Каюмов Р.А.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Казань
2015

УДК 539.3
ББК
К 12

Каюмов Р.А.

Основы теории упругости и элементы теории пластин и оболочек: Учебное пособие / Р.А.Каюмов – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитек.-строит. ун-та. 2016. 111 с.

ISBN 978-5-7829-0486-9

Табл. 0 Ил.32 Библиогр. 13 имен.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурного-строительного университета. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект №1660 государственного задания в сфере научной деятельности по Заданию № 2014/58 за 2015

Учебное пособие содержит основные понятия, допущения и законы, применяемые в теории упругости, теории пластин и оболочек, некоторые методы решения задач.

Предназначено для направления подготовки 08.03.01 «Строительство» и специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Рецензенты:

Д.ф.-м.н. профессор КГТУ имени А.Н.Туполева академик АН РТ **В.Н. Паймушин**

Д.ф.-м.н. профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика и сопротивление материалов» КГТУ имени С.М. Кирова **М.Н. Серазутдинов**

УДК 539.3
ББК

JSBN 978-5-7829-0486-9

ВВЕДЕНИЕ

Расчет конструкций можно условно разбить на 2 следующих этапа:

1) Определение напряженно-деформированного состояния конструкций.
2) Проверка ее прочности, жесткости и устойчивости.

В курсах сопротивления материалов и строительной механики этот расчет ведется для элементов конструкций, изготовленных из стержней. Теория же упругости – это наука, которая занимается вопросами определения напряженно-деформированного состояния упругих тел произвольной конфигурации, в том числе характерных для строительства балок-стенок, плит, оболочек, стыковых узлов.

Статическая теория упругости использует следующие законы механики:

1. Уравнения равновесия:

$$\sum F_x=0, \quad \sum F_y=0, \quad \sum F_z=0, \quad \sum M_x=0, \quad \sum M_y=0, \quad \sum M_z=0.$$

2. Закон Гука, который предполагает прямо пропорциональную зависимость деформаций от нагрузок. Из курса сопротивления материалов известны следующие соотношения обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}.$$

3. Закон Дюгамеля-Неймана (закон линейного температурного расширения):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha\cdot\Delta T.$$

1. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

1.1. Уравнения равновесия внутреннего малого элемента

Основное отличие теории упругости от сопротивления материалов и строительной механики заключается в следующем. В последних двух дисциплинах используется метод сечений, в котором конструкцию делят на две части. Воздействие одной части на другую заменяют силами и моментами. Эти воздействия находятся из условия, что любая часть конструкции находит в покое. Например, для конструкции, изображенной на рис.1.1, уравнения равновесия отсеченной части имеют вид:

$$\sum F_x = 0: \quad -N_1 - N_2 \cos\alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad -N_2 \sin\alpha - P = 0.$$

Отсюда:

$$N_2 = -P/\sin\alpha,$$

$$N_1 = P ctg\alpha.$$

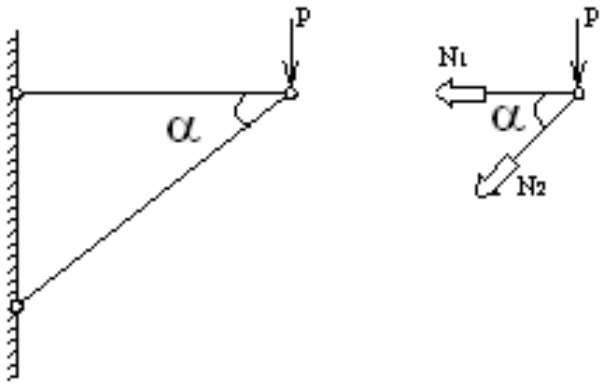


Рис.1.1

В теории упругости из конструкции сечениями выделяется **малый элемент** (рис.1.2). На него со всех сторон соседние элементы воздействуют давлениями (распределенными по поверхности нагрузками) σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz}, которые называются **напряжениями**. Для этого элемента записываются уравнения равновесия, физические соотношения, связывающие напряжения с кинематическими параметрами этого элемента. Совокупность таких уравнений для всех микрочастиц и является объектом изучения теории упругости. Составим уравнения равновесия для малого элемента, изображенного на рис.1.2. Для простоты ограничимся напряжениями σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yx}.

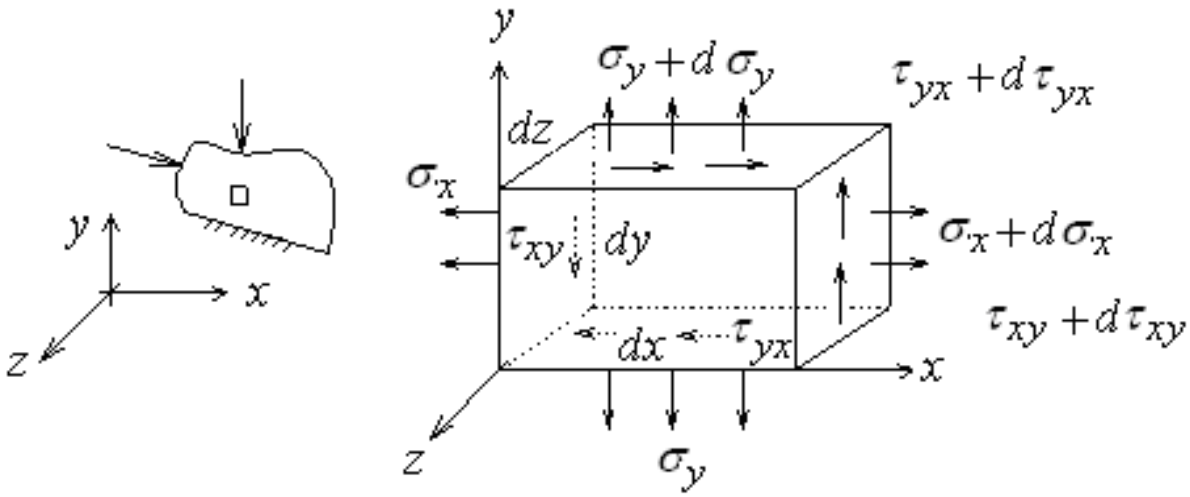


Рис.1.2

Первый индекс в обозначении касательных напряжений показывает площадку, на которую действует напряжение, второй индекс показывает направление.

Правила для изображения положительного направления напряжений приведены на рис.1.3.

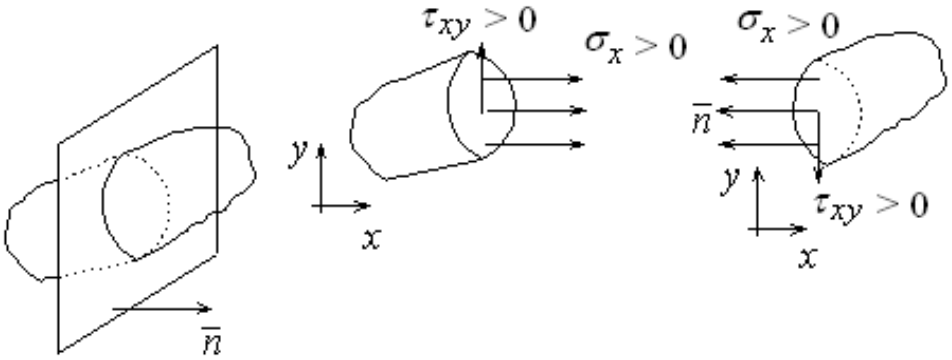


Рис.1.3

Нормаль к грани выбирают так, что она направлена наружу от рассматриваемого элемента. Если направление нормали совпадает с осью x, то положительные σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} направлены в положительном направлении осей x, y, z, если нет, то напряжения направлены в обратную сторону.

Малые величины, на которые различаются напряжения на правой и левой гранях элемента, обозначим через $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\tau_{xy}$.

Поскольку малая частица является частью всего тела, то эта частица тоже находится в покое, поэтому можем записать уравнения его равновесия в виде:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum F_z = 0. \tag{1.1}$$

$$\sum M_x = 0, \qquad \sum M_y = 0, \qquad \sum M_z = 0. \tag{1.2}$$

Из первого уравнения вытекает:

$$-\sigma_x dzdy + \ \sigma_x + d\sigma_x \ \ dzdy - \tau_{yx} dxdy + \ \tau_{yx} + d\tau_{yx} \ \ dxdy = 0. \tag{1.3}$$

Это уравнение делим на объем $dxdydz$. В результате после упрощений получим:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} = 0. \tag{1.4}$$

Если имеется воздействие по оси z, то в уравнение добавляется еще одно слагаемое $\frac{d\tau_{zx}}{dz}$.

На тело, кроме внешних поверхностных сил могут действовать объемные силы (например, удельный вес). Обозначим эти силы через q_x, q_y, q_z.

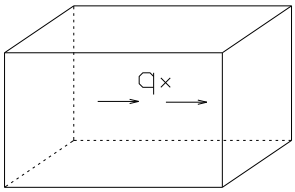


Рис.1.4

Вес параллелепипеда с удельным весом q_x будет:

$$Q_x = q_x \cdot dV = q_x dxdydz.$$

Поэтому в уравнение равновесия (1.4) добавится удельный вес q_x.

Таким образом, в общем случае уравнения равновесия примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma_x}{dx} + \dfrac{d\tau_{yx}}{dy} + \dfrac{d\tau_{zx}}{dz} + q_x = 0, \\ \dfrac{d\sigma_y}{dy} + \dfrac{d\tau_{xy}}{dx} + \dfrac{d\tau_{zy}}{dz} + q_y = 0, \\ \dfrac{d\sigma_z}{dz} + \dfrac{d\tau_{xz}}{dx} + \dfrac{d\tau_{yz}}{dy} + q_z = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Эти соотношения называются **дифференциальными уравнениями равновесия внутреннего малого элемента** (другими словами, уравнения в приращениях).

Из уравнений равновесия (1.2) вытекает **закон парности**

касательных напряжений, которые приведем без вывода:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \qquad \tau_{zy} = \tau_{yz} \qquad .(1.6)$$

В балках-стенках, плитах, оболочках, используемых, например, в строительстве, как правило, σ_z, τ_{yz}, τ_{xz} очень малы. В результате получим следующую более простую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma_x}{dx} + \dfrac{d\tau_{yx}}{dy} + q_x = 0, \\ \dfrac{d\sigma_y}{dy} + \dfrac{d\tau_{xy}}{dx} + q_y = 0. \end{cases} \qquad (1.7)$$

1.2. Уравнения равновесия граничного элемента

Пусть на грани тела действует внешнее давление. Его можно разложить на составляющие p_x, p_y, p_z (рис.1.5).

