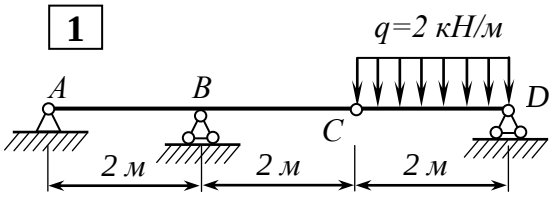
$$m_A - P \cdot AB/2 - N_B \cdot AB \sin 45° = 0;$$

$$m_A = (P + N_B\sqrt{2})AB/2 = (2 + \frac{21\sqrt{2}}{4}\sqrt{2}) = 12.5\,\text{кН}.$$

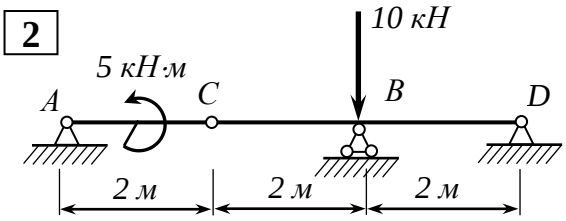
Ответ: $m_A = 12.5\,\text{кН}$.

Определить реакции опор.

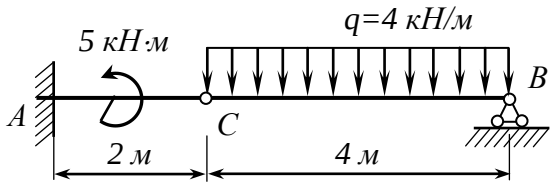
1



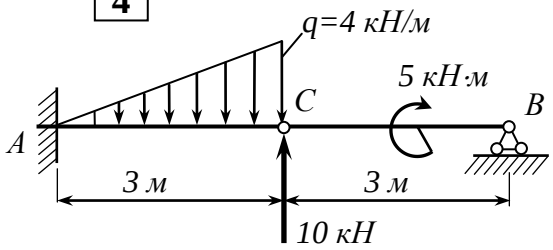
2



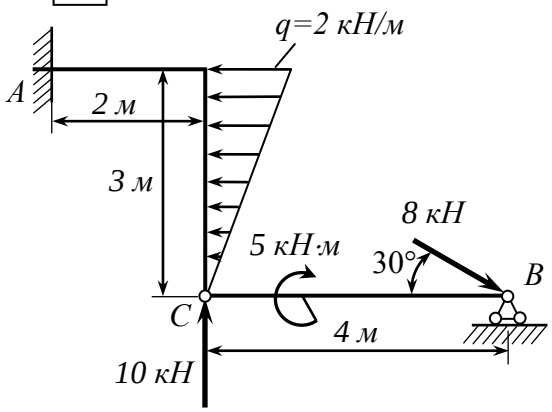
3



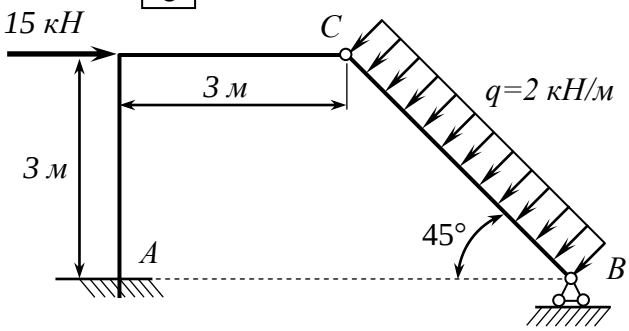
4



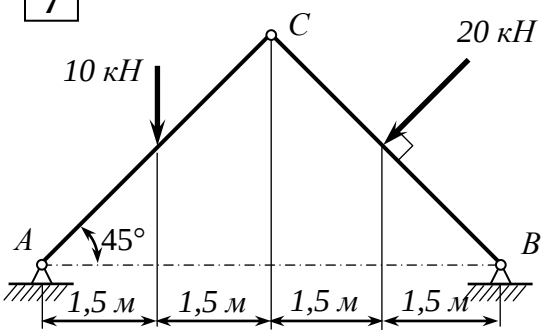
5



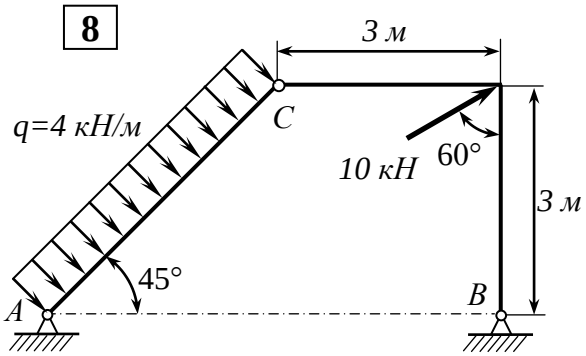
6



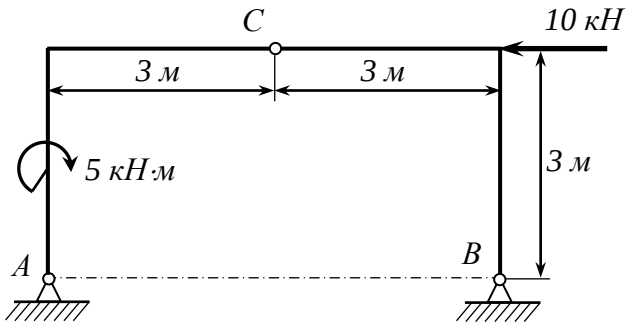
7



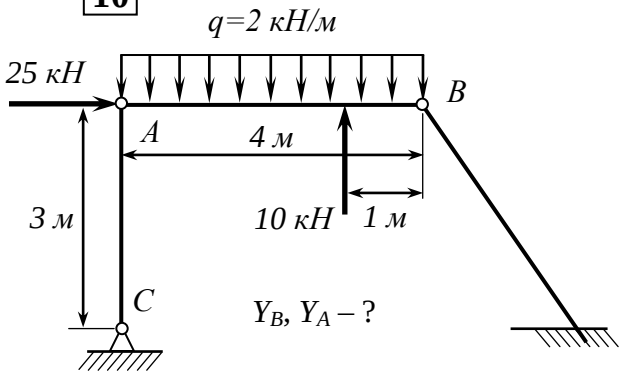
8



9



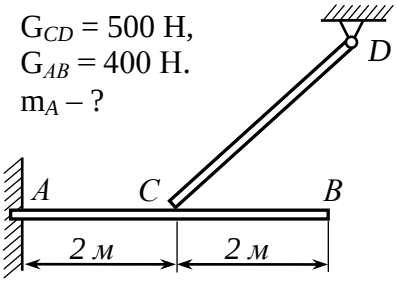
10



Задачи с однородными брусьями.

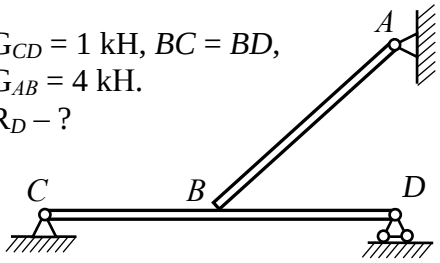
11

G_{CD} = 500 Н,
G_{AB} = 400 Н.
m_A – ?



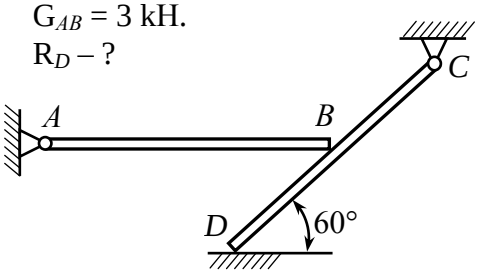
12

G_{CD} = 1 kН, $BC = BD$,
G_{AB} = 4 kН.
R_D – ?



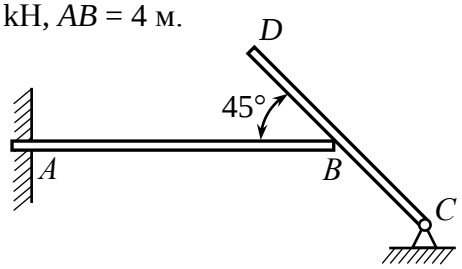
13

G_{CD} = 1 kН, $BC = BD$
G_{AB} = 3 kН.
R_D – ?



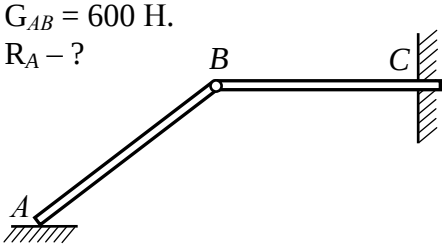
14

G_{CD} = 1 kН, $BC = BD$,
G_{AB} = 2 kН, AB = 4 м.
m_A – ?



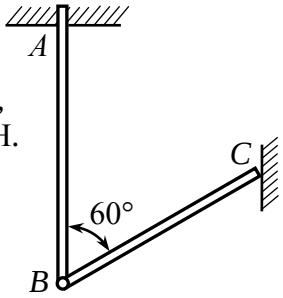
15

G_{AB} = 600 Н.
R_A – ?



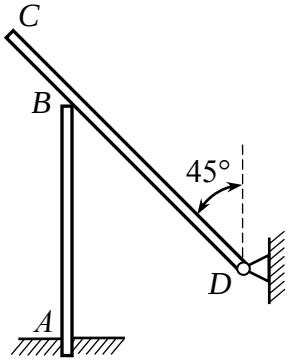
16

G_{BC} = 1 kН,
G_{AB} = 600 Н.
AB = 2м
m_A – ?



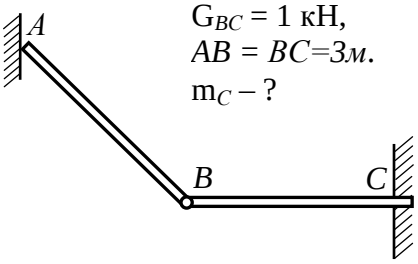
17

G_{CD} = 4 kН,
$BD = AB$= 3м,
CD = 4 м.
m_A – ?



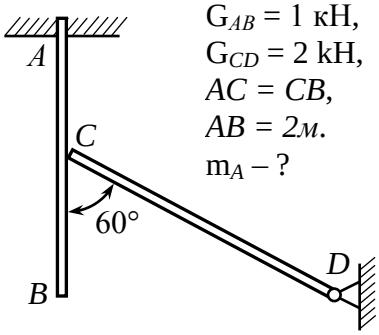
18

G_{AB} = 1 кН,
G_{BC} = 1 кН,
$AB = BC$=3м.
m_C – ?



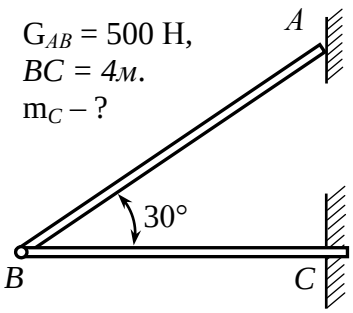
19

G_{AB} = 1 кН,
G_{CD} = 2 kН,
$AC = CB$,
AB = 2м.
m_A – ?



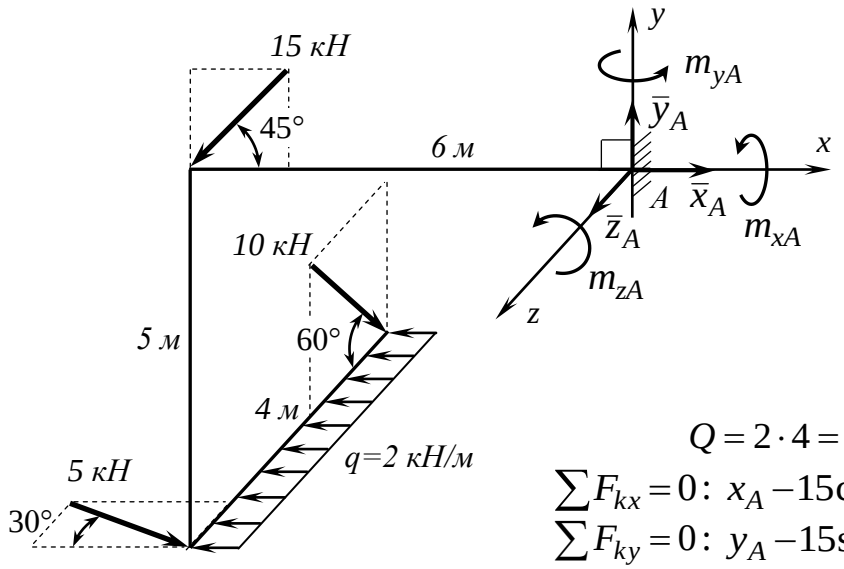
20

G_{AB} = 500 Н,
BC = 4м.
m_C – ?



2.3. Пространственная система сил

Пример 8. Определить реакций жесткой заделки *A*.



Показываем реакций жесткой заделки: x_A, y_A, z_A, m_{xA}, m_{yA}, m_{zA}.

$$Q = 2 \cdot 4 = 8кН\,.$$

$$\sum F_{kx} = 0:\ x_A - 15\cos 45° + 5\cos 30° - Q = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0:\ y_A - 15\sin 45° - 10\sin 60° = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0:\ z_A - 10\cos 60° + 5\sin 30° = 0,$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = 0:\ m_{xA} + 10\cos 60° \cdot 5 - 10\sin 60° \cdot 4 - 5\sin 30° \cdot 5 = 0,$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = 0:\ m_{yA} - 10\cos 60° \cdot 6 + Q \cdot 2 + 5\sin 30° \cdot 6 = 0,$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = 0:\ m_{zA} - 15\sin 45° \cdot 6 - Q \cdot 5 + 10\sin 60° \cdot 6 + 5\cos 30° \cdot 5 = 0.$$

Ответ: $x_A =$, $y_A =$

Пример 9. Три стержня соединены в шарнире *O*. Определить реакции стержней, если к шарниру *O* приложена сила *F* = 1 кН. Расстояния принимать *AB* = *BO* = *CD* (рис. 8, *а*).

<u>Решение.</u> Воспользуемся способом вырезания узлов. Все стержни фермы условимся считать растянутыми; знак минус у вычисленной реакции стержня покажет, что стержень сжат (рис. 8, *б*).

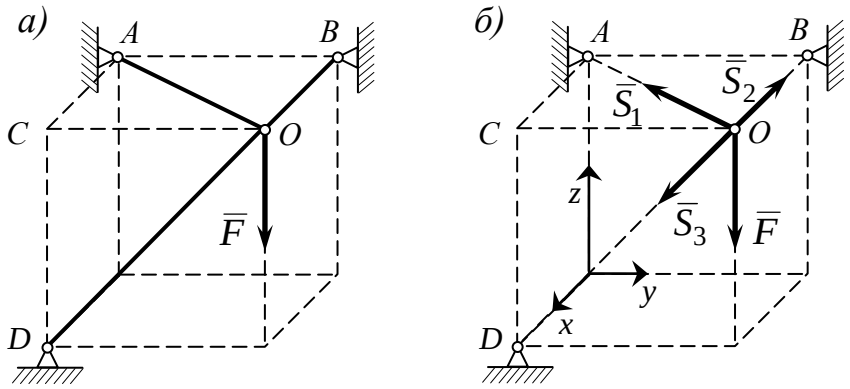


Рис. 8

Составляя три уравнения равновесия сил действующих на узел *O*, получаем:

$$\sum F_{kx} = 0:\quad -S_1\cos 45° - S_2 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad -S_3 \cos 45° - S_1 \cos 45° = 0; \quad \rightarrow \quad S_1 = -S_3;$$

$$\sum F_{kz} = 0: \quad -S_3 \cos 45° - F = 0; \quad \rightarrow \quad S_3 = -F / \cos 45° = -1.41\,\text{кН};$$

Из второго уравнения $S_1 = -S_3 = 1.41\,\text{кН}$, из первого $S_2 = -S_1 / \cos 45° = -2\,\text{кН}$.

Знак плюс в ответе указывает на то, что истинное направление совпадает с направлением, указанным на схеме (рис. 8, *б*).

Ответ: $S_1 = 1.41\,\text{кН}$, $S_2 = -2\,\text{кН}$ и $S_3 = -1.41\,\text{кН}$.

Пример 10. Рабочий поднимает груз Q = 500 Н с помощью ворота; радиус барабана r = 10 см, длина рукоятки AK = 50 см, AC = CB = 50 см. Определить давление F на рукоятку и реакции узлов A и B, если рукоятка AK находится в горизонтальном положении (рис. 9, *а*).

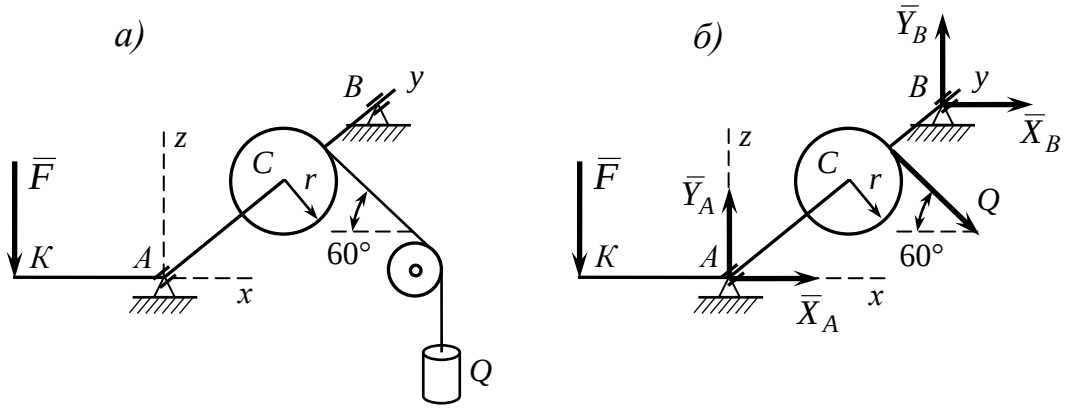


Рис. 9

<u>Решение.</u> Изобразим действующие на ворот силы: сила F, натяжение веревки Q, по модулю равное весу груза, и составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ реакции подшипников (рис. 9, *б*).

Определим силу F из уравнения моментов сил относительно оси AB:

$$\sum m_y(\overline{F}_k) = 0: \; -F \cdot AK + Q \cdot r = 0; \; \rightarrow \; F = Q \cdot r / AK = 500 \cdot 10 / 50 = 100\,\text{Н}.$$

Составляющие $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ найдем, рассматривая уравнения моментов относительно осей Az и Ax соответственно.

$$\sum m_z(\overline{F}_k) = 0: \; -X_B \cdot AB - Q\cos 60° \cdot AC = 0; \; \rightarrow X_B = -125\,\text{Н}.$$

$$\sum m_x(\overline{F}_k) = 0: \; Y_B \cdot AB - Q\sin 60° \cdot AC = 0; \; \rightarrow Y_B = 216.51\,\text{Н}.$$

Составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ найдем из следующих уравнений:

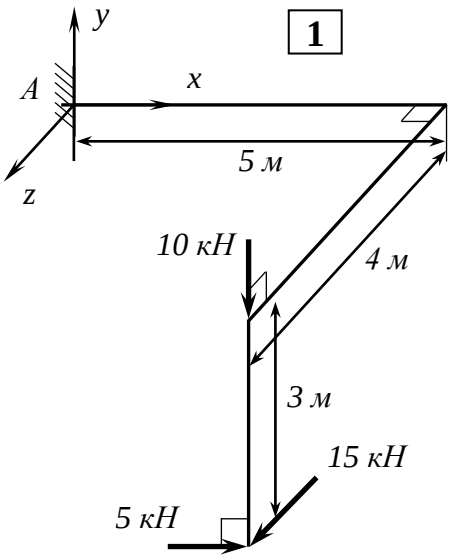
$$\sum F_{kx} = 0: \; X_A + X_B + Q\cos 60° = 0 \; \rightarrow X_A = -125\,\text{Н}.$$

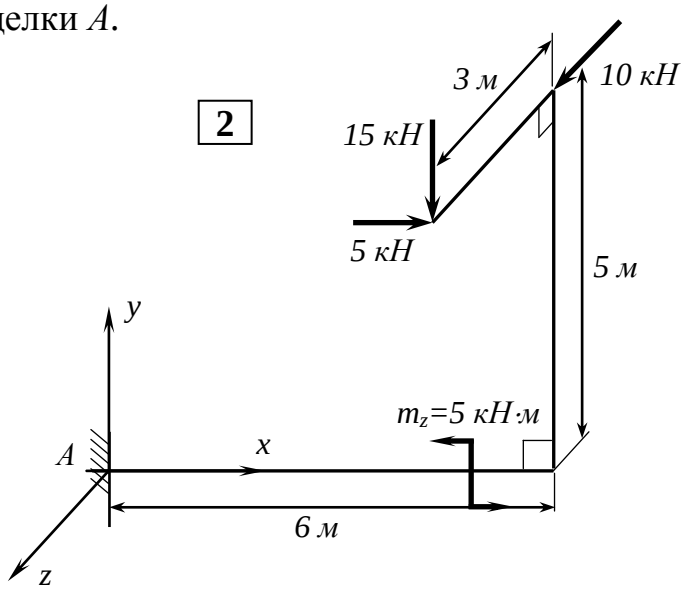
$$\sum F_{kz} = 0: \; Y_A + Y_B + Q\sin 60° - F = 0 \; \rightarrow Y_A = -549.52\,\text{Н}.$$

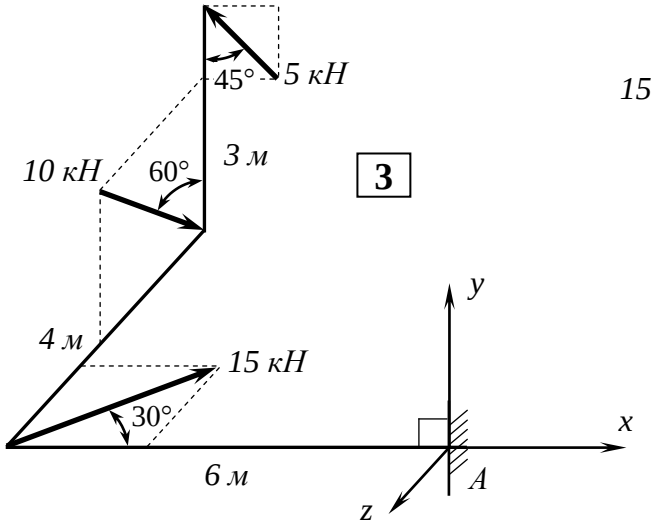
Ответ: $F = 100\,\text{Н}$, $X_A = -125\,\text{Н}$, $Y_A = -549.52\,\text{Н}$, $X_B = -125\,\text{Н}$, $Y_B = 216.51\,\text{Н}$.

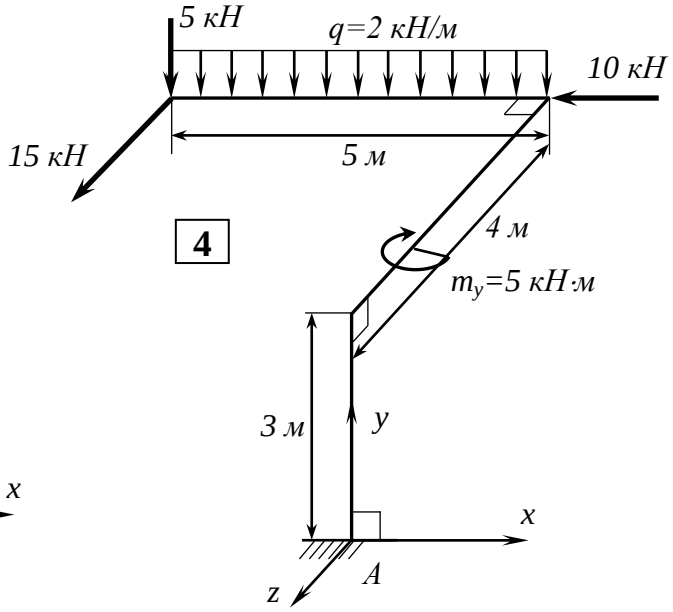
2.3.1. Равновесие произвольной системы сил

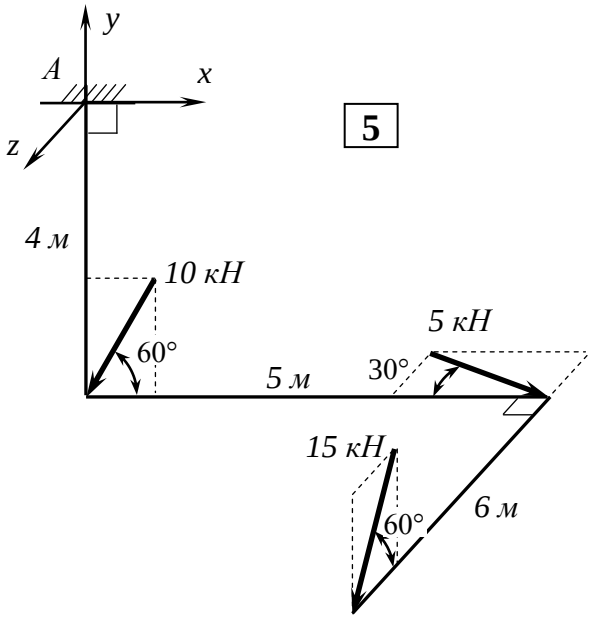
Определить реакции жесткой заделки *A*.

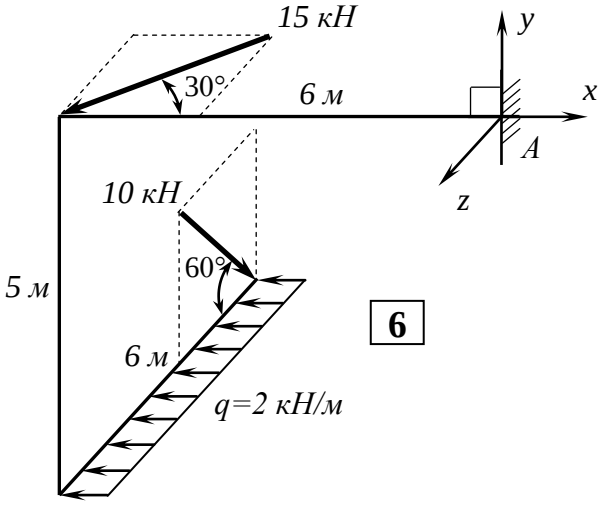






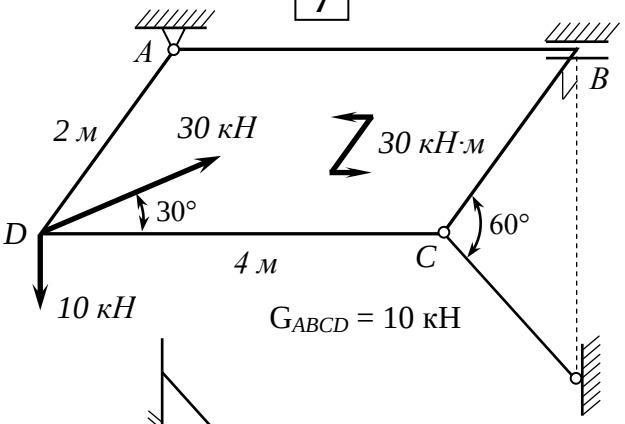




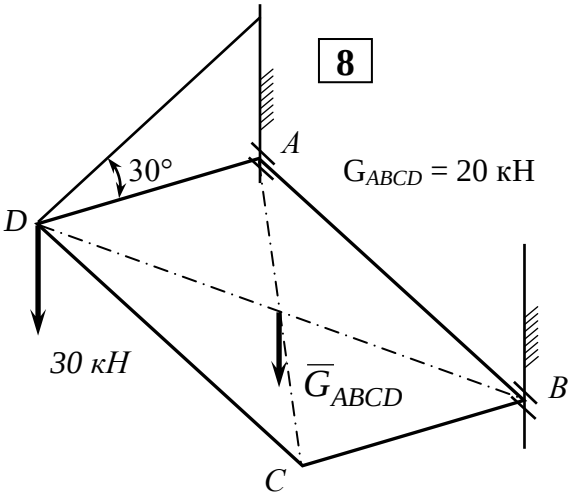


Определить реакции опор.

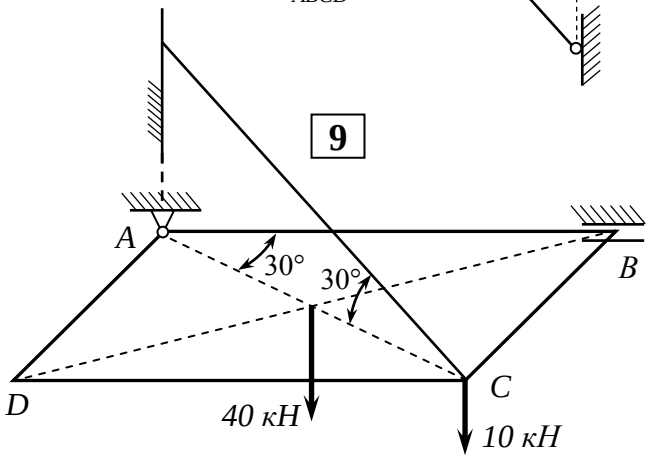
7



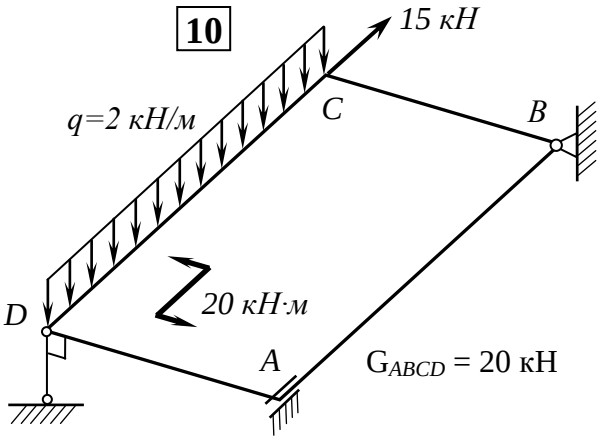
8



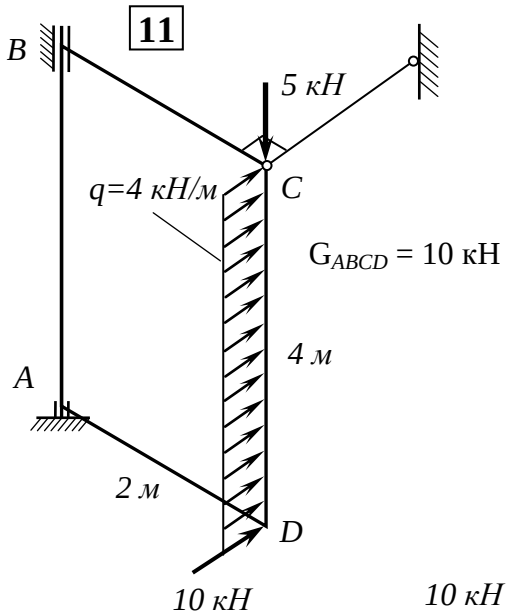
9



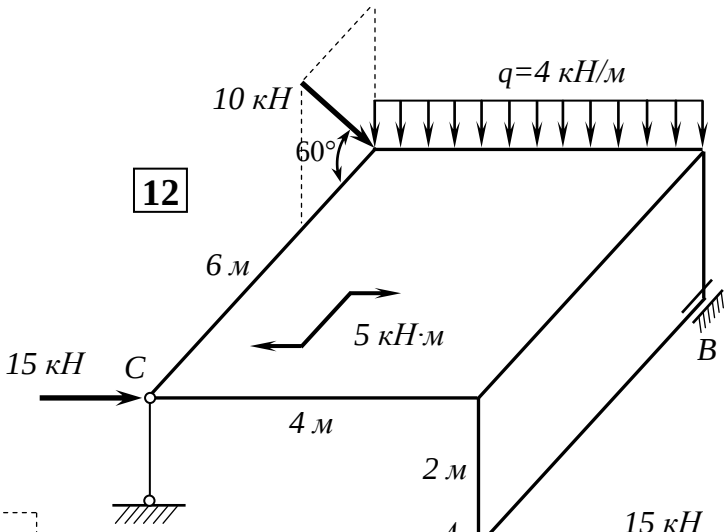
10



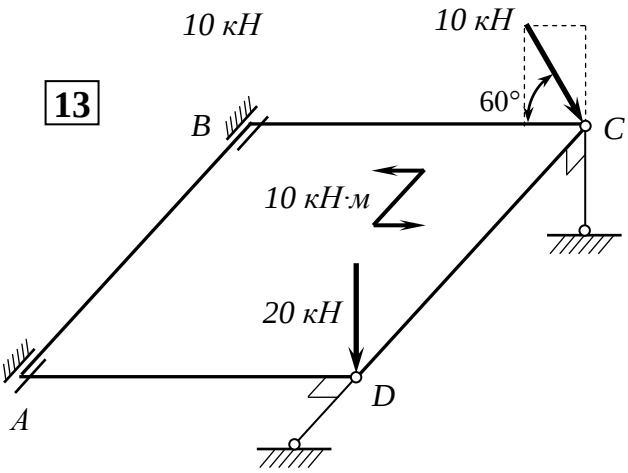
11



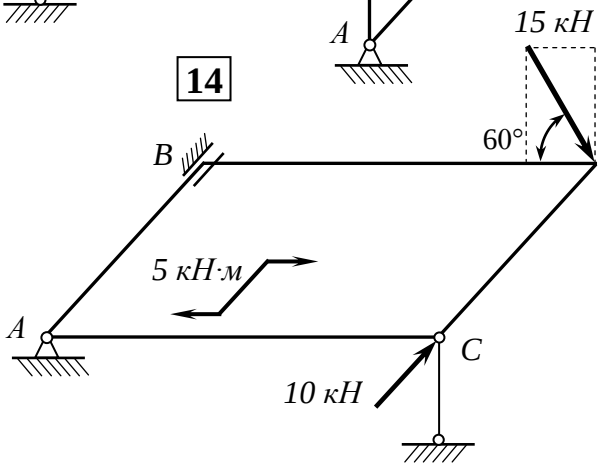
12



13



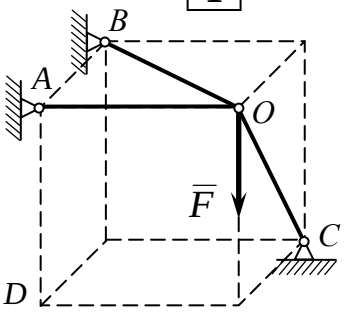
14



2.3.2. Равновесие пространственной системы сходящихся сил

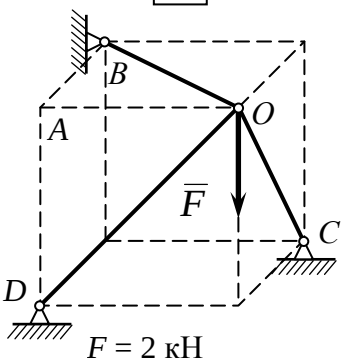
Определить усилия в стержнях.

1



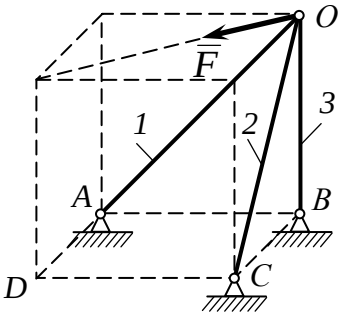
F = 20 кН
$AB = AO = AD$.
N_{OC} , N_{OB} , N_{OA} – ?

2



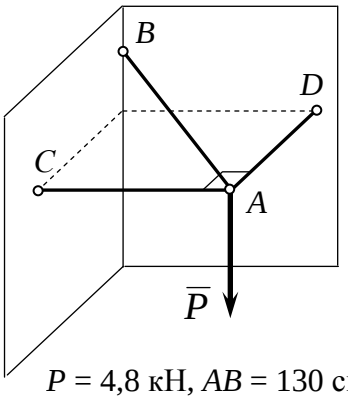
F = 2 кН
$AB = AO = AD$.
N_{OC} , N_{OB} , N_{OD} – ?

3



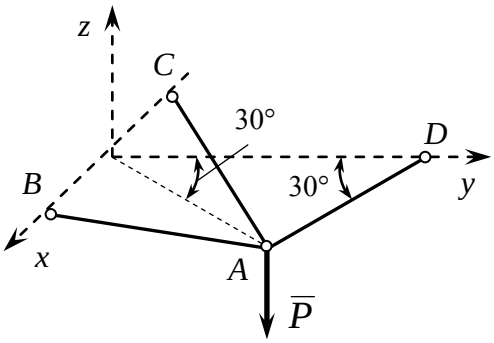
F = 20 кН
$AB = BC = OB$.
N_1 , N_2 , N_3 – ?

4



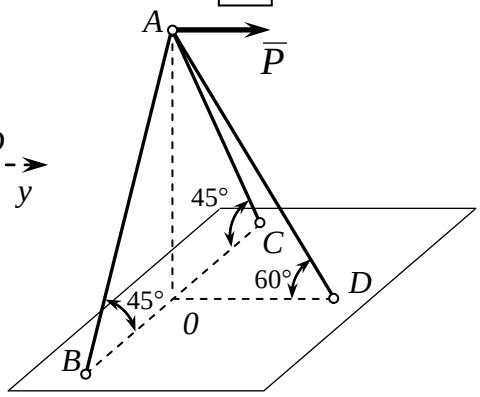
P = 4,8 кН, AB = 130 см,
AC = 40 см, AD = 30 см.
S_C , S_B , S_D – ?

5



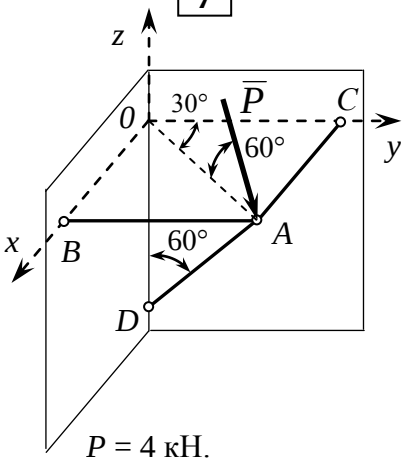
P = 1 кН,
$AB = BC = AC$.
T_C , T_B , T_D – ?

6



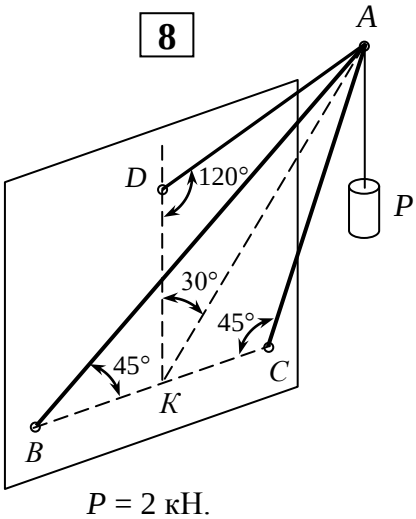
P = 1 кН.
S_C , S_B , S_D – ?

7



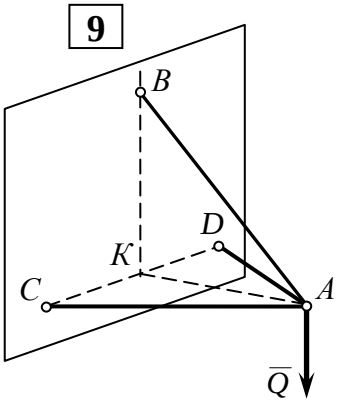
P = 4 кН.
S_C , S_B , S_D – ?

8



P = 2 кН.
S_C , S_B , S_D – ?

9



Q = 180 кН
AB = 170 см,
$AC = AD$ = 100 см,
CD = 120 см, $CK = KD$.
N_{AD} , N_{AC} , N_{AB} – ?

Раздел II. КИНЕМАТИКА

Глава 1. Основные понятия кинематики

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

Для определения положения движущегося тела (или точки) в разные моменты времени с телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают систему координат, образующую вместе с этим телом систему отсчета. В дальнейшем будем говорить о движении тела (или точки) по отношению к данной системе отсчета, подразумевая под этим движение по отношению к тому телу, с которым эта система отсчета связана.

Движение тел совершается в пространстве с течением времени. Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т.д.) рассматривается как изменяющиеся с течением времени, т.е. как функций времени t.

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано). Задать движение или закон движения тела (точки) – значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называется траекторией точки. Если траекторией является прямая, движение точки называется прямолинейным, а если кривая – криволинейным.

1.1. Кинематика точки

Существует три способа задания движения точки:

– векторный;

– координатный;

– естественный.

Векторный способ задания движения точки.