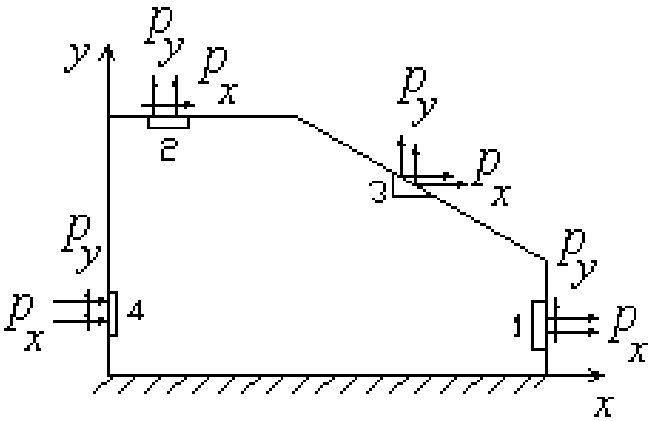


Рис.1.5

Внешние давления p_x, p_y, p_z всегда изображаются в направлении осей координат. Если же необходимо указать, что оно действует против оси, ставят знак «–», т.е. если $p_x<0$, то оно действует против оси x. Для простоты рассмотрим плоский случай, когда $p_z=0$.

Изучим малые элементы, примыкающие к границе. Запишем для них уравнения равновесия:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 .$$

Рассмотрим элемент 1:

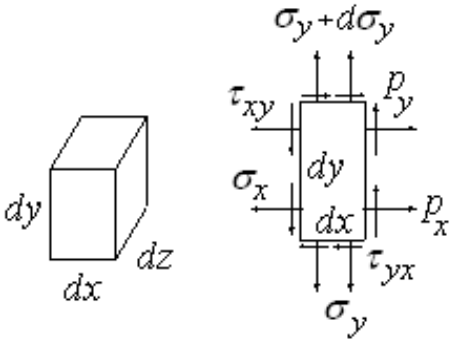


Рис.1.6

Для упрощения выкладок считаем, что $dx/dy \to 0$, то есть dx по сравнению с dy бесконечно мал, тогда вкладом напряжений на горизонтальных площадках можно пренебречь. В состоянии покоя должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} p_x dydz - \sigma_x dydz = 0 \to \quad \sigma_x = p_x, \\ p_y dydz - \tau_{xy} dydz = 0 \to \quad \tau_{xy} = p_y. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Аналогично получаем уравнения равновесия элемента 2, расположенного на верхней грани:

$$\begin{aligned} \sigma_y = p_y, \\ \tau_{xy} = p_x. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Рассмотрим уравнения равновесия элемента 3, расположенного на наклонной грани:

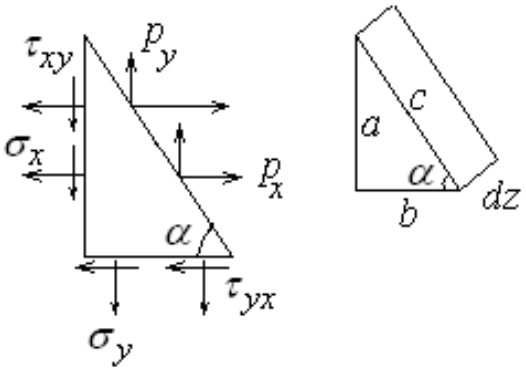


Рис.1.7

$$\begin{aligned} \sum{}_x F = 0: \qquad p_x \cdot c \cdot dz - \sigma_x \cdot a \cdot dz - \tau_{yx} \cdot b \cdot dz = 0, \\ \sum{}_y F = 0: \qquad p_y \cdot c \cdot dz - \sigma_y \cdot b \cdot dz - \tau_{xy} \cdot a \cdot dz = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Учитывая, что

$$a = c \cdot \sin\alpha, \quad b = c \cdot \cos\alpha,$$

получим уравнения равновесия элемента 3 в виде:

$$p_x - \sigma_x \sin\alpha - \tau_{yx} \cos\alpha = 0,$$

$$p_y - \sigma_y \cos\alpha - \tau_{xy} \sin\alpha = 0.$$

Наконец, уравнения равновесия элемента, расположенного на левой грани, дают:

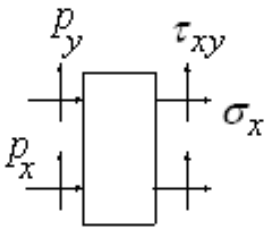


Рис.1.8

$$\sum F_x = 0: \qquad \sigma_x = -p_x,$$

$$\sum F_y = 0: \qquad \tau_{xy} = -p_y.$$

Таким образом, для граничных элементов уравнения равновесия записываются **не в дифференциальной, а в алгебраической форме**.

1.3. Типы плоских задач теории упругости

Существует два типа плоских задач, описывающих два типа напряженно-деформированного состояния:

- плоское напряженное состояние (ПНС);
- плоское деформированное состояние (ПДС).

Плоское напряженное состояние

ПНС возникает в тонких плитах, балках-стенках, оболочках. Здесь принимается, что $\sigma_z \approx 0$; $\tau_z \approx 0$; $\tau_{yz} \approx 0$.

На первый взгляд кажется, что и в поперечном направлении напряжения должны быть большими, но многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показали, что в действительности: $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz} << \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Проверим эту гипотезу на примере изгиба балки прямоугольного сечения (рис.2.1). Перейдем к другой расчетной схеме (рис.2.2).

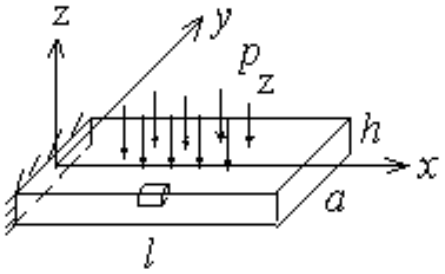


Рис.1.8

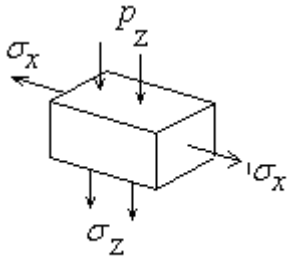


Рис.1.9

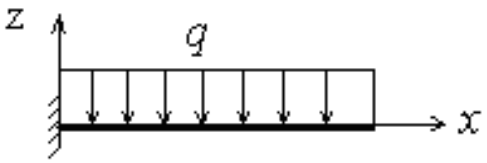


Рис.1.10

Здесь $q = p \cdot a$. Для этого случая существует решение сопротивления материалов:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_y|_{\max}}{J_y} z_{\max}.$$

В нашем случае $z_{\max} = \dfrac{h}{2}$, $J_y = \dfrac{a \cdot h^3}{12}$, $|M_y|_{\max} = \dfrac{q \cdot l^2}{2}$.

Примем сечение балки квадратным $a = h$, тогда:

$$\sigma_{\max} = 3\frac{q \cdot l^2}{h^3} = \frac{3 \cdot p \cdot a \cdot l^2}{h^3} = \frac{3 \cdot p \cdot l^2}{h^2}.$$

Рассмотрим теперь эту задачу с точки зрения теории упругости. Рассмотрим элемент, примыкающий к верхней грани балки, тогда:

$$|\sigma_z| = p.$$

Сравним полученные результаты:

$$\frac{|\sigma_{\max}|}{|\sigma_z|} = \frac{3 \cdot p \cdot l^2}{p \cdot h^2} = \frac{3 \cdot l^2}{h^2}.$$

Поскольку длина балки значительно больше ширины и высоты, то $\dfrac{l^2}{h^2} >> 1$. Тогда получим, что $|\sigma_x| >> |\sigma_z|$.

Пусть l=100см, h=10см, следовательно, $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_z} = 300$.

Таким образом, поперечные напряжения в 300 раз меньше

продольных максимальных напряжений.

Плоское деформированное состояние

Плоское деформированное состояние (ПДС) возникает в телах типа дамбы, ленточного фундамента, дорожного полотна.

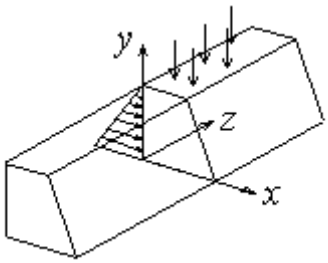


Рис.1.11

В этих телах отсутствуют деформации в направлении z:

$$\varepsilon_z = 0; \gamma_{xz} = 0; \gamma_{yz} = 0.$$

Так как эти деформации нулевые, то такое состояние называется **плоским деформированным состоянием.** Важно отметить, что $\sigma_z \neq 0$.

Отличие между ПНС и ПДС состоит лишь в законе Гука для σ_x, σ_y, σ_z. Уравнения же равновесия, как для внутренних, так и для граничных элементов, имеют одинаковый вид и в случае ПНС, и в случае ПДС.

Рассмотрим сначала закон Гука для **ПНС,** т.е. для случая $\sigma_z = 0$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \mu\dfrac{\sigma_y}{E} - \mu\dfrac{\overset{0}{\sigma_z}}{E}, \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \mu\dfrac{\sigma_x}{E} - \mu\dfrac{\overset{0}{\sigma_x}}{E}, \\ \varepsilon_z = \dfrac{\overset{0}{\sigma_z}}{E} - \mu\dfrac{\sigma_x}{E} - \mu\dfrac{\sigma_z}{E}. \end{cases}$$

Отсюда вытекают выражения:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E}. \tag{1.11}$$

Таким образом, закон Гука при этом упрощается.

Рассмотрим теперь закон Гука для ПДС, т.е. для случая $\varepsilon_z = 0$:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E} = 0.$$

Отсюда:

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Таким образом, зная σ_x и σ_y, легко можно найти σ_z.

Выразим теперь ε_x, ε_y через σ_x, σ_y:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\mu\cdot\ \sigma_x + \sigma_y}{E}.$$

Отсюда:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}\ 1-\mu^2\ - \frac{\mu\cdot\sigma_y}{E}\ 1+\mu\ . \qquad (1.12)$$

По аналогии получим:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}(1-\mu^2) - \frac{\nu\cdot\sigma_x}{E}(1+\mu). \qquad (1.13)$$

Введем приведенные модуль Юнга и коэффициент Пуассона:

$$E^* = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{1-\mu}$$

Тогда закон Гука для ПДС принимает вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E^*} - \mu^*\frac{\sigma_y}{E^*}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E^*} - \mu^*\frac{\sigma_x}{E^*} \qquad (1.14)$$

То есть закон Гука имеет такой же вид, как и в ПНС.

Отметим, что из этих выражений легко можно найти напряжения через деформации. Решая систему уравнений (1.11) или (1.14) относительно σ_x, σ_y получим:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x). \qquad (1.15)$$

2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим деформацию балки-стенки под действием некоторой нагрузки.

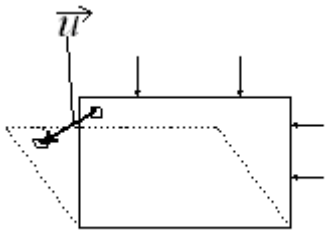


Рис.2.1

Введем вектор перемещений $\vec{u}$ малого элемента (рис.2.1). Так как разные элементы перемещаются по-разному, то $\vec{u}$ зависит от координат элемента (его положения), т.е. $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$. Согласно закону параллелограмма, мы можем рассматривать не вектор, а его компоненты:

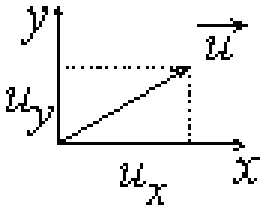


Рис.2.2.

Зная перемещения, можно найти деформации малых элементов тела. Правила их вычисления дают соотношения Коши.

2.1. Соотношения Коши

Рассмотрим малый элемент и его перемещение (рис.2.3). Найдем формулы для вычисления деформаций через u_x, u_y . Пусть точка C перемещается в точку C'. Тогда $\Delta\ dx\ = du_x$.