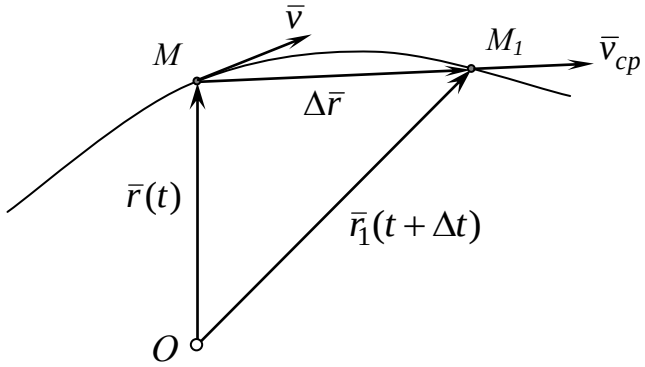
Положение точки в пространстве однозначно определяется заданием радиуса-вектора $\bar{r}$, проведенного из некоторого неподвижного центра O в данную точку M.

Для определения движения точки должна быть задана вектор-функция $\bar{r}$ аргумента t:

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)}$$

Данное равенство определяет закон движения точки в векторной форме. Геометрическое место концов вектора $\bar{r}$ определяет траекторию движения движущейся точки.

Скорость – это векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета.



Вектор средней скорости определяется как

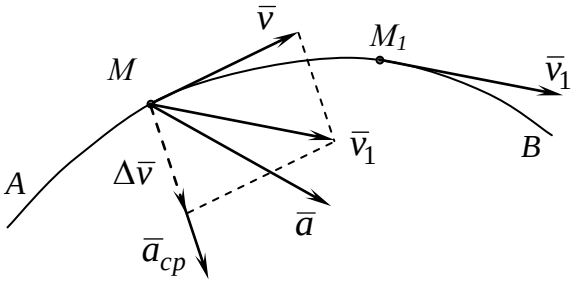
$$\boxed{\bar{v}_{cp} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}},$$

где $\Delta\bar{r}$ – приращение радиуса-вектора за промежуток времени Δt.

$$\boxed{\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}}.$$

Вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса-вектора точки по времени и направлен по касательной к траектории в сторону движения.

Ускорение точки характеризует быстроту изменения модуля и направления скорости точки.



$$\boxed{\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{\Delta t^2}}.$$

Вектор ускорения точки равен первой производной от скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени. Вектор ускорения точки расположен в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой (AB).

Координатный способ задания движения точки.

Положение точки M в системе отсчета $Oxyz$ определяется тремя декартовыми координатами:

$$\boxed{x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ \ z = f_3(t)}.$$

Эти уравнения называются уравнениями движения точки в декартовых координатах.

Движение точки M в одной плоскости определяется двумя уравнениями движения: $\boxed{x = f_1(t),\ y = f_2(t)}$

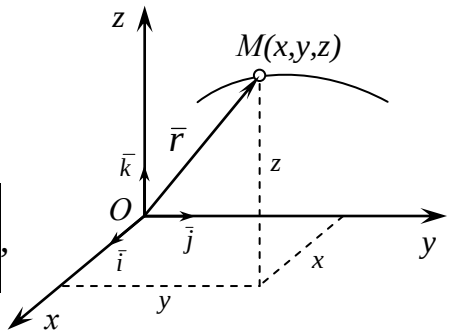
Записав радиус-вектор через декартовые координаты $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Найдем скорость и ускорение точки M:

$$\boxed{\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}},$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\boxed{\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}},$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

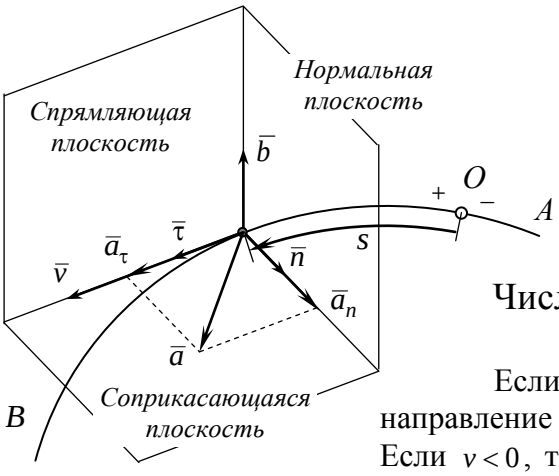


Естественный способ задания движения точки.

Данный способ задания движения точки применяется, если известны:

- траектория точки (*AB*),
- начало (т. *O*) и направление отсчета дуговой координаты *s* (+ –),
- уравнение движения *s* = *f*(*t*).

Естественными координатными осями называются три взаимно перпендикулярные оси; касательная, направленная в сторону возрастания дуговой координаты, главная нормаль, направленная в сторону вогнутости кривой, и бинормаль, направленная по отношению к касательной и главной нормали по правилу буравчика. Единичные векторы-орты этих осей обозначаются соответственно $\bar{\tau}$, $\bar{n}$ и $\bar{b}$.



Вектор скорости точки *M*

$$\bar{v} = d\bar{r}/dt, \text{ полагая } \bar{r} = \bar{r}(s).$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}, \text{ т.к. } \frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s} \text{ и } \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}\right| = 1$$

$$\boxed{\bar{v} = \bar{\tau}\frac{ds}{dt}}.$$

Числовое значение скорости (алгебраическое)

$$v = ds/dt.$$

Если $v > 0$ точка движется в сторону увеличения *s* и направление $\bar{v}$ совпадает с направлением орта $\bar{\tau}$.

Если $v < 0$, то в этот момент функция *s* убывает и направление скорости $\bar{v}$ противоположно направлению орта $\bar{\tau}$.

Вектор ускорения точки *M*

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{dt}\cdot\frac{ds}{dt} + \bar{\tau}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} = \left[\frac{d\bar{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right]\frac{ds}{dt} + \bar{\tau}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}, \quad \text{т.к. } \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{n}\cdot\frac{1}{\rho},$$

$$\boxed{\bar{a} = \bar{n}\cdot\frac{v^2}{\rho} + \bar{\tau}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau}, \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_n = v^2/\rho$ – нормальное ускорение точки,

$a_\tau = d^2s/dt^2 = dv/dt$ – касательное ускорение точки,

a – модуль ускорения точки *M*.

Если *v* и a_τ имеют одинаковые знаки, то точка движется ускоренно. Если имеют различные знаки, то и направления $\bar{v}$ и $\bar{a}_\tau$ противоположны, т.е. точка движется замедленно.

Классификация движения точки

I) $\bar{a}_n = 0,\ \bar{a}_\tau = 0$ точка движется равномерно-прямолинейно.

II) $\bar{a}_n \neq 0,\ \bar{a}_\tau = 0$ точка движется равномерно-криволинейно.

III) $\bar{a}_n = 0,\ \bar{a}_\tau \neq 0$ точка движется по прямой неравномерно.

IV) $\bar{a}_n \neq 0,\ \bar{a}_\tau \neq 0$ точка движется неравномерно-криволинейно.

Если $a_\tau = const$, движение является равнопеременным. Закон этого движения, считая, что при $t = 0,\ s = s_0,\ v = v_0$.

$$\boxed{v = v_0 + a_\tau t}, \quad \boxed{s = s_0 + v_0 t + a_\tau t^2/2}.$$

Различают пять видов движения твердого тела:

1) поступательное;
2) вращательное;
3) плоское или плоскопараллельное;
4) сферическое;
5) общий случай движения твердого тела.

Поступательное и вращательное движения являются простейшими движениями твердого тела.

1.2. Поступательное движение

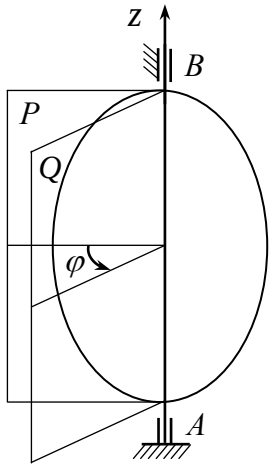
Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения тела параллельной своему начальному положению.

Теорема: *при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения*.

Поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки. Изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки.

1.3. Вращательное движение твердого тела вокруг оси

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными. Эта прямая называется осью вращения тела.



Угол φ отсчитываемый от неподвижной полуплоскости P к подвижной полуплоскости Q, называется углом поворота тела. Угол φ считается положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки.

Угол поворота в радианах соответствующий N оборотам

$$\boxed{\varphi = 2\pi N}.$$

При вращении тела угол поворота φ меняется в зависимости от времени, т.е. является функцией времени t:

$$\boxed{\varphi = f(t)}.$$

Это уравнение вращательного движения твердого тела.

Угловая скорость тела – величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота φ с течением времени

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}}.$$

Если $\omega > 0$, то угол поворота увеличивается, т.е. вращение тела происходит в положительном направлении отсчета угла поворота.

Если $\omega < 0$, то φ уменьшается, т.е. тело вращается в обратную сторону.

Угловое ускорение тела – числовая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени

$$\boxed{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}}$$

Если $\varepsilon > 0$ тело вращается ускоренно.

Если $\varepsilon < 0$ вращение происходит замедленно.

Равномерное вращение тела – вращение тела с постоянной угловой скоростью $\omega = d\varphi / dt = const$, принимая при $t = 0,\ \varphi = \varphi_0$, получаем уравнение равномерного вращения тела: $\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega t}$.

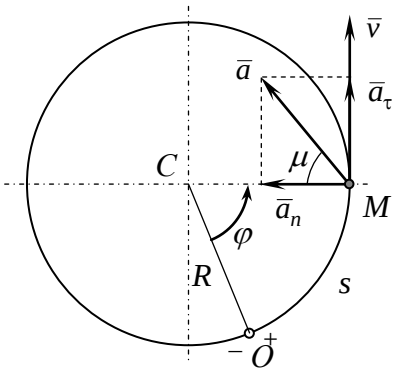
Частота вращения – число оборотов, совершаемых вращающимся телом за единицу времени, обозначается n (об/мин).

$$\boxed{\omega = n \cdot \frac{2\pi}{60} = \pi n / 30}.$$

Равнопеременное вращением тела – вращение с постоянным угловым ускорением. Интегрируя $\varepsilon = d\omega / dt = const$, где при $t = 0,\ \varphi = \varphi_0,\ \omega = \omega_0$, получаем уравнения равнопеременного вращения тела:

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \varepsilon t},\ \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2}$$

Изобразим траекторию произвольной точки M тела. Положение точки M определяется дуговой координатой $s = s(t) = R\varphi$. Тогда скорость точки M:



$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega},$$

Касательная и нормальная составляющие ускорения:

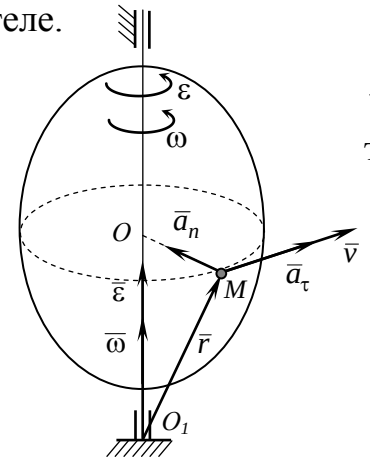
$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon},\ \boxed{a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2},$$

Полное ускорение точки M:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Направление ускорения точки: $tg\mu = a_\tau / a_n = R\varepsilon / R\omega^2 = \varepsilon / \omega^2$.

Угол μ, составленный ускорением точки вращающегося тела с отрезком, соединяющим точку с центром окружности, не зависит от положения точки в теле.



Вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ и углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ показывают: вокруг какой оси вращается твердое тело и в какую сторону оно вращается.

Векторные выражения для $\bar{v}$ и $\bar{a}$:

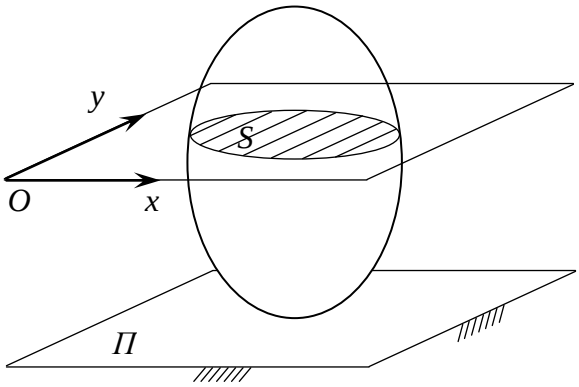
$\boxed{\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}}$, $\bar{v} \perp$ плоскости O_1OM

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}},\ \boxed{\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})}.$$

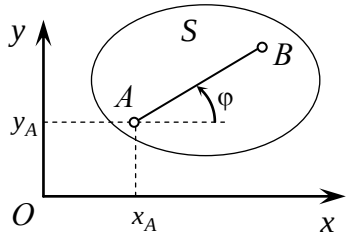
1.4. Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости *П*.



Рассмотрим сечение *S* тела какой-нибудь плоскостью *Oxy*, паральной плоскости *П*. Для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости *Oxy* сечение *S* этого тела. Положение сечения *S* в плоскости *Oxy* определяется положением какой-нибудь проведенной в этой фигуре отрезка *AB*. В свою очередь положение отрезка *AB* можно определить, зная координаты x_A, y_A и φ. Точку *A*, выбранную для опредеелния положения фигуры *S*, будем называть полюсом. Тогда уравнения движения плоской фигуры в ее плоскости:

$$\boxed{x_A = f_1(t),\ \ y_A = f_2(t),\ \ \varphi = f_3(t)}$$



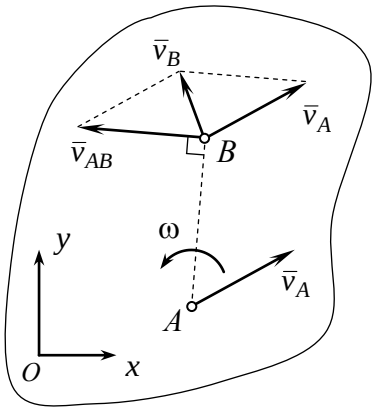
Они же являются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

При $\varphi = const$ движение поступательное.

При $x_A = const,\ y_A = const$ движение вращательное вокруг полюса *A*.

Движение плоской фигуры может рассматриваться как сумма поступательного движения и вращательного движения вокруг полюса.

Теорема (о скоростях точек плоской фигуры): *скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса*



$$\boxed{\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB}} \quad \text{или} \quad \boxed{\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}},$$

где $\bar{v}_A$ – скорость полюса (считается известной),

$\bar{v}_{AB}$ – вращательная скорость точки *B* вокруг полюса *A*,

ω – угловая скорость тела,

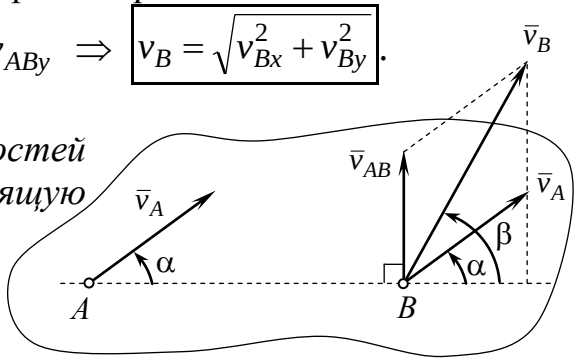
$\bar{r}_{AB}$ – радиус-вектор.

В аналитической форме скорость точки *B*:

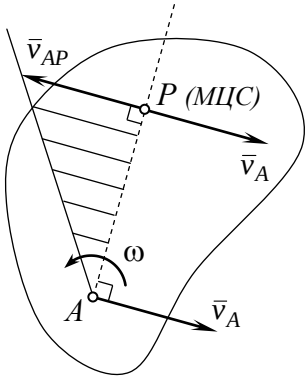
$$v_{Bx} = v_{Ax} + v_{ABx},\ \ v_{By} = v_{Ay} + v_{ABy} \ \Rightarrow\ \boxed{v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2}}.$$

Следствие теоремы: *проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу*

$$\boxed{v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta}.$$



Теорема (о существовании мгновенного центра скоростей): *В каждый момент времени существует точка, неизменно связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю. Эту точку называют мгновенным центром скоростей (МЦС)*.

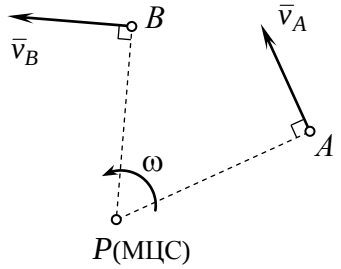


Пусть известны v_A и ω в некоторый момент времени. Точку *A* примем за полюс. Восстановим в точке *A* перпендикуляр к направлению скорости $\bar{v}_A$. Найдем на перпендикуляре такую точку *P*, вращательная скорость которой равна по модулю скорости полюса, т.е. $v_{AP} = v_A$. Тогда $\bar{v}_{AP} = -\bar{v}_A$ и $\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{AP} = 0$, следовательно, точка *P* в рассматриваемы момент времени является мгновенным центром скоростей.

$$v_{AP} = \omega \cdot AP = v_A \Rightarrow \boxed{AP = v_A / \omega}.$$

Способы нахождения МЦС:

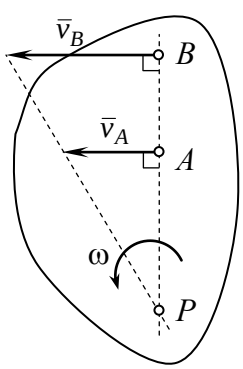
1. Известны скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, причем они не параллельны.

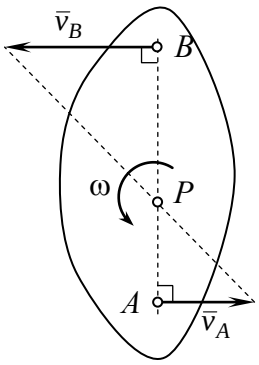


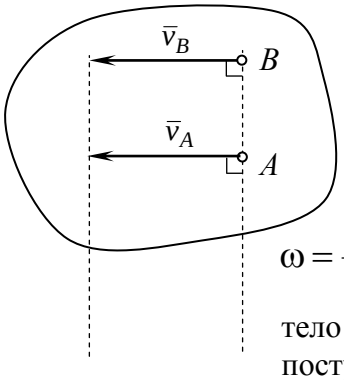
Мгновенный цент скоростей определяется как точка пересечения перпендикуляров к этим скоростям. Через МЦС проходит мгновенная ось вращения тела.

$$\boxed{\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}}$$

2. Известны скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, причем они параллельны.



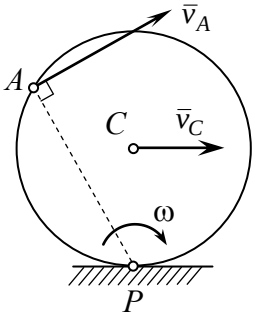




$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{\infty} = 0$$

тело движется поступательно

3. Движение плоской фигуры, при котором она катится без скольжения по некоторой неподвижной линии. В этом случае МЦС находится в точке соприкасания с линией.



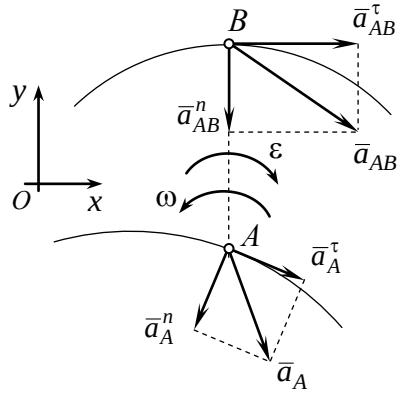
Если скорость точки *C* колеса известна, то можно найти скорость любой токи колеса используя МЦС.

Угловая скорость колеса: $\omega = \dfrac{v_C}{PC} = \dfrac{v_C}{R}$.

Тогда, например, в точке *A*: $v_A = \omega \cdot AP = \dfrac{v_C}{R} \cdot AP$

Теорема (об ускорениях точек плоской фигуры): *ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса*.

Пусть известны ускорение полюса $\bar{a}_A$ и величины угловой скорости ω и углового ускорения ε в данный момент времени. Тогда ускорение любой точки *B* плоской фигуры определяется как:



$\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}}$ или $\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}^{\tau}_A + \bar{a}^{n}_A + \bar{a}^{\tau}_{AB} + \bar{a}^{n}_{AB}}$,

где a^{τ}_A, a^{n}_A – касательное и нормальное ускорение полюса *A*;

$a^{\tau}_{AB} = \varepsilon \cdot AB$, $a^{n}_{AB} = \omega^2 \cdot AB$ – касательное и нормальное ускорение точки *B* во вращении вокруг полюса *A*.

В аналитической форме в проекциях на оси:

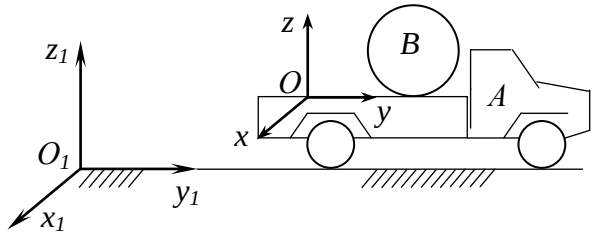
$$a_{Bx} = a^{\tau}_{Ax} + a^{n}_{Ax} + a^{\tau}_{ABx} + a^{n}_{ABx},$$

$$a_{By} = a^{\tau}_{Ay} + a^{n}_{Ay} + a^{\tau}_{ABy} + a^{n}_{ABy}, \Rightarrow \boxed{a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}}}.$$

1.5. Сложное движение точки

В ряде случаев при решении задач механики оказывается целесообразным разложить сложное движение точки или тела на более простые путем введения дополнительной (подвижной) системы отсчета.

Сложное движение точки (тела) – это такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или нескольких движениях.



Движение, совершаемое телом *B* относительно грузовика *A*, т.е. по отношению к подвижной системе отсчета (к осям *Oxyz*) называется относительным движением. Скорость и ускорение тела *B* относительно грузовика *A* обозначаются $\bar{v}_{от}$, $\bar{v}_r$ (relative – относительный) и $\bar{a}_{от}$, $\bar{a}_r$.

Движение грузовика *A* (*Oxyz*) по отношению к Земле (неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$) является для тела *B* переносным движением. Скорость тела *B* называется переносной скоростью $\bar{v}_{пер}$, $\bar{v}_e$ (emporter – увлекать), ускорение этой точки переносным ускорением $\bar{a}_{пер}$, $\bar{a}_e$.

Движение, совершаемое телом *B* по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ называется абсолютным или сложным. Скорость – абсолютной скоростью $\bar{v}_{абс}$ или $\bar{v}$, ускорение – абсолютным ускорением $\bar{a}_{абс}$ или $\bar{a}$.

Теорема: *При сложном движении точки абсолютная скорость равна сумме ее относительной и переносной скоростей.*

$$\boxed{\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e}.$$

Теорема Кориолиса: *При непоступательном переносном движении абсолютное ускорение точки находится как сумма трех ускорений: относительного, переносного и ускорения Кориолиса.*

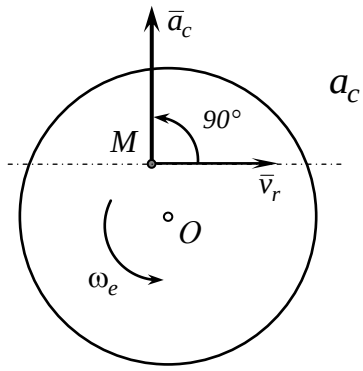
$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c},$$

где $\bar{a}_c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r)$ – ускорение Кориолиса и ее модуль: $\boxed{a_c = 2\omega_e v_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r)}$.

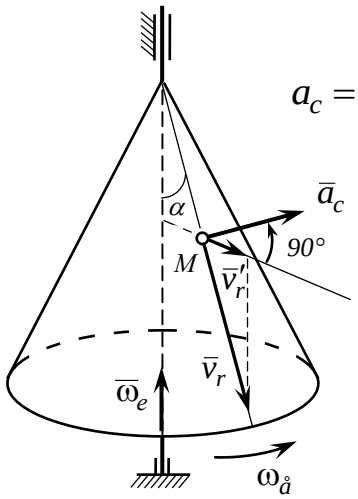
Кориолисово ускорение характеризует:

1) изменение модуля и направления переносной скорости $\bar{v}_e$ точки вследствие вращательного движения ω_e;
2) изменение направления относительной скорости $\bar{v}_r$ точки вследствие вращательного переносного движения ω_e.

Правило Жуковского: *чтобы найти направление кориолисова ускоребния, следует спроецировать относительную скорость точки на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию в той же плоскости на 90° в сторону переносного вращения.*



$a_c = 2\omega_e v_r$



$a_c = 2\omega_e v_r \sin\alpha$

Ускорение Кориолиса $a_c = 0$ в трех случаях:

1. если $\omega_e = 0$, т.е. в случае поступательного переносного движения,
2. если $v_r = 0$, т.е. в случае относительного покоя точки,
3. если $\sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 0$, т.е. когда $\bar{\omega}_e \parallel \bar{v}_r$.

Глава 2. Задачи для самостоятельного решения

2.1. Кинематика точки

Траектория и уравнения движения точки

Пример 1. По заданным уравнениям движения точки *M*:

$$x = 2t\,(\text{см}),\quad y = 4t^2 - 2\,(\text{см}) \qquad (1)$$

установить вид ее траектории и для момента времени t = 1 (с) найти положение токи на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Решение. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1). Получаем $y = x^2 - 2$, траекторией точки является парабола (рис. 1).

Подставляя в уравнения (1) t = 1 с, получим координаты точки x, y в данный момент времени: $x = 2$ см, $y = 2$ см.

Вектор скорости и ускорения точки:

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.

Из уравнений (1) найдем проекции скорости и ускорения точки на оси координат:

$v_x = \dot{x} = 2$ см/с, $\quad v_y = \dot{y} = 8t$ см/с,

$a_x = \ddot{x} = 0$, $\quad a_y = \ddot{y} = 8$ см/с^2.

Модуль скорости и ускорения точки:

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$,

$v\big|_{t=1c} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 8{,}25$ см/с,

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, $\ a\big|_{t=1c} = 8$ см/с^2.

Касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v},$$

$$a_\tau\big|_{t=1c} = \frac{64}{\sqrt{68}} = 7{,}76 \text{ см/с}^2.$$

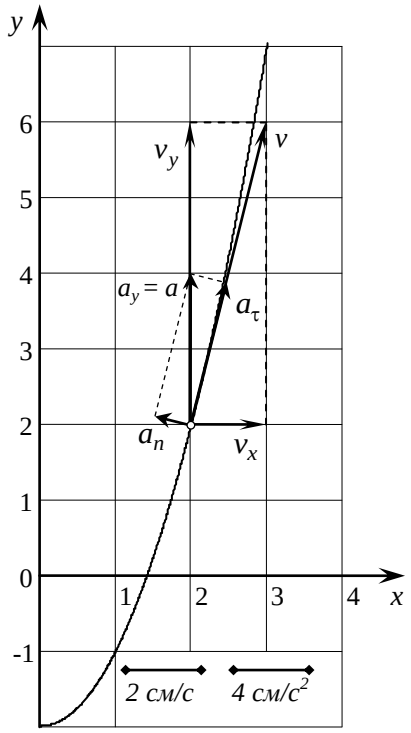


Рис. 1

Положительное значение касательного ускорения означает, что движение точки ускоренное, направления $\vec{a}_\tau$ и $\vec{v}$ совпадают.

Нормальное ускорение точки можно вычислить из формулы $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Тогда $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$, $\ a_n\big|_{t=1c} = \sqrt{8^2 - 64^2/68} = 1{,}06$ см/с^2.

Радиус кривизны траектории находится из формулы: $a_n = v^2/\rho$

$\rho = \dfrac{v^2}{a_n} = \dfrac{68}{1.06} = 64{,}15$ см в момент времени t = 1 с.

Для самостоятельного решения необходимые данные приведены в таблице.

Номер задачи	Уравнения движения		t, с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$2t^2 + 3$	$-5t$	1
2	$3t^2 + 2$	$2t$	1
3	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 2$	1
4	$-4t^2 + 1$	$8 - 3t$	1
5	$2t + 2$	$2/(t+1)$	2
6	$3t$	$4t^2 + 1$	1
7	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
8	$7t^2 - 3$	$5t$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t + 6$	1
10	$4t + 4$	$-4/(t+1)$	1
11	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
12	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
13	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6) - 3$	1
14	$7\sin^2(\pi t/6) - 5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
15	$1 + 3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3) + 3$	1
16	$6\sin(\pi t^2/6) - 2$	$6\cos(\pi t^2/6) + 3$	1
17	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3) - 3$	1
18	$7\sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7\cos(\pi t^2/6)$	1
19	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3) + 4$	1
20	$3 - \cos(\pi t^2/3)$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
21	$4\cos^2(\pi t/3) + 2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
22	$-4\cos(\pi t/3) - 1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1
23	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
24	$8\cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8\sin^2(\pi t/6) - 7$	1
25	$9\sin(\pi t^2/6) + 3$	$-5 + 9\cos(\pi t^2/6) + 3$	1
26	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
27	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
28	$2\cos(\pi t^2/3) - 2$	$-2\sin(\pi t^2/3) + 3$	1
29	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0
30	$2\cos^2(\pi t/4)$	$3\sin^2(\pi t/4)$	1

2.2. Вращательное движение твердого тела

Пример 2. Вращение маховика в период пуска определяется уравнением $\varphi = 1/3t^3$, где t – в с, φ – в рад. Определить модуль и направление ускорения точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии 50 см, в тот момент, когда ее скорость равна 8 м/с (рис. 2).

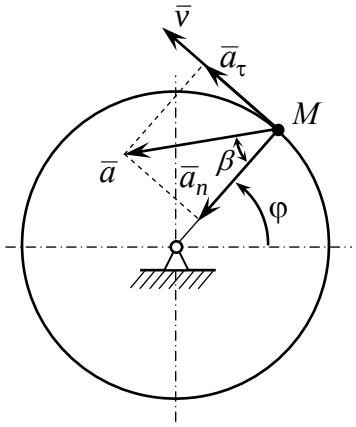


Рис. 2

Решение. По уравнению вращения маховика находим его угловые скорость и ускорение

$$\omega = \dot{\varphi} = t^2, \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} = 2t.$$

Находим момент времени t, когда скорость точки M равна 8 м/с:

$$v = \omega R; \quad \omega = v/R = 8/0.5 = 16\,\text{с}^{-1} \to t^2 = 16,\ t = 4\,\text{с}.$$

Вычислим модули нормального, касательного и полного ускорении точки M в этот момент времени: $\varepsilon = 2 \cdot 4 = 8$ рад/с^2; $a_\tau = \varepsilon R = 8 \cdot 0.5 = 4$ м/с^2;

$$a_n = \omega^2 R = 16^2 \cdot 0.5 = 128\,\text{м/с}^2;\ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 128.06\ \text{м/с}^2.$$

Направление ускорения точки определяется углом β: $a_\tau = a_n tg\beta$.

$$tg\beta = \varepsilon/\omega^2 = 8/16^2 = 1/32;\ \ \beta = arctg(1/32) = 1.8°.$$

Пример 3. Определить скорость, ускорение точки B и груза G при t = 1 с, если скорость в точке A ведущего колеса 1: $v_A = 3t^2 - t$ см/с. Радиусы колес: R_1 = 5 см, r_1 = 4 см, R_2 = 10 см, r_2 = 6 см (рис. 3).

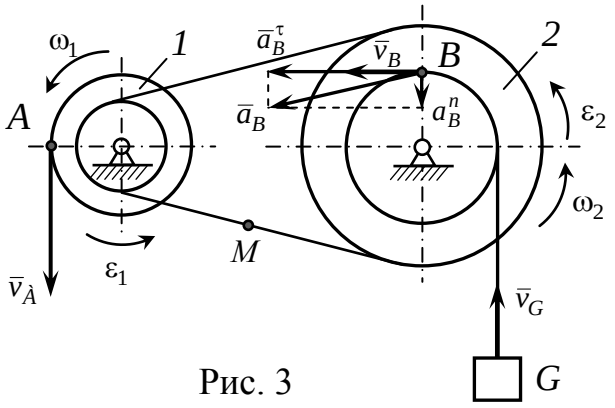


Рис. 3

Решение.

Угловая скорость и угловое ускорение колеса 1:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{R_1} = \frac{3t^2 - t}{R_1},\ \varepsilon_1 = \frac{a_A^\tau}{R_1} = \frac{\dot{v}_A}{R_1} = \frac{6t - 1}{R_1}.$$

Скорость любой точки ремня

$$v_M = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot R_2.$$

Тогда угловая скорость и угловое ускорение колеса 2:

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot r_1 / R_2,\ \ \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot r_1 / R_2.$$

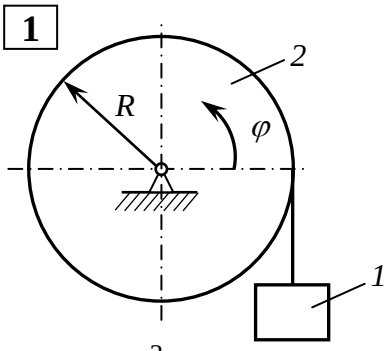
Найдем скорость, ускорение точки B и груза G:

$$v_B = v_G = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{\omega_1 \cdot r_1}{R_2} \cdot r_2 = \left.\frac{(3t^2 - t) \cdot r_1 \cdot r_2}{R_1 \cdot R_2}\right|_{t=1c} = \frac{(3-1) \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 10} = 0{,}96\ \text{см/с}.$$

$$a_B^\tau = a_G = \varepsilon_2 \cdot r_2 = \frac{\varepsilon_1 \cdot r_1}{R_2} \cdot r_2 = \left.\frac{(6t - 1) \cdot r_1 \cdot r_2}{R_1 \cdot R_2}\right|_{t=1c} = \frac{(6-1) \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 10} = 2{,}4\,\text{см/с}^2.$$

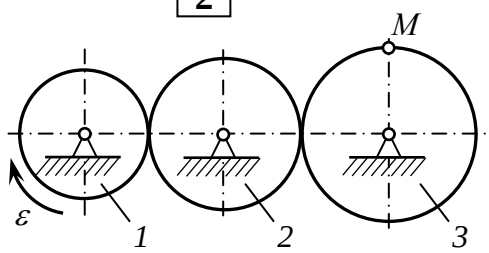
$$a_B^n = \frac{v_B^2}{r_2} = \frac{0{,}96^2}{6} = 0{,}1536\,\text{см/с}^2.\ \ a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = 2{,}4049\ \text{см/с}^2.$$

1



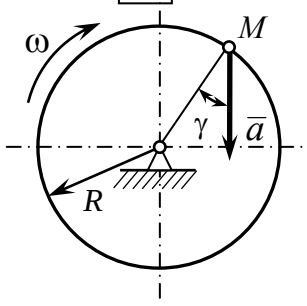
$\varphi = 5 + 2t^3$, $R = 0.3$ м.
$v_1\big|_{t=2c} = ?$

2



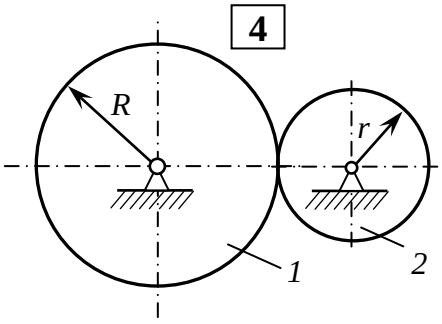
$\varepsilon_1 = 4\,\text{с}^{-2}$, $R_1 = 0.4$м, $R_2 = 0.5$м,
$R_3 = 0.6$ м, $r = 0{,}5$ м, $v_0 = 0$.
$v_M\big|_{t=2c} = ?$

3



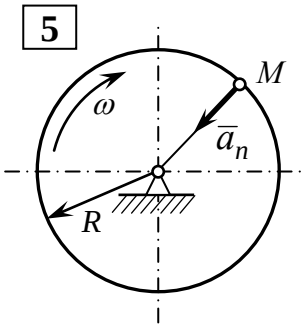
$a = 8\,\text{м/с}^2$, $\gamma = 30°$,
$R = 0.4$ м. $\omega = ?$

4



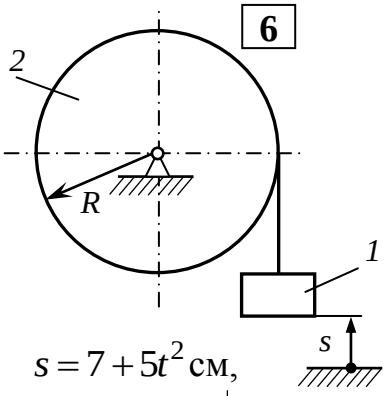
$\varphi_1 = 20t$. $R = 0{,}8$ м,
$r = 0{,}5$ м. $N_1\big|_{t=\pi c} = ?$

5



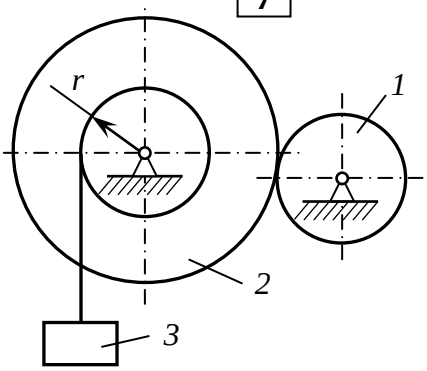
$a_n = 6{,}4\,\text{м/с}^2$, $R = 0.4$ м.
$\omega = ?$

6



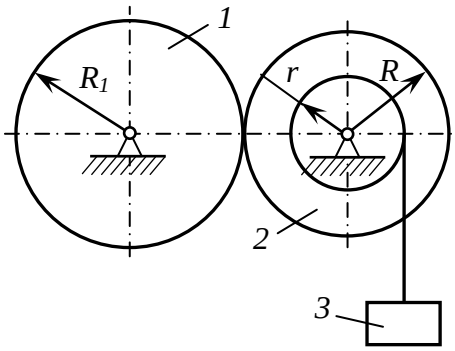
$s = 7 + 5t^2$ см,
$R = 25$ см. $\omega\big|_{t=3c} = ?$

7



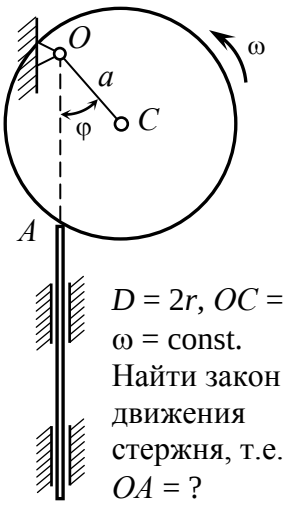
$v_3 = 90$ см/с, $r = 10$ см, число зубьев шестерен: $z_1 = 26$, $z_2 = 78$. Частота вращения (об/мин) $n_1 = ?$

8



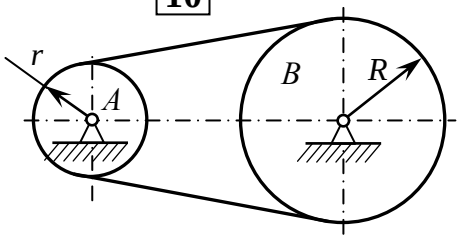
$\omega_1 = 2t^2$, $R_1 = 1$ м, $R_2 = 0.8$ м,
$r = 0.4$ м. $a_3\big|_{t=2c} = ?$

9



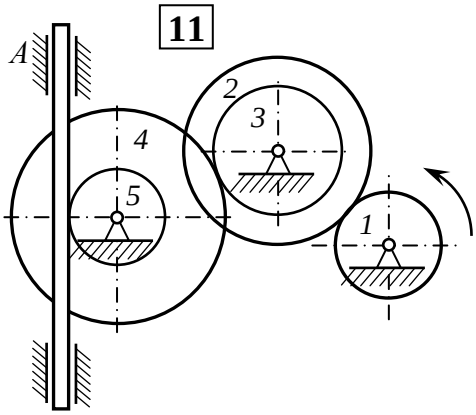
$D = 2r$, $OC = a$.
$\omega = \text{const}$.
Найти закон движения стержня, т.е. $OA = ?$

10



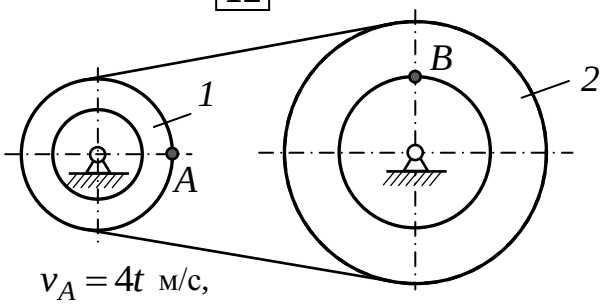
$R = 75$ см, $r = 30$ см, $v_0 = 0$,
$\varepsilon_B = 0{,}4\pi\,\text{с}^{-2}$. $t\big|_{\omega_A = 10\pi c^{-1}} = ?$

11



$n_1 = 30$ об/мин,
число зубцов шестерен:
$z_1 = 60$, $z_2 = 180$,
$z_3 = 160$, $z_4 = 240$;
$r_5 = 0.25$ м.
$v_A = ?$

12

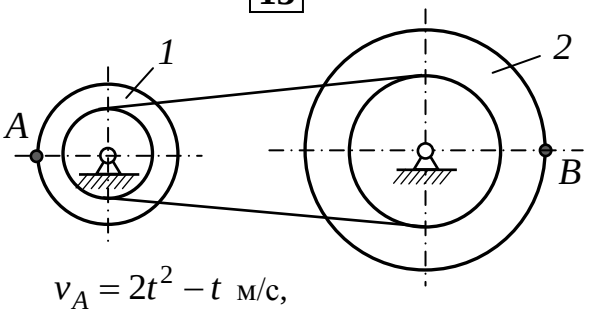


$v_A = 4t$ м/с,

$R_1 = 2r_1 = 2$ *м*, $R_2 = 2r_2 = 4$ *м*.