Отсюда относительная **линейная деформация (иногда ее называют осевой)** будет:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{du_x}{dx}. \qquad (2.1)$$

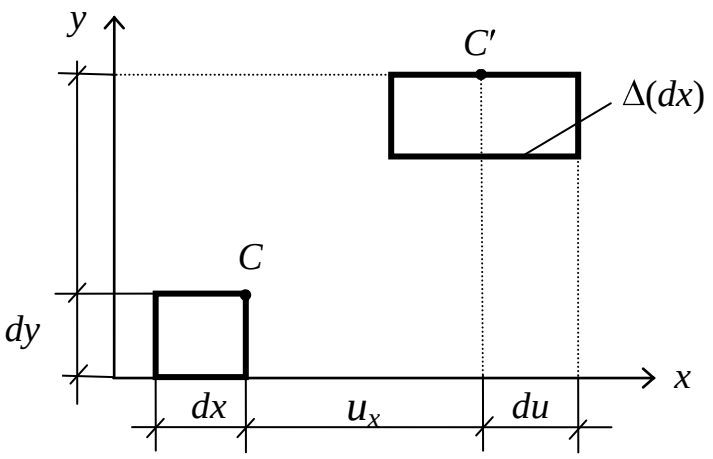


Рис.2.3

Это первое соотношение Коши. Аналогично:

$$\varepsilon_y = \frac{du_y}{dy}.$$

Рассмотрим сдвиг нашего элемента. Пусть точка B перешла в B' (рис.2.4).

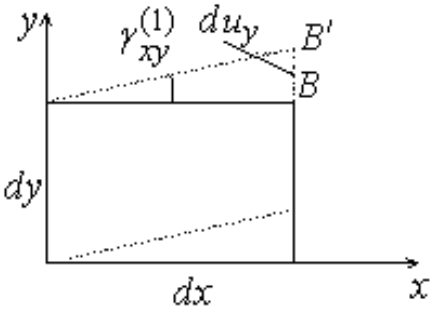


Рис.2.4.

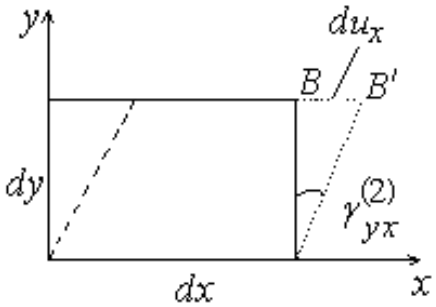


Рис.2.5.

В силу малости угла $\gamma_{xy}^{(1)}$ имеем:

$$tg\gamma_{xy}^{(1)} = \frac{du_x}{dy} \approx \gamma_{xy}^{(1)}.$$

Отметим, что даже при $\gamma_{xy}^{(1)}$=30^0 погрешность составляет около 5%. Точно так же находим, что:

$$tg\gamma_{yx}^{(2)} = \frac{du_y}{dx} \approx \gamma_{yx}^{(2)}.$$

Суммарное изменение прямого угла будет:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{(1)} + \gamma_{yx}^{(2)} = \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx}. \qquad (2.2)$$

Этот угол называют **деформацией сдвига (иногда углом сдвига)**, а соотношение (2.2) – вторым соотношением Коши.

Для краткости в дальнейшем в плоской задаче иногда индексы у угла γ_{xy} будем опускать.

2.2. Условие совместности деформаций

Из соотношений Коши вытекает интересное следствие. Вычислим следующие выражения:

$$\frac{d^2\varepsilon_x}{dy^2} = \frac{d^3u_x}{dxdy^2}; \qquad \frac{d^2\varepsilon_y}{dx^2} = \frac{d^3u_y}{dx^2dy},$$

$$\frac{d^2\gamma}{dxdy} = \frac{d^3u_x}{dxdy^2} + \frac{d^3u_y}{dx^2dy}.$$

Видно, что:

$$\frac{d^2\gamma}{dxdy} = \frac{d^2\varepsilon_x}{dy^2} + \frac{d^2\varepsilon_y}{dx^2}. \qquad (2.3)$$

Подставляя сюда γ_{xy}, ε_x, ε_y по закону Гука получим связь:

$$\frac{1}{G}\frac{d^2\tau_{xy}}{dxdy} = \frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E}\right). \qquad (2.4)$$

Таким образом, выбирать аппроксимации для напряжений произвольным образом нельзя, так как должно выполняться условие совместности деформаций (2.4). Исключение составляют лишь аппроксимации линейными функциями (как, например, принято в задаче о дамбе), поскольку в этом случае вторые производные от напряжений равны нулю, следовательно, (2.4) выполняется автоматически. Поэтому выгоднее решать задачи, отыскивая не напряжения, а перемещения, через которые напряжения определяются с помощью соотношений Коши и закона Гука.

3. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

3.1. Задача о дамбе

Поскольку при оценке прочности обычно необходимо знать лишь напряженное состояние тела, то интерес представляют задачи, в которых удается ограничиться только уравнениями равновесия. Одной из таких является, например, задача о дамбе (рис.3.1). Уравнение линии *BD* имеет вид:

$$x + (y + H)tg\alpha = 0. \qquad (3.1)$$

Давление воды увеличивается с глубиной по закону:

$$p_x = -p_0 \cdot (\text{H-y})/\text{м}; \quad p_0 = 0.1 \text{ кг/см}^2. \qquad (3.2)$$

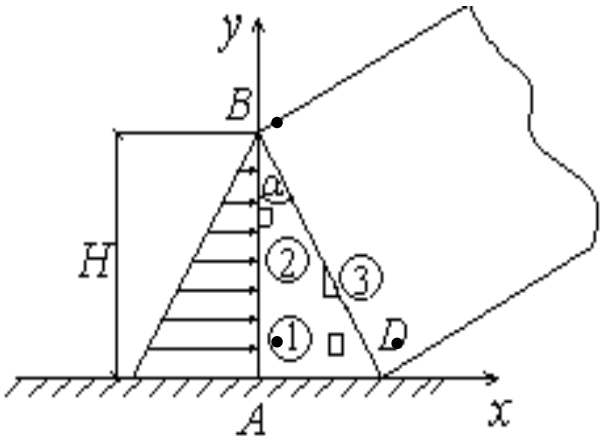


Рис.3.1

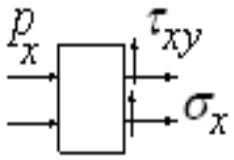


Рис.3.2

Считается, что дамба находится в плоском деформированном состоянии. Тогда уравнения равновесия внутреннего элемента имеют вид:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} = 0, \qquad (3.3)$$

$$\frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{xy}}{dx} + q_y = 0. \qquad (3.4)$$

Для простоты в дальнейшем силой веса q_y дамбы пренебрежем.

Решение ищем в виде:

$$\begin{cases} \sigma_x = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y, \\ \sigma_y = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y, \\ \tau_{xy} = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Необходимо определить коэффициенты a_{ij}; b_{ij}; c_{ij} .

Из уравнений равновесия внутреннего элемента 1 получаем:

$a_{10} + c_{01} = 0$ – первое уравнение равновесия внутреннего элемента;

$b_{01} + c_{10} = 0$ – второе уравнение равновесия внутреннего элемента.

Отсюда:

$$a_{10} = -c_{01}, \qquad (3.6)$$

$$b_{01} = -c_{10}. \qquad (3.7)$$

Из уравнений равновесия элемента 2 на левой грани (его координаты: $x = 0$, y – любое) вытекает (рис 3.3):

$$\sigma_x = -p_x, \qquad (3.8)$$

$$\tau_{xy} = 0. \qquad (3.9)$$

Подставляя сюда (3.3) и (3.5) получаем:

$$a_{00} + a_{10} \cdot 0 + a_{01}y = -p_0 (H - y), \qquad 3.10)$$

$$c_{00} + c_{10} \cdot 0 + c_{01}y = 0. \qquad (3.11)$$

Сначала в качестве координат центра малого элемента 2 примем точку x=0, y=0. Тогда получим из (3.10), (3.11):

$$a_{00} = -p_0 H,$$

$$c_{00} = 0.$$

В качестве координат центра малого элемента 3 примем точку x=0, y=H/2. Подставляя в (3.10) (3.11), получим:

$$a_{01} = -p_0,$$

$$c_{01} = 0.$$

Из (3.6) тогда вытекает, что $a_{10} = 0$

Из уравнения равновесия элемента 3 на наклонной грани (рис.3.1, рис.3.3) следует:

$$\sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy} \sin\alpha = 0,$$

$$\sigma_y \sin\alpha + \tau_{xy} \cos\alpha = 0.$$

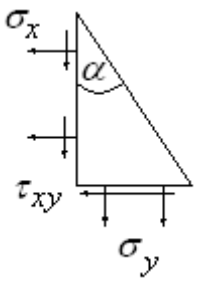


Рис. 3.3

Подставляя сюда (3.5) получаем:

$$\begin{cases} a_{00} + a_{01}y \ \cos\alpha + c_{10}x\sin\alpha = 0, \\ b_{00} + b_{10}x + b_{01}y \ \sin\alpha + c_{10}x\cos\alpha = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Учтем уравнение прямой *BD*:

$$x = \ H - y \ \ tg\alpha \, .$$

Тогда уравнения (3.12) примут вид:

$$\left(a_{00} + a_{01}y\right)\cos\alpha + c_{10}\left(H - y\right)\sin\alpha \cdot tg\alpha = 0 \, . \tag{3.13}$$

$$b_{00} + b_{10} \ \ H - y \ \ tg\alpha + b_{01}y \ \sin\alpha + c_{10} \ \ H - y \ \ tg\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \, . \tag{3.14}$$

Выберем координаты центра этого элемента в виде:

$$x = Htg\alpha \, , \, y = 0.$$

Тогда из уравнения (3.13) вытекает:

$$a_{00}\cos\alpha + c_{10}Htg\alpha \cdot \sin\alpha = 0. \tag{3.15}$$

Наконец выбирая координаты центра третьего элемента в виде:

$$x = H/2tg\alpha \, , \, y = H/2,$$

получаем из уравнения (3.13):

$$a_{01}\cos\alpha + c_{10}tg\alpha \cdot \sin\alpha = 0 \, . \tag{3.16}$$

Из (3.15), (3.16) находим, что

$$c_{10} = p_0 \, ctg^2\alpha, \ a_{00} = -p_0H.$$

Аналогично получаем систему уравнений для отыскания оставшихся неизвестных, подставляя в (3.14) координаты центра элемента, находящегося в вершине дамбы. Тогда решение запишется в виде:

$$b_{00} = p_0 \, H \, ctg^2\alpha, \ b_{10} = -p_0 \, ctg^3\alpha, \ b_{01} = -p_0 \, ctg^2\alpha.$$

Подставляя все коэффициенты в (3.5), получим:

$$\sigma_x = p_0 y,$$
$$\sigma_y = (-p_0 \, ctg^3\alpha) \, x - (p_0 \, ctg^2\alpha) \, y,$$
$$\tau_{xy} = (p_0 \, ctg^2\alpha) \, x.$$

Выводы из решения

1. Решение имеет очень простой вид.