$v_B\big|_{t=1c} - ?$, $a_B\big|_{t=1c} - ?$

13

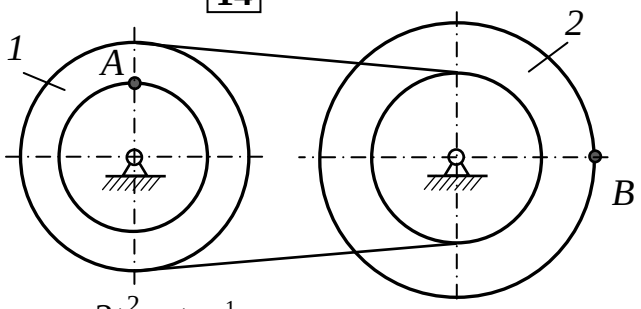


$v_A = 2t^2 - t$ м/с,

$R_1 = 2r_1 = 2$ *м*, $R_2 = 2r_2 = 4$ *м*.

$v_B\big|_{t=1c} - ?$, $a_B\big|_{t=1c} - ?$

14

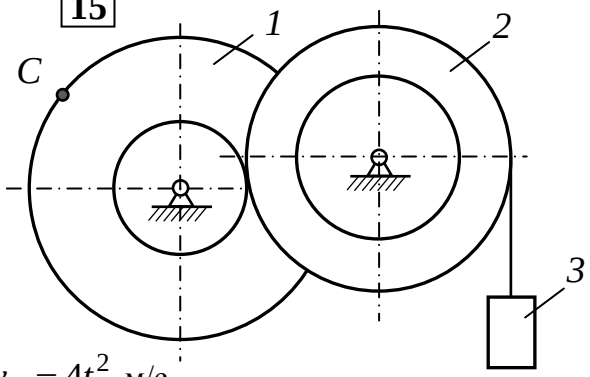


$\varphi_1 = 2t^2 - t$ с$^{-1}$,

$R_1 = 3$ *м*, $r_1 = 2$ м, $R_2 = 4$ *м*, $r_2 = 3$*м*.

$v_B\big|_{t=1c} - ?$, $a_B\big|_{t=1c} - ?$

15

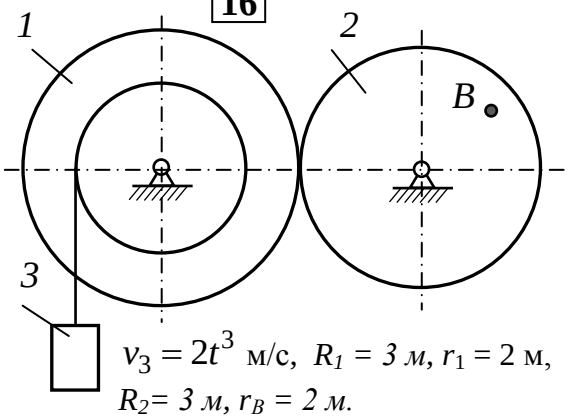


$v_C = 4t^2$ м/с,

$R_1 = 3$ *м*, $r_1 = 1$ м, $R_2 = 3$ *м*, $r_2 = 2$ *м*.

$v_3\big|_{t=1c} - ?$, $a_3\big|_{t=1c} - ?$

16

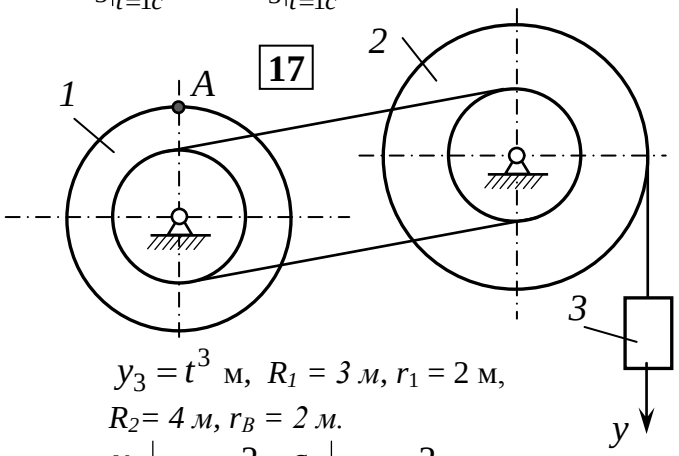


$v_3 = 2t^3$ м/с, $R_1 = 3$ *м*, $r_1 = 2$ м,

$R_2 = 3$ *м*, $r_B = 2$ *м*.

$v_B\big|_{t=1c} - ?$, $a_B\big|_{t=1c} - ?$

17

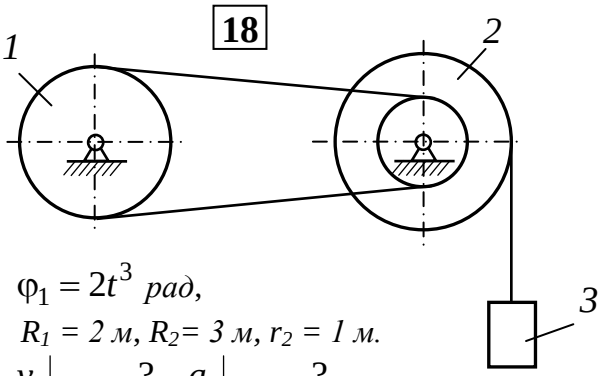


$y_3 = t^3$ м, $R_1 = 3$ *м*, $r_1 = 2$ м,

$R_2 = 4$ *м*, $r_B = 2$ *м*.

$v_A\big|_{t=1c} - ?$, $a_A\big|_{t=1c} - ?$

18

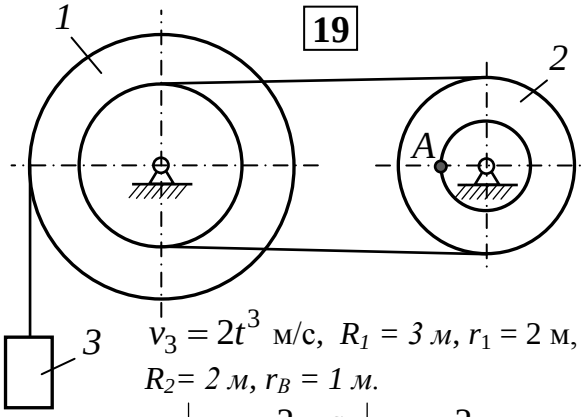


$\varphi_1 = 2t^3$ *рад*,

$R_1 = 2$ *м*, $R_2 = 3$ *м*, $r_2 = 1$ *м*.

$v_3\big|_{t=1c} - ?$, $a_3\big|_{t=1c} - ?$

19



$v_3 = 2t^3$ м/с, $R_1 = 3$ *м*, $r_1 = 2$ м,

$R_2 = 2$ *м*, $r_B = 1$ *м*.

$v_A\big|_{t=1c} - ?$, $a_A\big|_{t=1c} - ?$

2.3. Плоскопараллельное движение

Пример 4. Колесо радиусом R = 1м катится без скольжения по прямому рельсу. Скорость и ускорение центра колеса в рассматриваемый момент времени равны соответственно $v_C = 2$ м/с, $a_C = 4$ м/с^2. Определить скорость и ускорение точек A, B, D и E колеса, расположенных на концах взаимно перпендикулярных диаметров (рис. 4, *а*).

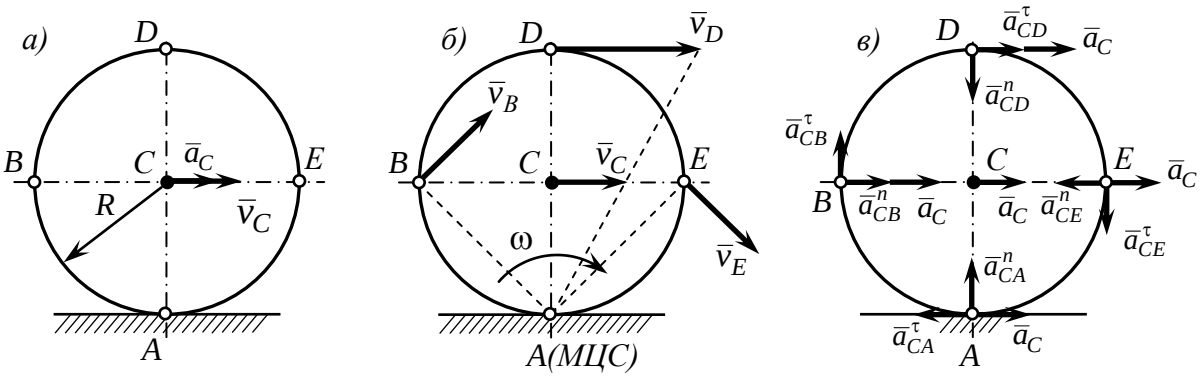


Рис. 4

Решение.

Точка A (рис. 4, *б*) является мгновенным центром скоростей (МЦС), т.к. колесо катится без скольжения, поэтому скорость точки касания A колеса с рельсом равна нулю: $v_A = 0$. Примем эту точку за полюс, тогда скорости всех точек колеса определяются как вращательные скорости вокруг МЦС.

$$\omega = \frac{v_C}{AC} = \frac{v_D}{AD} \text{ или } \omega = \frac{v_C}{R} = \frac{v_D}{2R} \rightarrow v_D = 2v_C = 4\text{м/с}. \quad \omega = 2\,\text{с}^{-1}.$$

$$v_B = \omega \cdot AB = \frac{v_C}{R} \cdot R\sqrt{2} = v_C\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ \text{м/с}, \quad v_B = v_A = 2\sqrt{2}\ \text{м/с}.$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры ускорение любой точки плоской фигуры, например точки B (рис. 4, *в*), определяется как

$$\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{CB} = \bar{a}_C + \bar{a}^{\tau}_{CB} + \bar{a}^{n}_{CB}}.$$

По условию $a_C = 4$ м/с^2 – ускорение полюса С.

Найдем угловое ускорение колеса: $\varepsilon = a_C / AC = a_C / R = 4$ с$^{-2}$.

Касательное и нормальное ускорение т. B во вращении вокруг полюса C:

$$a^{\tau}_{CB} = \varepsilon \cdot CB = \frac{a_C}{R} \cdot R = a_C = 4\,\text{м/с}^2; \quad a^{\tau}_{CB} = a^{\tau}_{CD} = a^{\tau}_{CE} = a^{\tau}_{CA}.$$

$$a^{n}_{CB} = \omega^2 \cdot CB = \left(\frac{v_C}{R}\right)^2 \cdot R = \frac{v_C^2}{R} = 4\,\text{м/с}^2. \quad a^{n}_{CB} = a^{n}_{CD} = a^{n}_{CE} = a^{n}_{CA}.$$

Ускорение каждой точки определяется диагональю прямоугольника, сторонами которого являются сумма двух векторов $\bar{a}_C + \bar{a}^{n}_{CB}$, оказавшихся на одной прямой, и третьи вектор $\bar{a}^{\tau}_{CB}$, перпендикулярный им:

$$a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} = \sqrt{(a_C + a^{n}_{CB})^2 + (a^{\tau}_{CB})^2} = \sqrt{80}\ \text{м/с}^2.$$

Ускорения остальных точек находим аналогично.

Пример 5. Кривошип OA = 3 см, вращающийся вокруг оси O, приводит в движение шатун AB = 4 см. В положении, изображенном на рис 5*а*, кривошип имеет угловую скорость $\omega_{OA} = 2\,\text{с}^{-1}$ и угловое ускорение $\varepsilon_{OA} = 5\,\text{с}^{-2}$. Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна AB, а также скорость и ускорение ползуна B.

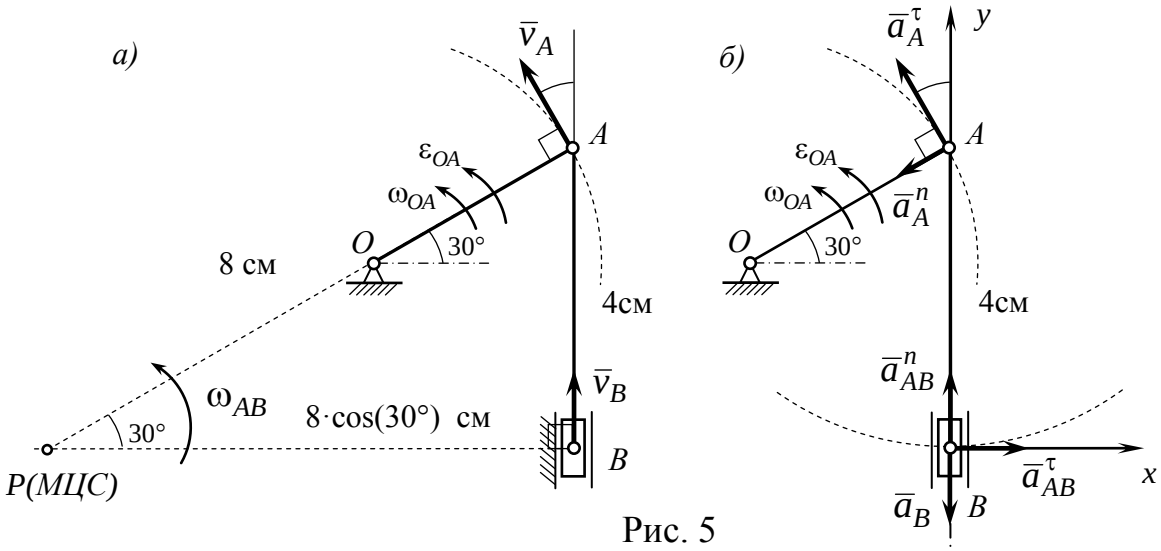


Рис. 5

1) Находим ω_{AB} и v_B.

Скорость точки A: $v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 6\,\text{см/с}$ ($\bar{v}_A$ направлен в сторону ω_{AB}).

Стержень AB совершает плоское движение. Находим положение мгновенного центра скоростей P (МЦС) проведя перпендикуляры к скоростям в точках A и B. Тогда угловая скорость стержня AB:

$$\boxed{\omega_{AB} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A}{AP}}. \qquad (1)$$

Таким образом, $\omega_{AB} = v_A / AP = 6/8 = 3/4\ \text{с}^{-1}$.

Скорость точки B из соотношения (1): $v_B = \dfrac{v_A}{AP} \cdot BP = \dfrac{6}{8} \cdot \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,\text{см/с}$.

Скорость v_B можно определить иначе, спроецировав векторы скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ на ось AB: $v_B = v_A \cdot \cos 30 = 3\sqrt{3}$ см/с.

2) Находим a_B (рис. 5, *б*).

Ускорение точки B определяется как $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}$ или расписывая

$$\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AB}^\tau + \bar{a}_{AB}^n}. \qquad (2)$$

Касательное и нормальное ускорение точки A (полюса) находим из начальных данных: $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 5 \cdot 3 = 15\,\text{см/с}^2$, $a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 3 = 12\,\text{см/с}^2$. Нормальное ускорение точки B во вращений вокруг полюса A:

$$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 4 = \frac{9}{4}\ \text{см/с}^2.$$

Касательное ускорение a_{AB}^τ точки B во вращений вокруг полюса A определим из соотношения (2) предварительно спроецировав его на ось x:

$$0 = -a_A^\tau \sin 30° - a_A^n \cos 30° + a_{AB}^\tau,$$

$$a_{AB}^\tau = a_A^\tau \cdot \sin 30° + a_A^n \cdot \cos 30° = 15 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17{,}89 \text{ см/с}^2.$$

Угловое ускорение ε_{AB} стержня AB найдем из соотношения $a_{AB}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^\tau}{AB} = \frac{17{,}89}{4} = 4{,}47 \text{ с}^{-2}.$$

Ускорение ползунка B найдем спроецировав соотношения (2) на ось y:

$$-a_B = a_A^\tau \cdot \cos 30° - a_A^n \cdot \sin 30 + a_{AB}^n,$$

$$a_B = -15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 12 \cdot \frac{1}{2} - \frac{9}{4} = -9{,}24 \text{ см/с}^2.$$

Пример 6. Кривошип OA кривошипного механизма вращается вокруг оси O с угловой скоростью $\omega_{OA} = 10$ рад/с. Принимая $OA = 1$ м и $AB = 2$ м, определить угловую скорость шатуна AB и скорость ползунка B механизма в трех случаях, когда $\varphi = 0, 30, 90°$ (рис. 6, *а*).

<u>Решение.</u> Скорость пальца A: $v_A = OA \cdot \omega_{OA} = 10$ м/с.

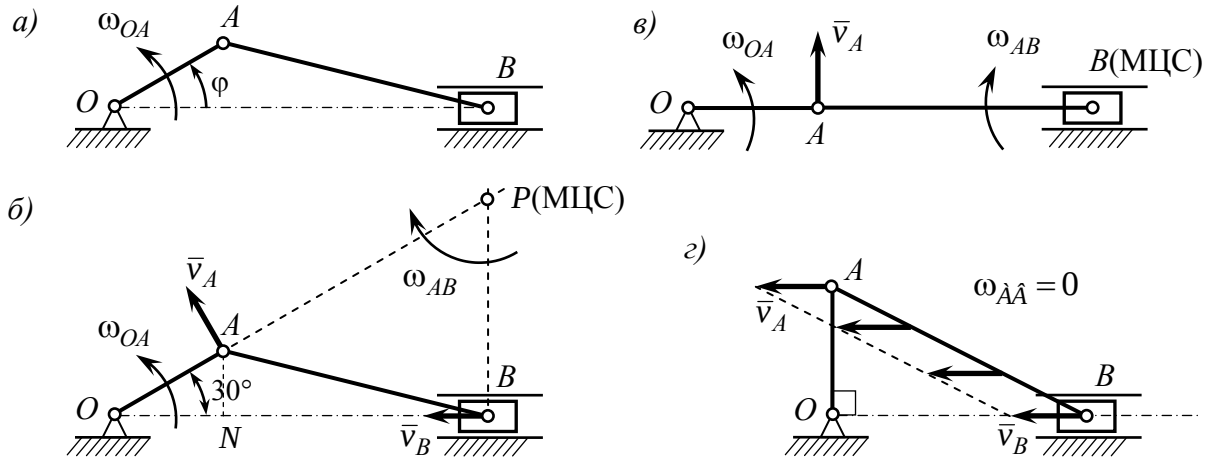


Рис. 6

Проводим перпендикуляры к скоростям в точках A и B. Точка пересечения этих перпендикуляров определяет положение МЦС P шатуна AB.

$ON = OA\cos 30 = \sqrt{3}/2$, $BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{4 - 0.25}$, $OB = ON + NB = 2.8$ м.

$OP = OB/\cos 30 = 2 \cdot 2.8/\sqrt{3} = 3.2$ м, $\rightarrow$ $AP = OP - OA = 2.2$ м. $PB = OB \cdot tg30 = 1.6$ м.

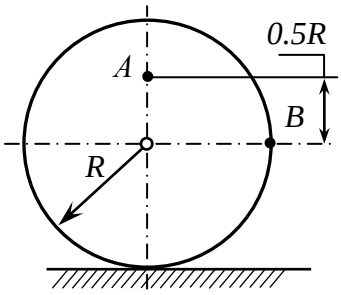
Угловая скорость шатуна AB: $\omega_{AB} = v_A / AP = 4.5$ рад/с. Тогда скорость ползуна B: $v_B = \omega_{AB} \cdot PB = 4.5 \cdot 1.6 = 7.2$ м/с.

При $\varphi = 0$ МЦС шатуна совпадает с точкой B ($v_B = 0$) и скорости всех точек шатуна являются вращательными вокруг точки B (рис. 6, *в*). Угловая скорость шатуна $\omega_{AB} = v_A / AB = 5$ рад/с.

При $\varphi = 90°$ скорость пальца кривошипа A и ползунка B параллельны, поэтому МЦС шатуна AB находится в бесконечности (рис. 6, *г*). В этот момент все точки шатуна AB имеют одинаковые скорости, равные $\bar{v}_A$, а $\omega_{AB} = 0$.

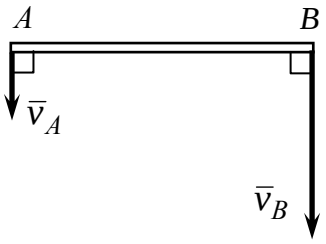
Угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры

1



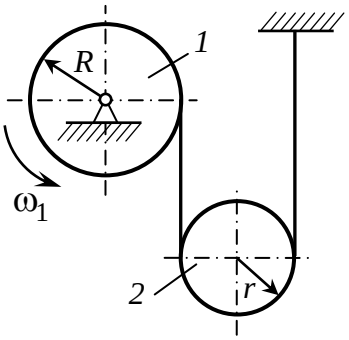
$v_A = 10$ м/с, $R = 0{,}2$ м.
$\omega = ?$, $v_B = ?$

2



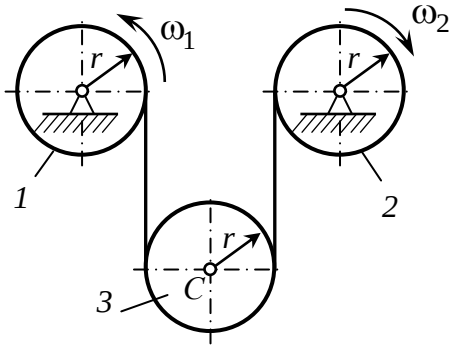
$v_A = 2$ м/с, $v_A = 6$ м/с,
$AB = 1$м. $\omega_{AB} = ?$

3



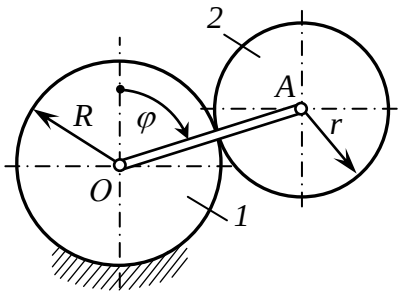
$\varphi_1 = 3t^2$, $R = 1$м,
$r = 0{,}6$ м. $\omega_2 = ?$, $\varepsilon_2 = ?$

4



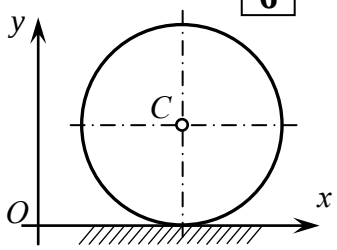
$\omega_1 = 4$ рад/с, $\omega_2 = 8$ рад/с,
$r = 10$ см. $\omega_3 = ?$, $v_C = ?$

5



$\varphi_{OA} = 0{,}5t^2$, $r = 0{,}75R$.
$\omega_2 = ?$, $\varepsilon_2 = ?$

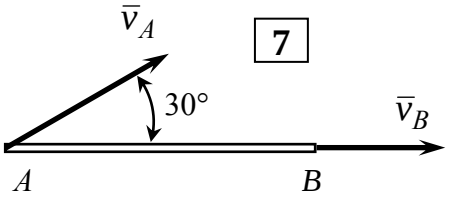
6



$x_C = 2t^2$, $y_C = 0.5$м.
$\omega = ?$, $\varepsilon = ?$

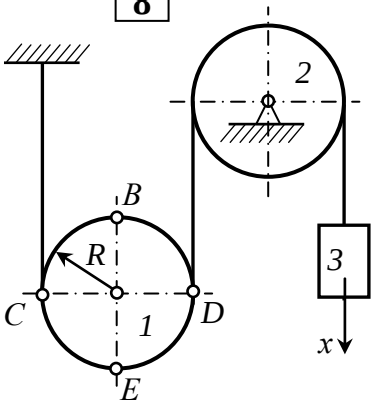
Скорость точек плоской фигуры

7



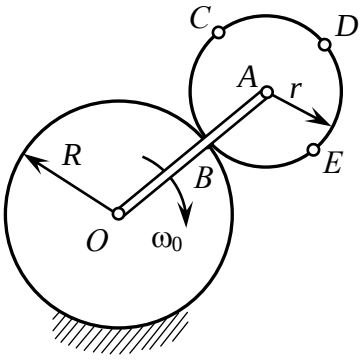
$v_A = 40$ м/с. $v_B = ?$

8



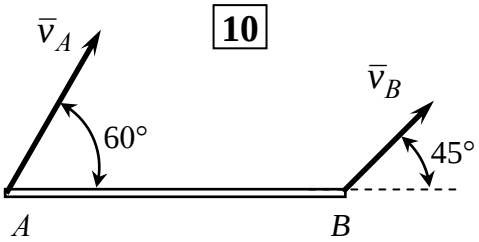
$x = 3t^2$ м, $R = 0{,}2$ м.
$v_D, v_B, v_E, v_C\big|_{t=1c} = ?$

9



$\omega_{OA} = 2$ рад/с, $R = 20$ см,
$r = 10$ см, $CE \perp BD$.
$v_A, v_B, v_C, v_D = ?$

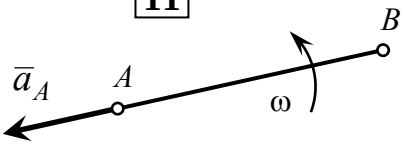
10



$AB = 1$ м, $v_B = 2$ м/с.
$v_A = ?$, $\omega_{AB} = ?$

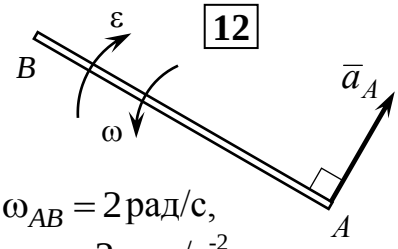
Ускорения точек плоской фигуры

11



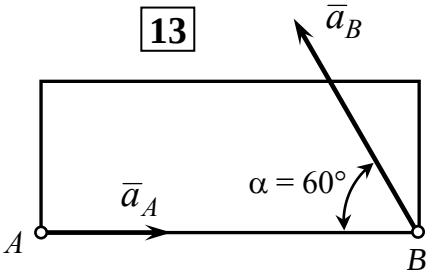
$\omega_{AB} = 1$ рад/с, $\varepsilon_{AB} = 0$,
AB=2м, $a_A = 1$ м/с^2.
$a_B = ?$

12



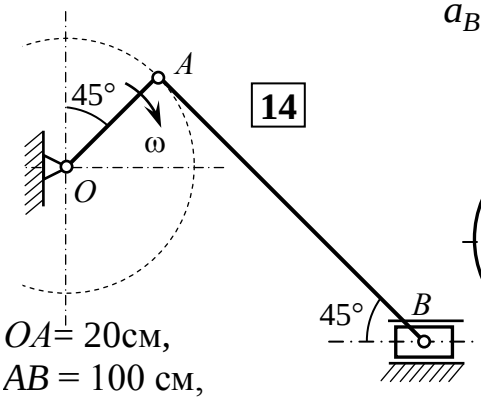
$\omega_{AB} = 2$ рад/с,
$\varepsilon_{AB} = 2$ рад/с$^{-2}$,
$a_A = 1$ м/с^2, AB=1м,
$a_B = ?$ (5)

13



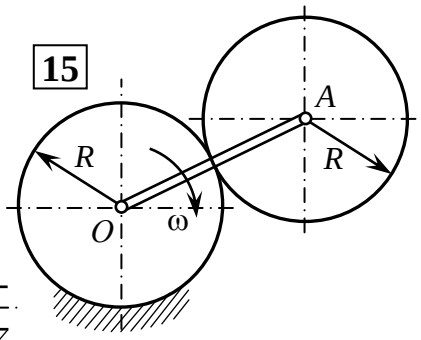
$a_A = 1$ м/с^2, $a_A = 6$ м/с^2,
AB=1м. $\omega = ?$ (2)

14



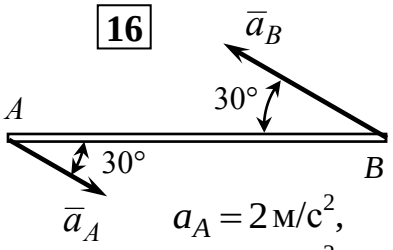
OA= 20см,
AB = 100 см,
$\omega_{OA} = 10$ рад/с = const,
$a_B = ?$, $\omega_{AB} = ?$, $\varepsilon_{AB} = ?$
(565,6; 2; 16)

15



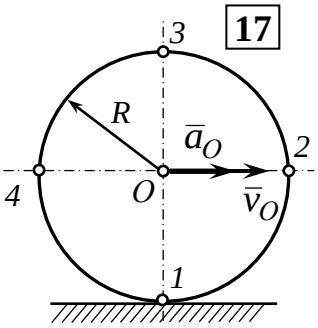
$\omega_{OA} = 1$ с$^{-1}$ =const, R = 0,1м,
P – МЦС подвижного колеса.
$a_P = ?$ (0,2)

16



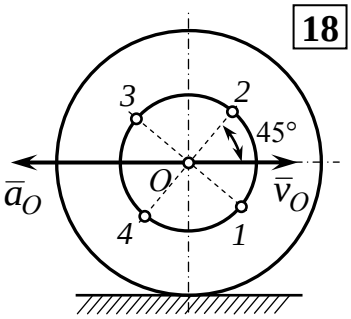
$a_A = 2$ м/с^2,
$a_A = 6$ м/с^2,
AB=40 см.
$\varepsilon_{AB} = ?$ (10)

17



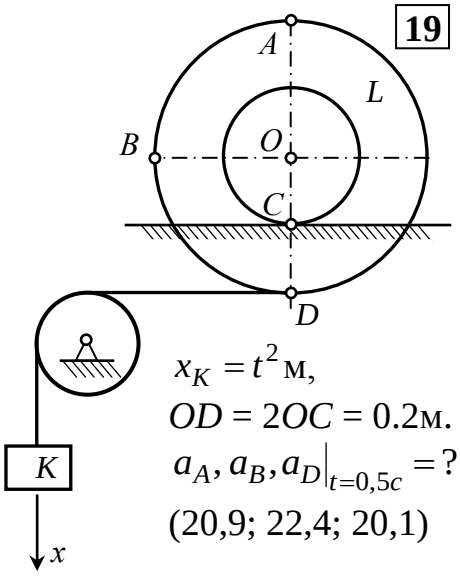
$v_O = 1$ м/с, R=0,5м,
$a_O = 3$ м/с^2.
$a_1, a_2, a_3, a_4 = ?$

18



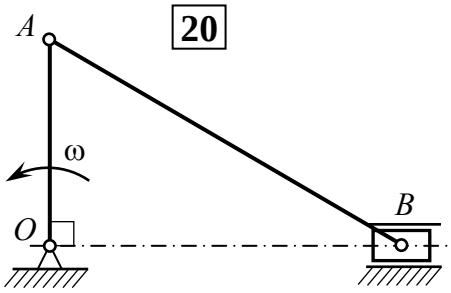
$v_O = 1$ м/с, $a_O = 2$ м/с^2,
R = 0,5м, r = 0,25м.
$a_1, a_2, a_3, a_4 = ?$

19



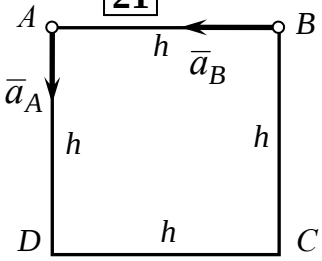
$x_K = t^2$ м,
OD = 2OC = 0.2м.
$a_A, a_B, a_D\big|_{t=0,5c} = ?$
(20,9; 22,4; 20,1)

20



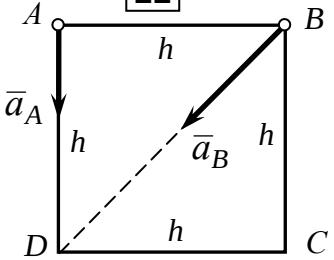
$\omega_{OA} = 1$ рад/с=const, A=0,3м,
AB=0,5м. $a_B = ?$ (0,225)

21

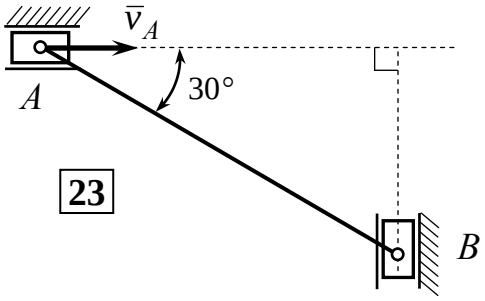


$a_A = a_B = 10$ м/с^2.
$a_C, a_D = ?$ (10)

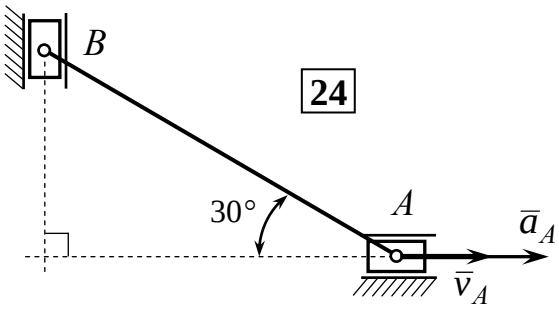
22



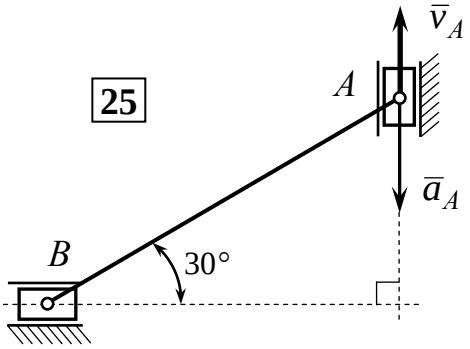
$a_A = a_B = 10$ м/с^2.
$\omega, \varepsilon = ?$, $a_C = ?$ ($\sqrt{2}$; 1; 6)



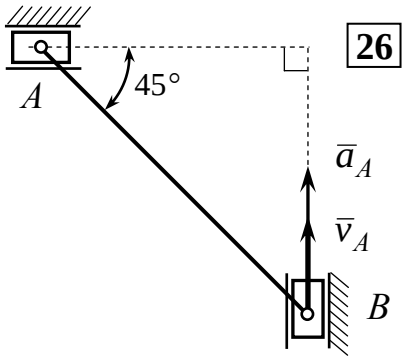
$v_A = 1$ м/с, $a_A = 0$, AB=2м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



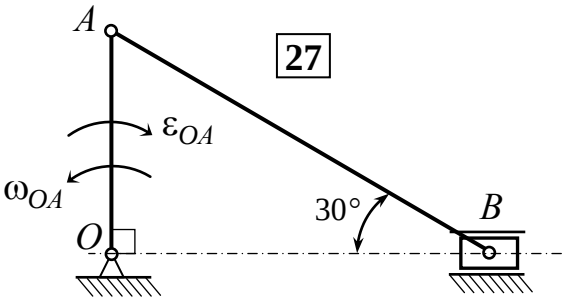
$v_A = 1$ м/с, $a_A = 2$ м/с^2, AB=2м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



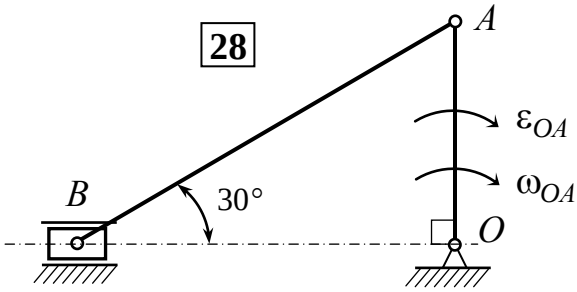
$v_A = 1$ м/с, $a_A = 1$ м/с^2, AB=2м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



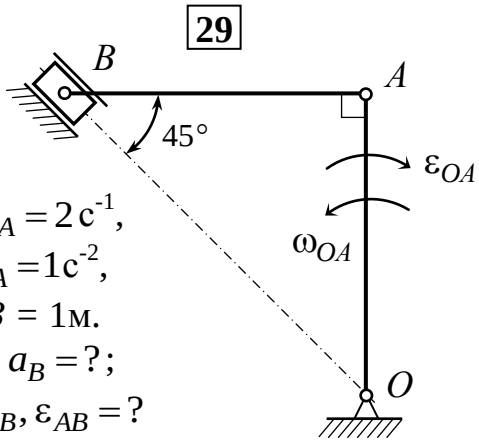
$v_A = 1$ м/с, $a_A = 2$ м/с^2, AB=2м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



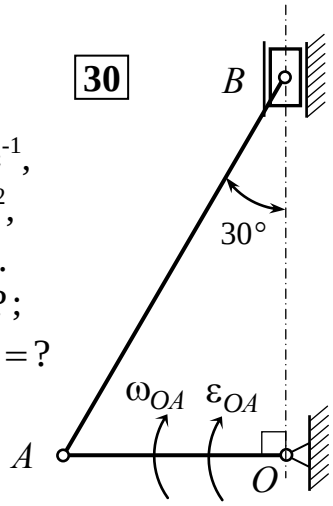
$\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 1$ с$^{-2}$, AB=2м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



$\omega_{OA} = 1$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 1$ с$^{-2}$, AB=2м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



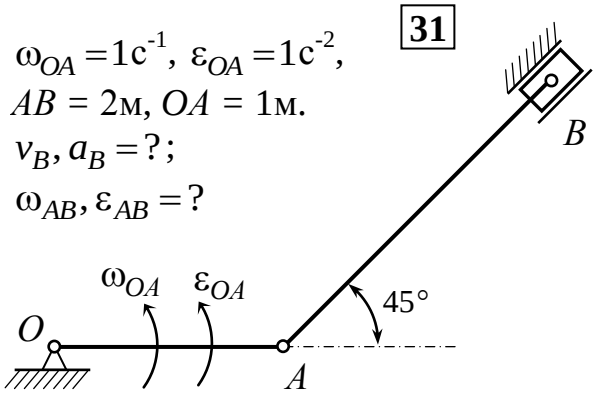
$\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$,
$\varepsilon_{OA} = 1$ с$^{-2}$,
AB = 1м.
$v_B, a_B = ?$;
$\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



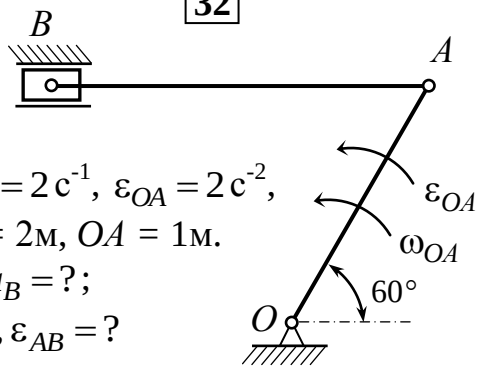
$\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$,
$\varepsilon_{OA} = 1$ с$^{-2}$,
AB = 2м.
$v_B, a_B = ?$;
$\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$

31

$\omega_{OA} = 1\,\text{с}^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 1\,\text{с}^{-2}$,
AB = 2м, OA = 1м.
$v_B, a_B = ?$;
$\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$

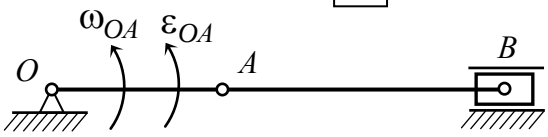


32



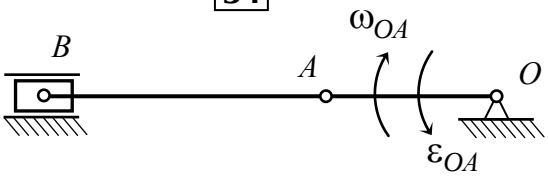
$\omega_{OA} = 2\,\text{с}^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 2\,\text{с}^{-2}$,
AB = 2м, OA = 1м.
$v_B, a_B = ?$;
$\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$

33



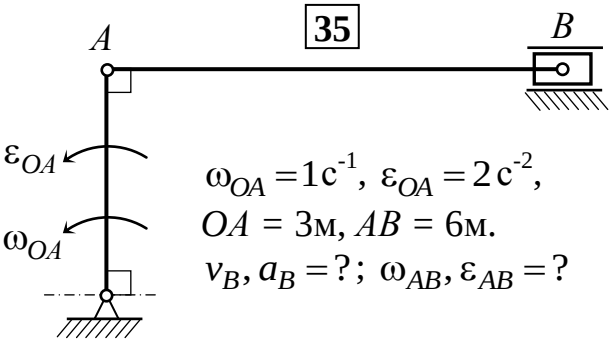
$\omega_{OA} = 1\,\text{с}^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 2\,\text{с}^{-2}$, AB=2OA=4м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$

34



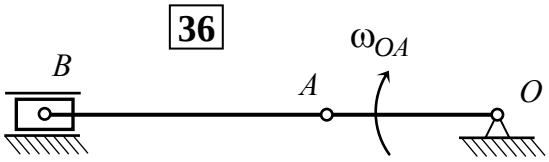
$\omega_{OA} = 1\,\text{с}^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 1\,\text{с}^{-2}$, AB=2OA=4м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$

35



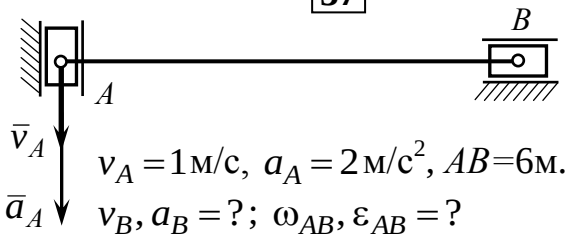
$\omega_{OA} = 1\,\text{с}^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 2\,\text{с}^{-2}$,
OA = 3м, AB = 6м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$

36



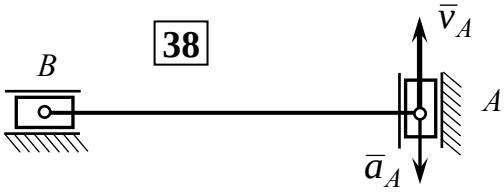
$\omega_{OA} = 1\,\text{с}^{-1}$, AB=2OA=4м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$

37



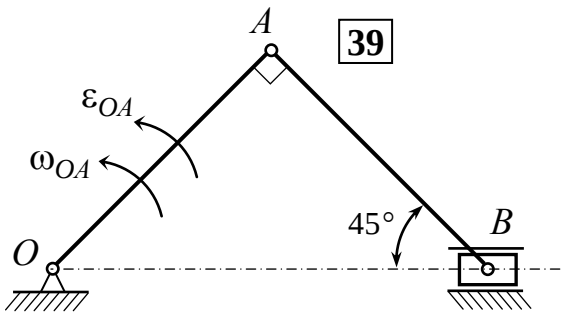
$v_A = 1$м/с, $a_A = 2$м/с^2, AB=6м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$

38



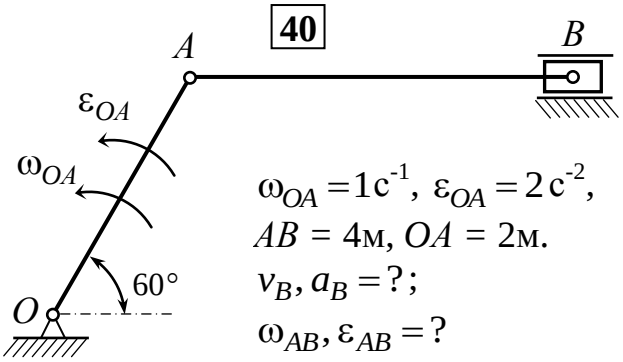
$v_A = 1$м/с, $a_A = 2$м/с^2, AB=5м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$

39



$\omega_{OA} = 1\,\text{с}^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 2\,\text{с}^{-2}$, OA = 2 м.
$v_B, a_B = ?$; $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$

40



$\omega_{OA} = 1\,\text{с}^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 2\,\text{с}^{-2}$,
AB = 4м, OA = 2м.
$v_B, a_B = ?$;
$\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$

2.4. Сложное движение точки

Пример 7. Точка *M* движется с относительной скоростью $v_r = t^2 - t$ м/с по хорде диска, вращающегося вокруг оси *O*, перпендикулярной плоскости диска, с угловой скоростью $\omega_e = 0.5t^2$ с$^{-1}$. Определить абсолютное ускорение точки *M* при *t* = 2 с, если расстояние *OM* = 1 м (рис. 7, *а*)

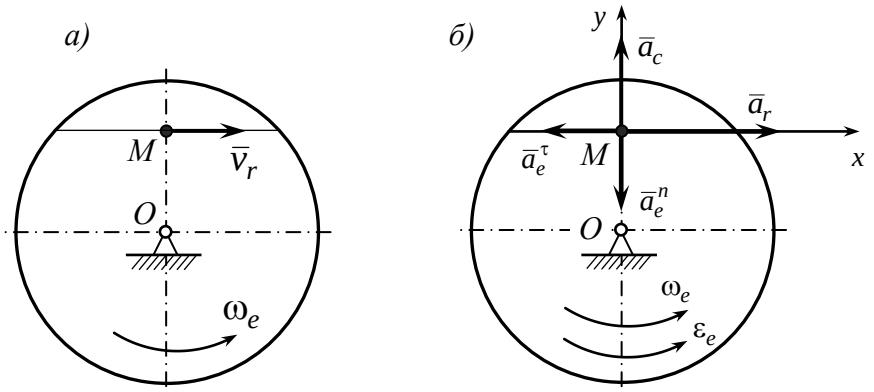


Рис. 7

<u>Решение.</u> Абсолютное ускорение определяется по формуле

$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c}$$

Заморозим вращение диска (переносное движение точки). Точка *M* движется относительно диска прямолинейно, тогда относительное ее ускорение: $a_r = \dot{v}_r = 2t - 1\big|_{t=1c} = 3$ м/с^2.

Заморозим движение точки по хорде (относительное движение точки), тогда точка будет совершать только переносное движение. Переносное движение будет вращательным вокруг центра *O*, т.е. переносное ускорение будет иметь две составляющие: $\bar{a}_e = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n$.

Переносное касательное ускорение $a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OM = \dot{\omega}_e \cdot OM = t \cdot 1\big|_{t=2c} = 2$ м/с^2.

Переносное нормальное ускорение $a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM = 0{,}25t^4 \cdot 1\big|_{t=2c} = 4$ м/с^2.

Направление ускорения Кориолиса $\bar{a}_c$ определяется по правилу Жуковского, поворотом вектора относительной скорости $\bar{v}_r$ в сторону переносного вращения на 90° и обозначением как $\bar{a}_c$ (рис. 7, *б*). Модуль $\bar{a}_c$:

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin\alpha = 2 \cdot (0{,}5t^2) \cdot (t^2 - t) \cdot \sin 90°\Big|_{t=2c} = 8 \text{ м/с}^2,$$

где α – угол между векторами $\bar{\omega}_e$ и $\bar{v}_r$. Вектор угловой скорости $\bar{\omega}_e$ направлен на нас (по правилу буравчика), т.к. диск вращается против хода часовой стрелки.

Проецируя все составляющие абсолютного ускорения на оси *x* и *y*, получаем:

$$a_x = -a_e^\tau + a_r = -2 + 3 = 1 \text{ м/с}^2; \quad a_y = a_c - a_e^n = 8 - 4 = 4 \text{ м/с}^2.$$

Абсолютное ускорение точки *M* при *t* = 2 с: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{17}$ м/с^2.

Пример 8. Точка *M*, находящаяся в начальный момент в вершине кругового конуса, движется равномерно по образующей конуса к основанию с относительной скоростью $v_r = 24$ см/с. Конус вращается вокруг своей оси согласно уравнению $\varphi = 0.125t^2$ (рис. 8, *а*). Определить абсолютные скорость и ускорение точки в конце 4-й секунды, если $\alpha = 30°$.

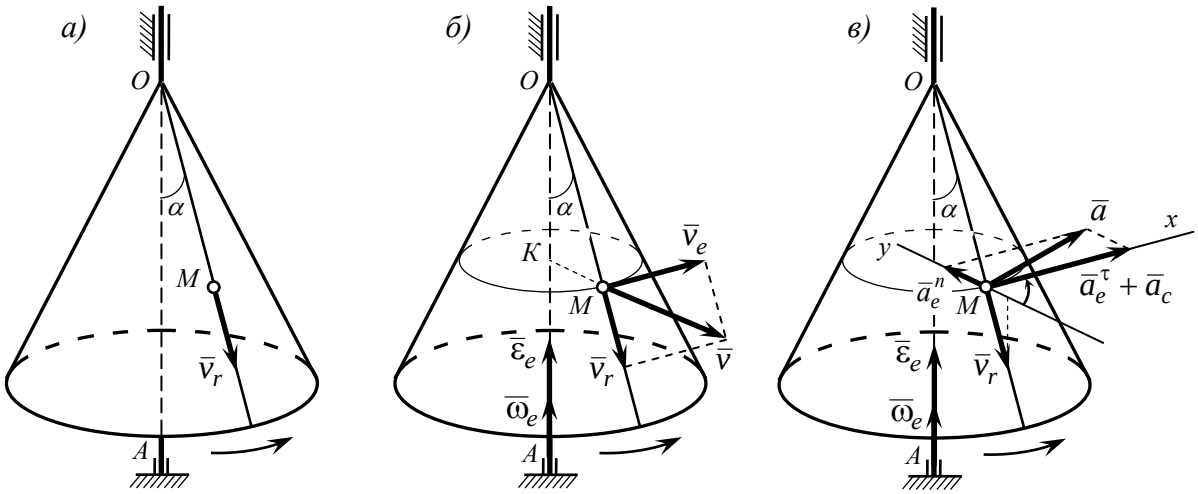


Рис. 8

Решение. Движение точки *M* относительно конуса вдоль его образующей является относительным, а движение точки *M* вместе с конусом, вращающимся вокруг оси *OA* – переносным.

Найдем положение точки *M* в конце 4-й секунды:

$OM = v_r t = 24 \cdot 4 = 96$ см; $MK = OM \sin\alpha = 96 \cdot 0.5 = 48$ см.

Определим алгебраические величины переносной угловой скорости и переносного углового ускорения при t = 4с:

$\omega_e = \dot{\varphi} = 0.25 \cdot 4 = 1$ рад/с > 0; $\varepsilon_e = \ddot{\varphi} = 0.25$ рад/с^2 > 0.

Знаки ω_e и ε_e совпадают, следовательно, конус вращается ускоренно. Векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{\varepsilon}_e$ направлены по оси вращения конуса вверх.

Определяем абсолютную скорость точки *M*.

Абсолютная скорость точки *M* определяется как векторная сумма двух скоростей: $\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r$.

Переносная скорость $\bar{v}_e$ направлена по касательной к окружности радиуса *MK*, а ее модуль $v_e = \omega_e \cdot MK = 1 \cdot 48 = 48$ см/с. Относительная скорость $\bar{v}_r$ направлена вдоль образующей конуса, а ее модуль $v_r = 24$ см/с. Так как составляющие скорости взаимно перпендикулярны, то (рис. 8, *б*)

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{48^2 + 24^2} = 53.64 \text{ см/с}.$$

Определяем абсолютное ускорение точки *M*. Абсолютное ускорение точки *M* при вращательном переносном движении: $\bar{a} = \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^{n} + \bar{a}_r^{\tau} + \bar{a}_r^{n} + \bar{a}_c$.

Определим составляющие абсолютного ускорения точки *M* (рис. 8, *в*).

Переносное касательное ускорение $\bar{a}_e^{\tau}$ направлено по касательной к окружности радиусом *МК* в соответствии с направлением углового ускорения, а его модуль $a_e^{\tau} = MK \cdot \varepsilon_e = 48 \cdot 0.25 = 12$ см/с^2.

Переносное нормальное ускорение $\bar{a}_e^{n}$ направлено к центру *К* окружности радиусом *МК*, а его модуль $a_e^{n} = MK \cdot \omega_e^2 = 48 \cdot 1 = 48$ см/с^2.

Так как относительное движение точки прямолинейное и равномерное, то $a_r^n = v_r^2 / \rho = v_r^2 / \infty = 0$ и $a_r^{\tau} = \dot{v}_r = 0$.

Направление кориолисова ускорения $\bar{a}_c$ определяется по правилу Жуковского; оно совпадает с направлением $\bar{a}_e^{\tau}$, а его модуль

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin\alpha = 2 \cdot 1 \cdot 24 \cdot 0.5 = 24 \text{ см/с}^2.$$

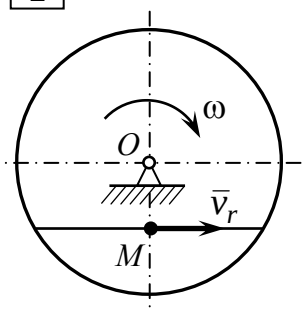
Проецируя все составляющие абсолютного ускорения на оси *x* и *y*, получаем:

$$a_x = a_e^{\tau} + a_c = 12 + 24 = 36 \text{ см/с}^2; \; a_y = a_e^n = 48 \text{ см/с}^2.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{36^2 + 48^2} = 60 \text{ см/с}^2.$$

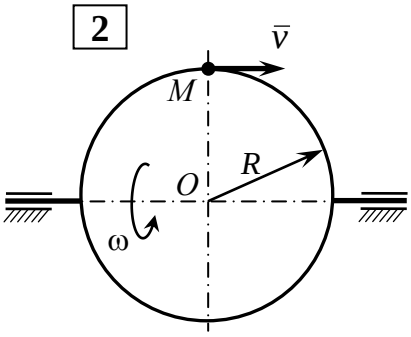
Определение абсолютного ускорения точки

1



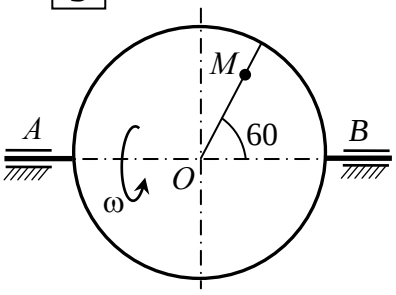
$v_r = 0.5t$ м/с, ω = 0.5 с$^{-1}$, OM = 0.02 м. $a_M\big|_{t=2c} = ?$

2



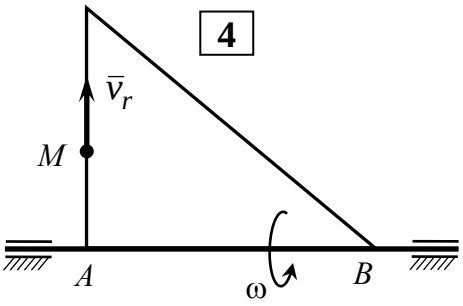
$v_r = 2$ м/с, R = 0.5 м, ω = 4 с$^{-1}$. $a_M = ?$

3



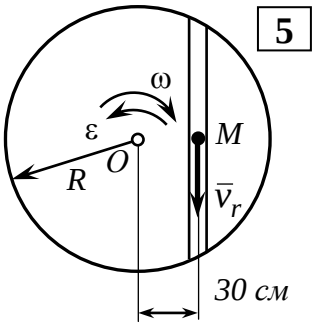
$AM = 4t^2$ см, ω = 2t с$^{-1}$. $a_M\big|_{t=1c} = ?$ (35.55)

4



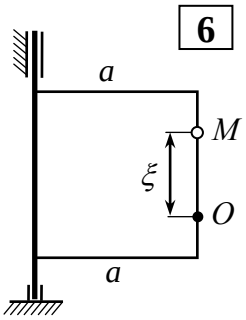
$AM = 3t^2$ м/с, ω = 2 с$^{-1}$. $a_M\big|_{t=2c} = ?$

5



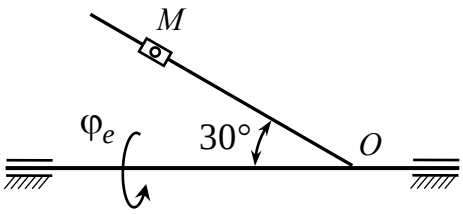
$v_r = 1{,}2$ м/с, ω = 3 с$^{-1}$, ε = 8 с$^{-2}$. $a_M\big|_{t=2c} = ?$ (10.19)

6



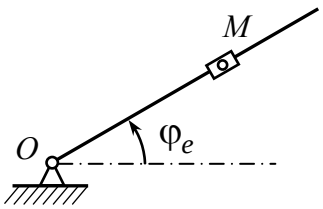
$\xi = a\sin(\pi/2)t$ м, $\omega = \pi/2$ с$^{-1}$. $a_M\big|_{t=1c} = ?$ $(a\pi^2/4\sqrt{2})$

7



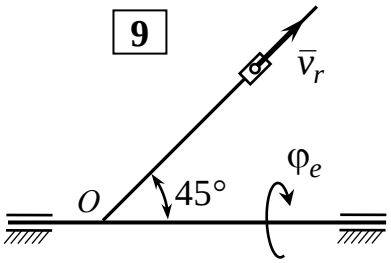
$OM = t^2$ м, $\varphi_e = t^3$ рад.
$a_M\big|_{t=1c} = ?$

8



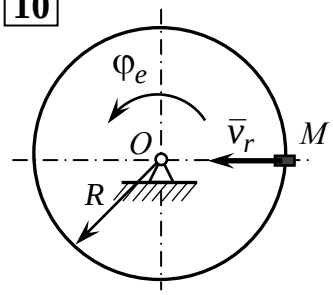
$OM = t^2$ м, $\varphi_e = t^3$ рад.
$a_M\big|_{t=1c} = ?$

9



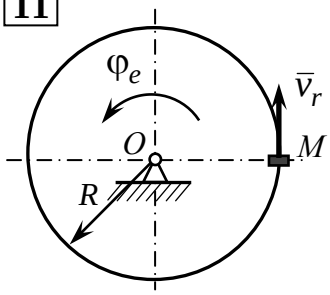
$v_r = t$ м/с, $\varphi_e = t^3$ рад.
$OM = \sqrt{2}$ м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$

10



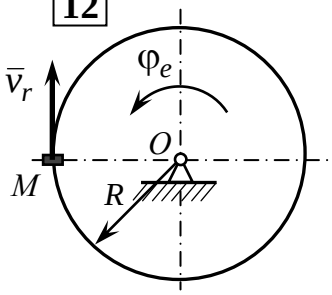
$v_r = 2t$ м/с, $\varphi_e = 3t^2$ рад,
R=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$

11



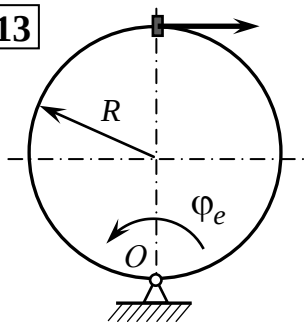
$v_r = t^2$ м/с, $\varphi_e = t^2$ рад,
R=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$

12



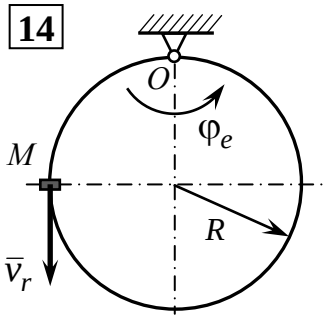
$v_r = 2t^2$ м/с, $\varphi_e = 2t^2$ рад,
R=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$

13



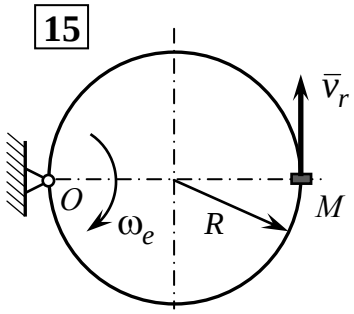
$v_r = 4t$ м/с, $\varphi_e = t^2$ рад,
R=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$

14



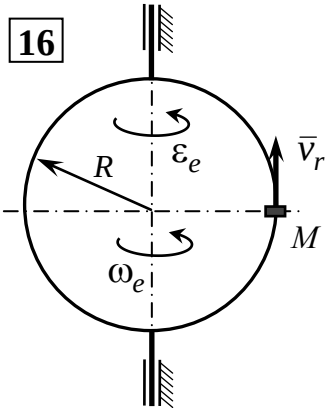
$v_r = 1$м/с, $\varphi_e = t^2$ рад,
R=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$

15



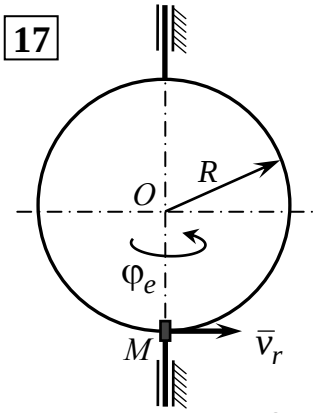
$v_r = t$ м/с, $\omega_e = t^2$ с$^{-1}$,
R=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$

16



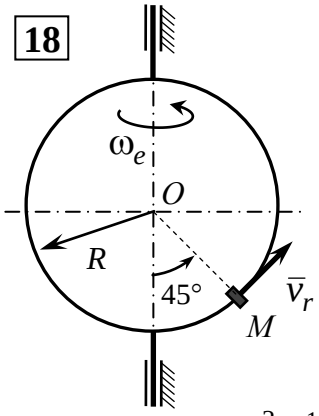
$\omega_e = 1$с$^{-1}$, $\varepsilon_e = 1$с$^{-2}$, R=1м.
$v_r = t$ м/с, $a_M\big|_{t=1c} = ?$

17

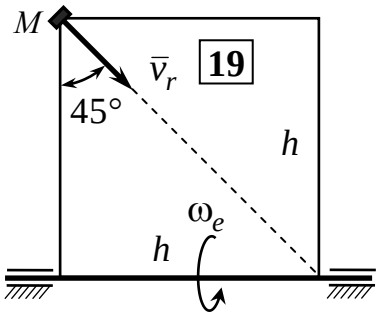


$v_r = 4t$ м/с, $\varphi_e = 2t^2$ рад,
R=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$

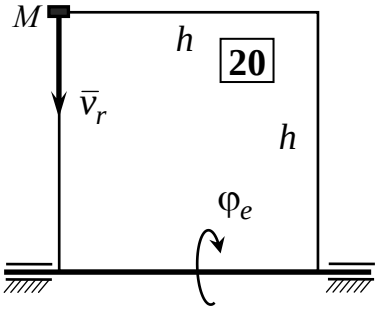
18



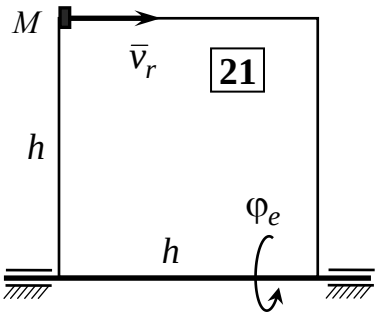
$v_r = 5t$ м/с, $\omega_e = t^2$ с$^{-1}$,
R=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$



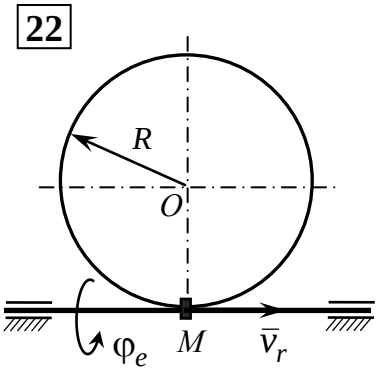
$v_r = t$ м/с, $\omega_e = t^2$ рад/с,
h=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$



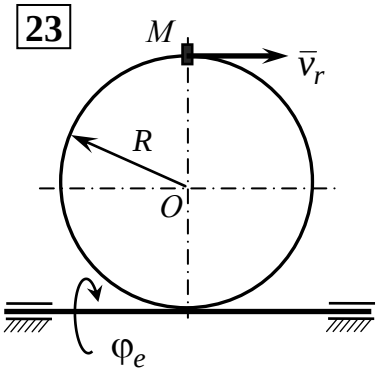
$v_r = t$ м/с, $\varphi_e = t$ рад,
h=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$



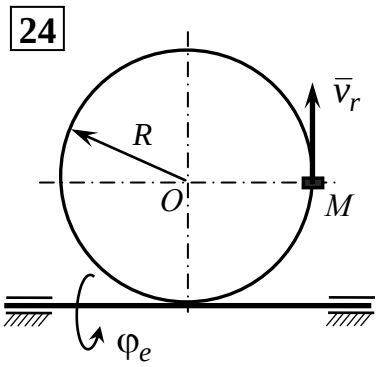
$v_r = t$ м/с, $\varphi_e = t^3$ рад,
h=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$



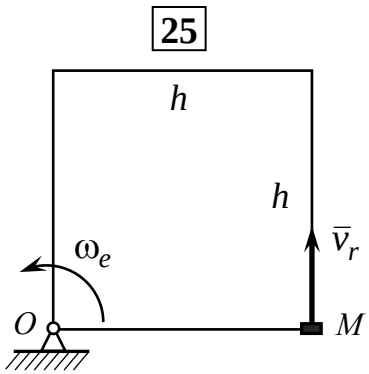
$v_r = t$ м/с, $\varphi_e = t^2$ рад,
R=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$



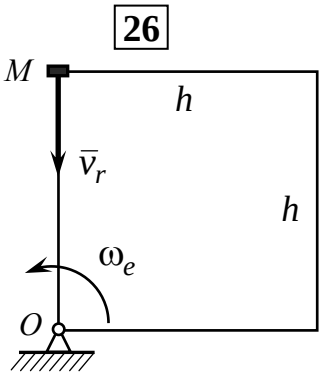
$v_r = 1$м/с, $\varphi_e = t^2$ рад,
R=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$



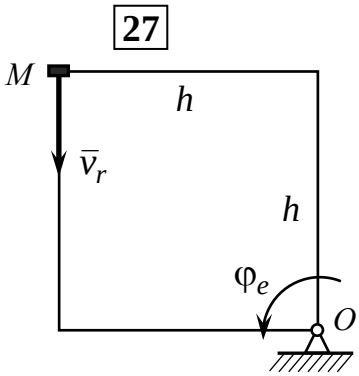
$v_r = t$ м/с, $\varphi_e = t^2$ рад,
R=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$



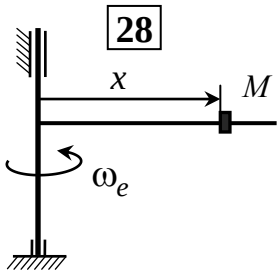
$v_r = t$ м/с, $\omega_e = t$ рад/с,
h=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$



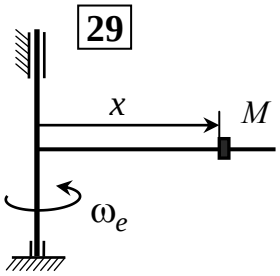
$v_r = t$ м/с, $\omega_e = t^2$ рад/с,
h=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$



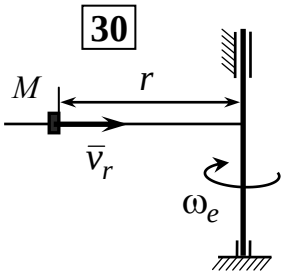
$v_r = t$ м/с, $\varphi_e = t$ рад,
h=1м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$



$x = t$ м, $\omega_e = t^2$ рад/с.
$a_M\big|_{t=1c} = ?$



$x = t^2$ м, $\omega_e = 1$ рад/с.
$a_M\big|_{t=1c} = ?$



$v_r = t$ м/с, $\omega_e = t$ рад/с.
r = 1 м. $a_M\big|_{t=1c} = ?$

Раздел III. ДИНАМИКА

Глава 1. Динамика материальной точки

1.1. Законы динамики

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под действием сил.

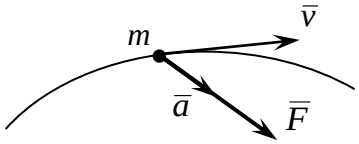
В основе динамики лежат законы, впервые сформулированные Ньютоном.

Закон инерции (первый закон). *Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока какая-нибудь сила не выведет ее из этого состояния*.

$$\boxed{\text{Если } \bar{F} = 0, \text{ т } \quad \bar{v} = \overline{const}}.$$

Закон пропорциональности силы и ускорения (второй закон – основной закон динамики). *Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление, т.е.*

$$\boxed{m\bar{a} = \bar{F}},$$



где m – коэффициент пропорциональности, характеризует инертные свойства материальной точки и называется массой точки.

Закон равенства действия и противодействия (третий закон). *Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие, т.е.* $\boxed{\bar{F}_1 = -\bar{F}_2}$.

Закон независимости действия сил (четвертый закон). *Ускорение, полученное точкой под действием системы сил, равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил, т.е.* $\boxed{m\bar{a} = \sum \bar{F}_k}$.

1.2. Дифференциальные уравнения движения точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах:

$$\boxed{m\ddot{x} = \sum F_{kx} = F_x, \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky} = F_y, \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz} = F_z}.$$

В проекциях на естественные оси – касательную, главную нормаль и бинормаль, получаем дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника:

$$\boxed{m\,d^2s/dt^2 = F_\tau, \quad mv^2/\rho = F_n, \quad 0 = F_b},$$

где $v = |v_\tau|$, $v_\tau = ds/dt$, s – дуговая координата, ρ – радиус кривизны траектории.

Задачи динамики

1) *Зная закон движения точки массой m определить действующую на нее силу (первая задача динамики).*

2) *Зная силы, действующие на материальную точку, ее массу m, а также начальные условия движения, определить закон движения точки (вторая задача динамики).*

1.3. Движение тела по заданной траектории

Пусть точка M массой m движется по закону: $x = a\cos kt$, $y = b\sin kt$. Требуется определить равнодействующую приложенных к точке сил (1-я задача динамики).

Решение. Исключая время t из уравнений движения, находим уравнение траектории точки: $\cos kt = x/a$, $\sin kt = y/b$, так как $\cos^2 kt + \sin^2 kt = 1$, тогда

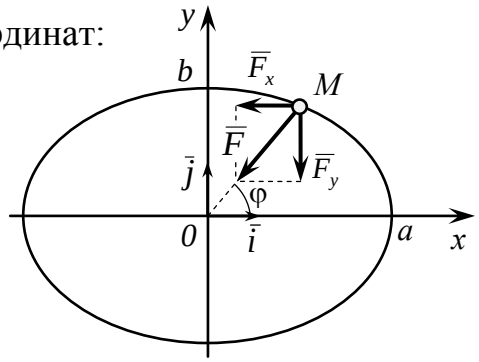
$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Траекторией является эллипс с полуосями a и b.

Определим проекции ускорения точки на оси координат:

$$\dot{x} = -ak\sin kt, \quad \ddot{x} = -ak^2\cos kt = -k^2 x,$$

$$\dot{y} = bk\cos kt, \quad \ddot{y} = -bk^2\sin kt = -k^2 y.$$



Находим проекции равнодействующей силы:

$$F_x = m\ddot{x} = -mk^2 x, \; F_y = m\ddot{y} = -mk^2 y.$$

Определяем модуль и направление силы:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r,$$

$$\cos(\bar{F}, \bar{i}) = \cos\varphi = F_x/F = -x/r, \quad \cos(\bar{F}, \bar{j}) = F_y/F = \sin\varphi = -y/r.$$

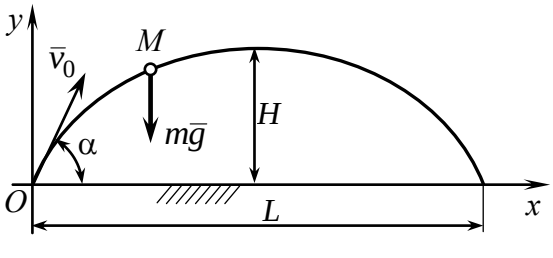
1.4. Движение тела, прошенного под углом к горизонту, без учета сопротивления воздуха

Определим движение тела M, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, пренебрегая сопротивлением воздуха и принимая тело за материальную точку (2-я задача динамики).

Совместим начало координат O с точкой вылета тела. Начальные условия движения: при $t = 0$: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = v_{0x} = v_0\cos\alpha$, $\dot{y}_0 = v_{0y} = v_0\sin\alpha$. (1)

Дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx} = 0, \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -mg. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = -g. \end{cases}$$



Интегрируя дважды по t, получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1, \\ \dot{y} = -gt + C_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 t + C_2, \\ y = -gt^2/2 + C_3 t + C_4. \end{cases} \quad (2)$$

Определим постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 по начальным условиям. Подставив (1) в (2), получаем

$$\dot{x}_0 = C_1, \; x_0 = C_1 \cdot 0 + C_2, \; \dot{y}_0 = -g \cdot 0 + C_3, \; y_0 = -g \cdot 0^2/2 + C_3 \cdot 0 + C_4.$$

Откуда $C_1 = v_0\cos\alpha$, $C_2 = 0$, $C_3 = v_0\sin\alpha$, $C_4 = 0$.

Закон изменения скорости и движения тела с учетом найденных констант:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha, \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha, \\ y = -gt^2/2 + v_0 t \sin\alpha. \end{cases}$$

Исключив время t из закона движения, получим уравнение траектории тела

$$\boxed{y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}}.$$

Скорость тела в любой точке траектории:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (-gt + v_0 \sin\alpha)^2}\ .$$

Определим дальность и продолжительность полета тела. В точке падения тела $y = 0$. Продолжительность полета определим из уравнения (2) при $y = 0$:

$$y = -gt^2/2 + v_0 t \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad t(-gt/2 + v_0 \sin\alpha) = 0,$$

откуда находим $t_1 = 0$ и $t_2 = 2v_0 \sin\alpha / g$ – время в момент вылета и падения соответственно. Дальность полета определим подставив t_2 в $x = v_0 t \cos\alpha$:

$$L = v_0 \cos\alpha \cdot 2v_0 \sin\alpha / g = v_0^2 \sin 2\alpha / g\ .$$

Наибольшую высоту подъема тела определим из условия, что в наивысшей точке вертикальная скорость равна нулю: $\dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha = 0$, откуда $t = v_0 \sin\alpha / g$. Подставляя найденное t в закон движения тела по оси y (2), получаем набольшую высоту подъема тела: $H = y = v_0^2 \sin^2\alpha/(2g)$.

1.5. Общие теоремы динамики материальной точки

Теорема об изменении количества движения точки

Полным импульсом силы $\bar{F}$, действующей на материальную точку в течение времени t, называется вектор $\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt$.

Проекции полного импульса силы $\bar{F}$ на оси декартовых координат:

$$S_x = \int_0^t F_x dt,\ S_y = \int_0^t F_y dt,\ S_z = \int_0^t F_z dt\ .$$

Модуль и направление полного импульса $\bar{S}$ определяются по проекциям:

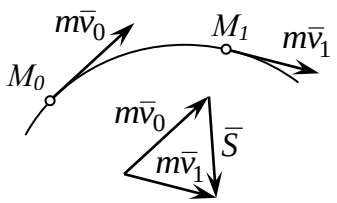
$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}\ ;\ \cos(\bar{S}, \bar{i}) = S_x / S,\ \cos(\bar{S}, \bar{j}) = S_y / S,\ \cos(\bar{S}, \bar{k}) = S_z / S\ .$$

Количеством движения *материальной точки называется векторная величина* $m\bar{v}$, *равная произведению массы точки* m *на ее скорость* $\bar{v}$.

Запишем ДУ движения материальной точки M в виде $m d\bar{v}/dt = \bar{F}$ или, так как $m = const$, $\boxed{d(m\bar{v})/dt = \bar{F}}$.

Данное уравнение выражает теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме. Перепишем последнее выражение в виде $d(m\bar{v}) = \bar{F} dt$ и проинтегрируем ДУ в пределах от 0 до t: $\int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} d(m\bar{v}) = \int_0^t \bar{F} dt$,

$$\boxed{m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{S}},$$



где $\bar{v}$, $\bar{v}_0$ – скорость точки в текущий и начальный моменты времени соответственно; $\bar{S}$ – полный импульс равнодействующей силы за время *t*.

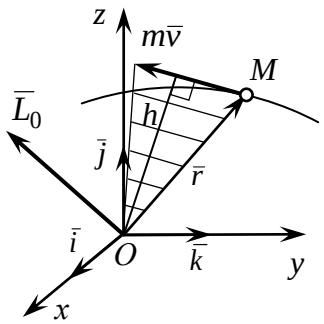
Теорема об изменении количества движения точки в интегральной форме: *изменение количества движения точки за промежуток времени от 0 до t равно полному импульсу равнодействующей силы, действующей на точку, за тот же промежуток времени*. В проекциях на оси:

$$\boxed{mv_x - mv_{0x} = S_x;\;\; mv_y - mv_{0y} = S_y;\;\; mv_z - mv_{0z} = S_z}.$$

Теорема об изменении момента количества движения точки

Моментом количества движения *материальной точки относительно некоторого центра O называется векторная величина*

$$\bar{L}_0 = L_x\bar{i} + L_y\bar{j} + L_z\bar{k} = \bar{m}_0(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v},$$



$L_x = m(yv_z - zv_y)$, $L_y = m(zv_x - xv_z)$, $L_z = m(xv_y - yv_x)$,

где $\bar{r}$ – радиус-вектор движущейся точки. $L_x > 0$, если смотря навстречу оси *x*, движение точки происходит против хода часовой стрелки. Когда $L_x < 0$ – наоборот.

Модуль вектора $\bar{L}_0$ равен $L_0 = mvh = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$.

Запишем уравнение движения материальной точки

$$m\,d\bar{v}/dt = \bar{F} \;\Rightarrow\; \bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0}.$$

Теорема об изменении момента количества движения точки: *первая производная по времени от момента количества движения точки относительно центра O равна моменту равнодействующей силы относительно того же центра O*. В проекциях на оси координат

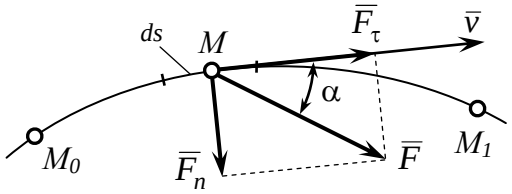
$$\boxed{\frac{dL_x}{dt} = M_x,\quad \frac{dL_y}{dt} = M_y,\quad \frac{dL_z}{dt} = M_z}.$$

Работа силы

Пусть точка приложения силы $\bar{F}$ перемещается по криволинейной траектории из положения M_0 в положение M_1. Разобьем перемещение точки *M* по дуге M_0M_1 на бесконечно малые перемещения ds и определим работу на каждом таком перемещении.

Элементарной работой *силы* $\bar{F}$*, приложенной в точке M, называется скалярная величина равная произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение.*

$$\boxed{dA = F_\tau ds = F\cos\alpha ds},$$



Поскольку $ds = |d\bar{r}|$, тогда

$$dA = |\bar{F}|\cos\alpha|d\bar{r}| = \bar{F}\cdot d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Полную работу силы $\overline{F}$ *на перемещении точки из положения M_0 в положение M_1 определяют как предел интегральной суммы соответствующих элементарных работ*

$$A=\int_{M_0}^{M_1} dA=\int_{M_0}^{M_1} F_\tau ds=\int_{M_0}^{M_1}(F_x dx+F_y dy+F_z dz).$$

Работа силы тяжести: $\boxed{A=\pm mgh}$, h – перемещение по вертикали, «+» перемещение вниз, «–» перемещение вверх.

Работа силы упругости: $\boxed{A=\pm c\lambda^2/2}$, c – коэффициент жесткости пружины, λ – удлинение пружины, «+» деформация пружины уменьшается, «–» деформация увеличивается.

Теорема об изменении кинетической энергии точки

Кинетической энергией *материальной точки называется скалярная величина $mv^2/2$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.* Движение точки массой m под действием силы $\overline{F}$ определяется уравнением $m\,d\overline{v}/dt=\overline{F}$, которое также можно записать в виде

$$m d\overline{v}=\overline{F}dt \Rightarrow m\overline{v}d\overline{v}=\overline{F}\cdot\overline{v}dt \Rightarrow \boxed{d(mv^2/2)=dA}.$$

Получили теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме: *дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку*.

Интегрируя обе части уравнения от M_0 до M_1, получаем

$$\boxed{mv_1^2/2-mv_0^2/2=A} \text{ или } \boxed{T_1-T_0=A}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии точки в интегральной форме: *изменение кинетической энергии точки на любом перемещении равно работе силы, действующей на точку, на том же перемещении.*

1.6. Относительное движение материальной точки

Пусть точка M под действием некоторых сил $\overline{F}_k$ совершает сложное движение. Основное уравнение динамики точки относительно инерциальной (неподвижной) системы отсчета $Oxyz$:

$$m\overline{a}=\sum\overline{F}_k, \Rightarrow m(\overline{a}_e+\overline{a}_r+\overline{a}_c)=\sum\overline{F}_k \Rightarrow m\overline{a}_r=\sum\overline{F}_k+(-m\overline{a}_e)+(-m\overline{a}_c),$$

где $-m\overline{a}_e=\overline{F}_e^u$ – переносная сила инерции;

$-m\overline{a}_c=\overline{F}_c^u$ – кориолисова сила инерции.