2. Это решение не может удовлетворить условия закрепления основания, а именно: условию $\varepsilon_x=0$ на линии *AB*, поскольку после подстановки вычисленных значений напряжений по закону Гука получим:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E} \neq 0 .$$

Если нас не интересует точность решения в опорной зоне, то решение приемлемо. Однако это противоречие не является существенным, так как условие жесткой заделки является лишь некоторой приближенной заменой реальных условий закрепления. Все недостатки решений такого рода сглаживаются введением коэффициента запаса.

Примечание. Как было отмечено ранее, кроме уравнений равновесия напряжения должны удовлетворять условию совместности деформаций (2.4). В нашем случае оно будет удовлетворяться тождественно, поскольку напряжения представляют собой линейные функции, а в соотношения (2.4) необходимо подставлять вторые производные.

3.2. Функция напряжений (функция Эри)

Суть этого метода – в замене искомых напряжений одной искомой функцией. Эту функцию в случае плоской задачи вводят следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}.$$

Для случая, когда $q_x = q_y = 0$, подставляя напряжения в уравнения равновесия внутреннего элемента, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = \dfrac{\partial^3\Phi}{\partial y^2\partial x} - \dfrac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y\partial y} \equiv 0, \\ \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = \dfrac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y} - \dfrac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y\partial x} \equiv 0. \end{cases}$$

Таким образом, уравнения равновесия внутреннего элемента удовлетворять уже не надо, так как они выполняются тождественно. Остается найти Φ из условий, что необходимо выполнить уравнения равновесия граничных элементов, условия совместности деформаций (или закон Гука и условия закрепления, записанные в деформациях). В случае, когда $q_x \neq 0, q_y \neq 0$, выражения для напряжений имеют чуть более сложный вид. Однако функция Эри применяется в расчетной практике редко, поскольку с ее помощью труднее учесть условия закрепления.

4. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. МЕТОД КОЛЛОКАЦИЙ

В общем случае задача определения напряженно-деформированного состояния может быть сведена к отысканию полей перемещений u_x, u_y, u_z. Приведем этапы решения задач теории упругости на примере плоской задачи.

1. Перемещения задаются в виде аппроксимаций с неизвестными (искомыми) коэффициентами. Например:

2.

$$u_x = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + \dots,$$
$$u_y = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{02}y^2 + \dots. \tag{4.1}$$

3. Записываются выражения для деформаций:

4.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_{10} + a_{20}2x + \dots,$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = b_{01} + b_{02}2y + \dots, \tag{4.2}$$
$$\gamma = a_{01} + b_{10} + \dots .$$

5. Находят выражения для напряжений. Например, в случае ПНС имеем:

$$\sigma_x = \ a_{10} + a_{20}2x + \dots \ \frac{E}{1-\mu^2} + \ b_{01} + b_{02}2y + \dots \ \frac{E\nu}{1-\mu^2},$$
$$\sigma_y = \ b_{01} + b_{02}2y + \dots \ \frac{E}{1-\mu^2} + \ a_{10} + a_{20}2x + \dots \ \frac{E\nu}{1-\mu^2}, \tag{4.3}$$
$$\tau_{xy} = G \ \ a_{01} + b_{10} + \dots .$$

6. Соотношения (4.1) подставляются в условия закрепления, а напряжения – в уравнения равновесия. Получается система уравнений, которая содержит искомые коэффициенты, а также функции x, y, x^2, y^2.

7. Выбирается какой-либо метод, который позволяет исключить x, y и их функции из полученной системы, а также получить столько алгебраических уравнений, сколько имеется неизвестных констант в (4.1).

Рассмотрим, например, **метод простых коллокаций** в задаче о растяжении балки-стенки. Пусть известно, что

$$q_x = 2x^2,\ p_x = 5,\ \nu = 0.$$

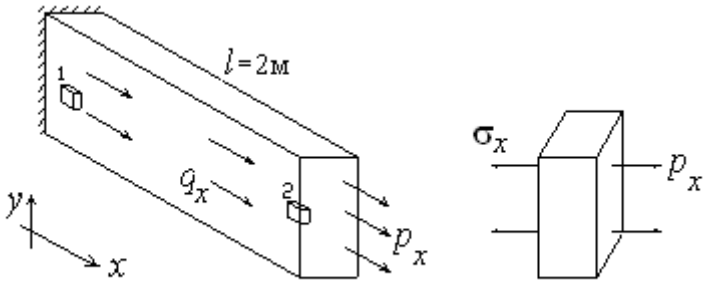


Рис.4.1

<u>Решение:</u>

Видно, что σ_y в нашей задаче можно принять равным нулю, так как ν=0. Также отсутствуют и сдвиги τ_{xy} = 0.

Получаем уравнение равновесия для внутреннего элемента 1 в виде:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -q_x . \tag{4.4}$$

Уравнение равновесия для граничного элемента 2 при x=2 дает

$$\sigma_x = p_x . \tag{4.5}$$

Выбираем u_x в виде:

$$u_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Ограничимся в дальнейшем кубическим полиномом.

Запишем условия закрепления при x = 0:

$$u_x(0) = 0 .$$

Отсюда вытекает, что

$$a_0 = 0 .$$

Далее выражаем деформацию ε_x и напряжение σ_x через u_x:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_1 + a_2 2x + a_3 3x^2 , \\ \sigma_x &= E \cdot \varepsilon_x = E \left(a_1 + a_2 2x + a_3 3x^2 \right) . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Подставляя в уравнения равновесия (4.8), (4.9) получаем

$$E \left(2a_2 + 6a_3 x \right) = -2x^2 , \tag{4.7}$$

$$E \left(a_1 + a_2 4 + a_3 12 \right) = 5 . \tag{4.8}$$

Согласно методу коллокаций, для получения алгебраической

системы выберем некоторые малые элементы с координатами x_1, x_2, … Уравнения равновесия будем выполнять только для них. Эти элементы (или точки) называются элементами (или точками) коллокации.

Пусть x_1= 0, x_2= 1. Тогда уравнение равновесия (4.7) дает:

$$x_1 = 0 \to E \cdot 2a_2 = 0 \to a_2 = 0,$$
$$x_2 = 1 \to E\left(a_2 + 6a_3\right) = -2.$$

Отсюда:

$$a_3 = -\frac{1}{3E}.$$

Из уравнения равновесия (4.12) граничного элемента получаем:

$$E\left(a_1 + 0 + \left(-\frac{1}{3E}\right)\cdot 12\right) = 5.$$

Отсюда:

$$a_1 = \frac{9}{E}.$$

Таким образом:

$$u_x = \frac{9}{E}x - \frac{x^3}{3E},$$
$$\varepsilon_x = \frac{9}{E} - \frac{x^2}{E},$$
$$\sigma_x = E\varepsilon_x = 9 - x^2.$$

Построим эпюру напряжений по длине (рис.4.2).

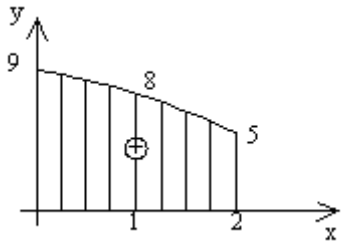


Рис.4.2

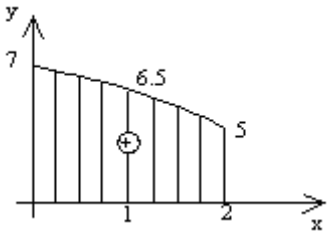


Рис.4.3

Отметим некоторые недостатки метода коллокаций.

Если брать число искомых коэффициентов не очень большим (2÷3), то решение сильно зависит от точек коллокации. Например, рассмотрим второй вариант точек коллокации, когда $x_1 = 0$ $x_2 = 0.5$.

При x_1 =0 уравнение (4.11) дает:

$$E2a_2 = 0 \to a_2 = 0.$$

При x_2 =0,5 из (4.11) получаем:

$$E\ \ 2a_2 + 3a_3\ \ = -0.5,$$

$$a_3 = -\frac{1}{6E} = -\frac{0.17}{E}.$$

Из уравнения равновесия (4.12) граничного элемента вытекает:

$$E\left(a_1 - \frac{12}{6E}\right) = 5,$$

$$a_1 \approx \frac{7}{E}.$$

Теперь решение принимает вид:

$$\sigma_x = E\left(a_1 + a_2 2x + a_3 3x^2\right) = E\left(\frac{7}{E} - \frac{0.5x^2}{E}\right) = 7 - 0.5x^2.$$

Эпюра напряжений примет вид, изображенный на рис.4.2. Видно, что по максимальному напряжению отличие составляет 23%.

Для устранения этого недостатка применяют метод **переопределенных коллокаций.** Суть его в том, что число точек коллокаций берут так, чтобы число уравнений получилось больше числа неизвестных.

Составим систему уравнений равновесия, обозначив через H полученную матрицу, через a – искомый вектор. Пусть число уравнений равно m, а число неизвестных равно n. Уравнения равновесия представим в матричной форме:

$$Ha = c$$

$$a = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_{11}, H_{12}, ..., H_{1n} \\ \\ H_{m1}, H_{m2}, ..., H_{mn} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{Bmatrix}$$

$$m > n$$

Введем вектор невязки:

$$\delta = c - Ha \neq 0.$$

Вычислим его длину. Для этого используем формулу для скалярного умножения. В матричных обозначениях можно записать так:

$$|\delta|^2 = (c - Ha)^T \cdot (c - Ha).$$

$|\delta|^2$ – называется квадратичной невязкой. Потребуем, чтобы он был минимален. По теореме Ферма должно быть:

$$\frac{\partial |\delta|^2}{\partial a} = 0.$$

Дифференцируя выражение для квадратичной невязки получаем:

$$2(-H)^T (c - Ha) = 0.$$

Отсюда вытекает окончательное уравнение для определения *a*:

$$H^T Ha = H^T c.$$

5. МЕТОД БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА

Рассмотрим его суть на предыдущем примере. Как и в методе коллокаций решение ищется в виде аппроксимации (4.5) с неизвестными коэффициентами, то есть:

$$u_x = a_{00} + a_{10}x + \ldots \quad . \tag{5.1}$$

Аналогично по формулам (4.6), (4.7) находятся деформации и напряжения $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \sigma_x = \ldots$. Напряжения подставляются в уравнения равновесия внутреннего и граничных элементов, перемещения подставляются в условия закрепления. В результате снова получаем не алгебраические, а следующие функциональные уравнения.

Уравнения равновесия внутреннего элемента типа (4.11):

$$F(a_{00}, \ldots, x) = -q(x). \tag{5.2}$$

Уравнения равновесия граничных элементов типа (4.12):

$$H(a_{00}, \ldots, l) = p(l). \tag{5.3}$$

Условия закрепления типа (4.13):

$$G(a_{00}, \ldots, 0) = 0. \tag{5.4}$$

После этого начинаются различия в методах коллокаций и Бубнова-Галеркина. Слева и справа в уравнениях (5.2) функции равны или близки друг к другу, значит, и интегралы от них должны быть близки, т.е.:

$$\int_0^l F\left(a_{00},\ldots,x\right)dx \cong -\int_0^l q\left(x\right)dx.$$

Исходные уравнения можно умножать на любую функцию φ(x), от этого равенство не изменится. После этого можно проинтегрировать еще раз:

$$\int_0^l F\left(a_{00},\ldots,x\right)\cdot\varphi_1\left(x\right)dx = -\int_0^l q\left(x\right)\cdot\varphi_1\left(x\right)dx,$$

$$\int_0^l F\left(a_{00},\ldots,x\right)\cdot\varphi_2\left(x\right)dx = -\int_0^l q\left(x\right)\cdot\varphi_2\left(x\right)dx.$$

Добавляя уравнения (5.3), (5.4), в итоге получим столько уравнений, сколько неизвестных.

Недостаток метода в том, что $\varphi_1\left(x\right),\varphi_2\left(x\right)\ldots$ выбираются расчетчиком, следовательно, решение достаточно субъективно. Однако, как правило, наилучшее приближение к точному решению получается тогда, когда в качестве $\varphi_1\left(x\right),\varphi_2\left(x\right)\ldots$ принимаются функции, использованные для аппроксимации перемещений.

Рассмотрим пример, приведенный на рис.4.1.

Сначала интегрируем уравнение (4.11), а затем интегрируем его же, но умножив на $\varphi_1(x) = x$:

$$E\int_0^2\left(2a_2 + 6a_3x\right)dx = -2\int_0^2 x^2dx, \tag{5.4}$$

$$E\int_0^2\left(2a_2 + 6a_3x\right)\cdot x\,dx = -2\int_0^2 x^3dx. \tag{5.5}$$

Уравнение для граничного элемента (4.12) и условие закрепления (4.13) останутся такими же:

$$E\left(a_1 + 4a_2 + 12a_3\right) = 5, \qquad a_0 = 0. \tag{5.6}$$

Интегрируя (5.4), (5.5) получаем:

$$\begin{cases} E\left(4a_2 + 12a_3\right) = -2\dfrac{8}{3}, \\ E\left(4a_2 + 16a_3\right) = -8. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$E4a_3 = -8 + \frac{16}{3}, \qquad a_3 = -\frac{2}{3E}.$$

Из второго уравнения находим a_2:

$$a_2 = \frac{2}{3E}.$$

Из уравнения (5.6) находим a_1:

$$a_1 + 4a_2 + 12a_3 = \frac{5}{E}, \;\; a_1 = \frac{5}{E} + \frac{24}{3E} - \frac{8}{3E} = \frac{31}{3E}.$$

Таким образом,

$$u = \frac{31}{3E}x - \frac{2}{3E}x^2 - \frac{2}{3E}x^3, \;\; \sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{31 + 4x - 6x^2}{3}.$$

Эпюра напряжений имеет вид, приведенный на рис.5.1, и не очень сильно отличается от эпюры, приведенной на рис.4.2.

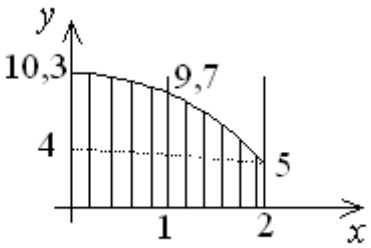


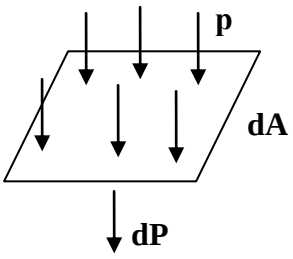
Рис.5.1.

6. МЕТОД РЭЛЕЯ-РИТЦА

Запишем соотношение, которое называется принципом возможных (виртуальных) перемещений. В простейшем случае одноосного растяжения оно имеет вид:

$$\int_V \sigma\, \delta\varepsilon\, dV = F\, \delta u.$$

Рассмотрим случай наличия поверхностных сил.



Возьмем бесконечно малую площадку *dA*. Тогда:

$$dP = p \cdot dA.$$

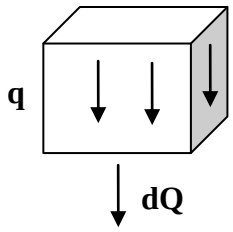
Работа силы:

$$dU = dP \cdot \delta u.$$

Работа всех бесконечно малых сил *dP*:

$$U = \sum dU = \int_{A_p} p \cdot \delta u \, dA.$$

Рассмотрим случай наличия объемных сил.



Найдем равнодействующую $dQ = q \cdot dV$.

Она совершит работу $dU = dQ \cdot \delta u$.

В результате работа объемных сил:

$$U = \sum dU = \int_V q \cdot \delta u \, dV.$$

Таким образом, в общем случае принцип возможных перемещений примет вид:

$$\int_V \sigma \cdot \delta\varepsilon \cdot dV = F \cdot \delta u + \int_{A_p} p \cdot \delta u \cdot dA + \int_V q \cdot \delta u \cdot dV. \qquad (6.1)$$

Аналогично можно рассмотреть случай, когда действуют еще и касательные напряжения. Тогда к энергии деформации добавится следующее слагаемое:

$$W_1 = \int_V \tau \, \delta\gamma \, dV.$$

Здесь τ – касательное напряжение, γ – сдвиг малого элемента. Тогда принцип возможных (виртуальных) перемещений примет вид:

$$\int_V \sigma \cdot \delta\varepsilon \cdot dV + \int_V \tau \cdot \delta\gamma \cdot dV = F \cdot \delta u + \int_{A_p} p \cdot \delta u \cdot dA + \int_V q \cdot \delta u \cdot dV.$$

Эта запись справедлива и в векторной форме, если под $\sigma, \varepsilon, \delta u$ подразумевать векторы.

Суть метода Рэлея-Ритца заключается в следующем. Как и в методе коллокаций, или Бубнова-Галеркина перемещения представляются в виде аппроксимации с неизвестными коэффициентами. Как и ранее, пояснения идут на примере простейшей одномерной задачи. Выбираем u_x, например, в виде:

$$u_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

Зададим условия закрепления при $x = 0$:

$$u_x(0) = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$a_0 = 0.$$

Далее выражаем деформацию и напряжение через u_x:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_1 + a_2 2x + a_3 3x^2 + ..., \\ \sigma_x &= E \cdot \varepsilon_x = E \;\; a_1 + a_2 2x + a_3 3x^2 + ... \;. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Подставим напряжение в правую часть принципа возможных перемещений (6.1). Далее выбираем несколько возможных (виртуальных, т.е. воображаемых) перемещений δu, через которые находим $\delta\varepsilon_x$ по соотношениям Коши:

$$\delta\varepsilon_x = \frac{\partial(\delta u_x)}{\partial x}.$$

Количество разных воображаемых перемещений выбираем равным количеству неизвесных коэффициентов a_i, чтобы число неизвестных было равно числу уравнений. После этого проводится интегрирование соотношений (6.1). Это дает систему обыкновенных линейных алгебраических уравнений для коэффициентов a_i.

Основное достоинство метода состоит в том, что в отличие от метода Бубнова-Галеркина здесь не требуется выполнять условие равновесия граничных элементов, что позволяет использовать аппроксимации с меньшим количеством неизвестных.

Рассмотрим пример, приведенный на рис. 4.6 с теми же данными, что и ранее, т.е. при $q_x = 2x^2$, $p_x = 5$. Примем следующую аппроксимацию для перемещений:

$$u_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \tag{6.3}$$

Снова из условия закрепления $u_x(0) = 0$ вытекает, что

$$a_0 = 0.$$

Далее выражаем деформацию и напряжение через u_x:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_1 + a_2 2x, \\ \sigma_x &= E \cdot \varepsilon_x = E \;\; a_1 + a_2 2x \;. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Теперь выберем два разных δu. Для этого применяют следующий подход. В первом варианте положим в аппроксимации (6.3) значения a_1=1, a_2=0. Тогда получим:

$$\delta u = x, \quad \delta\varepsilon = 1. \tag{6.5}$$

Подставим (6.4), (6.5) в (6.3), в результате получим:

$$\int_V E \;\; a_1 + a_2 2x \;\; dV = \int_{A_p} 5l\, dA + \int_V 2x^2 \cdot x\, dV. \tag{6.5}$$

Представим объем dV в виде объема тонкого диска толщины dx. Тогда получим:

$$dV = A_p dx,$$

$$A_p \int_0^2 E \;\; a_1 + a_2 2x \;\; dx = A_p 5l + A_p \int_0^2 2x^2 \cdot x dx.$$

Отсюда вытекает первое уравнение в виде:

$$a_1 + a_2 2 = 9/E. \tag{6.6}$$

Во втором варианте положим в аппроксимации (6.3) значения a_1=0, a_2=1. Тогда получим:

$$\delta u = x^2, \quad \delta\varepsilon = 2x. \tag{6.7}$$

Подставим (6.7), (6.4) в (6.3):

$$\int_V E \;\; a_1 + a_2 2x \;\; 2x dV = \int_{A_p} 5l^2 \;\; dA + \int_V 2x^3 \cdot x\, dV. \tag{6.8}$$

Аналогично предыдущему получим:

$$2A_p \int_0^2 a_1 x + a_2 2x^2 \;\; dx = A_p 5l^2 + A_p \int_0^2 2x^4 dx.$$

Отсюда вытекает второе уравнение в виде:

$$a_1 + a_2 8/3 = 8,2/E. \tag{6.9}$$

Решение системы (6.6), (6.9) дает значения:

$$a_1 = 11,4/E \qquad a_2 = -1,2/E.$$

Напряжение будет вычисляться по формуле (6.4):

$$\sigma_x = 11,4 - 2,4 \cdot x.$$

В заделке напряжение будет

$$\sigma_x = 11,4.$$

На правом торце $\sigma_x = 6,6$.

7. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Суть метода изложим для случая плоской задачи. Уравнения равновесия для внутреннего элемента имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma_x}{dx} + \dfrac{d\tau_{yx}}{dy} + q_x = 0, \\ \dfrac{d\sigma_y}{dy} + \dfrac{d\tau_{xy}}{dx} + q_y = 0. \end{cases}$$

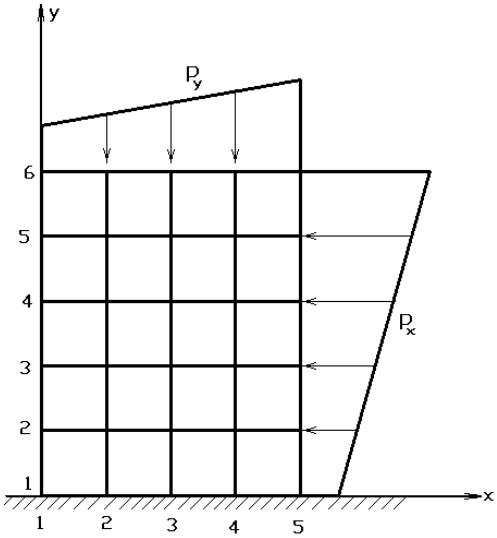


Рис.7.1

Для граничных элементов в случае, например, изображенном на рис.7.1, уравнения равновесия примут вид:

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

$$\sigma_x = -p_x, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } x = a,$$

$$\sigma_y = -p_y, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = b.$$

В методе конечных разностей искомыми считаем не функции σ_x, σ_y, τ_{xy}, а их значения во внутренних и граничных узлах.

Нумерация неизвестных осуществляется с помощью двух индексов, например, σ_x^{ij} – это значение функции σ_x в i-й строчке, в j - м столбце.