Таким образом, основное уравнение динамики для относительного движения запишется

$$\boxed{m\overline{a}_r=\sum\overline{F}_k+\overline{F}_e^u+\overline{F}_c^u}.$$

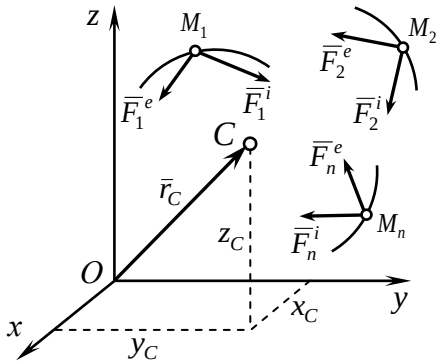
Относительное движение материальной точки можно рассматривать как абсолютное, если действующим на точку силам прибавить переносную и кориолисову силы инерции.

Глава 2. Динамика системы материальных точек

2.1. Теорема о движении центра масс

Системой материальных точек *(или механической системой) называют такую совокупность материальных точек, в которой положение или движение каждой точки зависит от положения и движения всех остальных*.

Все действующие на механическую систему *задаваемые (активные) силы* $\overline{F}_k$ и *реакции связей* $\overline{N}_k$ разделяют на *внешние* $\overline{F}_k^e$ и *внутренние* $\overline{F}_k^i$.



Внешними *называют силы, действующие на точки системы со стороны материальных точек, не входящих в состав данной системы*.

Внутренними *называют силы, с которыми точки данной системы действуют друг на друга*.

Центром масс системы *называется геометрическая точка C, радиус-вектор которой* $\overline{r}_C = \sum m_k \overline{r}_k / M$, $M = \sum m_k$ – масса системы.

Координаты центра масс системы:

$$\boxed{x_C = \sum m_k x_k / M, \quad y_C = \sum m_k y_k / M, \quad z_C = \sum m_k z_k / M}.$$

Уравнение движения системы материальных точек можно записать

$$\boxed{M\overline{a}_C = \sum \overline{F}_k^e}.$$

Теорема о движении центра масс системы: *центр масс механической системы движется как материальная точка массой, равной массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему*. В проекциях на координатные оси, получим

$$\boxed{M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e}.$$

Закон сохранения движения центра масс системы (следствия теоремы).

1. Если $\sum \overline{F}_k^e = 0$, то из теоремы следует, что $\overline{a}_C = 0$, откуда $\boxed{\overline{v}_C = \overline{v}_{C0}}$.

   И если $\overline{v}_{C0} = 0$, то $\overline{v}_C = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{r}_C = \overline{r}_{C0}}$.

Таким образом, *если геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс системы движется прямолинейно и равномерно или находится в покое*.

2. Если $\sum F_{kx}^e = 0$, то $\boxed{\dot{x}_C = \dot{x}_{C0}}$. И если $\dot{x}_{C0} = 0$, то $x_C = const$ или $\boxed{x_C = x_{C0}}$.

2.2. Общие теоремы динамики системы

Теорема об изменении количества движения системы.

Количеством движения механической системы *называют вектор* $\overline{K} = \sum m_k \overline{v}_k = M\overline{v}_C$, *равный геометрической сумме количеств движения точек системы или определяется как произведение массы всей системы на скорость ее центра масс*.

Запишем теорему о движении центра масс механической системы в виде

$$M\overline{a}_C = \sum \overline{F}_k^e = \overline{F}^e \Rightarrow d(M\overline{v}_C)/dt = \overline{F}^e \Rightarrow d\overline{K}/dt = \overline{F}^e. \quad (3)$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения механической системы геометрически равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему.*

В проекциях на оси координат имеем

$$dK_x/dt = F_x^e, \quad dK_y/dt = F_y^e, \quad dK_z/dt = F_z^e.$$

Проинтегрируем уравнение (3) за время перехода системы из какого-нибудь одного положения в другое

$$\boxed{\overline{K} - \overline{K}_0 = \overline{S}^e},$$

где $\overline{S}^e = \sum \overline{S}_k^e$ – полный импульс главного вектора внешних сил.

Теорема об изменении количества движения механической системы в интегральной форме: *изменение количества движения механической системы а некоторый промежуток времени равно полному импульсу внешних сил, приложенных к системе, за тот же промежуток времени*. В проекциях на оси координат

$$\boxed{K_x - K_{0x} = S_x^e, \quad K_y - K_{0y} = S_y^e, \quad K_z - K_{0z} = S_z^e}.$$

Закон сохранения количества движения системы (следствия теоремы).

1. Если $\overline{F}^e = \sum \overline{F}_k^e = 0$, то из (3) следует, что $\boxed{\overline{K} = \overline{const}}$.

Таким образом, *если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению*.

2. Если $\overline{F}_x^e = \sum \overline{F}_{kx}^e = 0$, то $K_x = const$ или $\boxed{\sum m_k v_{kx} = const}$.

Теорема об изменении кинетического момента системы.

Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси *Oz* *называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси*: $J_z = \sum m_k h_k^2$.

Моменты инерции:

– *однородного стержня* относительно центр масс стержня $J_z = Ml^2/12$;

– *тонкой цилиндрической оболочки* относительно ее оси $J_z = MR^2$;

– *круглого однородного цилиндра* относительно его оси $J_z = MR^2/2$.

Теорема Гюйгенса: *момент инерции тела относительно некоторой оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями*, т.е. $\boxed{J_{z_1} = J_z + Md^2}$.

Так, например, момент инерции относительно конца стержня

$$J_z = Ml^2/12 + Md^2 = Ml^2/12 + M(l/2)^2 = Ml^2/3.$$

Главным моментом количеств движения, или кинетическим моментом механической системы, *относительно центра O называют геометрическую сумму векторов моментов количеств движения материальных точек системы относительно того же центра O*: $\overline{L}_O = L_x\overline{i} + L_y\overline{j} + L_z\overline{k} = \sum \overline{L}_{Ok} = \sum \overline{r}_k \times m_k\overline{v}_k$.

Теорема об изменении главного момента количества движения механической системы: *производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра равна главному моменту внешних сил, относительно того же центра:*

$$\boxed{d\overline{L}_O / dt = \overline{M}_O^e}$$

В проекциях на оси:

$$\boxed{dL_x / dt = M_x^e, \quad dL_y / dt = M_y^e, \quad dL_z / dt = M_z^e}.$$

Закон сохранения кинетического момента механической системы.

1. Если главный момент внешних сил системы относительно центра O равен нулю, т.е. $\overline{M}_O^e = 0$, тогда $d\overline{L}_O / dt = 0$ и $\overline{L}_O = \overline{const}$.

2. Если $M_x^e = 0$, тогда $dL_z / dt = 0 \Rightarrow \boxed{L_z = const}$.

Теорема об изменении кинетической энергии системы.

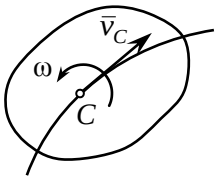
Кинетическая энергия механической системы называется скалярная величина T, равная сумме кинетических энергии всех точек системы:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} \text{ или } T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum \frac{m_k v_{kr}^2}{2}.$$

Теорема Кенига: *кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы и кинетической энергии этой системы в ее движении относительно центра масс*.

Для твердого тела при плоском движении теорема Кенига примет вид:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz}\omega^2},$$



где J_{Cz} – момент инерции тела относительно оси Cz,

ω – угловая скорость тела.

Применим к движению каждой точки системы теорему об изменении кинетической энергии и просуммируем составленные n равенства:

$$T_2 - T_1 = \sum A_k^e + \sum A_k^i ,$$

где T_1, T_2 – кинетическая энергия системы в первом и во втором положениях соответственно. Для твердого тела $\sum A_k^i = 0$, тогда

$$\boxed{T_2 - T_1 = \sum A_k^e}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме для твердого тела: *изменение кинетической энергии твердого тела на некотором перемещении равно сумме работ внешних сил, действующих на тело на этом перемещении*.

2.3. Принцип Даламбера

Принцип Даламбера для системы:

$$\boxed{\sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{\Phi}_k = 0} \text{ или } \boxed{\sum m_O(\overline{F}_k^e) + \sum m_O(\overline{\Phi}_k) = 0},$$

где $\sum \overline{\Phi}_k = -\sum m_k \overline{a}_k = -M\overline{a}_C = \overline{R}^u$ – главный вектор сил инерции;

$\sum \overline{m}_O(\overline{\Phi}_k) = \sum \overline{r}_k \times \overline{\Phi}_k = -\dfrac{d}{dt}(\sum \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k) = -\dfrac{d\overline{L}_O}{dt} = \overline{M}_O^u$ – главный момент сил инерции относительно неподвижного центра O.

Понятие о силе инерции и принцип Даламбера составляют основу метода кинетостатики, который ставит своей целью применение методов статики к задачам динамики.

2.4. Связи. Обобщенные координаты

Механическая система, точки которой могут занимать любое положение в пространстве и иметь любые скорости, называется *свободной*. Если на координаты и скорости точек системы наложены ограничения, то система называется *несвободной*, а ограничения называются *связями*.

Связи называются *голономными*, если они описываются уравнениями:

$$\boxed{f_j(x_k, y_k, z_k, t) = 0} \quad (k = 1, 2, \ldots, N;\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

где N – количество точек системы, m – количество связей.

Неголономными называются связи, которые описываются уравнениями:

$$\boxed{f_j(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0} \quad (k = 1, 2, \ldots, N;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

Данные уравнения в отличие от уравнений голономных связей не могут быть проинтегрированы независимо от ДУ движения системы.

Независимые между собой координаты, которые однозначно определяют положение механической системы в пространстве, в любой момент времени называются *обобщенными координатами*, обозначают $q_i(t)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для системы, состоящей из N точек, на которые наложено m голономных удерживающих связей, через обобщенные могут быть выражены $\boldsymbol{n = 3N - m}$ *независимых декартовых координат*.

Для системы с голономными связями *число степеней свободы* равно числу независимых обобщенных координат.

2.5. Возможные перемещения

Возможными (или виртуальными) перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями.

Для системы с n степенями свободы радиус-вектор каждой точки

$$\overline{r}_k = \overline{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t).$$

Тогда возможное перемещение каждой точки

$$\boxed{\delta\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i}. \qquad (4)$$

Элементарное действительное перемещение точки

$$\boxed{d\bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial t}dt}, \quad \text{где } \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\bar{i} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\bar{j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\bar{k}. \qquad (5)$$

Если наложенная на точку связь стационарная, то элементарное действительное перемещение совпадает с одним из возможных. При нестационарной связи элементарное действительное перемещение точки не принадлежит к числу возможных.

2.6. Возможная работа силы. Обобщенные силы

Возможной работой силы называется работа силы на любом возможном перемещении точки ее приложения: $\boxed{\delta A(\bar{F}) = \bar{F}\cdot\delta\bar{r} = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z}$. (6)

Если к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси Oz приложена сила $\bar{F}$, момент которой относительно оси равен M_z, то $\boxed{\delta A(\bar{F}) = M_z\delta\varphi}$, где $\delta\varphi$ – возможный угол поворота тела вокруг оси Oz.

Рассмотрим возможную работу сил, приложенных к точкам системы, тогда выражение (6) с учетом (5) запишется

$$\sum_{k=1}^{N}\delta A(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k = \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i. \qquad (7)$$

Обобщенной силой Q_i, соответствующей i-й обобщенной координате, называется величина, равная коэффициенту при вариации данной обобщенной координаты в выражении возможной работы сил, действующих на систему.

Из (7) следует, что обобщенная сила Q_i, определяется как

$$\boxed{Q_i = \left[\sum_{k=1}^{N}\delta A(\bar{F}_k)\right]_{q_i}\Big/\delta q_i = \delta A_{q_i}\big/\delta q_i}.$$

2.7. Принцип возможных перемещений

В сложных несвободных механических системах определение реакций связей с помощью уравнений равновесия становится громоздким. В этих случаях целесообразно использовать принцип возможных перемещений: *чтобы данное положение механической системы со стационарными идеальными связями было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении системы из этого положении была равна нулю*.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N}\delta A(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k = \sum_{k=1}^{N}(F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta x_k + F_{kz}\delta x_k) = 0.}$$

Достоинством принципа возможных связей является отсутствие в его формулировке сил реакций идеальных связей.

Пусть механическая система состоит из N материальных точек. В соответствии с принципом Даламбера для каждой точки выполняется

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k = 0, \tag{8}$$

где $\overline{F}_k$ и $\overline{R}_k$ – равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к k-й точке, $\overline{\Phi}_k = -m_k \overline{a}_k$ – сила инерции.

Умножая обе части (8) скалярно на возможное перемещение $\delta\overline{r}_k$ и суммируя по всем точкам системы, получаем общее уравнение динамики

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} (\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k) \cdot \delta\overline{r}_k = 0}.$$

При движении механической системы в любой момент времени сумма работ активных сил, сил реакций связей и сил инерции на любом возможном перемещении из занимаемого положения равна нулю.

Если связи, наложенные на систему, идеальные, то общее уравнение динамики запишется в виде: $\sum (\overline{F}_k + \overline{\Phi}_k) \cdot \delta\overline{r}_k = 0$.

В аналитической форме:

$$\sum (F_{kx} + \Phi_{kx})\delta x_k + (F_{ky} + \Phi_{ky})\delta y_k + (F_{kz} + \Phi_{kz})\delta z_k = 0.$$

2.8. Уравнение Лагранжа II рода

Рассмотрим движение системы из N материальных точек относительно неподвижной системы отсчета. Наложенные на систему связи – голономные, удерживающие, идеальные. Пусть система имеет n степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Общее уравнение динамики для такой системы имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N} (\overline{F}_k - m_k \ddot{\overline{r}}_k) \cdot \delta\overline{r}_k = 0.$$

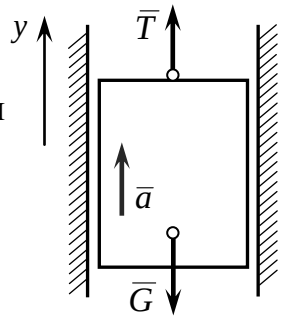
Подставляя сюда выражение для $\delta\overline{r}_k$ и используя тождества Лагранжа, получаем уравнения Лагранжа II рода:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Число этих уравнении равно числу степеней свободы системы n.

Глава 3. Задачи для самостоятельного решения

3.1. Примеры и задачи на составление дифференциальных уравнений движения точки



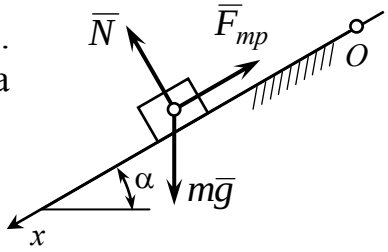
Пример 1. Лифт массой m начинает подниматься с ускорением a. Определить натяжение троса.

Решение. На лифт действуют сила тяжести $\overline{G}$ и реакция троса $\overline{T}$. Составим уравнение движения лифта вдоль оси y:

$$ma_y = \sum F_{ky} \Rightarrow ma_y = T - G \Rightarrow T = G + ma_y = m(g + a).$$

Если лифт опускается вниз с таким же ускорением, то натяжение троса: $-ma_y = T - G \Rightarrow T = G - ma_y = m(g - a)$.

Пример 2. Груз спускается вниз по негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, двигаясь согласно уравнению $x = at^2$, где a – постоянный коэффициент. Определить модуль силы трения скольжения груза о плоскость.

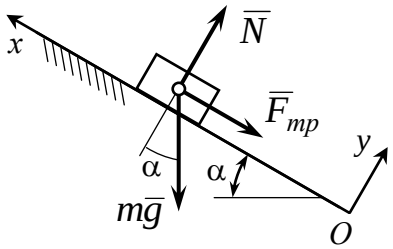


Решение. Показываем приложенные к грузу силы. Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x: $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_{тр}$. (1)

Учитывая, что $x = at^2$, откуда $\dot{x} = 2at$ и $\ddot{x} = 2a$.
Тогда из (1): $F_{тр} = mg\sin\alpha - m\ddot{x} = m(g\sin\alpha - 2a)$.

Пример 3. Груз в результате полученного толчка начал скользить вверх с начальной скоростью v_0 = 3 м/с по негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α = 30° к горизонту . Определить путь s, пройденный грузом до остановки, если коэффициент трения скольжения равен f = 0.4.

Решение. Направим ось x в сторону движения груза, вверх, вдоль наклонной плоскости. Дифференциальное уравнение движения груза вдоль x:



$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - F_{тр},\ F_{тр} = fN = fmg\cos\alpha$$

$$\ddot{x} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha) = -gb.$$

Проинтегрируем полученное ДУ:

$$\frac{dv_x}{dt} = -gb \Rightarrow \int_{v_0}^{v_x} dv_x = -gb\int_0^t dt \Rightarrow v_x - v_0 = -gbt. \quad (1)$$

Из (1) найдем время движения груза до остановки $v_x = 0$: $t = v_0/gb$. (2)

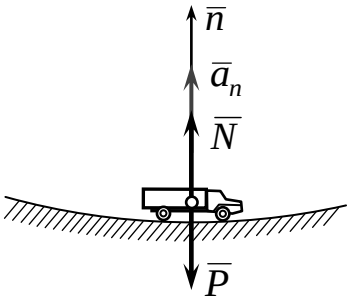
Проинтегрируем (1) еще раз, заменив v_x на dx/dt:

$$\frac{dx}{dt} = -gbt + v_0 \Rightarrow \int_0^s dx = \int_0^t (-gbt + v_0)dt \Rightarrow s = -\frac{1}{2}gbt^2 + v_0 t.$$

Подставляя найденное время t (2), определим путь s пройденный грузом.

$$s = \frac{v_0^2}{2gb} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 0{,}542 \text{ м}.$$

Пример 4. Автомобиль массой m = 1000 кг движется по дну оврага с постоянной по модулю скоростью v = 90 км/ч. Определить давление автомобиля на дно оврага в наинизшей точке. Радиус кривизны траектории ρ в этой точке равен 50 м. Силой сопротивления движению пренебречь.



Решение. Дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на главную нормаль:

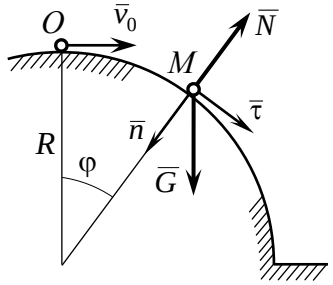
$$ma_n = \sum F_{k\tau} \Rightarrow m\frac{v^2}{\rho} = N - P.$$

Отсюда $N = mv^2/\rho + mg = 1000(25^2/50 + 9{,}81) = 22310$ кг.

Сила давления автомобиля на дно оврага равна по модулю N и направлена вниз.

Пример 5. Шарику, находившемуся в вершине гладкой шаровой поверхности радиусом R = 1 м, сообщена скорость $v_0 = 1$ м/с. Определить, в какой точке шарик отделится от поверхности и начнет двигаться свободно.

Решение. Шарик движется по гладкой шаровой поверхности под действием двух сил: силы тяжести $\overline{G}$ и реакции поверхности $\overline{N}$. Уравнения движения шарика в естественных координатах:



$$m\frac{d^2s}{dt^2} = G\sin\varphi, \quad m\frac{v^2}{R} = G\cos\varphi - N.$$

Шарик отделяется от поверхности, когда реакция поверхности N равна нулю. Из второго уравнения при $N = 0$, получаем

$$mv^2/R = G\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = v^2/gR. \qquad (1)$$

Для определения скорости в точке отрыва v воспользуемся первым уравнением. Начальное положение шарика примем за начало отсчета O дуговой координаты s. Тогда $s = OM = R\varphi$ и распишем

$$\frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = R\omega\frac{d\omega}{d\varphi}.$$

Подставляя в первое уравнение и интегрируя, получаем

$$R\omega\frac{d\omega}{d\varphi} = g\sin\varphi \;\Rightarrow\; R\omega d\omega = g\sin\varphi d\varphi \;\Rightarrow\; R\frac{\omega^2}{2} = -g\cos\varphi + C.$$

Учитывая, что $\omega = v/R$, имеем $v^2/2R = -g\cos\varphi + C$. Константу определим по начальным условиям: $v = v_0, \varphi = \varphi_0 = 0$. Откуда $C = v_0^2/2R + g$.

$$\frac{v^2}{2R} = -g\cos\varphi + \frac{v_0^2}{2R} + g \;\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gR(1 - \cos\varphi).$$

Подставляя найденное v^2 в уравнение (1), получаем

$$\cos\varphi = \frac{v_0^2 + 2gR(1-\cos\varphi)}{gR} \quad \text{или} \quad \cos\varphi = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{v_0^2}{gR}\right) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{9{,}81}\right) = 0{,}701.$$

Таким образом, шарик отделится от поверхности при угле $\varphi = 45{,}52°$.

Задачи на составление дифференциальных уравнений движения точки

1) Материальная точка весом 49 Н движется по прямой согласно уравнению $x = 8\sin 2t$ см. Найти силу, действующую на точку в моменты времени, когда ее координата $x = -5$ см.

Ответ: 1 Н и направлена к началу координат.

2) Определить давление человека весом 0.85 кН на площадку лифта в начале подъема и перед остановкой, если ускорение (замедление) равно 0.4g.

Ответ: 1.19 кН; 0.51кН.

3) Материальная точка весом 49 Н движется по горизонтальной окружности радиуса 9 см согласно уравнению s = $8t^3$ см. Определить величину и направление силы F, действующей на эту точку в момент t = 1 с.

Ответ: F = 4 Н; $\alpha = arctg(3/4)$.

4) Материальная точка массой 300 г движется согласно уравнению: $x = 3\cos \pi t$ см, $y = 3\sin \pi t$, $z = 5t$ см. Найти силу, действующую на эту точку.

Ответ: F = 0.089 Н.

5) Определить максимальную скорость велосипедиста на закруглении дороги радиуса 50 м, если коэффициент поперечного трения между шинами велосипеда и асфальтом f = 0.4. Определить, на какой угол отклонилась плоскость велосипеда от вертикальной плоскости. Полотно дороги расположено в горизонтальной плоскости. (v = 14 м/с; $\alpha = arctgf = 21°50'$).

6) На криволинейных участках автодороги возвышают наружную сторону над внутренней для того, чтобы сила давления проезжающего автомобиля была перпендикулярна дороге. Определить угол наклона полотна дороги, если радиус закругления 1000 м, максимальная скорость автомобиля 120 км/ч.

Ответ: $\alpha = 6{,}46°$.

7) Груженая вагонетка массы 700 кг опускается по канатной железной дороге с уклоном $\alpha = 15°$, имея скорость $v = 1{,}6$ м/с. Определить натяжение каната при равномерном спуске и при торможении вагонетки. Время торможения t = 4 с, общий коэффициент сопротивления движению f = 0.015. При торможении вагонетка движется равнозамедленно. (1676 Н, 1956).

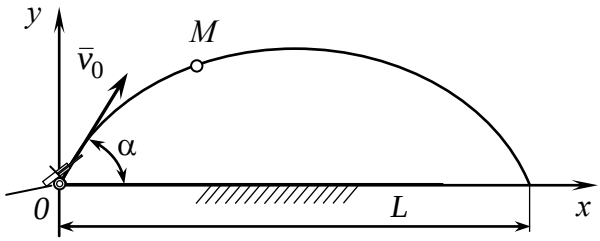
8) На материальную точку массой 200 г, движущуюся вдоль горизонтальной оси Ox, действует постоянная сила F = 2 Н. В начальный момент x_0 = 3 м, v_0 = 4 м/с. Найти уравнение движения точки. ($x = 5t^2 + 4t + 3$).

9) Хоккеист сообщает шайбе прямолинейное движение по ледяному полю. Чему была равна начальная скорость шайбы, если она прошла до остановки 50 м? За какое время шайба прошла это расстояние, если коэф-фициент трения шайбы о лед f = 0.05? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $v_0 = 7$ м/с, t = 14,3 м/с.

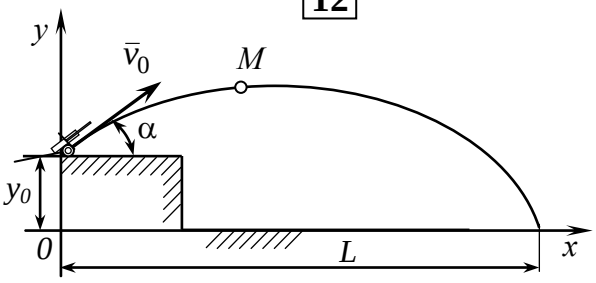
10) Коэффициент трения лыж о снег при движении лыжника по склону горы вниз f = 0,1. Угол склона 60°, а его длина 100 м. Определить время спуска и скорость лыжника в конце склона, если в начале спуска она была равна нулю. Сопротивлением воздуха пренебречь. ($t = 5$ с, v = 40 м/с).

11



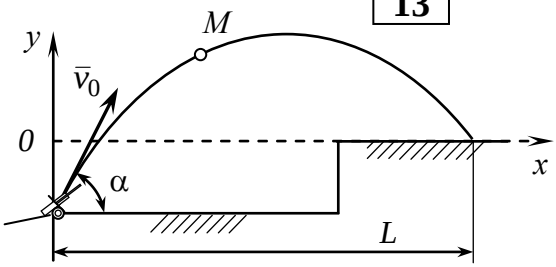
v_0 = 300 м/с, α = 30°. L – ?

12



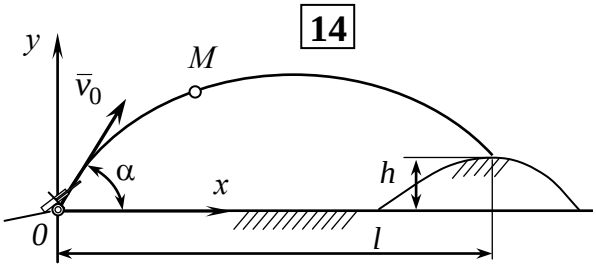
v_0 = 300 м/с, y_0 = 4м, α = 30°. L – ?

13



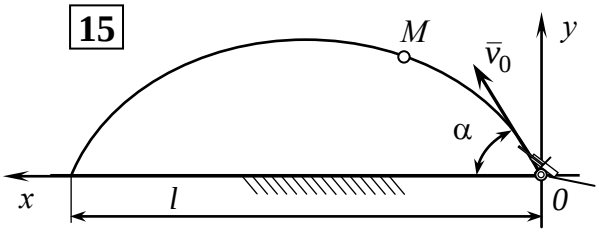
v_0 = 400 м/с, y_0 = – 2м, α = 60°. L – ?

14



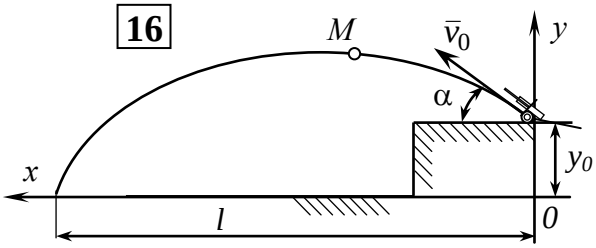
v_0 = 500 м/с, l = 8 км, h = 100м. α – ?

15



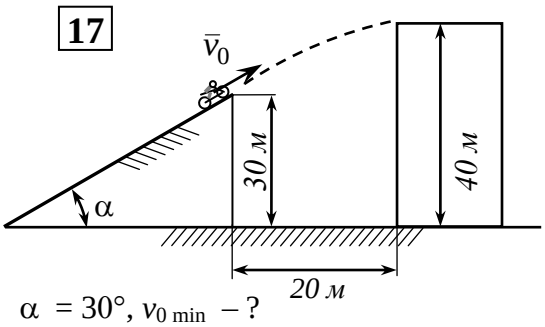
v_0 = 400 м/с, l = 5км. α – ?

16



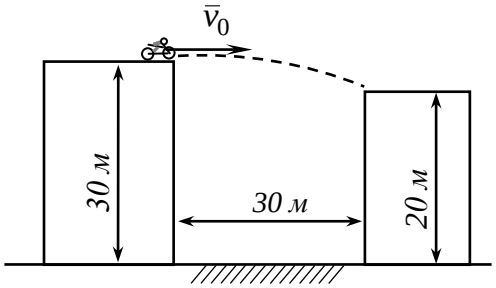
v_0 = 600 м/с, l = 10 км, y_0 = 20 м. α – ?

17



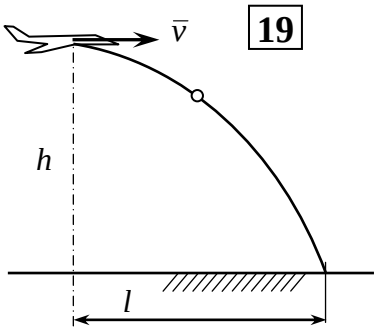
α = 30°, $v_{0\,min}$ – ?

18



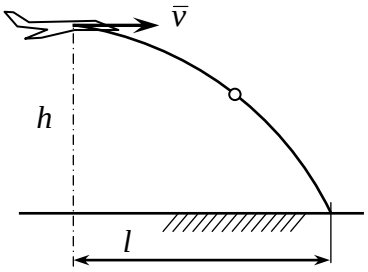
$v_{0\,min}$ – ?

19



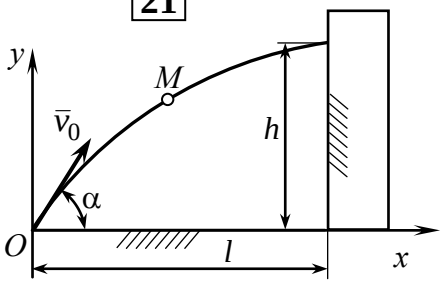
h = 5км, v = 150 м/с. l – ?

20



l = 1 км, v = 100 м/с. h – ?

21

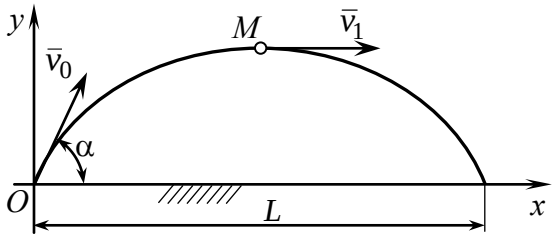


v_0 = 400 м/с, l = 1 км,
h = 30 м. α – ?

3.2. Примеры и задачи на применение общих теорем динамики материальной точки

Пример 6. Найти импульс равнодействующей всех сил, действующих на снаряд за время, когда снаряд из начального положения *O* переходит в наивысшее положение *M*. Известно: $v_0 = 500$ м/с; $\alpha = 60°$; $v_1 = 200$ м/с; масса снаряда 100 кг.

Решение. По теореме об изменении количества движения точки:



$$\begin{cases} mv_{1x} - mv_{0x} = S_x, \\ mv_{1y} - mv_{0y} = S_y. \end{cases}$$

Применительно рисунку, имеем

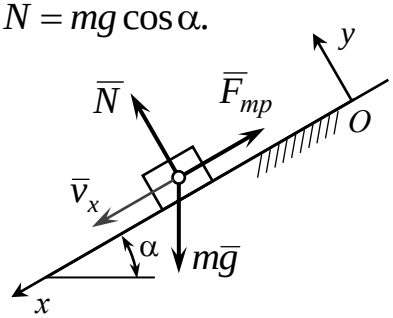
$$\begin{cases} mv_1 - mv_0 \cos\alpha = S_x, \\ 0 - mv_0 \sin\alpha = S_y. \end{cases}$$

Подставляя числовые значения, находим: $S_x = m(v_1 - v_0 \cos\alpha) = -5000$ Н·с, $S_y = -v_0 m \sin\alpha = -43301$ Н·с.

Пример 7. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α = 30°, спускается тело без начальной скорости. Определить, в течение какого времени *t* тело пройдет путь длины *l* = 40 м, если коэффициент трения *f* = 0.1.

Решение. Теорема об изменении количества движения вдоль оси *x* и *y*:

$$\begin{cases} mv_x - mv_{0x} = \sum F_{kx} \cdot t, \\ mv_y - mv_{0y} = \sum F_{ky} \cdot t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mv_x = (mg \sin\alpha - F_{mp}) \cdot t, \\ 0 = (N - mg \cos\alpha) \cdot t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mv_x = (mg \sin\alpha - Nf) \cdot t, \\ N = mg \cos\alpha. \end{cases}$$



Подставляя *N* в первое уравнение системы и сокращая на *m*, находим закон изменения скорости

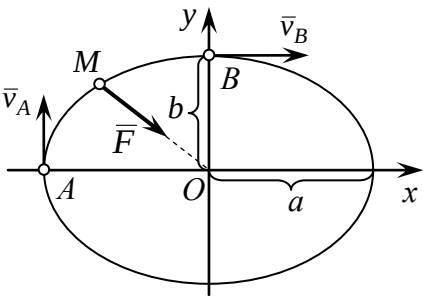
$$v_x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \cdot t,$$

$$x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \cdot t^2 / 2.$$

Отсюда $t = \sqrt{2l / g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} \approx 4.95$ с.

Пример 8. Материальная точка массы *m* движется по эллиптической траектории вокруг неподвижного центра под действием центральной силы. Найти скорость в точке *A*, если скорость в точке *B* равна $v_B = 30$ м/с, а малая полуось эллипса *b* = 5*a*.

Решение. Согласно теореме об изменении момента количества движения точки $dL_z / dt = 0$, в нашем случае $M_z = 0$, так как сила центральная (линия действия силы проходит через центр *O*). Следовательно, $L_z = const$ или $L_{zA} = L_{zB}$ отсюда $mv_A a = mv_B b \Rightarrow v_A = v_B b / a = 600$ м/с.



Пример 9. Вагон весом 16 т наталкивается со скоростью 1 м/с на два упорных буфера. Определить наибольшее сжатие буферов при ударе вагона, если известно, что пружина буфера сжимается на 1см под действием силы в 5 т.

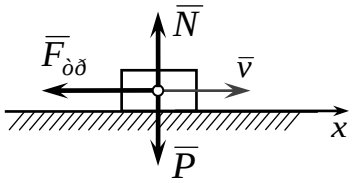
Решение. В момент соприкосновения вагона и буферов на вагон начинают действовать две силы $F = cx$, где c = 5 т/см. Применим теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -F_x dx = -2\cdot 5xdx = -10xdx.$$

Интегрируем слева по v от v_0 = 100 см/с до нуля, а справа по x от нуля до какого-то предельного сжатия λ. Масса вагона m = 16/g = 16/981.

$$\int_{100}^{0} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -10\int_0^{\lambda} xdx \Rightarrow -m\frac{100^2}{2} = -10\frac{\lambda^2}{2} \Rightarrow \frac{16\cdot 100^2}{981\cdot 2} = 5\lambda^2 \Rightarrow \lambda = 4{,}04\,\text{см}.$$

Пример 10. Телу весом P, лежащему на горизонтальной плоскости, сообщают начальную горизонтальную скорость v_0. Требуется определить, через сколько времени тело остановится и какой путь оно пройдет до остановки, если коэффициент трения тела о плоскость равен f.

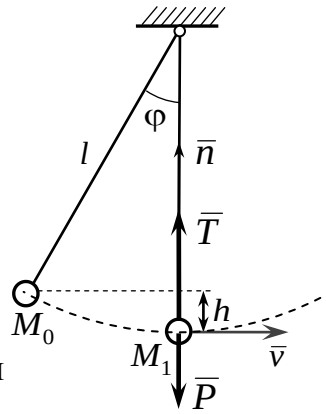


Решение. По теореме об изменении количества движения точки: $mv_x - mv_{0x} = -F_{тр}t$,

где $F_{тр} = Nf = mgf$. Поскольку $v_x = v_0$ и $v_{0x} = 0$, отсюда находим искомое время: $t = v_0/fg$. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки: $mv^2/2 - mv_0^2/2 = -F_{тр}s$. Учитывая $v = 0$, тогда $mv_0^2/2 = mgfs$.

Отсюда путь, пройденный телом до остановки: $s = v_0^2/2fg$.

Пример 11. Груз весом P, подвешенный на нити длиной l, отклоняют от вертикали на угол φ в положение M_0 и отпускают без начальной скорости. Определить натяжение нити в момент, когда груз дойдет до наинизшего положения M_1.



Решение. Дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на главную нормаль:

$$mv_1^2/l = T - P \quad \Rightarrow \quad T = mv_1^2/l + P, \qquad (1)$$

где v_1 – скорость груза в положении M_1. Для определения mv_1^2 воспользуемся уравнением: $mv_1^2/2 - mv_0^2/2 = A$,

где $A = Ph = Pl(1-\cos\varphi)$ – работа силы тяжести на M_0M_1.

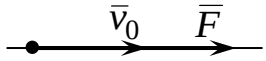
Учитывая условие задачи $v_0 = 0$, из последнего находим $mv_1^2 = 2Pl(1-\cos\varphi)$, подставляя найденное в (1), имеем

$$T = P(3 - 2\cos\varphi).$$

Задачи на применение общих теорем динамики материальной точки

1) Модуль постоянной по направлению силы изменяется по закону $F = 8t^2 + 4t + 3$. Найти модуль импульса этой силы за промежуток времени $\tau = t_2 - t_1$, где $t_2 = 2$ с, $t_1 = 0$. (34 Н·с).

2) На материальную точку массой 10 кг действует сила постоянного направления, значение которой изменяется по закону $F = 5t^3$. Определить скорость этой точки в момент $t = 2$ с, если $v_0 = 3$ м/с.



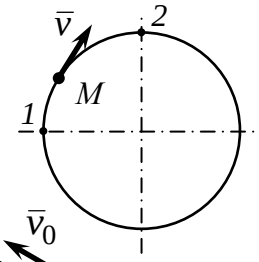
Ответ: 5 м/с.

3) Материальная точка массой 5 кг движется по прямой под действием постоянной силы $\bar{F}$ (схема предыдущей задачи). Скорость токи за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, где $t_2 = 10$ с, $t_1 = 0$ изменилась от $v_1 = 5$ м/с до $v_2 = 15$ м/с. Определить модуль силы $\bar{F}$. (5 Н).

4) С какой начальной скоростью брошен камень под углом 30º к горизонту, если до падения его на землю прошло 2.5 с? Чему равна минимальная скорость камня во время его движения? Сопротивлением воздуха пренебречь.

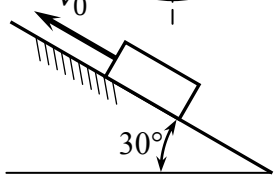
Ответ: v_0 = 24,5 м/с, v_{min} = 21,2 м/с.

5) Тело, которому сообщили начальную скорость v_0 = 6 м/с, скользило по шероховатой горизонтальной плоскости и остановилось через 3 с. Найти коэффициент трения скольжения. (0,2).



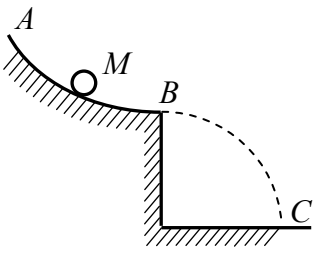
6) Материальная точка *M* массой *m* = 1 кг равномерно движется по окружности со скоростью *v* = 4 м/с. Определить модуль импульса равнодействующей всех сил, действующих на эту точку за время ее движения из положения *1* в положение *2*.

Ответ: 5,66 Н·с.

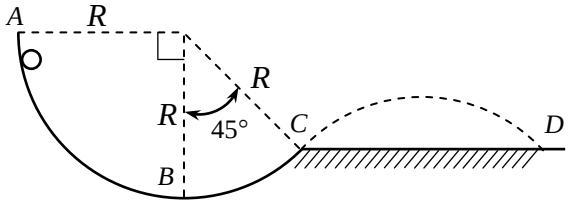


7) Телу, которое скользит по гладким наклонным направляющим, сообщили начальную скорость v_0 = 9,81 м/с. Определить, через какое время тело достигнет максимальной высоты подъема. (2 с).

8) Какой должен быть коэффициент трения *f* колес заторможенного автомобиля о дорогу, если при скорости езды *v* = 30 м/с он останавливается через 10 с после начала торможения. *Ответ:* 0,34.