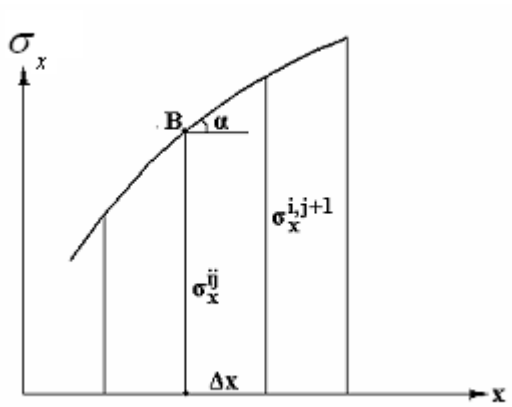


Рис.7.2

Воспользуемся геометрическим смыслом производной (это тангенс угла наклона касательной к кривой). Из рис.7.2 видно, что в точке с индексами $i\ j$ имеем:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sigma_x^{i,j+1} - \sigma_x^{ij}}{\Delta x}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \sigma_x^{ij}}{\partial x} = \frac{\sigma_x^{i,j+1} - \sigma_x^{ij}}{\Delta x}.$$

Таким образом, производная выражается через искомые значения функции σ_x.

Аналогично поступают с другими неизвестными функциями, т.е. с σ_y, τ_{xy}. Все это подставляют в уравнения равновесия. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно значений напряжений $\sigma_x^{ij}, \sigma_y^{ij}, \tau_{xy}^{ij}$.

Рассмотрим пример, приведенный на рис. 7.3.

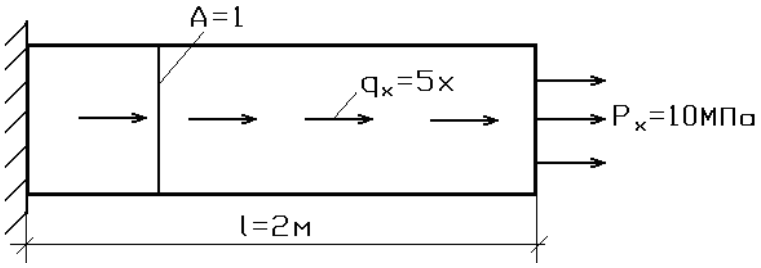


Рис.7.3

Рассмотрим задачу отыскания $\sigma_x^0, \sigma_x^1, \sigma_x^2, \sigma_x^3$ в точках с координатами:

$$x^0 = 0,\ \ x^1 = l/3\ \ x^2 = 2l/3,\ \ x^3 = l,$$

Эти величины найдем из условий равновесия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -5x, \\ \sigma_x = p_x \text{ при } x = 2. \end{cases}$$

Для граничного элемента получаем $\sigma_x^3 = 10\text{МПа}$.

Для внутренних элементов:

$$\begin{cases} x^0 = 0: & \dfrac{\sigma_x^1 - \sigma_x^0}{\Delta x} = -5 \cdot 0, \\ x^1 = l/3: & \dfrac{\sigma_x^2 - \sigma_x^1}{\Delta x} = -5 \cdot 0{,}66, \\ x^2 = 2l/3: & \dfrac{\sigma_x^3 - \sigma_x^2}{\Delta x} = -5 \cdot 1{,}33. \end{cases}$$

Получилось 3 уравнения с 3-я неизвестными. Учитывая, что $\Delta x = 0{,}66 = \dfrac{2}{3}$, получим:

$$\begin{cases} \sigma_x^1 - \sigma_x^0 \ \cdot 1{,}5 = 0, \\ \sigma_x^2 - \sigma_x^1 \ \cdot 1{,}5 = \text{-}3{,}3, \\ \sigma_x^3 - \sigma_x^2 \ \cdot 1{,}5 = \text{-}6{,}6. \end{cases}$$

Из третьего уравнения с учетом того, что $\sigma_x^3 = 10\text{МПа}$, найдем:

$$-\sigma_x^2 \cdot 1{,}5 = -21{,}6 \rightarrow \sigma_x^2 = 14{,}4$$

Из второго и первого уравнений вытекает, что

$$\sigma_x^1 = \frac{25}{1{,}5} = 16{,}67, \qquad \sigma_x^0 = \sigma_x^1 = \frac{25}{1{,}5} = 16{,}67.$$

К недостатку метода можно отнести то, что в случае плоской задачи, если область не прямоугольная, трудно записываются уравнения равновесия граничных элементов.

Достоинства метода заключаются в следующем.

1) Сразу получаем значения искомых функций

2) Легко следить за сходимостью метода при увеличении числа неизвестных.

8. Метод конечных элементов

МКЭ вобрал в себя положительные стороны и МКР, и метода Рэлея-Ритца. МКЭ основан на законе сохранения энергии, записанного в форме принципа виртуальных перемещений. Суть МКЭ заключатся в следующем.

1. Тело представляют в виде набора элементов с объемами V_k:

$$V = \sum_{k=1}^{k} V_k \ .$$

2. В каждом элементе V_k аппроксимируют искомые перемещения:

$$u = U_k \cdot f_k(x), \quad U_k = \{u_{k1}, u_{k2}, ...\}, \quad f_k = \{f_{k1}, f_{k2}, ...\},$$

здесь $f_k(x)$ – выбираемые расчетчиком вектор известных функций, U_k - вектор искомых узловых перемещений.

Наборы функций $f_k(x)$ на сегодня имеются в большом количестве.

3. На каждом элементе вычисляется работа внешних сил и накопленная упругая энергия элемента.

4. Все это подставляется в закон сохранения, например, в принцип возможных перемещений. В качестве δu берутся какие-либо возможные перемещения. Обычно в качестве них берут соотношения $\delta U = U_k^0 f_k(x)$, но с заданными значениями узловых перемещений U_k^0. При этом для получения систем уравнений применяют следующую процедуру. Сначала принимают $u_{k1}^0 = 1, \quad u_{k2}^0 = u_{k3}^0 = ...0$, далее берут $u_{k2}^0 = 1$ все остальные равны нулю и т.д.

В результате получим столько уравнений, сколько неизвестных.

Рассмотрим пример расчета бруса, приведенного на рис.8.1. Пусть известно, что P_0=25 МПа; $q=x^2$ МПа; l=3м. Найти перемещения узлов1,2 (т.е. u_1, u_2).

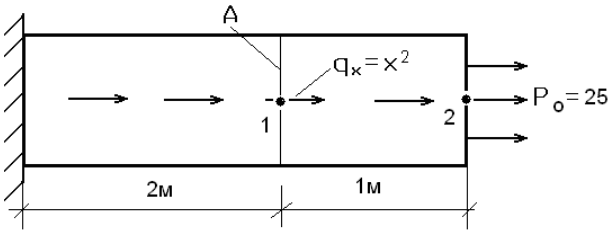


Рис.8.1

Разобьем стержень на два элемента – первый длиной 2 м, второй длиной 1 м. На каждом из них аппроксимируем перемещения линейными зависимостями.

Рассмотрим первый элемент и аппроксимируем перемещение следующей линейной функцией:

$$u = u_1 \frac{x}{2}.$$

Тогда:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_1}{2}, \quad \sigma = E\frac{u_1}{2}.$$

Рассмотрим второй элемент:

$$u = u_1(3-x) + u_2(x-2), \qquad \varepsilon = -u_1 + u_2, \qquad \sigma = E(u_2 - u_1).$$

Подставим в закон сохранения (учитываем, что на правом торце $\delta u = \delta u_2$):

$$\int_{V_1} \frac{Eu_1}{2}\delta\varepsilon dV_1 + \int_{V_2} E(u_2 - u_1)\delta\varepsilon dV_2 = \int_{V_1} q\delta u dV_1 + \int_{V_2} q\delta u dV_2 + \int_A P_0 \delta u_2 dA.$$

В качестве вариаций перемещений и деформаций (вооброжаемых перемещений и деформаций) примем:

1-й элемент: $\delta u = \delta u_1 \frac{x}{2}, \quad \delta\varepsilon = \frac{\partial u_1}{2},$

2-й элемент: $\delta u = \delta u_1(3-x) + \delta u_2(x-2), \quad \delta\varepsilon = -\delta u_1 + \delta u_2.$

Полагая сначала $\delta u_1 = 1, \quad \delta u_2 = 0$, получим первое уравнение:

$$\int_{V_1} \frac{Eu_1}{2} 0{,}5 dV_1 + \int_{V_2} E(u_2 - u_1)(-1)dV_2 = \int_{V_1} (x^2)\frac{x}{2} dV_1 + \int_{V_2} x^2(3-x)dV_2 + \int_A P_0 \cdot 0 \cdot dA,$$

$$2AE\frac{u}{4} + AE(u_1 - u_2) = \frac{A}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 + A\left(x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3 = 2{,}75A.$$

Полагая $\delta u_1 = 0, \quad \delta u_2 = 1$, получим второе уравнение:

$$\int_{V_1} \frac{Eu_1}{2} 0{,}5 dV_1 + \int_{V_2} E(u_2 - u_1)(-1)dV_2 = \int_{V_1} (x^2)\frac{x}{2} dV_1 + \int_{V_2} x^2(3-x)dV_2 + \int_A P_0 \cdot 1 \cdot dA,$$

$$AE(u_2 - u_1) = \frac{A}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3 - 2A(x^3)\Big|_2^3 + P_0 A,$$

Таким образом, нашли систему уравнений относительно u_2, u_1.

$$\begin{cases} 1{,}5u_1 - u_2 = 2{,}75/E \text{ МПа} \cdot \text{м}, \\ (u_2 - u_1) = 28{,}58/E \text{ МПа} \cdot \text{м}. \end{cases}$$

Выразим перемещение u_2 из второго уравнения:

$$u_2 = \frac{28{,}58}{E} + u_1.$$

Из первого уравнения тогда находим:

$$1{,}5u_1 - u_1 - \frac{28{,}58}{E} = 2{,}75/E,$$

$$u_1 = 62{,}7/E \text{ МПа}\cdot\text{м},\ u_2 = 91{,}24/E \text{ МПа}\cdot\text{м}.$$

Теперь можно вычислить напряжения:

<u>1 элемент</u>: $\sigma = \frac{Eu_1}{2} = 31{,}35$ МПа, **<u>2 элемент</u>**: $\sigma = E(u_2 - u_1) = 28{,}58$ МПа.

<u>Достоинства метода</u>

1. Решение сразу дает значения перемещений узлов упругого тела.
2. Легко проверяется сходимость метода при сгущении сетки.
3. Матрица системы уравнений получается симметрической и ленточной. Это позволяет экономить память ЭВМ и ускорять процесс решения.
4. В этом методе необходимо выполнять только геометрические граничные условия, например, задавать равными нулю перемещения закрепленных узлов. А записывать уравнение равновесия граничных и внутренних элементов как в методе Бубнова не нужно, поскольку закон сохранения энергии полностью эквивалентен этим уравнениям равновесия.

<u>Недостатки метода</u>

Распределение напряжений получается негладким. Для получения гладкого распределения напряжения существуют разные подходы. Наиболее часто применяемым является простейший метод осреднения напряжений в узлах (но он является наименее точным).

Приведем метод конечных элементов в матричной форме. Сначала проводится разбивка на элементы. Задача заключается в нумерации элементов, узлов и записи их связей.