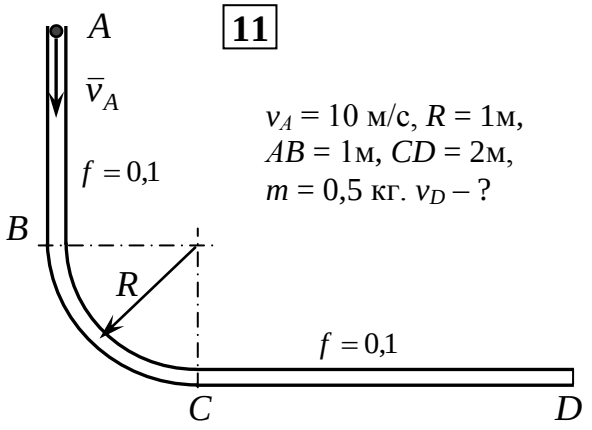


9) Тело *M*, размерами которого можно пренебречь, в конце участка *AB* приобрело скорость 15 м/с, направленную горизонтально. Участок свободного движения *BC* оно прошло за 2,04 с. Определить величину скорости тела в конце участка *BC*. *Ответ*: 25 м/с.



10) Шарик *M*, размером которого можно пренебречь, движется без начальной скорости по дуге *ABC* окружности радиуса *R*. Затем шарик движется свободно. Пренебрегая трением, определить, на каком расстоянии *CD* от точки *C* шарик коснется горизонтальной плоскости. ($R\sqrt{2}$).

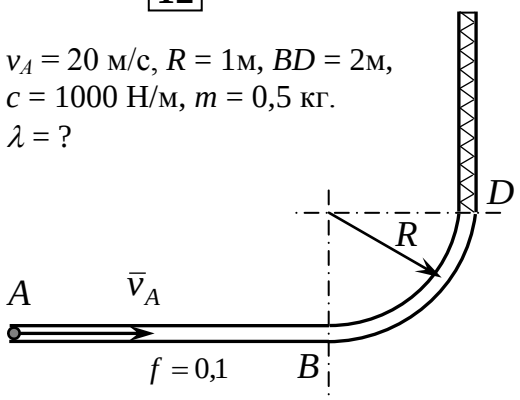
11

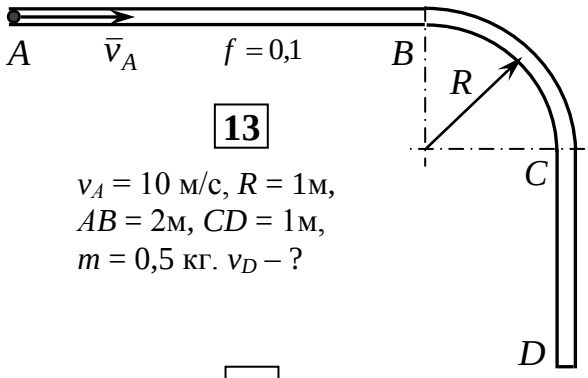


v_A = 10 м/с, R = 1м,
AB = 1м, CD = 2м,
m = 0,5 кг. v_D – ?

12

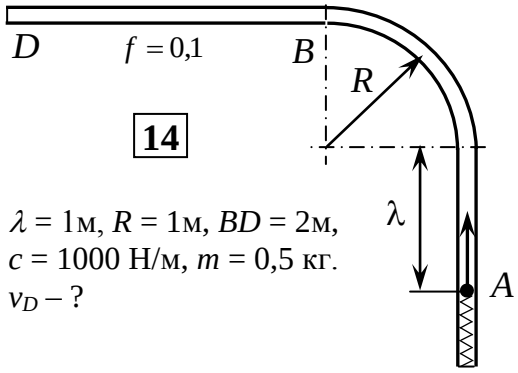
v_A = 20 м/с, R = 1м, BD = 2м,
c = 1000 Н/м, m = 0,5 кг.
λ = ?





13

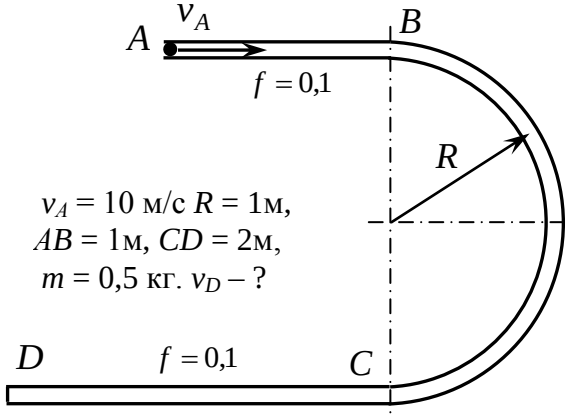
v_A = 10 м/с, R = 1м,
AB = 2м, CD = 1м,
m = 0,5 кг. v_D – ?



14

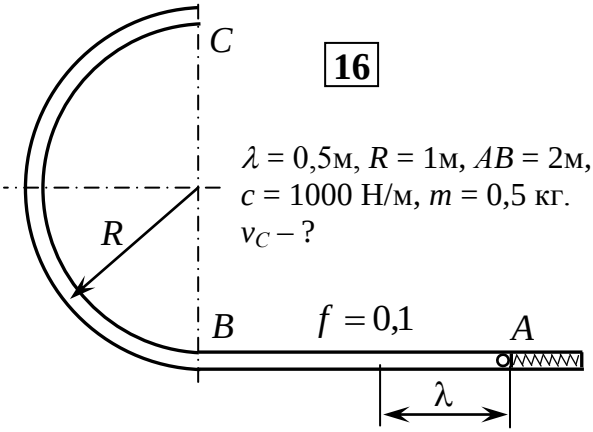
λ = 1м, R = 1м, BD = 2м,
c = 1000 Н/м, m = 0,5 кг.
v_D – ?

15



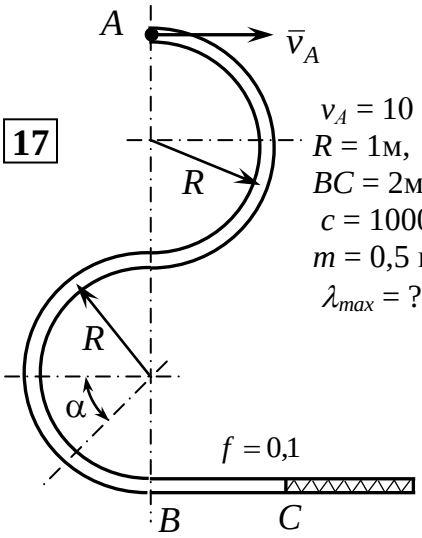
v_A = 10 м/с R = 1м,
AB = 1м, CD = 2м,
m = 0,5 кг. v_D – ?

16



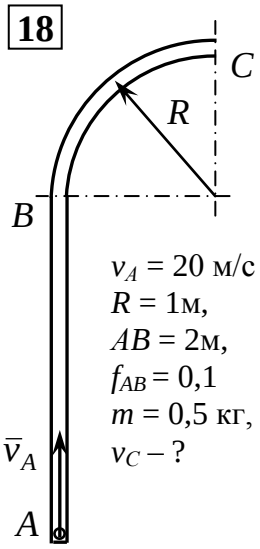
λ = 0,5м, R = 1м, AB = 2м,
c = 1000 Н/м, m = 0,5 кг.
v_C – ?

17



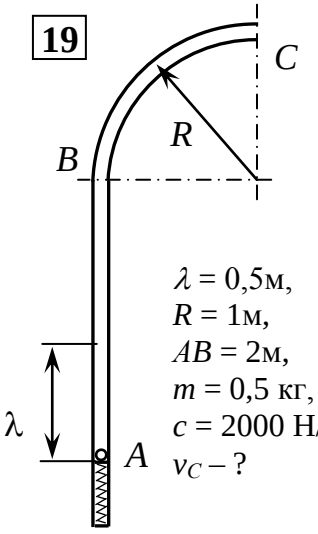
v_A = 10 м/с,
R = 1м,
BC = 2м,
c = 1000 Н/м,
m = 0,5 кг.
λ_{max} = ?

18



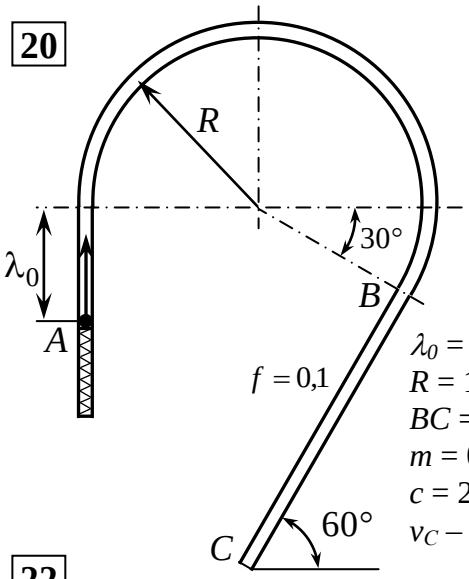
v_A = 20 м/с
R = 1м,
AB = 2м,
f_{AB} = 0,1
m = 0,5 кг,
v_C – ?

19



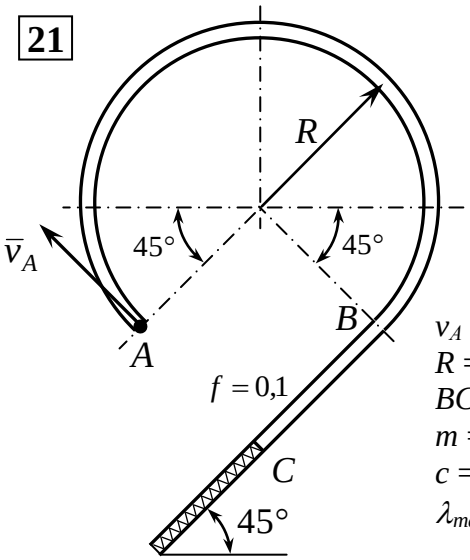
λ = 0,5м,
R = 1м,
AB = 2м,
m = 0,5 кг,
c = 2000 Н/м.
v_C – ?

20



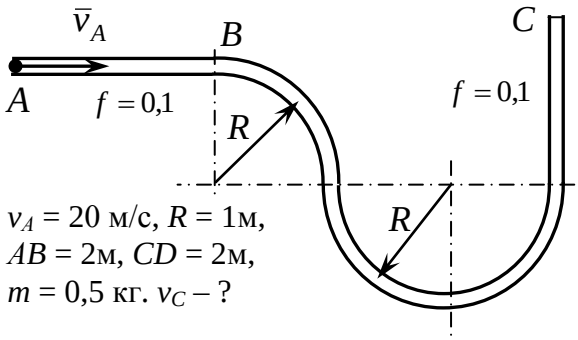
λ_0 = 0,5м,
R = 1м,
BC = 2м,
m = 0,5 кг,
c = 2000 Н/м.
v_C – ?

21



v_A = 20 м/с
R = 1м,
BC = 2м,
m = 0,5 кг,
c = 1000 Н/м,
λ_{max} = ?

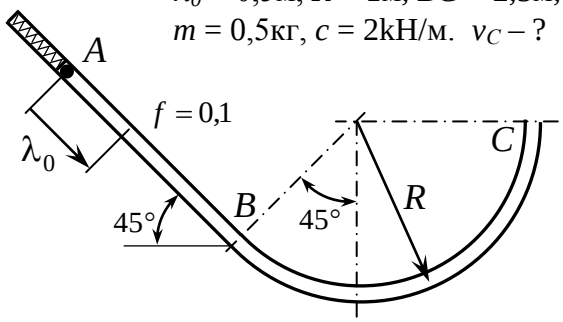
22

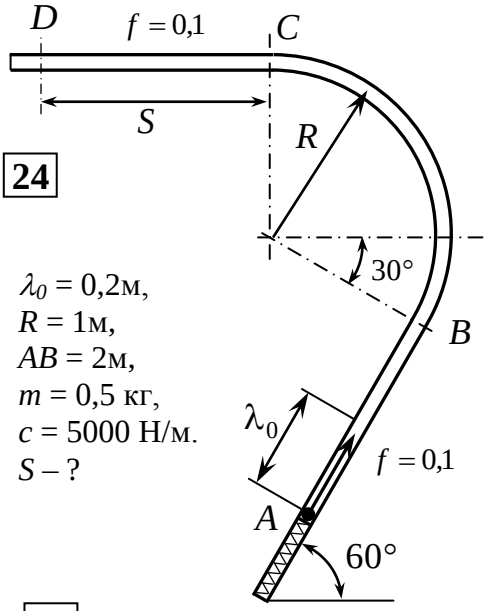


v_A = 20 м/с, R = 1м,
AB = 2м, CD = 2м,
m = 0,5 кг. v_C – ?

23

λ_0 = 0,5м, R = 1м, BC = 2,5м,
m = 0,5кг, c = 2kН/м. v_C – ?

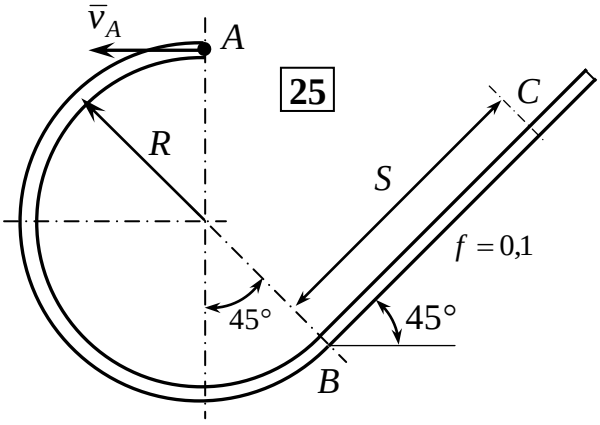




24

λ_0 = 0,2м,
R = 1м,
AB = 2м,
m = 0,5 кг,
c = 5000 Н/м.
S – ?

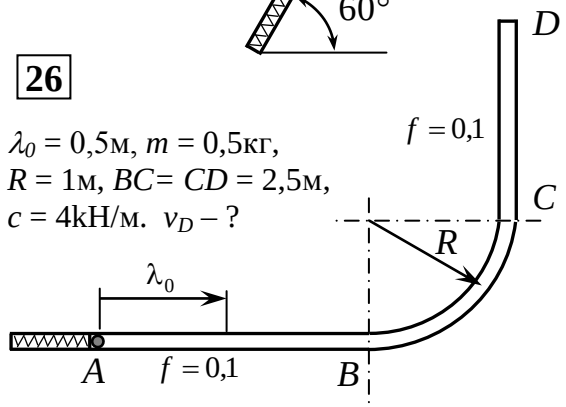
25



v_A = 20 м/с, R = 1м, m = 0,5 кг. S – ?

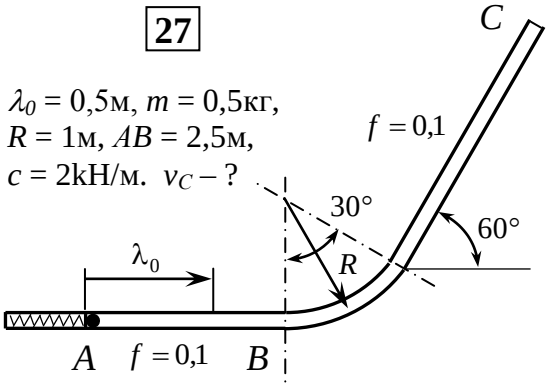
26

λ_0 = 0,5м, m = 0,5кг,
R = 1м, BC= CD = 2,5м,
c = 4kН/м. v_D – ?



27

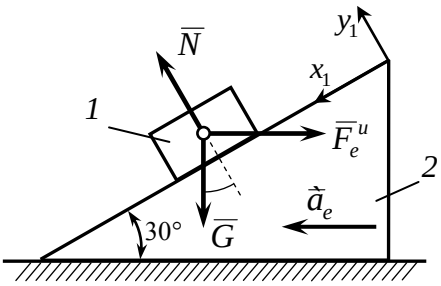
λ_0 = 0,5м, m = 0,5кг,
R = 1м, AB = 2,5м,
c = 2kН/м. v_C – ?



3.3. Примеры и задачи на относительное движение материальной точки

Пример 12. Тело *1* массой m_1 = 0.5 кг удерживается в состоянии относительного покоя на гладкой поверхности призмы *2*. Определить ускорение призмы *2*, обеспечивающее относительный покой тела *1*.

Решение. На тело *1* действуют сила тяжести $\overline{G}$, нормальная реакция $\overline{N}$ и переносная сила инерции $\overline{F}_e^u$, направленная противоположно переносному ускорению призмы $\overline{a}_e$ ($F_e^u = ma_e$). Введем оси x_1 и y_1, связанные с движущейся призмой.



Запишем дифференциальное уравнение относительного движения тела *1* в проекциях на ось x_1: $0 = G\sin 30 - F_e^u \cos 30$ или

$$0 = mg\sin 30 - ma_e \cos 30.$$

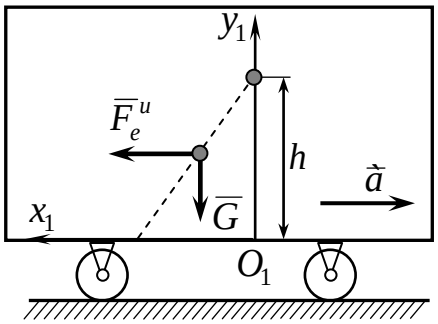
Отсюда находим ускорение призмы *2*:

$$a_e = g\mathrm{tg}30 = 5{,}66\ \text{м/с}^2.$$

Пример 13. Вагон трогается с постоянным ускорением $\overline{a}$. Определить траекторию движения тела *M*, упавшего с полки высотой *h*, относительно вагона.

Решение. Вводим оси, связанные с вагоном. Указываем действующие на тело *M* силы: $\overline{G}$ – сила тяжести и $\overline{F}_e^u$ – переносная сила инерции, направленная противоположно переносному ускорению вагона $\overline{a}$. Дифференциальные уравнения относительного движения:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = F_e^u, \\ m\ddot{y}_1 = -G. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = a, \\ \ddot{y}_1 = -g. \end{cases}$$



Интегрируя, получаем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = at + C_1, \\ \dot{y}_1 = -gt + C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = at^2/2 + C_1 t + C_3, \\ y_1 = -gt^2/2 + C_2 t + C_4. \end{cases}$$

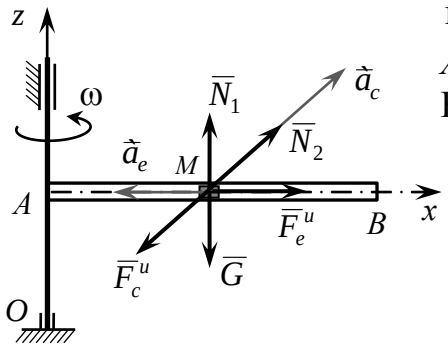
Используя начальные условия при $t = 0$: $x_1 = 0$, $y_1 = h$, $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{y}_1 = 0$, найдем постоянные интегрирования: $C_1 = C_3 = C_2 = 0$, $C_4 = h$. Уравнения движения примут вид: $x_1 = at^2/2$, $y_1 = h - gt^2/2$.

Траекторию движения получим, исключив параметр *t*: $y_1 = h - gx_1/a$ – уравнение прямой. Тело *M* упадет на пол вагона на расстоянии $s = ah/g$ от края полки (при $y_1 = 0$ $x_1 = s$).

Если вагон будет двигаться равномерно (a = 0), то s = 0. Наблюдатель увидит траекторию – вертикальную прямую, такую же, как и при неподвижном вагоне.

Пример 14. Горизонтальная трубка длиной L м равномерно вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω рад/с. Внутри трубки находится тело M. Определить скорость тела относительно трубки в момент его вылета, если в начальный момент относительная скорость $v\big|_{x=x_0} = 0$. Трением пренебречь.

Решение. На тело помимо силы тяжести $\overline{G}$ и реакции от нее $\overline{N}_1$ будут действовать кориолисова сила инерции $\overline{F}_c^u$, ее реакция $\overline{N}_2$ и переносная сила инерции $\overline{F}_e^u$. По теореме об изменении кинетической энергии точки в относительном движении: $mv_1^2/2 - mv_0^2/2 = \sum A_k + A(\overline{F}_e^u)$,



где v_0 и v_1 – значения относительных скоростей, A – работа на относительном перемещении.

В нашем случае $\sum A_k = 0$,

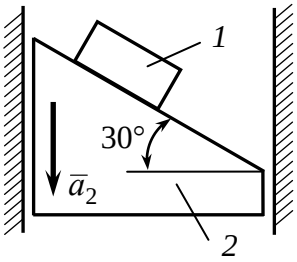
$$A(\overline{F}_e^u) = \int_{x_0}^{L} ma_e dx = m\omega^2 \int_{x_0}^{L} x dx = \frac{m\omega^2}{2}(L^2 - x_0^2).$$

$$mv_1^2/2 = A(\overline{F}_e^u).$$

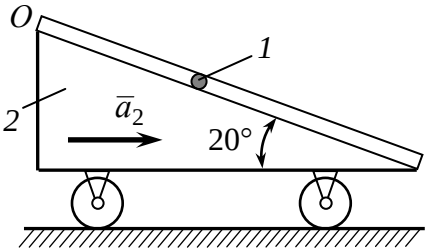
Откуда скорость тела в момент вылета

$$v_B = \omega\sqrt{L^2 - x_0^2}.$$

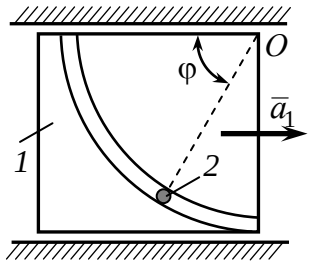
Задачи на относительное движение материальной точки



1) Груз *1* массой m_1 = 1 кг спускается вниз по наклонной плоскости тела *2*. Тело *2* движется по вертикальным направляющим вниз с ускорением a_2 = 2 м/с^2. Определить силу давления груза *1* на тело *2*. (6.76 Н).



2) Шарик массой m_1 = 0.2 кг движется из состояния относительного покоя в точке O по гладкому цилиндрическому каналу тела *2*. Тело 2 движется с постоянным ускорением a_2 = 2 м/с^2. Определить скорость относительного движения шарика в момент t = 5 с. (7.4).

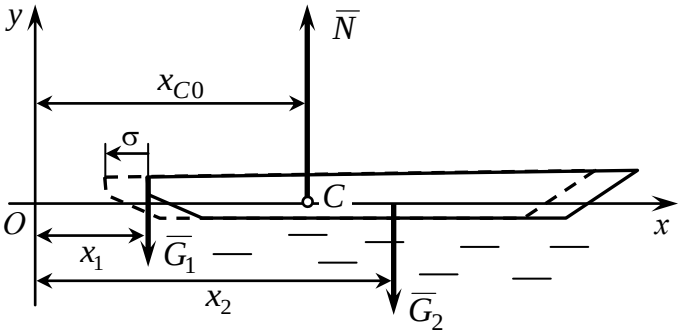


3) Тело *1* движется по прямолинейным направляющим. Внутри тела имеется канал в форме дуги окружности, по которому перемещается шарик *2* массой m. Определить ускорение a_1 тела *1*, если при угле φ = 60° шарик находится в состоянии относительного покоя.

Ответ: 5,66 м/с^2.

3.4. Примеры и задачи на применение законов сохранения механической системы

Пример 15. Человек массой m_1 стоит на корме лодки массой m_2 длиной l, находящейся в покое в стоящей воде. Определить, пренебрегая сопротивлением воды, расстояние σ, на которое переместится лодка, если человек перейдет на нос лодки.



Решение. Система лодка-человек находится в покое под действием трех внешних вертикальных сил: веса человека $\overline{G}_1$, веса лодки $\overline{G}_2$ и реакции воды N. Пусть x_1 и x_2 начальные координаты человека и лодки.

Поскольку $\sum F_{kx}^e = 0$ и начальная скорость лодки равна нулю $\dot{x}_{C0} = 0$, то по второму закону сохранения $x_C = const$ или $x_{C0} = x_C$, где x_{C0} и x_C – координаты центра масс системы до перемещения и после перемещения человека по лодке соответственно. Определим их по формуле (2.1)

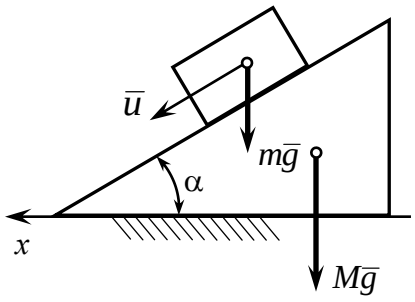
$$x_{C0} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad x_C = \frac{m_1(x_1 + l - \sigma) + m_2(x_2 - \sigma)}{m_1 + m_2}.$$

Приравниваем координаты центра масс до и после перемещения человека

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1(x_1 + l - \sigma) + m_2(x_2 - \sigma).$$

Откуда находим перемещение лодки $\sigma = m_1 l/(m_1 + m_2)$.

Пример 16. По грани клина *1* массой M, поставленной на гладкой горизонтальной плоскости, опускается с относительной скоростью u тело *2* массой m. Определить скорость клина.

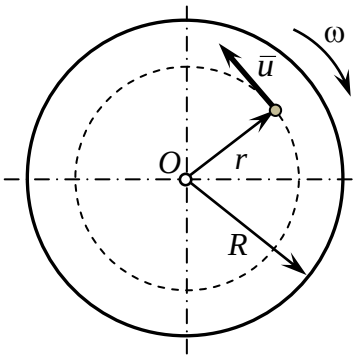


Решение. Поскольку проекция главного вектора внешних сил на ось x равна нулю, согласно второму закону сохранения количества движения системы $K_x = \sum m_k v_{kx} = const$ или

$$\sum m_{k0} v_{kx0} = \sum m_k v_{kx}.$$

В начале движения количество движения системы равно нулю $\sum m_{k0} v_{kx0} = 0$, т.к. система была неподвижна. В последующий момент клин начнет двигаться с некоторой скорость $v_{1x} = -v$ влево, а тело *2* будет иметь абсолютную скорость $v_{2x} = -v + u\cos\alpha$. Тогда количество движения системы в последующий момент $\sum m_k v_{kx} = -Mv + m(-v + u\cos\alpha) = 0$, отсюда $v = mu\cos\alpha/(M + m)$.

Пример 17. Круглая горизонтальная платформа может вращаться без трения вокруг неподвижной оси Oz, проходящей через ее центр O; по платформе на неизменном расстоянии от оси Oz, равном r, идет с постоянной относительной скоростью u человек, масса которого равна m. С какой угловой скоростью ω будет при этом вращаться платформа вокруг оси, если ее масса M равномерно распределена по площади круга радиуса R. В начальный момент платформа и человек имели нулевые скорости.



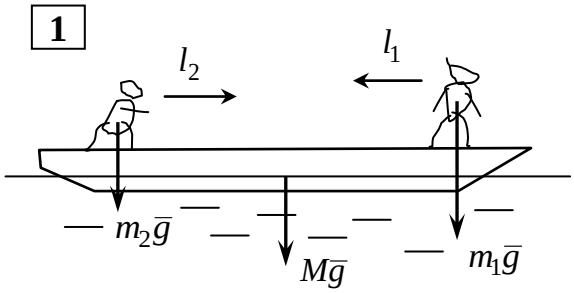
Решение. Платформа и человек образуют систему. Кинетический момент этой системы относительно вертикальной оси Oz есть константа, поскольку внешние силы не создают момент относительно этой оси (2-й закон сохранения): $L_z = const$ или $L_z = L_{z0}$. Кинетический момент системы в начальный момент времени $L_{z0} = 0$, т.к. платформа и человек имели нулевые скорости. В последующий момент, человек идет по платформе

$$L_z = L_{платф.} + L_{чел.} = J\omega + mv_{чел.}r\,,$$

где ω – угловая скорость платформы, $v_{чел.}$ – абсолютная скорость человека. Тогда $J\omega + m(\omega r - u)r = 0$. Учитывая, что момент инерции платформы относительно оси $J = MR^2/2$, находим $\omega = 2mur/(MR^2 + 2mr^2)$.

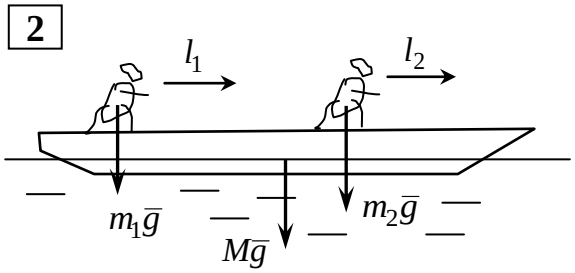
Задачи на применение законов сохранения

1



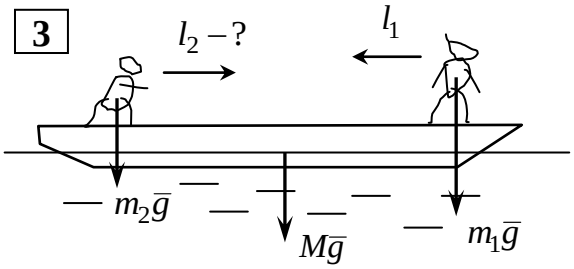
m_1 = 100 кг, l_1 = 4 м, m_2 = 80 кг, l_2 = 2 м.
M = 100 кг, $\sigma_{лодки}$ – ? (перемещение)

2



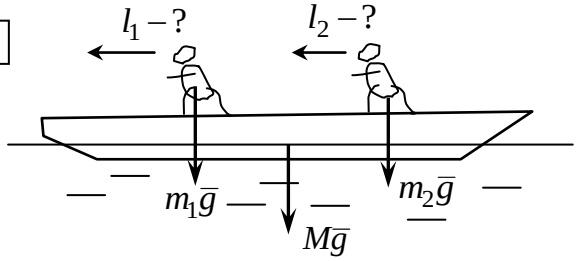
m_1 = 90 кг, l_1 = 4 м, m_2 = 80 кг, l_2 = 2 м.
M = 100 кг, $\sigma_{лодки}$ – ?

3



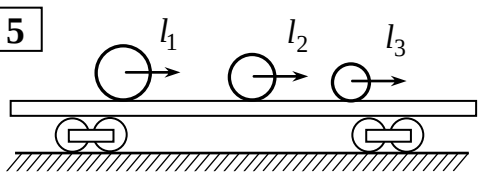
m_1 = 110 кг, l_1 = 4 м, m_2 = 80 кг, M = 100 кг,
l_2 = ? м при условии перемещение $\sigma_{лодки}$ = 0

4



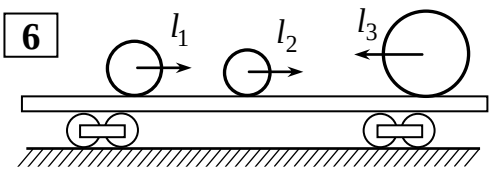
m_1 = 100 кг, m_2 = 80 кг, M = 100 кг,
$l_1 = l_2$ = ? м чтобы перемещение $\sigma_{лодки}$ = 2 м

5



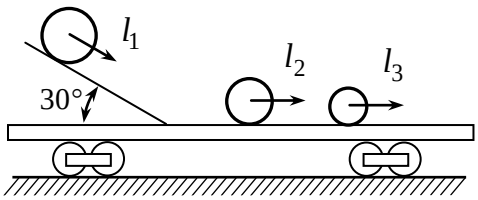
m_1 = 1 т, l_1 = 10 м, m_2 = 0,5 т, l_2 = 8 м,
m_3 = 0,2 т, l_3 = 5 м, M = 5 т. $\sigma_{\text{платформы}}$ = ?

6



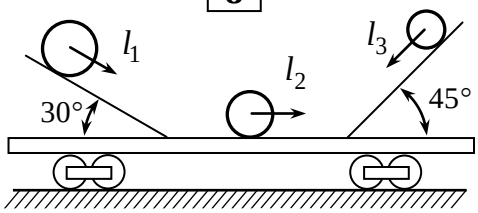
m_1 = 1 т, l_1 = 10 м, m_2 = 0,5 т, l_2 = 8 м,
m_3 = 5 т, l_3 = 5 м, M = 5 т. $\sigma_{\text{платформы}}$ = ?

7



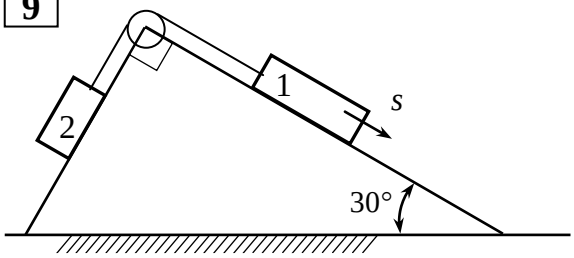
m_1 = 1 т, l_1 = 10 м, m_2 = 0,5 т, l_2 = 8 м,
m_3 = 0,2 т, l_3 = 5 м, M = 5 т. $\sigma_{\text{платформы}}$ = ?

8



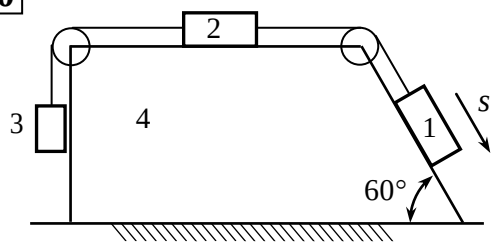
m_1 = 1 т, l_1 = 10 м, m_2 = 0,5 т, l_2 = 8 м,
m_3 = 2 т, l_3 = 2 м, M = 5 т. $\sigma_{\text{платформы}}$ = ?

9



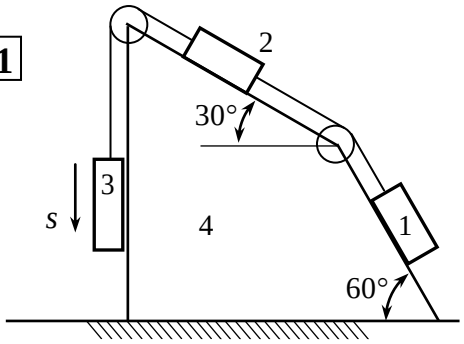
m_1 = 10 кг, m_2 = 5 кг, s = 1 м,
$M_{\text{призмы}}$ = 5 кг. $\sigma_{\text{призмы}}$ = ?

10



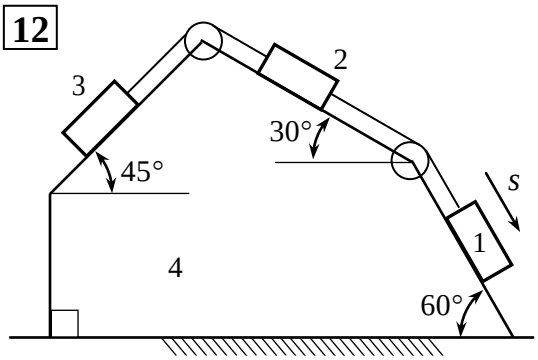
m_1 = 6 кг, m_2 = 5 кг, m_3 = 4 кг,
m_4 = 5 кг, s = 1 м. σ_4 = ?

11



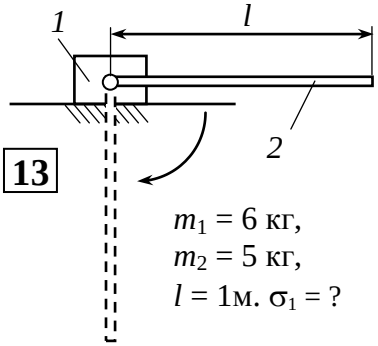
m_1 = 6 кг, m_2 = 5 кг, m_3 = 4 кг,
m_4 = 10 кг, s = 1 м. σ_4 = ?

12



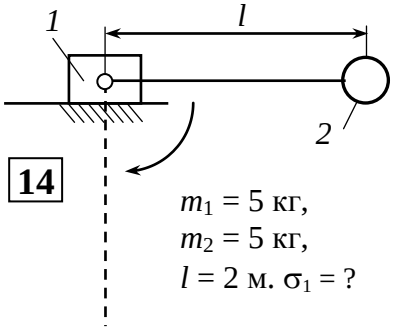
m_1 = 6 кг, m_2 = 5 кг, m_3 = 4 кг,
m_4 = 5 кг, s = 1 м. σ_4 = ?

13



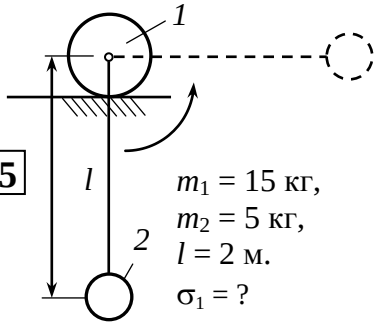
m_1 = 6 кг,
m_2 = 5 кг,
l = 1м. σ_1 = ?

14



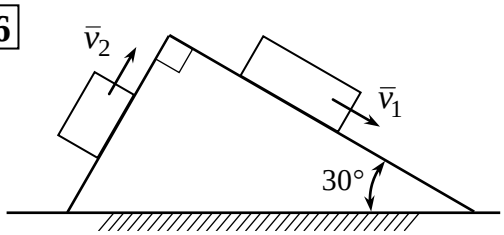
m_1 = 5 кг,
m_2 = 5 кг,
l = 2 м. σ_1 = ?

15



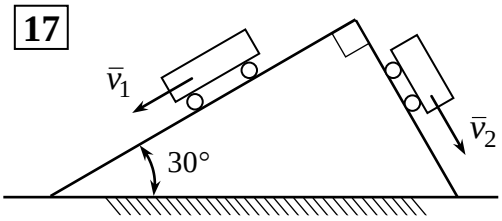
m_1 = 15 кг,
m_2 = 5 кг,
l = 2 м.
σ_1 = ?

16



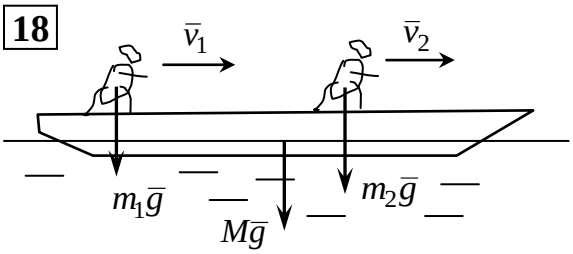
m_1 = 10 кг, v_1 = 0,5 м/с, m_2 = 5 кг,
v_2 = 1 м/с, $M_{призмы}$ = 5 кг. $V_{призмы}$ = ?

17



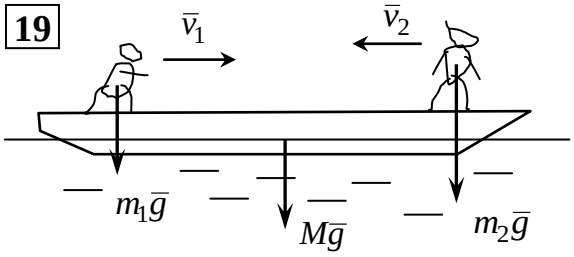
m_1 = 8 кг, v_1 = 0,5 м/с, m_2 = 5 кг,
v_2 = 1 м/с, $M_{призмы}$ = 5 кг. $V_{призмы}$ = ?

18



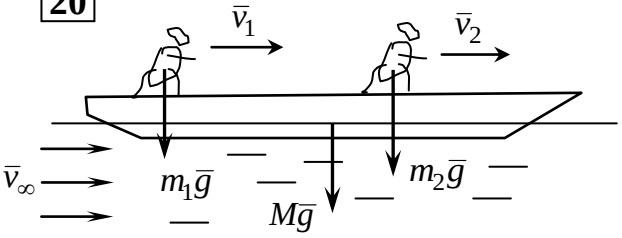
m_1 = 90 кг, v_1 = 4 м/с, M = 100 кг,
m_2 = 80 кг, v_2 = 2 м/с. $v_{лодки}$ – ?

19



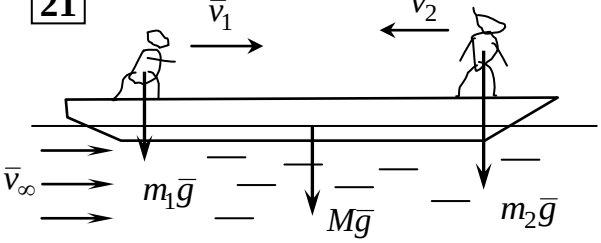
m_1 = 100 кг, v_1 = 4 м/с, M = 100 кг
m_2 = 80 кг, v_2 = 2 м/с. $v_{лодки}$ – ?

20



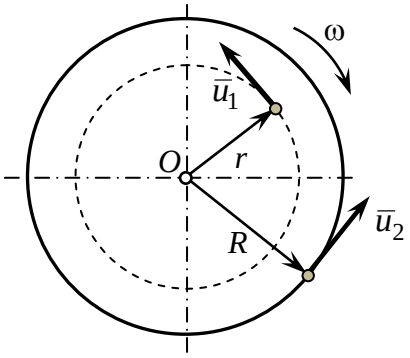
m_1 = 90 кг, v_1 = 4 м/с, v_∞ = 2 м/с, M = 100 кг,
m_2 = 100 кг, v_2 = 5 м/с. $v_{лодки}$ – ?

21



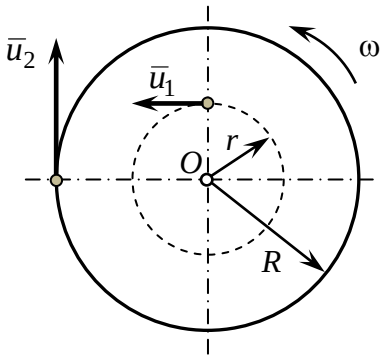
m_1 = 50 кг, v_1 = 4 м/с, v_∞ = 4 м/с
m_2 = 80 кг, v_2 = 2 м/с, M = 90 кг. $v_{лодки}$ – ?

22



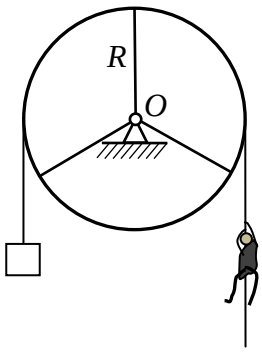
m_1 = 90 кг, $u_{1\ отн.}$ = 4 м/с,
m_2 = 80 кг, $u_{2\ отн.}$ = 6 м/с,
r = 3 м, R = 4 м,
$M_{диска}$ = 100 кг,
$\omega_{диска}$ – ?

23



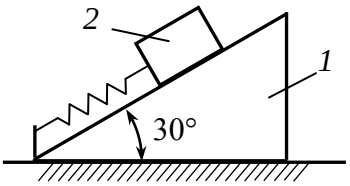
m_1 = 50 кг, $u_{1\ отн.}$ = 5 м/с,
m_2 = 80 кг, $u_{2\ отн.}$ = 6 м/с,
r = 2 м, R = 4 м,
$M_{диска}$ = 50 кг.
$\omega_{диска}$ – ?

24



$m_{гр.}$ = 80 кг, $u_{1\ отн.}$ = 1 м/с,
$m_{чел.}$= 80 кг, R = 2 м.
$\omega_{кольцо}$ – ?, $u_{гр0}$ = ?
($M_{кольцо}$ = 0 кг.)

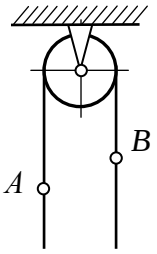
25) На средней скамейке лодки, находившейся в покое, сидят два человека. Один из них, массы m_1 = 50 кг, переместился вправо на нос лодки. На какое расстояние должен переместиться 2-й человек массы m_2 = 70 кг для того, чтобы лодка осталась в покое. Длина лодки 4 м. Сопротивлением воды движению лодки пренебречь. (10/7 м).



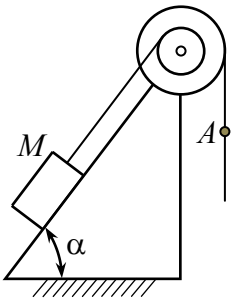
26) Клин *1* весом 70 Н размещен на гладкой горизонтальной плоскости. Пружину сжали и тело *2* весом 30 Н отпустили из состояния покоя. Определить расстояние, на которое переместится клин, если тело *2* прошло 40 см по наклонной грани клина. (10,4 см).

27) Лодку весом 1 кН вместе с человеком, вес которого 0,6 кН, несет течение реки. Человек стал переходить по дну лодки в направлении, противоположном движению реки, со скоростью 0,8 м/с относительно лодки. Пренебрегая сопротивлением воды, определить скорость лодки во время перемещения человека, если скорость течения равна 0,5 м/с. (0,8 м/с)

28) В лодке весом 900 Н, которую несет течение реки, сидят два человека весом 500 Н и 700 Н. Чтобы поменяться местами, человек весом 500 Н переходит по лодке в направлении течения реки со скоростью 0,6 м/с относительно лодки, а второй в это же время движется в противоположном направлении с относительной с относительной скоростью 0,2 м/с. Пренебрегая сопротивлением воды, определить скорость лодки во время перемещения людей, если скорость течения 0,4 м/с. (0,324 м/с).



29) Через блок перекинут канат; за точку *A* каната ухватился человек, к точке *B* подвязан груз одинаковой массы с человеком. С какой скоростью будет двигаться груз, если человек станет подниматься по канату со скоростью *u* относительно каната. Масса блока в 4 раза меньше массы человека; считать, что масса равномерно распределена по его ободу. (4*u*/9).

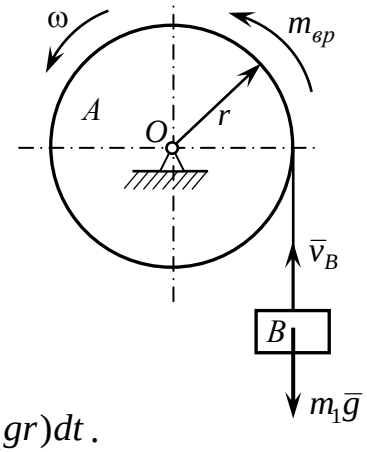


30) Груз *M* весом *P* = 2,1 кН удерживается на наклонной плоскости человеком весом *Q* = 0,7 кН, ухватившимся за веревку в точке *A*. Затем человек стал подниматься по веревке вверх со скоростью *u* = 0,74 м/с относительно веревки. Пренебрегая весом блока и трением, определить скорость движения груза *M*, если $\alpha = \arcsin\frac{5}{6}$, а радиусы блоков *r* = 0,1 м, *R* = 0,25 м. ($v = QRru/(Pr^2 + QR^2) = 0{,}2$ м/с).

31) Через блок радиуса *r* = 20 см и весом *Q* = 100 Н переброшена веревка, за один конец которого ухватился человек весом *P* = 600 Н, за второй – человек того же веса. Оба, перебирая веревку, стали подниматься равномерно вверх, один со скоростью v_1 = 0.5 м/с, второй со скоростью v_2 = 0.24 м/с относительно веревки. Считая массу блока равномерно распределенной по ободу, определить его угловую скорость. ($\omega = P(v_1 - v_2)/(2P + Q)r = 0.6c^{-1}$).

3.5. Примеры и задачи на общие теоремы динамики системы

Пример 18. Груз *B* массы m_1 поднимается с посредством каната, навитого на барабан *A* радиуса *r* и массы m_2. К барабану приложен вращающий момент $m_{вр} = at$, где *a* – постоянная. Определить угловую скорость барабана, считая его сплошным цилиндром. В начальный момент барабан и груз находились в покое.



Решение. Применим теорему об изменении кинетического момента относительно оси *Oz* (проходит через точку *O* перпендикулярно плоскости):

$$dL_z/dt = M_z^e.$$

Сумма моментов внешних сил относительно оси *Oz*

$$M_z^e = \sum m_z(\bar{F}_k^e) = m_{вр} - m_1 gr.$$

Кинетический момент системы относительно оси *Oz*

$$L_z = L_{бар.} + L_{гр.} = J_A\omega + m_1 v_B r = (J_A + m_1 r^2)\omega$$

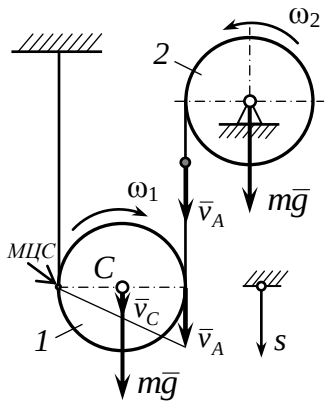
$$(J_A + m_1 r^2)\frac{d\omega}{dt} = m_{вр} - m_1 gr \;\Rightarrow\; (J_A + m_1 r^2)\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^t (at - m_1 gr)dt.$$

Так как $J_A = m_2 r^2/2$, $\left(\frac{m_2 r^2}{2} + m_1 r^2\right)\omega = \frac{at^2}{2} - m_1 grt$, откуда $\omega = \frac{at^2 - 2m_1 grt}{m_2 r^2 + 2m_1 r^2}$.

Пример 19. Одинаковые блоки *1* и *2* массой и радиусами, представляющие собой однородные диски, начинают движение из состояния покоя под действием силы тяжести. Определить скорость центра *C* блока *1* после того, как он опустится вниз на расстояние *s* = 1 м.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы

$T - T_0 = \sum A_k^e$, где $T_0 = 0$ по условию.



Запишем кинетическую энергию системы: $T = T_1 + T_2$.

Кинетическая энергия диска *1*:

$T_1 = mv_C^2/2 + J_1\omega_1^2/2$, где $J_1 = mr^2/2$ и $\omega_1 = v_C/r$, то

$$T_1 = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{mr^2}{2}\cdot\frac{v_C^2}{r^2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mv_C^2}{4} = \frac{3mv_C^2}{4}.$$

Кинетическая энергия диска *2*:

$T_2 = J_2\omega_2^2/2$, где $J_2 = mr^2/2$ и $\omega_2 = v_A/r = 2v_C/r$, то

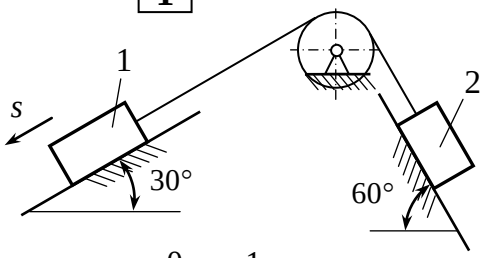
$T_2 = J_2\omega_2^2/2 = mv_C^2$.

Окончательно, кинетическая энергия системы: $T = 3mv_C^2/4 + mv_C^2 = 7mv_C^2/4$.

При движении системы работу совершает только сила тяжести блока *2*: $\sum A_k^e = A_{mg} = mgs$. Подставляя полученные выражения для *T* и $\sum A_k^e$, находим скорость центра *C* блока *1*: $7mv_C^2/4 = mgs \;\Rightarrow\; v_C = \sqrt{4g/7} = 2{,}368$ м/с.

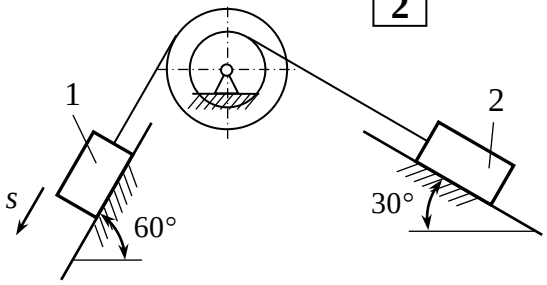
Задачи на общие теоремы динамики системы

1



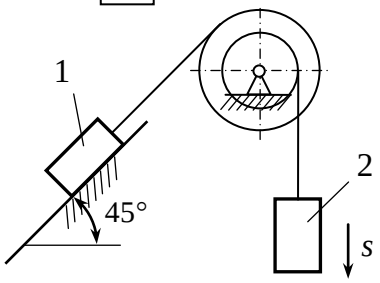
$v_{0\ \text{системы}} = 0$, $s = 1$ м,
$m_1 = 10$ кг, $m_2 = 5$ кг. $v_1 = ?$

2



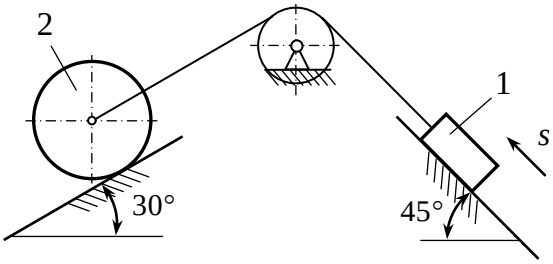
$v_{0\ \text{системы}} = 0$, $R=2r=2$ м, $s = 1$ м,
$m_1 = 5$ кг, $m_2 = 10$ кг. $v_2 = ?$

3



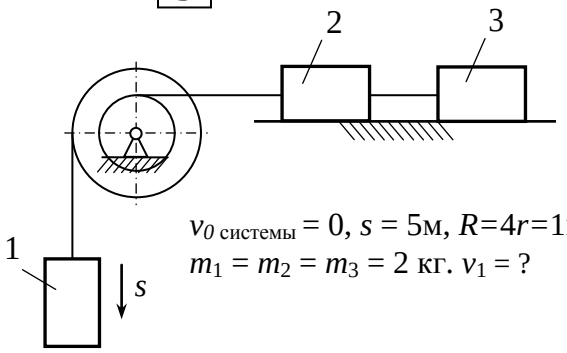
$v_{0\ \text{системы}} = 0$, $s = 1$ м, $R=3r=2$ м,
$m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг. $v_2 = ?$

4



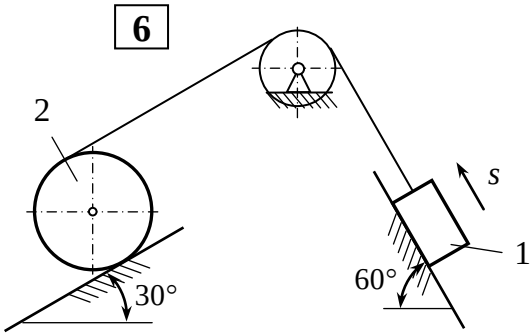
$v_{0\ \text{системы}} = 0$, $s = 1$ м, $R_{\text{диска}} = 1$ м,
$m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг. $v_2 = ?$

5



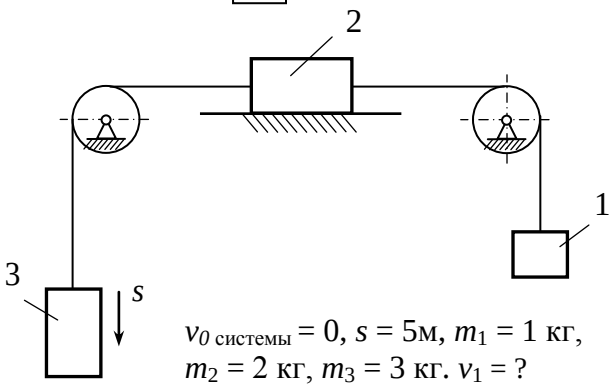
$v_{0\ \text{системы}} = 0$, $s = 5$м, $R=4r=1$м,
$m_1 = m_2 = m_3 = 2$ кг. $v_1 = ?$

6



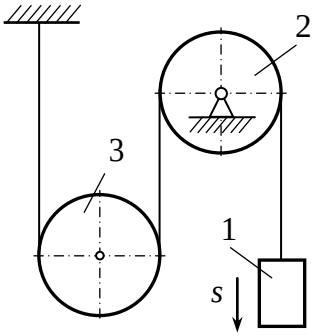
$v_{0\ \text{системы}} = 0$, $s = 1$ м, $R_{\text{диска}} = 1$ м,
$m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг. $v_1 = ?$

7



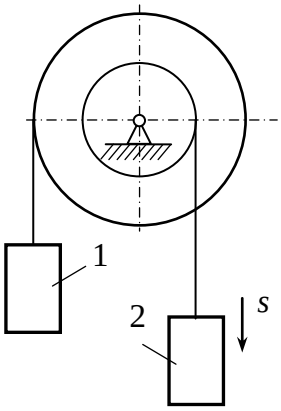
$v_{0\ \text{системы}} = 0$, $s = 5$м, $m_1 = 1$ кг,
$m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг. $v_1 = ?$

8



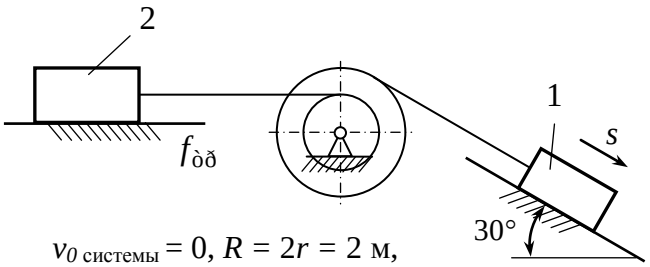
$v_{0\ \text{системы}} = 0$,
$r_2 = r_3 = 1$ м,
$m_2 = m_3 = 2$ кг,
$m_1 = 1$ кг,
$s = 5$ м,
$v_1 = ?$

9



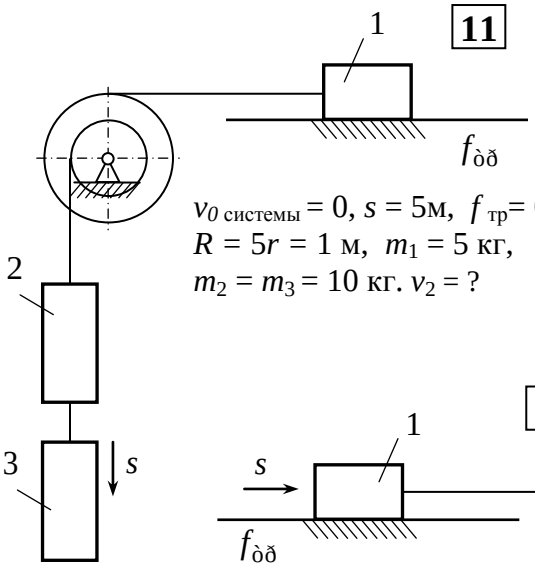
$v_{0\ \text{системы}} = 0$,
$R = 2r = 2$ м,
$m_1 = 2$ кг,
$m_2 = 5$ кг,
$s = 2$ м,
$v_1 = ?$

10



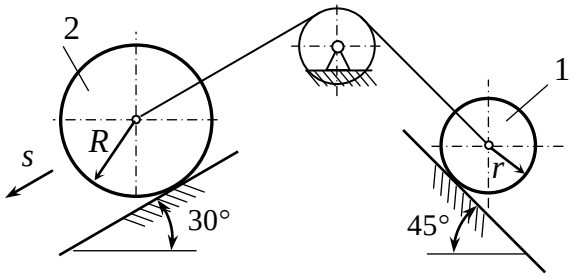
$v_{0\ \text{системы}} = 0$, $R = 2r = 2$ м,
$s = 4$ м, $m_2 = 5$ кг, $f_{\text{тр}} = 0.1$,
$m_1 = 10$ кг. $v_1 = ?$

11



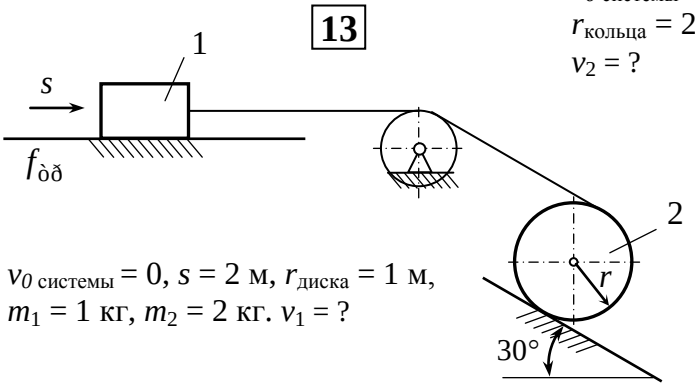
$v_{0\ \text{системы}} = 0$, $s = 5$м, $f_{\text{тр}} = 0.1$,
$R = 5r = 1$ м, $m_1 = 5$ кг,
$m_2 = m_3 = 10$ кг. $v_2 = ?$

12



$v_{0\ \text{системы}} = 0$, $s = 2$ м, $R_{\text{диска}} = 2$ м,
$r_{\text{кольца}} = 2$ м, $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 1$ кг.
$v_2 = ?$

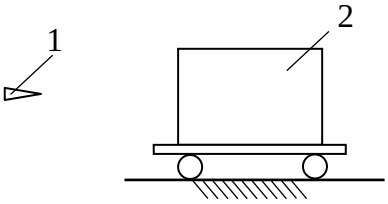
13



$v_{0\ \text{системы}} = 0$, $s = 2$ м, $r_{\text{диска}} = 1$ м,
$m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг. $v_1 = ?$

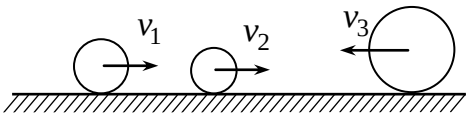
Схемы, в вышеприведенных задачах (1 ÷ 13), можно использовать при определении ускорения тел *1* и *2*, применяя теорему об изменении кинетического момента системы или принцип Даламбера или общее уравнение динамики.

14

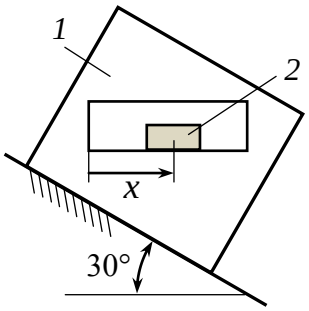


До попадания:
$v_1 = 600$ м/с, $m_1 = 10$ кг,
$v_2 = 0$ м/с, $m_2 = 1000$ кг.
v_2 (после удара) = ?

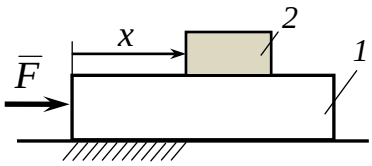
15



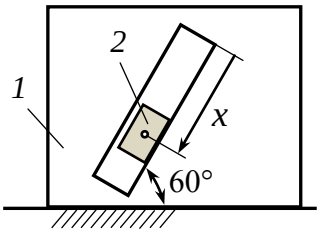
До столкновения:
$m_1 = 5$ кг, $v_1 = 10$ м/с,
$m_2 = 2$ кг, $v_2 = 8$ м/с,
$m_3 = 15$ кг, $v_3 = 5$ м/с.
$v_{тел}$ (после столкновения) = ?



16) Определить ускорение тела *1*, скользящего по гладкой наклонной плоскости, если по горизонтали относительно него под действием внутренних сил системы движется тело *2* согласно закону $x = t^2$. Массы тел: $m_1 = m_2 = 1$кг. Тела движутся поступательно. (4.04).



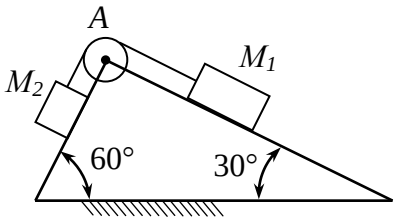
17) На тело *1* действует постоянная сила $F = 10$ Н. Определить ускорение этого тела в момент времени $t = 0{,}5$с, если относительно него движется тело *2* по закону $x = \cos \pi t$. Массы тел: $m_1 = 4$кг, $m_2 = 1$кг. (2).



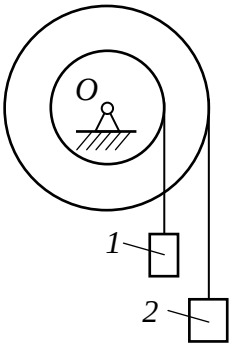
18) Тело *1* массой $m_1 = 0{,}7$ кг может двигаться по горизонтальной направляющей. Определить модуль ускорения тела *1* в момент времени $t = 0{,}25$ с, если относительно него движется тело *2* массой $m_2 = 0{,}1$кг согласно уравнению $s = \sin 4t$. (0,841).

19) Через неподвижный блок весом Q = 50 Н переброшена веревка, к одному концу которой подвешен груз весом P_1 = 500 Н, а за второй конец ухватился человек весом P_2 = 700 Н, который, перебирая руками веревку, стал подниматься по ней с относительной скоростью u = 0.7 м/с. Считая блок однородным диском, определить скорость груза через 3 с после начала движения человека. ($v = (gt(P_2 - P_1) + uP)/(P_1 + P_2 + Q/2) = 5{,}2$ м/с).

20) Однородный горизонтальный диск радиуса R = 10 см и веса P =215 Н вращался с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Определить, через сколько времени угловая скорость диска уменьшится в 10 раз, если к нему приложить момент сопротивления $M = -1{,}5\omega$ Н·см. (t = 16,8 с).

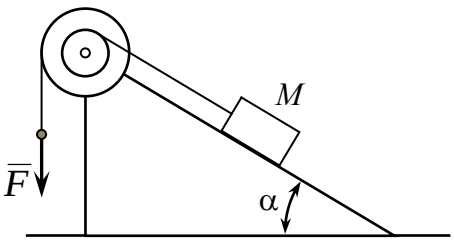


21) Через блок *A* весом *Q* переброшена невесомая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы M_1 и M_2 весом P_1 и P_2 соответственно. Грузы расположены на гладких плоскостях, отклоненных от горизонта на углы 30° и 60°. Считая блок однородным диском, определить ускорение грузов. ($\grave{a} = g\,(P_2\sqrt{3} - P_1)/(2(P_1 + P_2) + Q)$).



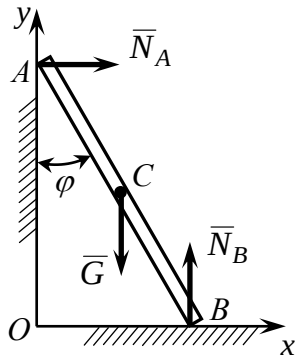
22) Грузы *1* и *2* весом P_1 и P_2, разматывая нити, навернутые на блоки, жестко скрепленные между собой и насаженные на общую ось, приводят их во вращение. Пренебрегая весом нитей и считая блоки однородными дисками радиусов r и R, весом соответственно Q_1 и Q_2, определить угловое ускорение блоков. ($\varepsilon = 2g(P_1 r + P_2 R)/((2P_1 + Q_1)r^2 + (2P_2 + Q_2)R^2)$).

23) Два блока весом P_1 и P_2 и радиусов соответственно r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось вращения. К концу одной веревки, намотанной на блок, прикреплен груз M весом Q, расположенный на плоскости, отклоненной от горизонта на угол α, к концу другой приложена сила F. Считая блоки однородными дисками и пренебрегая весом веревок и трением, определить угловое ускорение блоков.

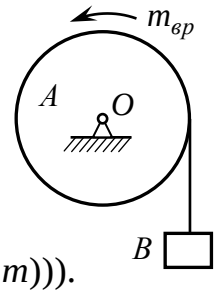


Ответ: $\varepsilon = 2g(Fr_2 - Qr_1 \sin\alpha)/(P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2 + 2Qr_1^2)$.

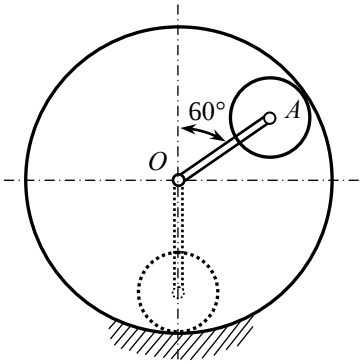
24) Стержень AB длиной 1 м и массой 2 кг, опирающийся на вертикальную гладкую стену по углом φ = 30°, начинает скользить. Определить нормальную реакцию N_B в точке B, если проекция ускорения центра масс C на ось Oy имеет значение $\ddot{y}_C = -1.84$ м/с^2. (15.9).



25) С помощью электромотора лебедки к валу барабана A радиуса r и массы M приложен вращающий момент $m_{вр} = a\varphi$, где a = const. Определить скорость поднимаемого груза B массы m в зависимости от высоты его подъема h. Барабан A считать сплошным цилиндром, массой троса пренебречь. В начальный момент система находилась в покое. $(v^2 = 2h(ah - 2mgr^2)/(r^2(M + 2m)))$.



26) Механизм, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из однородного кривошипа OA весом P, шестерни A весом Q и радиуса r и неподвижной шестерни радиуса R. Кривошип OA отклонен от вертикали на угол 60° и отпущен из состояния покоя. Считая шестерню A однородным диском и пренебрегая трением, определить максимальную скорость конца A кривошипа.



Ответ: $v^2 = 9g(P + 2Q)(R - r)/(2P + 9Q)$.

27) Колесо катится без скольжения из состояния покоя по плоскости, составляющей с горизонтом угол α. Пренебрегая трением качения, определить скорость центра колеса в зависимости от пройденного пути s, если вес обода колеса равен Q, а каждой из шести спиц – P. $(v^2 = (6P + Q)gs\sin\alpha/(4P + Q))$.

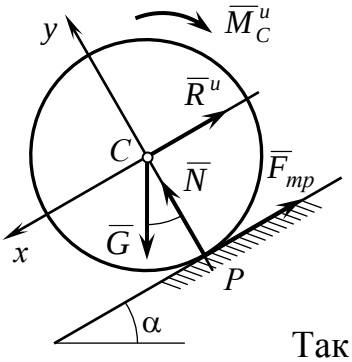
28) Однородный круглый диск радиуса r катится без скольжения по горизонтальному пути. Определить путь s, пройденный центром диска до остановки, если его начальная скорость равна v_0, а коэффициент трения качения равен k. ($s = 3rv_0^2/4kg$).

3.6. Задачи на принцип Даламбера для механической системы

Пример 20. Сплошной однородный диск массой m и радиусом r скатывается без скольжения по наклонной плоскости. Определить ускорение центра масс диска и коэффициент трения f.

Решение. На рисунке показываем внешние силы, действующие на шар: сила тяжести $\overline{G}$, реакцию поверхности $\overline{N}$ и силу трения $\overline{F}_{тр}$. Добавляем главный вектор сил инерции $\overline{R}^u$ и главный момент сил инерции $\overline{M}_C^u$ относительно центра C, направленный противоположно вращению диска.

Составим условие равновесия для всех сил.



$$\sum m_P(\overline{F}_k)=0: \quad -M_C^u + G\sin\alpha\cdot r - R^u\cdot r = 0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{kx}=0: \quad -R^u + G\sin\alpha - F_{тр} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum F_{ky}=0: \quad N - G\cos\alpha = 0.$$

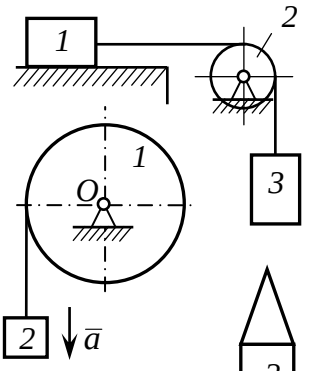
Учитывая, что $R^u = ma_C$, $M_C^u = J_C\varepsilon = mr^2\varepsilon/2 = ma_C r/2$,

из (1): $-ma_C r/2 + mg\sin\alpha\cdot r - ma_C\cdot r = 0 \;\Rightarrow\; a_C = 2g\sin\alpha/3$

из (2): $F_{тр} = mg\sin\alpha - ma_C = mg\sin\alpha/3$.

Так как $F_{тр} = fN = fmg\cos\alpha$, тогда $mg\sin\alpha/3 = fmg\cos\alpha$,

Отсюда коэффициент трения $f = tg\alpha/3$.



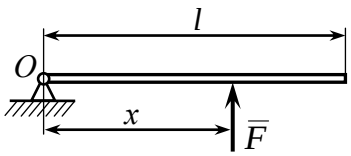
1) Тело скользит по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы тяжести тела *3*. Определить натяжение нити, если тела *1* и *3* имеют массу m = 3 кг каждый. Массой блока *2* пренебречь. (14,7 Н).

2) Определить модуль реакции шарнира *O*, если груз *2* массой m_2 = 5 кг под действием силы тяжести опускается с ускорением a = 3 м/с^2. Масса блока *1* равна m_1 = 10 кг, а его центр масс расположен на оси вращения. (132 Н).

3) Двухступенчатая ракета в момент пуска в вертикальном направлении развивает реактивную силу R = 90 кН. Массы ступеней ракеты равны m_1 = 200 кг и m_2 = 100 кг. Определить силу давления между ступенями ракеты в момент пуска. (30 кН).

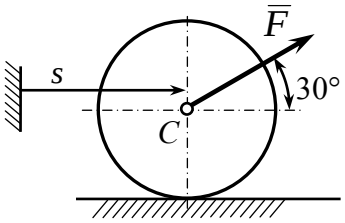
4) По наклонной плоскости под действием силы тяжести катится без скольжения тонкостенная труба. Определить ускорение центра масс трубы.

Ответ: 2,45 м/с^2.



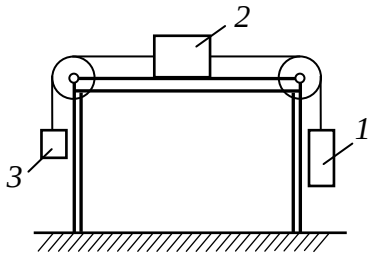
5) Однородный стержень длиной l = 1,5 м начинает вращаться в горизонтальной плоскости из состояния покоя под действием силы $\overline{F}$. Определить, при каком расстоянии x в начальный момент движения реакция в шарнире *O* равна нулю? (1 м).

6) Однородный цилиндр массой 400 кг под действием силы $\overline{F}$ катится по горизонтальной плоскости. Центр масс *C* цилиндра движется согласно уравнению $s = 0{,}5t^2$. Определить модуль силы $\overline{F}$.

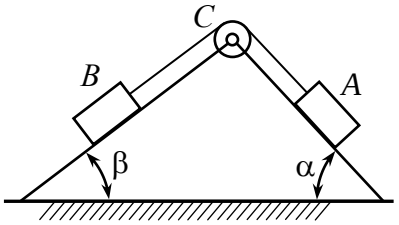


Ответ: 693 Н.

7) Груз *1* массы m_1, опускаясь вниз, приводит в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижные блоки, грузы *2* и *3* массой m_2 и m_3 соответственно. Определить силу давления стола на пол, если масса стола равна *M*. Массой нити пренебречь.

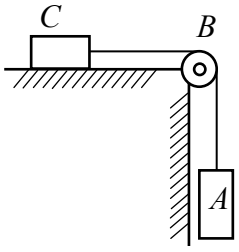


8) Два груза *A* и *B* весом *P* каждый скользят по гладким сторонам неподвижного клина. Пренебрегая массами нерастяжимой нити и блока *C*, найти натяжение нити и ускорение грузов, если α > β.



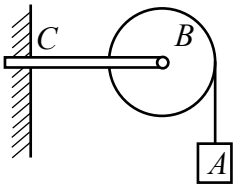
Ответ: $T = P(\sin\alpha + \sin\beta)/2$, $a = g(\sin\alpha - \sin\beta)/2$.

9) Груз *A* весом 150 Н, привязанный к невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок *B* весом 5 Н, приводит в движение груз *C* весом 95 Н, который скользит по гладкой горизонтальной плоскости. Найти давление на ось, считая, что масса блока равномерно распределена по его ободу.



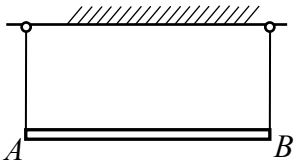
Ответ: 86,5 Н.

10) Падая, груз *A* весом *P* разматывает нерастяжимую нить, намотанную на блок. Считая блок однородным диском весом *Q* и пренебрегая весом обоймы и нити, а также трением на оси, определить реакции жесткой заделки *C*, если *BC* = *a*.



Ответ: $R_C = (3P + Q)/(2P + Q)$, $M_C = aQ(3P + Q)/(2P + Q)$.

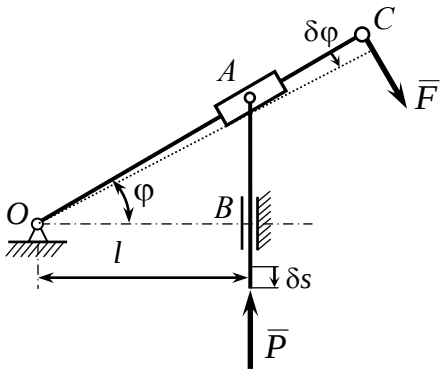
11) Однородный стержень *AB* массы *M* горизонтально подвешен к потолку посредством двух вертикальных нитей, прикрепленных к концам стержня. Найти натяжение одной из нитей в момент обрыва другой.



Ответ: *Mg*/4.

3.7. Прмеры и задачи на принцип возможных перемещений

Пример 21. В кулисном механизме при качании рычага *OC* вокруг горизонтальной оси *O* ползун *A*, перемещаясь вдоль рычага *OC*, приводит в движение стержень *AB*. Какую силу *F* надо приложить, чтобы уравновесить силу *P*, направленную вдоль стержня *AB* вверх, если *OC* = *L*.



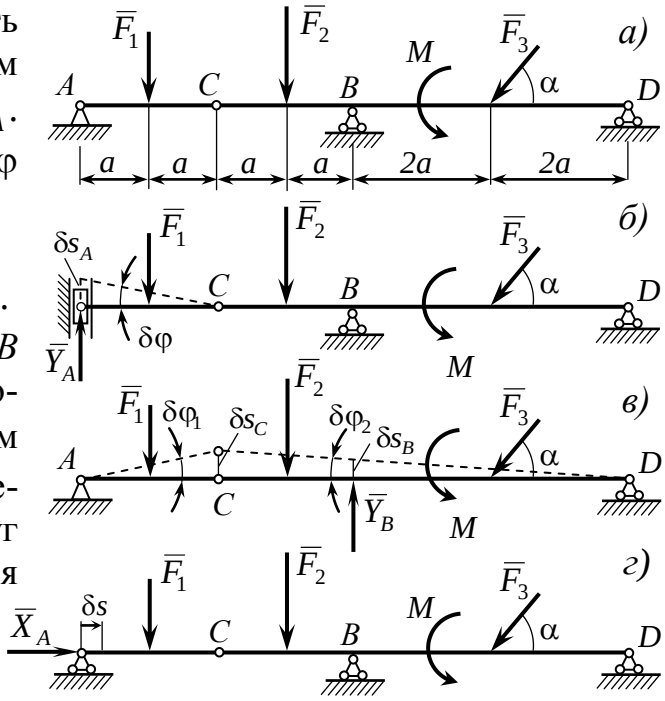
Решение. Дадим системе возможное перемещение δφ, повернув стержень *OC* по ходу часовой стрелки. Тогда точка приложения силы *P* получит возможное перемещение δs. Сумма возможных работ сил, приложенных к системе, должна быть равна нулю, поскольку эти силы *P* и *F* уравновешивают друг друга по условию задачи:

$$F \cdot L\delta\varphi - P \cdot \delta s = 0. \qquad (1)$$

Знак минус перед силой *P* ставится, т.к. она препятствует перемещению стержня *AB* на δs. Установим зависимость между δφ и δs: $tg\varphi = AB/OB = s/l \Rightarrow s = ltg\varphi$ отсюда $\delta s = l\delta\varphi/\cos^2\varphi$.

Подставляя δs в (1) и сокращая на δφ, находим $F = Pl/(L\cos^2\varphi)$.

Пример 22. Пользуясь принципом возможных перемещений, определить реакции неподвижной шарнирной опоры *A* и подвижной шарнирной опоры *B* составной балки, если на нее действуют вертикальные силы.



Решение. Чтобы определить реакцию опоры *A*, мысленно отбросим связь, приложив при этом реакцию $\overline{Y}_A$. Повернем балку *AC* на малый угол δφ вокруг точки *C* (рис. *б*).

Уравнение работ имеет вид

$$Y_A 2a \cdot \delta\varphi - F_1 a \cdot \delta\varphi = 0 \Rightarrow Y_A = F_1/2.$$

Для определения реакции опоры *B* мысленно отбросим эту опору, приложив к балке ее реакцию $\overline{Y}_B$. Сообщим полученной системе возможное перемещение, повернув балку *CD* вокруг точки *D*, тогда балка *AC* повернется вокруг точки *A* (рис. *в*).

Составим уравнение работ для определения $\overline{Y}_B$:

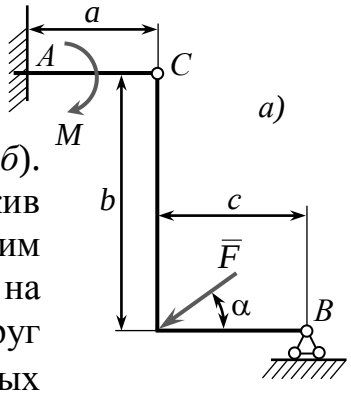
$$-F_1 a \cdot \delta\varphi_1 - F_2 5a\delta\varphi_2 + Y_B 4a\delta\varphi_2 - F_3 \sin\alpha 2a\delta\varphi_2 - M\delta\varphi_2 = 0. \qquad (1)$$

Так как перемещение шарнира $\delta s_C = 2a\delta\varphi_1 = 6a\delta\varphi_2$, откуда $\delta\varphi_1 = 3\delta\varphi_2$. То из (1)

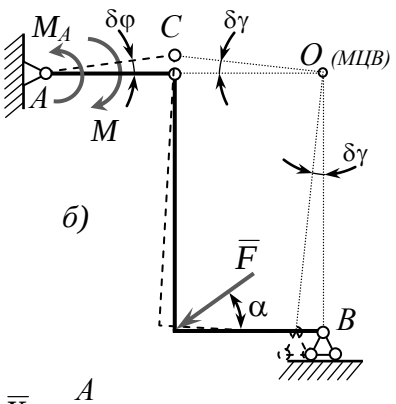
$$Y_B = (3F_1 + 5F_2 + 2F_3 \sin\alpha + M)/4.$$

Чтобы определить $\overline{X}_A$, заменим неподвижную шарнирную опору A шарнирной опорой на катках, приложив при этом к балке горизонтальную реакцию $\overline{X}_A$ (рис. *г*). Тогда $X_A\delta s - F_3\cos\alpha\cdot\delta s = 0 \Rightarrow X_A = F_3\cos\alpha$.