Запись осуществляется в виде матрицы топологии, например, в виде:

[M] = [*элементы*, *номера узлов*]

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 12 & 75 \\ 2 & 12 & 39 & 41 \\ 3 & \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots} \\ \ldots & & & \end{bmatrix}$$

Далее вводится аппроксимация перемещений на элементе.

$$u = [N(x)]\{U\}.$$

N – матрица, которая зависит от координат, $\{U\}$ – вектор, составленный из перемещений узлов элемента, он является искомым.

Формы матрицы N на сегодня разработаны и имеются во всех пакетах МКЭ.

Например, в рассмотренной выше задаче N имеет вид:

$$[N] = \left[\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right],$$

$$U = N \begin{Bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{Bmatrix}.$$

Далее вычисляются деформации по соотношениям Коши:

$$\varepsilon = B\ u.$$

Тогда получим:

$$\varepsilon = [B]\{u\} = [B][N(x)]\{U\} = [C(x)]\{U\}.$$

Затем записываем соотношения для напряжения по закону Гука.

$$\sigma = D\varepsilon = D\ C(x) \cdot U\ .$$

Выберем вариацию.

$$\delta u = \alpha u = \alpha \cdot [N(x)]\{\tilde{U}\},$$

$$\delta\varepsilon = [B]\{\delta u\} = \alpha\ [C(x)]\{\tilde{U}\}.$$

$\tilde{U}$ – воображаемый вектор узловых перемещений. Произвольность $\tilde{U}$ требуется согласно принципу Лагранжа.

Подставим в принцип Лагранжа.

$$\int_V \sigma^T \delta\varepsilon\, dV = p^T \delta u.$$

Здесь индексом T обозначена операция транспонирования

Подставляя в принцип Лагранжа, получим:

$$\int_V \left[D^{-1}\right] C(x)\ U^T\ C(x)\ \tilde{U}\ dV = P^T \left[N(x_p)\right] \tilde{U}\ ,$$

$$\int_V U^T\ C^T \left[D^{-1}\right]^T\ C\ \tilde{U}\ dV = P^T \left[N(x_p)\right] \tilde{U}\ .$$

При интегрировании x, y, z исчезают. В результате получаем:

$$U^T\ K\ \tilde{U} = P^T \left[N(x_p)\right]\left[\tilde{U}\right].$$

Здесь

$$K = \int_V C^T \left[D^{-1} \right] C \, dV .$$

Матрица K называется матрицей жесткости.

Поскольку $\tilde{U}$ – произвольный вектор, то можно сначала положить

$$\tilde{U}_1 = 1, \quad \tilde{U}_2 = 0, \quad \tilde{U}_3 = 0, \ldots$$

Тогда получим одно уравнение. Далее полагаем, что

$$\tilde{U}_1 = 0, \quad \tilde{U}_2 = 1, \quad \tilde{U}_3 = 0, \ldots$$

и получаем 2-е уравнение и т.д.

В результате получаем столько уравнений, сколько неизвестных. Эту систему можно записать в следующем виде:

$$K \quad U \;=\; P \;.$$

Решив эту систему уравнений, найдем перемещения каждого узла. После этого можно найти деформации и напряжения в элементах по соотношениям:

$$\varepsilon = \left[B \right] \underline{u} = \left[B \right] N(x) \left\{ \tilde{U} \right\} = \left[C(x) \right] \left\{ \tilde{U} \right\},$$

$$\sigma = D\varepsilon = D \;\; C(x) \;\cdot\; U \;\;.$$

9. ТЕОРЕМА О МИНИМУМЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОПОСРЕДОВАННОЙ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ

Для сравнительной оценки решений различными методами применяют следующий подход. Вычисляют **потенциальную энергию системы:**

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \ldots) \cdot dV - P \cdot u_P - F \cdot u_F - \ldots , \qquad (9.1)$$

Здесь первое слагаемое – энергия деформации тела, $P \cdot u_P$, $F \cdot u_F$ – работы внешних сил P и F на перемещениях u_P, u_F элементов, к которым приложены эти силы.

Если окажется, что одно решение дает Π_1, а второе Π_2, причем $\Pi_1 > \Pi_2$, то скорее всего второе решение – более точное. Это утверждение основано на следующей теореме.

<u>Теорема.</u> Потенциальная энергия системы (9.1) принимает минимальное значение для истинных перемещений, деформаций и напряжений.

Для простоты доказательство приведем для простейшего случая одномерной задачи.

Пусть известно точное решение:

$$u = u^{\text{точное}},$$

тогда:

$$\Pi^{точное} = \frac{1}{2}\int E\varepsilon^{\text{точное}}\varepsilon^{\text{точное}}dV - Pu^{\text{точное}}. \qquad (9.2)$$

Приближенное решение представим в виде:

$$u = u^{\text{точное}} + \Delta u.$$

Следовательно,

$$\Pi^{прибл.} = \frac{1}{2}\int E\ \ \varepsilon^{\text{точное}} + \Delta\varepsilon\ \ \ \varepsilon^{\text{точное}} + \Delta\varepsilon\ \cdot dV - \mathrm{P}\ \ u^{\text{точное}} + \Delta u\ =$$

$$= \frac{1}{2}\int E\varepsilon^{точное}\varepsilon^{точное}\cdot dV + \int E\varepsilon^{точное}\Delta\varepsilon\cdot dV + \frac{1}{2}\int E\Delta\varepsilon^2\cdot dV - Pu^{точное} - P\Delta u.$$

Учитывая (9.2), получим:

$$\Pi^{прибл.} = \Pi^{точное} + \int\sigma^{точное}\Delta\varepsilon\cdot dV - P\Delta u + \frac{1}{2}\int E\Delta\varepsilon^2\cdot dV.$$

В силу принципа возможных перемещений:

$$\int\sigma^{точное}\Delta\varepsilon\cdot dV = \mathrm{P}\cdot\Delta u.$$

В результате получаем:

$$\Pi^{прибл.} = \Pi^{точное} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \mathrm{E}\Delta\varepsilon^2 dv}_{>0}.$$

Здесь второе слагаемое в правой части − сугубо положительная величина. Таким образом, для точного решения $\Pi^{точное}$ всегда меньше, чем потенциальная энергия $\Pi^{прибл.}$ для приближенного решения.

Примечание. При оценке прочности логично называть более близким к точному то решение, которое ближе по максимальным напряжениям, под которым понимается обычно эффективное напряжение $\sigma_{эфф}$ (его называют также эквивалентным или приведенным). Для плоской задачи, например, согласно четвертой теории прочности:

$$\sigma_{эфф} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}.$$

Теорема не гарантирует того, что если $\Pi_1 > \Pi_2$, то второе решение даст значение $(\sigma_{эфф})_{\max}$, которое будет ближе к точному.

10. ЗАДАЧА ФЛАМАНА

Рассмотрим задачу воздействия погонной силы P на полубесконечное упругое тело.

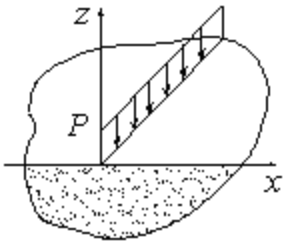


Рис.10.1

Это, например, расчетная схема давления на грунт ленточного фундамента.

Решение для этой задачи имеет вид:

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi}\frac{z^3}{x^2+z^2{}^2}, \quad \sigma_z = -\frac{2P}{\pi}\frac{z^2x}{x^2+z^2{}^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{2P}{\pi}\frac{zx^2}{x^2+z^2{}^2}.$$

Проверяя уравнения равновесия (за исключением линии действия силы P) для плоской задачи при $q_x = q_z = 0$, удостоверяемся, что оно удовлетворяется везде. Отметим также тот известный факт, что в линейной теории упругости решение единственно.

Проведем анализ решения.

При приближении к точкам приложения погонной силы P, (т.е. при $x \to 0, z \to 0$) получаем, что $\sigma_x \to \infty$, $\sigma_y \to \infty$, $\tau_{xy} \to \infty$.

Это означает, что вблизи точек приложения погонной силы P использовать решение для расчета на прочность бессмысленно. Однако как выяснится ниже, эти решения подобного типа можно использовать для определения поля напряжений при воздействии нагрузки, распределенной по площади.

Исследуем вопрос о том, как можно применить решение задачи Фламана в задаче о действии внешнего давления в плоской задаче. Для этого рассмотрим действие давления $q(x)$ на полупространство (рис.10.2). То, что q не зависит от y означает, что оно не меняется в направлении Oy.

Найдем $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Возьмем площадку $d\xi$ на расстоянии ξ от начала координат и перейдем от распределенной нагрузки к сосредоточенной силе $dP = q\ d\xi$. Получаем задачу Фламана. Как известно, при переносе начала координат влево на расстояние ξ любая функция f записывается в виде:

$$f(x - \xi).$$

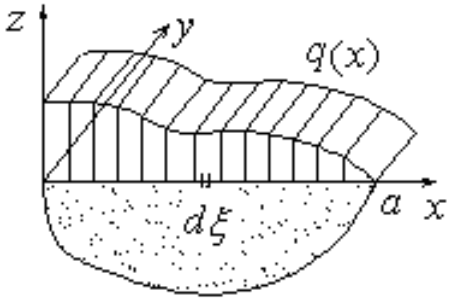


Рис.10.2

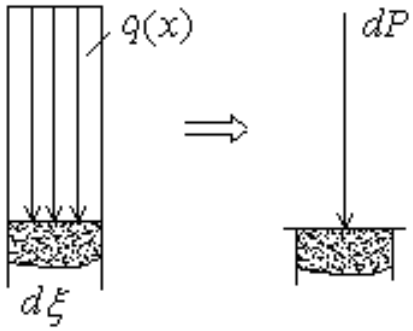


Рис.10.3

Тогда для силы dP решение можно записать в виде:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{2dP}{\pi}\dfrac{z^3}{\left((x-\xi)^2+z^2\right)^2}, \\ \sigma_z = -\dfrac{2dP}{\pi}\dfrac{z^2(x-\xi)}{\left((x-\xi)^2+z^2\right)^2}, \\ \tau_{xy} = -\dfrac{2dP}{\pi}\dfrac{z(x-\xi)^2}{\left((x-\xi)^2+z^2\right)^2}. \end{cases}$$

Такие же решения получим для других отрезков $d\xi$, расположенных в других местах. Общее воздействие получим, суммируя напряжения от воздействия различных dP:

$$\sigma_x = \sum d\sigma_x = -\sum \frac{2dP}{\pi}\frac{z^3}{\left((x-\xi)^2+z^2\right)^2} = -\int_0^a \frac{2dP}{\pi}\frac{z^3}{\left((x-\xi)^2+z^2\right)^2}d\xi =$$

$$= -z^3\int_0^a \frac{2q\ \xi}{\pi\ \left((x-\xi)^2+z^2\right)^2}d\xi,$$

$$\sigma_z = \sum d\sigma_z = -\sum \frac{2dP}{\pi} \frac{z^2(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + z^2{}^2} = -\int_0^a \frac{2dP}{\pi} \frac{z^2(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + z^2{}^2} d\xi =$$

$$= -z^2 \int_0^a \frac{2q\ \xi\ (x-\xi)}{\pi\ (x-\xi)^2 + z^2{}^2} d\xi,$$

$$\tau_{xz} = \sum d\tau_{xz} = -\sum \frac{2dP}{\pi} \frac{z(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + z^2{}^2} = -\int_0^a \frac{2dP}{\pi} \frac{z^3}{(x-\xi)^2 + z^2{}^2} d\xi =$$

$$= -z \int_0^a \frac{2q\ \xi\ (x-\xi)^2}{\pi\ (x-\xi)^2 + z^2{}^2} d\xi.$$

<u>Пример</u>. Пусть q = const = q_o, $a = 1$. Тогда интегрируя, получим

$$\sigma_x = \frac{q_o\left(\frac{(-1+x)z}{(-1+x)^2 + z^2} - \frac{xz}{x^2+z^2} + arctg\left[\frac{-1+x}{z}\right] - arctg\left[\frac{x}{z}\right]\right)}{\pi}.$$

Аналогично можно найти σ_z, τ_{xz}.