Пример 23. Пользуясь принципом возможных перемещений, определить реакции составной рамы. Момент M пары сил и сила $\overline{F}$ заданы (рис. *а*).



Решение. Определим момент заделки A (рис. *б*). Заменим заделку шарнирно-неподвижной опорой, приложив при этом к стержню AC пару сил с моментом M_A. Дадим системе возможное перемещение, повернув стержень AC на угол $\delta\varphi$ вокруг шарнира A, тогда рама CB повернется вокруг мгновенного центра вращения (МЦВ) O. Сумма возможных работ сил, приложенных к раме, равна нулю



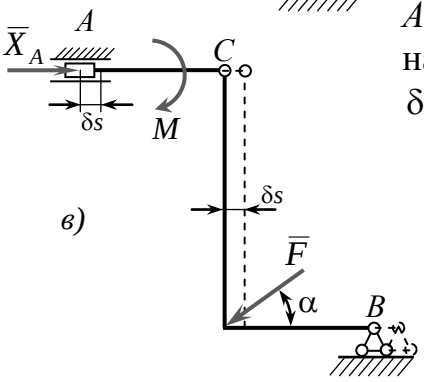
$$M_A\delta\varphi - M\delta\varphi + F\cos\alpha\cdot b\delta\gamma - F\sin\alpha\cdot c\delta\gamma = 0$$

учитывая $\delta s_C = a\delta\varphi = c\delta\gamma$, откуда $\delta\gamma = a/c\delta\varphi$ и

$$M_A\delta\varphi - M\delta\varphi + F\cos\alpha\cdot ab/c\delta\varphi - F\sin\alpha\cdot a\delta\varphi = 0,$$

$$M_A = M - Fab\cos\alpha/c + Fa\sin\alpha.$$

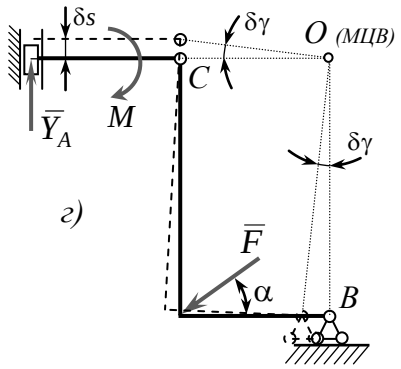
Для определения горизонтальной составляющей заделки $\overline{X}_A$ представим опору в виде ползуна A в направляющих, жестко скрепленного с рамой AC, и приложим к нему реакцию $\overline{X}_A$ (рис. *в*). Сообщим раме AC поступательное возможное перемещение δs, например вправо, тогда и рама CB сместится вправо на δs. Составим уравнение работ для определения X_A:



$$X_A\cdot\delta s - F\cos\alpha\cdot\delta s = 0.$$

Откуда $X_A = F\cos\alpha$.

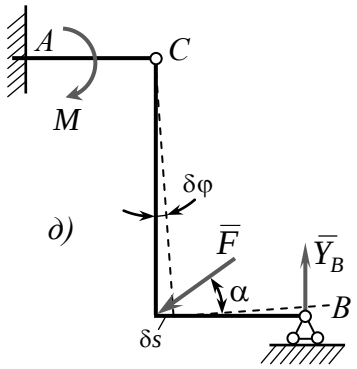
Для определения вертикальной составляющей заделки $\overline{Y}_A$ заменяем заделку ползуном A в вертикальных направляющих, жестко скрепленным с рамой AC, и приложим к нему реакцию $\overline{Y}_A$ (рис. *г*). Сообщим всей раме AC возможное перемещение δs, например, вверх. Тогда рама CB повернется на возможный угол $\delta\gamma$ вокруг МЦВ O. Составим уравнение работ



$$Y_A\delta s + F\cos\alpha\cdot b\delta\gamma - F\sin\alpha\cdot c\delta\gamma = 0,$$

учитывая $\delta s = c\delta\gamma$, получаем

$$Y_A = -F\cos\alpha\cdot b/c + F\sin\alpha.$$

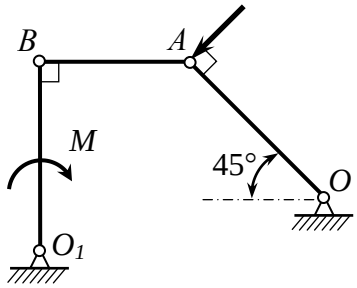


Для определения $\overline{Y}_B$ (рис. *д*) сообщим раме *CB* возможное перемещение – поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг шарнира *C*, например против хода часовой стрелки. Рама при этом остается неподвижной. Составим уравнение работ и найдем $\overline{Y}_B$.

$$Y_B c\delta\varphi - F\cos\alpha \cdot b\delta\varphi = 0,$$

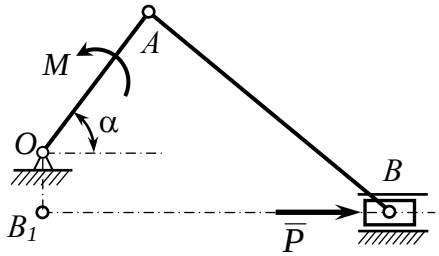
отсюда $Y_B = Fb\cos\alpha / c$.

Задачи на принцип возможных перемещений

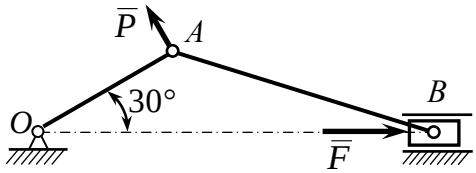


1) К звену *OA* шарнирного четырехзвенного механизма приложена сила *F*. Определить момент пары сил, которую надо приложить к звену O_1B длиной *a*, чтобы механизм в данном положении был в равновесии.

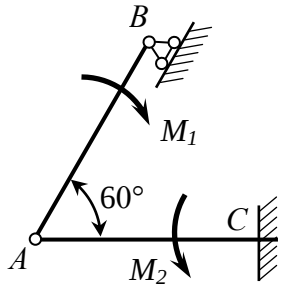
Ответ: $M = Fa\sqrt{2}$.



2) К ползуну *B* дезаксиального кривошипно-шатунного механизма приложена горизонтальная сила *P*. Определить момент *M*, который надо приложить к кривошипу *OA* длиной *r*, чтобы механизм находился в равновесии в том положении, $\alpha = 60°$ и $\angle AOB = 60°$. ($M = rP\sqrt{3}$)

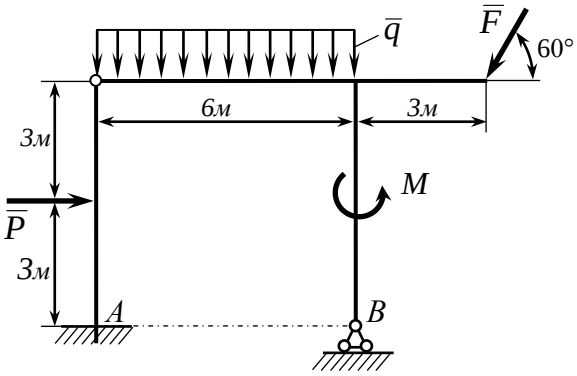


3) К ползуну *B* кривошипно-шатунного механизма приложена горизонтальная сила *F*. Определить силу *P*, которую надо приложить в точке *A* перпендикулярно к кривошипу, чтобы механизм в данном положении находился в равновесии. *OA*=30 см, *AB* = 113 см. ($P = 0{,}616F$)



4) Горизонтальная балка *AC* заделана концом *C* в вертикальную стену и нагружена парой сил с моментом M_2 = 600 Н·м. Балка *AB*, опирающаяся на подвижную опору своим концом *B*, нагружена парой сил с моментом M_1 = 400 Н·м. Определить модуль момента заделки.

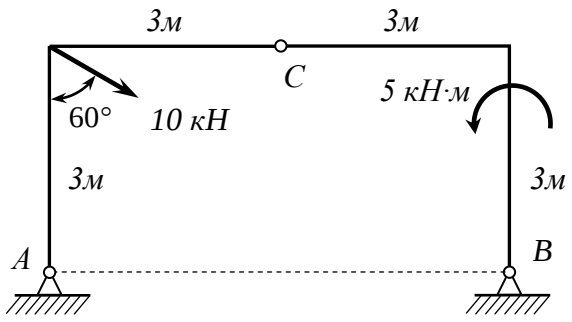
Ответ: 400 Н·м.



5) На конструкцию действуют: нагрузка интенсивности *q* = 2 кН/м, сила *P* = 4кН, сила *F* = 12 кН, направленная под углом 60° к горизонту, и пара сил с моментом *M* = 18 кНм. Определить реакции опор.

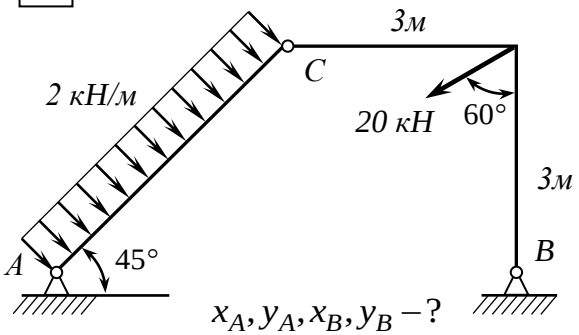
Ответ: X_A = 2 кН; Y_A = 3,8 кН;
Y_B = 18,588 кН; M_A = – 24 кН.

6



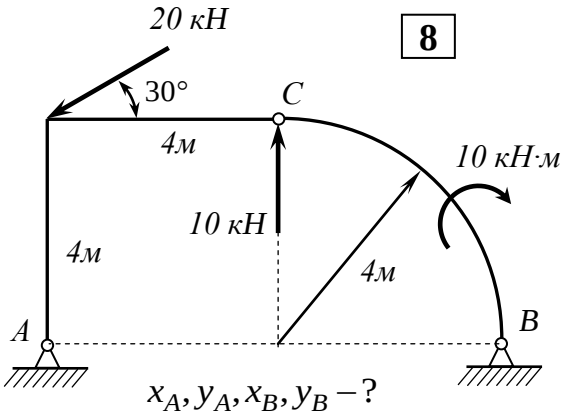
$x_A, y_A, x_B, y_B - ?$

7



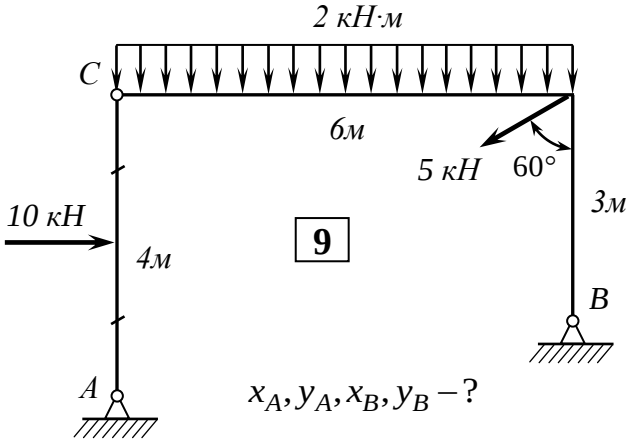
$x_A, y_A, x_B, y_B - ?$

8



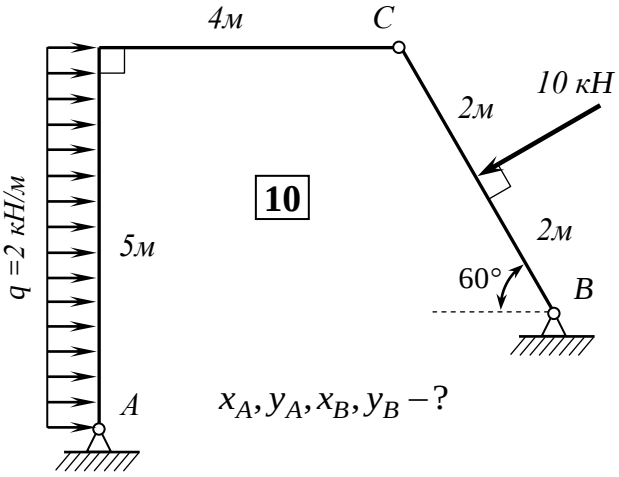
$x_A, y_A, x_B, y_B - ?$

9



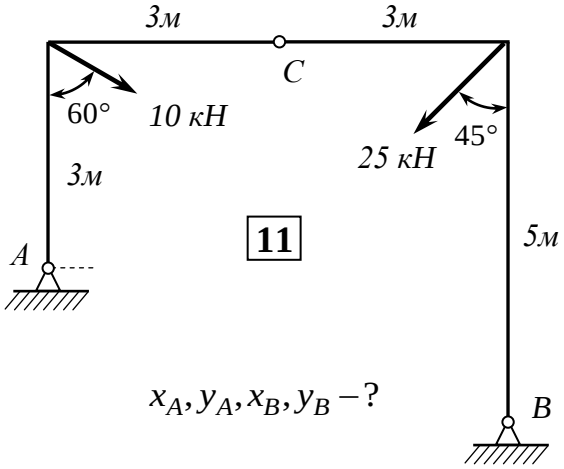
$x_A, y_A, x_B, y_B - ?$

10



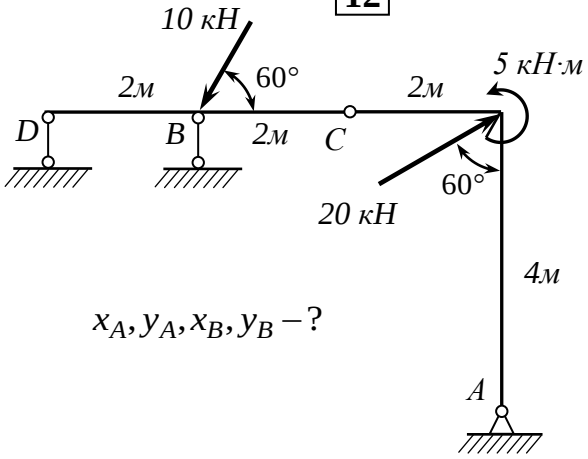
$x_A, y_A, x_B, y_B - ?$

11



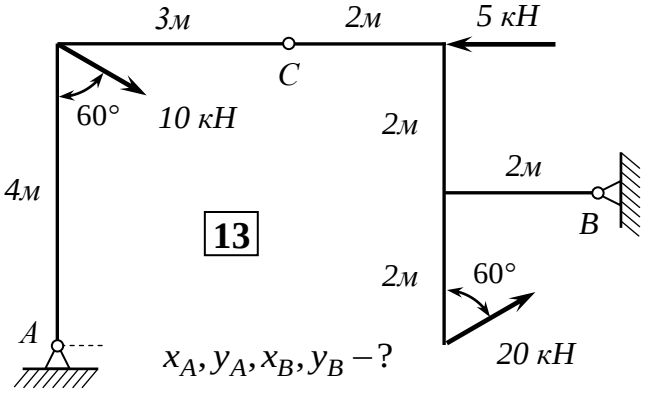
$x_A, y_A, x_B, y_B - ?$

12



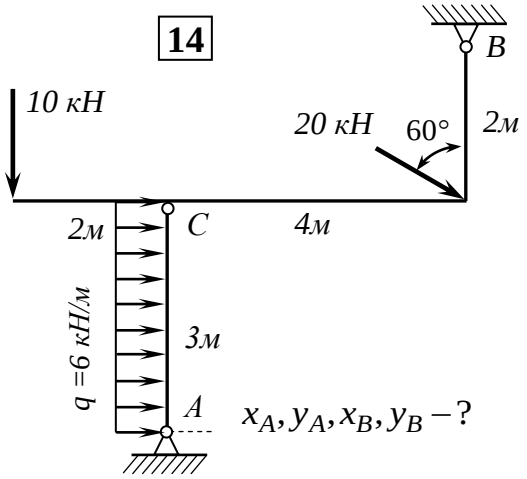
$x_A, y_A, x_B, y_B - ?$

13



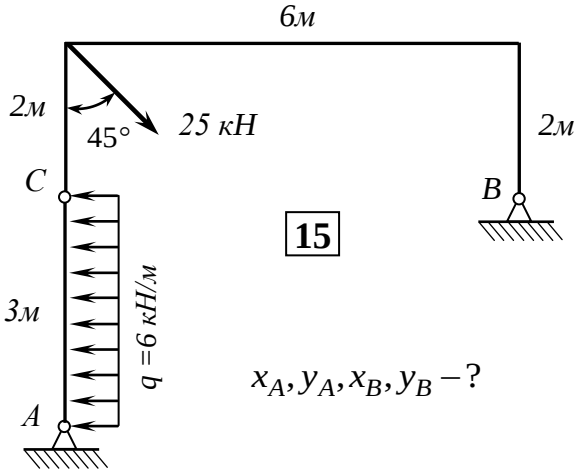
$x_A, y_A, x_B, y_B - ?$

14



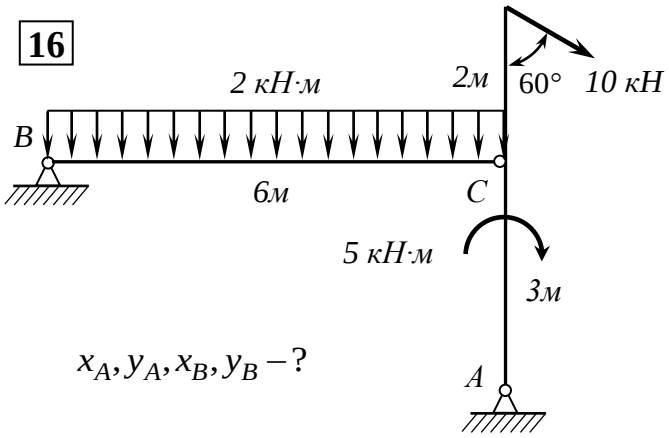
$x_A, y_A, x_B, y_B - ?$

15



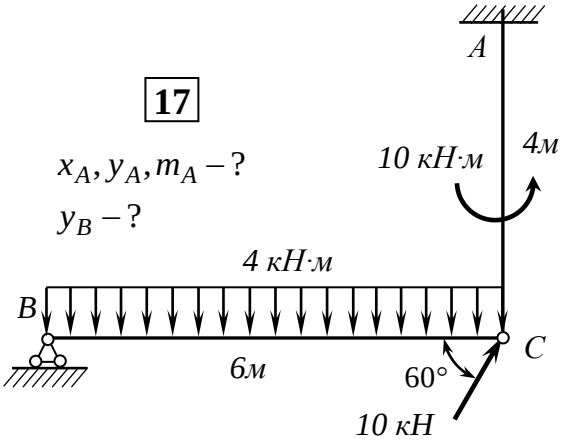
$x_A, y_A, x_B, y_B - ?$

16



$x_A, y_A, x_B, y_B - ?$

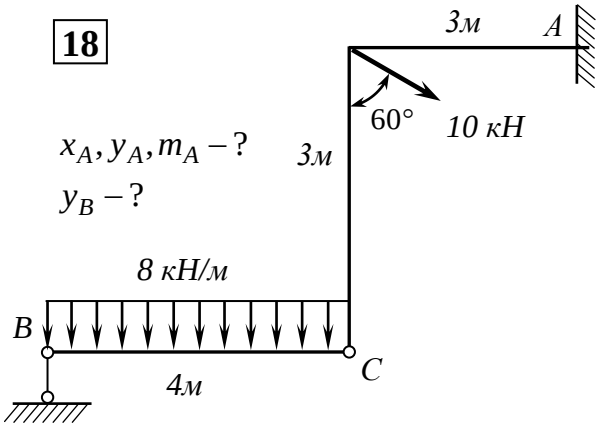
17



$x_A, y_A, m_A - ?$

$y_B - ?$

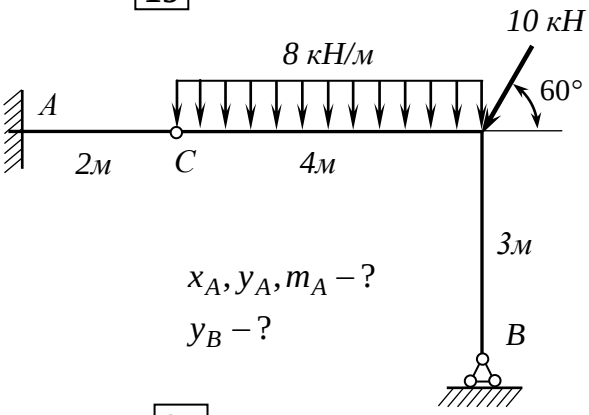
18



$x_A, y_A, m_A - ?$

$y_B - ?$

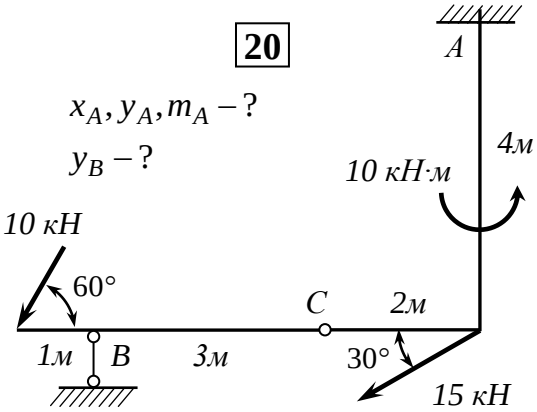
19



$x_A, y_A, m_A - ?$

$y_B - ?$

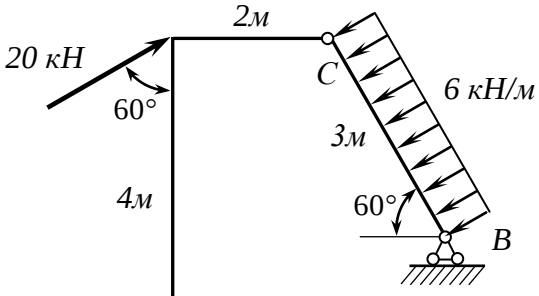
20



$x_A, y_A, m_A - ?$

$y_B - ?$

21



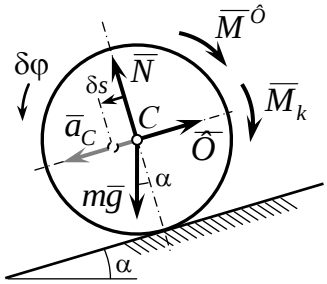
$x_A, y_A, m_A - ?$

$y_B - ?$

3.8. Прмеры и задачи на общее уравнение динамики, уравнение Лагражна II рода

Пример 24. Определить ускорение центра масс однородного диска радиуса R, который без скольжения скатывается по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Коэффициент трения качения равен f_k.

Решение. Запишем общее уравнение динамики для диска



$$\sum A_k = \delta A(m\overline{g}) + \delta A(M_k) + \delta A(\overline{\Phi})\overline{F}_k + \delta A(M^{\Phi}) = 0 .$$

Возможная работа силы нормальной реакции равна нулю, поскольку она перпендикулярна перемещению диска.

Дадим диску возможное перемещение δs, при этом диск повернется на угол $\delta\varphi$, $\delta s = R\delta\varphi$.

Работа силы тяжести и момента трения качения

$$\delta A(m\overline{g}) = mg\sin\alpha\delta s,\ \delta A(M_k) = -M_k\delta\varphi = -mg\cos\alpha f_k\delta\varphi .$$

Работа главного вектора сил инерции диска: $\delta A(\overline{\Phi}) = -\Phi\delta s = -ma_C\delta s$.

Работа главного момента сил инерции относительно центра диска C:

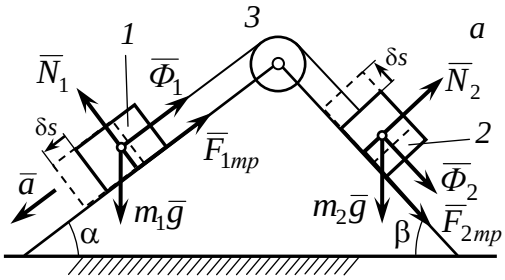
$$\delta A(M^{\Phi}) = -M^{\Phi}\delta\varphi = -J_C\varepsilon\delta\varphi = -\frac{mR^2}{2}\varepsilon\delta\varphi = -\frac{mR}{2}a_C\delta\varphi = -\frac{m}{2}a_C\delta s .$$

Суммируем возможные работы: $mg\sin\alpha\delta s - mg\cos\alpha f_k\dfrac{\delta s}{R} - ma_C\delta s - \dfrac{m}{2}a_C\delta s = 0$.

Отсюда находим ускорение центра масс диска $a_C = \frac{2}{3}g(\sin\alpha - f_k\cos\alpha/R)$.

Пример 25. На треугольной призме помещены два груза массой m_1 и m_2, связанные между собой невесомой и нерастяжимой нитью, переброшенной через невесомый блок *3*. Зная, что коэффициент трения скольжения равен f, определить ускорение движения грузов a и натяжение нити (рис. *а*).

Решение. Пусть груз *1* движется вниз, а груз *2* – вверх. На рисунке показываем задаваемые силы тяжести $m_1\overline{g}$, $m_2\overline{g}$, нормальные реакции боковых граней $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ и силы трения $\overline{F}_{1тр}$, $\overline{F}_{2тр}$.

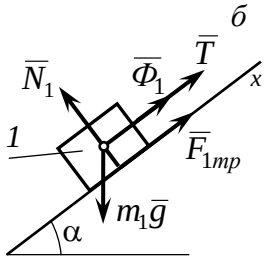


Приложим к грузам силы инерции $\overline{\Phi}_1$ и $\overline{\Phi}_2$, направив их противоположно ускорению $\overline{a}$. Сообщим мысленно системе возможное перемещение δs. Составим общее уравнение динамики:

$$(m_1 g\sin\alpha - \Phi_1 - F_{1тр})\delta s + (-m_1 g\sin\beta - \Phi_2 - F_{2тр})\delta s = 0,$$

$$m_1 g\sin\alpha - m_1 a - m_1 gf\cos\alpha - m_1 g\sin\beta - m_2 a - m_2 gf\cos\beta = 0,$$

$$a = \frac{m_1 g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - m_1 g(\sin\beta + f\cos\beta)}{m_1 + m_2}.$$



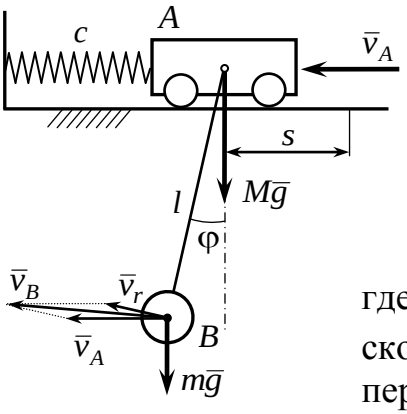
Для определения натяжения нити расчленим систему

и рассмотрим в отдельности груз 1 (рис. *б*), к показанным силам $m_1\bar{g}$, $\bar{N}_1$, $\bar{F}_{1\text{òð}}$ и $\bar{\Phi}_1$ добавляется реакция каната $\bar{T}$. Так как эти силы уравновешиваются, то по принципу Даламбера $-m_1 g\sin\alpha + \Phi_1 + F_{1тр} + T = 0$, откуда

$$T = m_1 g\sin\alpha - m_1 a - m_1 gf\cos\alpha.$$

Пример 26. Крановая тележка массой M наезжает со скоростью v_A на упругий буфер, жесткость которого c. В центре тяжести тележки A подвешен груз B массой m на канате длиной l. Определить движение тележки и груза после соприкосновения тележки с упором, пренебрегая массой каната.

Решение. В качестве обобщенных координат данной системы с двумя степенями свободы принимаем перемещение s тележки с момента соприкосновения с упором и угол φ отклонения каната от вертикали, который в начальный момент равен нулю.



Составим уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\ddot{I}}{\partial\varphi},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{\partial П}{\partial s}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{Mv_A^2}{2} + \frac{mv_B^2}{2},$$

где $v_A = \dot{s}$ – скорость тележки, $\bar{v}_B$ – вектор абсолютной скорости груза B, равная геометрической сумме переносной скорости $\bar{v}_A$ тележки и относительной скорости груза по отношению к тележке $\bar{v}_r$ $(v_r = l\dot{\varphi})$.

Тогда абсолютная скорость по теореме косинусов $v_B^2 = v_A^2 + v_r^2 + 2v_A v_r\cos\varphi$, или $v_B^2 = \dot{s}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{s}l\dot{\varphi}\cos\varphi$. Следовательно,

$$T = \frac{M\dot{s}^2}{2} + \frac{m(\dot{s}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{s}l\dot{\varphi}\cos\varphi)}{2} = (M+m)\frac{\dot{s}^2}{2} + \frac{m}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{s}l\dot{\varphi}\cos\varphi).$$

Потенциальная энергия данной системы равна $П = \frac{cs^2}{2} + mgl(1-\cos\varphi)$.

Отсюда найдем следующие выражения для уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = -m\dot{s}l\dot{\varphi}\sin\varphi,\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = m(l^2\dot{\varphi} + l\dot{s}\cos\varphi),\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = m(l^2\ddot{\varphi} + l\ddot{s}\cos\varphi - l\dot{s}\dot{\varphi}\sin\varphi),$$

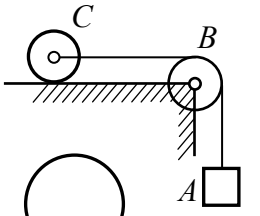
$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0,\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{s}} = (M+m)\dot{s} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{s}}\right) = (M+m)\ddot{s} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial П}{\partial\varphi} = mgl\sin\varphi,\quad \frac{\partial П}{\partial s} = cs.$$

Подставляя эти величины в равенства (1), получим после сокращений следующие дифференциальные уравнения движения системы

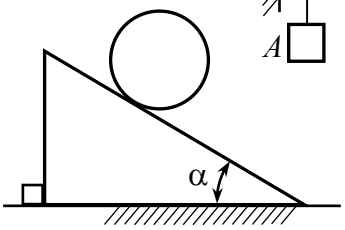
$$\begin{cases} l\ddot{\varphi} + \ddot{s}\cos\varphi = -g\sin\varphi, \\ (M+m)\ddot{s} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -cs. \end{cases}$$

Задачи на общее уравнение динамики и уравнение Лагражна II рода



1) Груз A весом P с помощью нити приводит в движение однородный цилиндр C весом Q. Пренебрегая весом нити и блока B, определить ускорение груза, считая, что цилиндр катится без скольжения по горизонтальной поверхности.

Ответ: $a = 2Pg/(2P + 3Q)$.

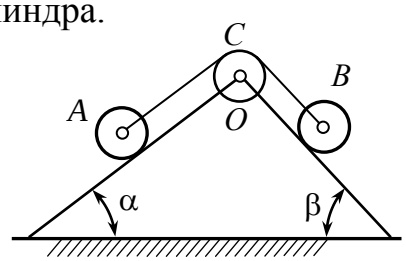


2) Однородный цилиндр весом P скатывается без скольжения по боковой грани призмы, опирающейся на гладкий пол и выступ. Найти давление призмы на выступ.

Ответ: $N = (P\sin 2\alpha)/3$.

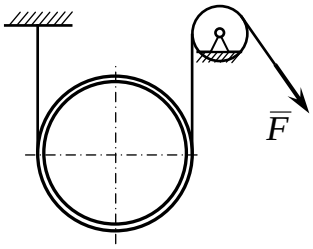
3) Тяжелый полый цилиндр с внешним радиусом R и внутренним r скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. Определить угловое ускорение цилиндра.

Ответ: $\varepsilon = 2Rg\sin\alpha/(3R^2 + r^2)$.



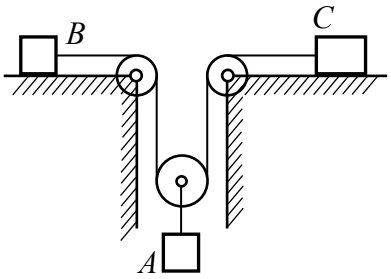
4) Однородный диск весом P скатывается без скольжения по одной грани неподвижной призмы, поднимая по другой грани с помощью нерастяжимой невесомой нити, переброшенной через невесомый блок C, такой же диск B. Найти натяжение нити.

Ответ: $T = P(\sin\alpha + \sin\beta)/2$.



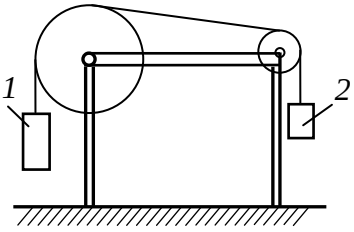
5) Тонкостенную трубу весом P опускают при помощи двух тросов, переброшенных через два неподвижных идеальных блока. К концам тросов приложены две одинаковые силы F. Найти ускорение оси трубы.

Ответ: $a = g(P - 4F)/2P$.



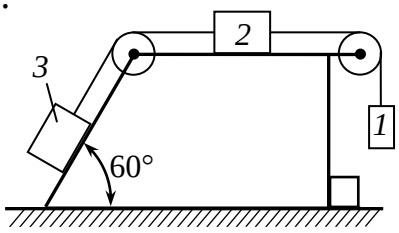
6) Невесомая нить огибает подвижный блок с грузом A весом Q. К ее концам прикреплены грузы B и C весом P_1 и P_2, скользящие без трения по горизонтальной плоскости. Найти ускорение груза A, пренебрегая массами блоков.

Ответ: $a = g(P_1 + P_2)Q/(4P_1P_2 + (P_1 + P_2)Q)$.



7) Груз *1* массы m_1, опускаясь вниз, приводит в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижные блоки, груз *2* массы m_2. Определить силу давления стола на пол, если масса стола равна M. Массой нити пренебречь.

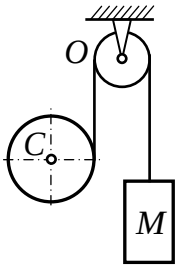
Ответ: $N = m_1g + m_2g + Mg - g(m_1 - m_2)^2/(m_1 + m_2)$.



8) Три груза массой m_1, m_2 и m_3 соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижные блоки. Определить горизонтальную

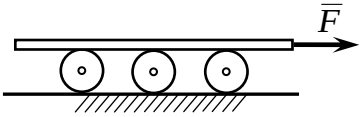
составляющую давления пирамиды на выступ пола при опускании груза *3* вниз. Массой нити пренебречь.

9) Сплошной цилиндр весом *P* обмотан нитью, переброшенной через блок *O* и прикрепленной к грузу *M* весом *Q*. Пренебрегая массами блока и нити, найти ускорение груза *M* и оси *C* цилиндра, если груз *M* поднимается.



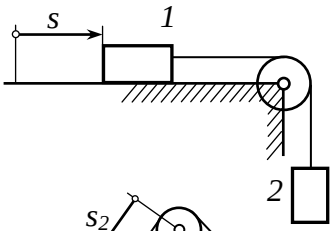
Ответ: $a_M = g(P-3Q)/(P+3Q)$, $a_C = g(P+Q)/(P+3Q)$.

10) Стержень массы *M* лежит на трех однородных круглых цилиндрах массы *m* каждый. К стержню приложена по горизонтали сила *F*, приводящая в движение стержень и катки. Найти ускорение стержня.

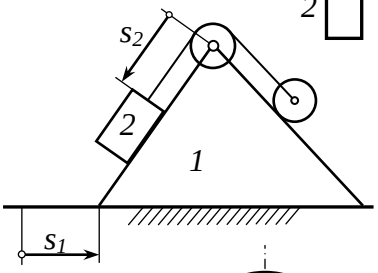


Ответ: $a = 8F/(8M+9m)$.

11) Кинетическая энергия системы $T = 6\dot{s}^2$, масса тел $m_1 = m_2 = 6$кг. Определить ускорение тела *1*, если коэффициент трения скольжения между горизонтальной поверхностью и телом *2* равен *f* = 0,2. ($\ddot{s} = 3{,}92$).

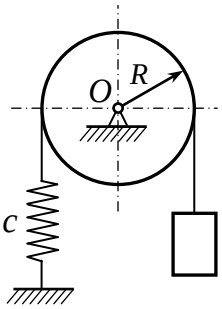


12) Кинетическая энергия механической системы $T = 200\dot{s}_1^2 + 167\dot{s}_2^2 - 45{,}2\dot{s}_1\dot{s}_2$, где $\dot{s}_1$ и $\dot{s}_2$ – обобщенные скорости. Обобщенная сила, соответствующая координате $\dot{s}_2$, равна $Q_2 = 265$ Н. Определить ускорение $\ddot{s}_2$ тела *2*, если ускорение тела *1* равно $\ddot{s}_1 = 0{,}1$м/с^2.

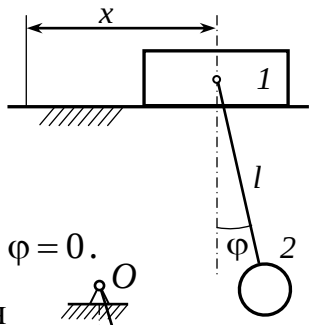


Ответ: $\ddot{s}_2 = 0{,}807$.

13) Через однородный диск радиусом *R* и массой *M* перекинута нерастяжимая нить. Конец нити прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости *c*, а к другому ее концу прикреплен груз массой *m*. Составить для системы уравнения Лагранжа. *Ответ:* $\ddot{x} + cx/(m_1 + M/2) = 0$.

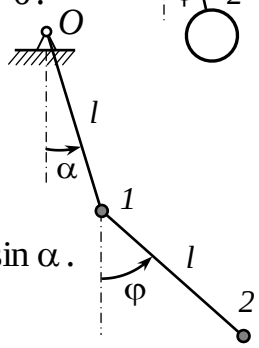


14) Составить уравнения движения эллиптического маятника, состоящего из ползуна *1* массы m_1, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика *2* массы m_2, соединенного с ползуном стержнем длины *l*. Массой стержня пренебречь.



Ответ: $\frac{d}{dt}((m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi) = 0$, $l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$.

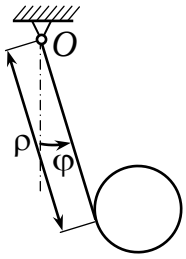
15) Составить дифференциальные уравнения движения двойного математического маятника, образованного стержнями одинаковой длины *l* и массами m_1 и m_2.



Ответ: $l\ddot{\varphi} + l\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha) + l\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha) = -g\sin\varphi$,

$(m_1+m_2)l\ddot{\alpha} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha) - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\alpha) = -(m_1+m_2)g\sin\alpha$.

16) Один конец нерастяжимой тонкой нити обмотан вокруг однородного круглого цилиндра радиуса R, второй конец прикреплен к неподвижной точке O. Цилиндр, разматывая нить, опускается вниз, одновременно раскручиваясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса нити. Пренебрегая массой нити, составить уравнения движения цилиндра.



Ответ: $\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi} - \frac{2}{3}\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3}g\cos\varphi$, $\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) - R\rho\dot{\varphi}^2 = -g\rho\sin\varphi$.

Литература

1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: учебник. – 15-изд., стер. – М.: КНОРУС, 2010. – 608 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2006. – 416 с.
3. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики: учебник для вузов /под общ. ред. К.С. Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2011.– 760 с.
4. Митюшов Е.А., Берестова С.А. Теоретическая механика: Статика. Кинематика. Динамика. – М.:-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 176 с.
5. Сахарный Н.Ф. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1964. – 844 с.
6. Новожилов А.И. Краткий курс теоретической механики: учеб.пособие / А.И.Новожилов; под ред. В.Н. Филимонова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Владимир: Изд-во Владим.гос.ун-та, 2006 с. – 240 с.
7. Кепе О.Э., Виба Я.А. и др. Сборник коротких задач по теоретической механике: учеб. пособие для втузов / под ред. Кепе О.Э. – М.: Высшая школа, 1989. – 368 с.; или 2-е стереотипное изд. СПб.: Лань, 2008. – 368 с.
8. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. – Изд. 51-е, стереот. – СПб.: Лань, 2012. – 448 с.
9. Березова О.А., Друшляк Г.Е., Солодовников Р.В. Теоретическая механика. Сборник задач: учеб. пособие для втузов. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1980. – 400 с.
10. Бать М.И., Джанилидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – Т.2. – изд. 11-е, стереот. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.
11. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1968. – 420 с.

Гумеров Анвар Василович
Хамитов Тагир Камилевич
Хайруллин Ленар Равилевич

Сборник задач по теоретической механике

для подготовки к защите расчетно-графических работ

Учебно-методическое пособие
для студентов всех направлений подготовки
и форм обучения

Редактор
Корректор

Издательство
Казанского государственного архитектурно-строительного университета
Подписано в печать Формат
Заказ Печать ризографическая Усл.-печ.л.
Тираж 50 экз. Бумага офсетная №1 Учет.изд.л.

Отпечатано в полиграфическом секторе
Издательства КГАСУ
420043, Казань, Зеленая, д.1