В этом случае бесконечных напряжений под нагрузкой не возникает (например, посередине при x=0.5 получим σ_x = 0.8183 q_0). Поэтому при расчете ленточных фундаментов вместо сосредоточенной силы необходимо задавать нагрузку $q(x)$, близкую к реальному распределенному давлению на основание.

11. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

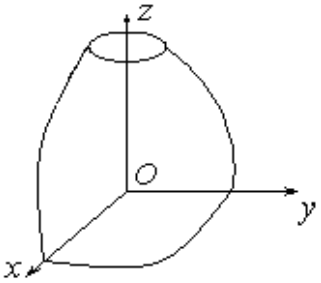


Рис.11.1

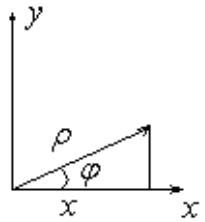


Рис.11.2

Они возникают при расчете тел вращения. Для упрощения задачи переходят к полярной системе координат. Как видно из рисунка:

$$y = \rho \sin\varphi,$$

$$x = \rho \cos\varphi.$$

Тогда производные вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Далее:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin\varphi.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho \sin\varphi}.$$

Подставляя вместо производных по *x, y* производные по ρ, φ, с помощью этого соотношения получим новые системы уравнений в полярной системе координат. В случае осесимметричных задач состояние тела не зависит от угла φ. То есть производные по $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$, поэтому все уравнения сильно упрощаются.

Примечание. В системе координат *x, y* была введена функция Эри, через которую вычисляются напряжения:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Аналогичную функцию можно ввести в полярной системе координат:

$$\sigma_r = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}.$$

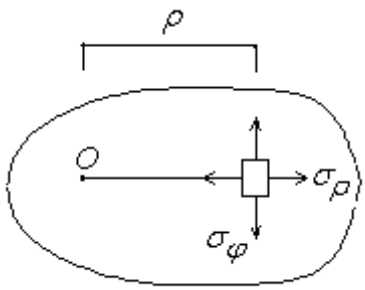


Рис.11.3

При этом уравнения равновесия внутреннего элемента будут удовлетворяться автоматически, остается удовлетворить уравнения равновесия граничных элементов и условие совместности деформаций.

Последнее принимает вид:

$$\Phi''''+2\frac{\Phi'''}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}\Phi''+\frac{\Phi'}{\rho^3}=0\text{, где } \Phi'=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}.$$

Общее решение этого уравнения можно найти в справочниках по дифференциальным уравнениям. Оно имеет довольно простой вид:

$$\Phi=C_3\rho^2+C_2\ln\rho+C_1\rho^2\ln\rho+C_4.$$

Задача о трубе

Самую большую трудность в теории упругости всегда составляет удовлетворение уравнений равновесия элементов на границе и условий закрепления, но для ряда задач удается получить точное решение.

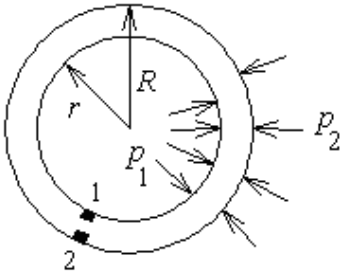


Рис.11.4

В этой задаче решение имеет вид:

$$\sigma_r=\frac{C_2}{\rho^2}+2C_3,\quad \sigma_\theta=-\frac{C_2}{\rho^2}+2C_3.$$

C_i – константы интегрирования уравнения. Их находят из условий равновесия граничных элементов 1 и 2. Выражения для них имеют вид:

$$C_2=\frac{p_2-p_1}{R^2-r^2}R^2r^2,\qquad 2C_3=\frac{-p_2R^2+p_1r^2}{R^2-r^2}.$$

Здесь r и R – внутренний и внешний радиусы трубы. Рассмотрим, например, случай отсутствия внутреннего давления. Тогда

$$C_2=\frac{p_2R^2r^2}{R^2-r^2},\quad C_3=-\frac{p_2}{R^2-r^2}R^2.$$

Так как $R>r$, то $C_3<0$, а также $|C_2/p|<|C_3|$, то видно, что σ_r уменьшается к центру, σ_θ, наоборот, увеличивается к центру. Эпюры напряжений приведены на рис. 11.5. Чтобы проверить на прочность надо проанализировать условие:

$$\sigma_{эфф}=\sqrt{\sigma_r^2+\sigma_\theta^2-\sigma_r\sigma_\theta}\le[\sigma].$$

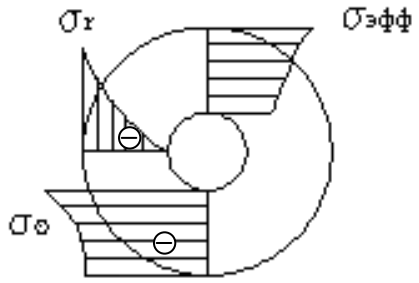


Рис.11.5

Форма кривой $\sigma_{эфф}$ сильно зависит от отношения R/r.

12. ЗАДАЧА КИРША

Это задача о растяжении бесконечной пластины с круглым отверстием.

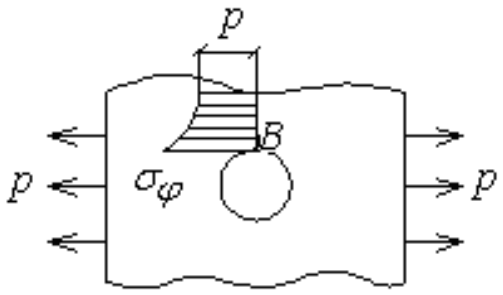


Рис.12.1

Оказывается, что система уравнений в полярной системе координат позволяет решить и кососимметричные задачи. Одной из них является задача о растяжении пластины с отверстием (пластина считается бесконечной). Задача Кирша знаменита тем, что позволяет найти $(\sigma_\varphi)_{max}$. **Оказывается, что** $(\sigma_\varphi)_{max} = 3p$. Независимо от размеров и от упругих характеристик материала оно возникает в точке B.

Задачи подобного типа для разных видов отверстий называются задачами о концентрации напряжений.

<u>Следствие</u>: при расчете даже простых тел (типа стержней при растяжении), но с круговыми отверстиями (даже для малого размера отверстия) мы должны увеличивать в 3 раза напряжение, вычисляемое по

формуле $\sigma = P / A$.

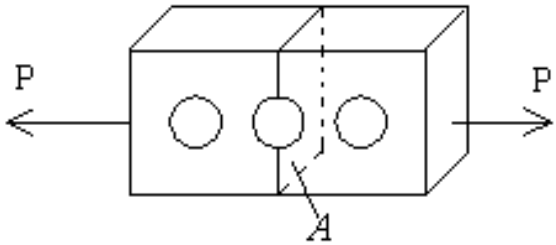


Рис.12.2

13. ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Запишем закон Дюгамеля-Неймана (закон линейного температурного расширения), который гласит, что при изменении температуры тела на величину ΔT оно изменяет свои линейные размеры. Температурная линейная деформация при этом прямо пропорциональна перепаду температуры:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \Delta T .$$

Тогда обобщенный закон Гука с учетом закона Дюгамеля- Неймана примет вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \cdot \Delta T,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \cdot \Delta T,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \cdot \Delta T.$$

Для изотропного тела изменение температуры не приводит к сдвигам, поэтому:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} .$$

Так как $\alpha \cdot \Delta T = const$, то в уравнениях равновесия внутренних элементов $\alpha \cdot \Delta T$ не участвует, поскольку производные от константы равны

нулю, т.е. $(\alpha\cdot\Delta T)'_x=0$, $(\alpha\cdot\Delta T)'_y=0$. Слагаемое $\alpha\cdot\Delta T$ входит только в уравнения равновесия граничных элементов и условия закрепления, если их выражаем через деформации.

Приведем точное решение, полученное для задачи о трубе при наличии перепада температур $\Delta T = T_{наружн} - T_{внутр}$. . Оно имеет вид:

$$\sigma_\rho = -Gk\left(\frac{\ln\frac{R}{\rho}}{\ln\frac{R}{r}} - \frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2\ \ \rho^2}r^2\right),$$

$$\sigma_\theta = -Gk\left(\frac{\ln\frac{R}{\rho}}{\ln\frac{R}{r}} + \frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2\ \ \rho^2}r^2\right), \quad k = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\Delta T.$$

Примечание: некоторые конструкции получают температурные напряжения с большими перепадами (от сжимающих до растягивающих). Особенно большие перепады появляются в тех случаях, когда учитываются процессы теплопроводности, то есть процесс перетекания тепла из одной точки в другую. Уравнение, описывающее этот процесс, для плоской задачи имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + F.$$

Здесь λ – коэффициент, отражающий способность к переносу тепла. F – внутренний источник тепла. Это уравнение практически не имеет точных решений, поэтому такие задачи могут быть решены только приближённо.

14. ТЕОРИЯ ИЗГИБА ЖЕСТКИХ ПЛИТ

Основные соотношения этой теории с 3-й попытки получены Софи Жермен в 1816 г. Первая попытка была сделана ею в 1811 г. (инициировал исследования Б. Наполеон, объявив конкурс научных работ по этой теме).

Плита называется жесткой, если ее прогибы малы по сравнению с толщиной. Если прогибы велики, то при жестком закреплении кромок появляются силы растяжения плиты, так как размеры плиты в плане (т.е. по длине и по ширине) не могут увеличиваться.

14.1. Гипотезы Кирхгоффа-Лява

Решение ищется в перемещениях:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z), \\ u_y &= u_y(x, y, z), \\ u_z &= u_z(x, y, z). \end{aligned} \qquad (14.1)$$

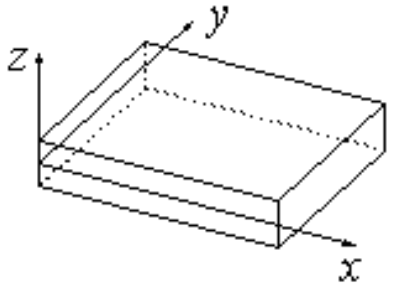


Рис. 14.1

Из анализа картины деформаций элемента плиты на рис. 14.2 можно заключить, что точки срединной поверхности в плоскости пластины не перемещаются (срединная поверхность − это плоскость, которая равноудалена от верхней и нижней граней, а её уравнение имеет вид $z = 0$). Тогда перемещения можно разложить в ряд Маклорена в виде:

$$u_x = u_{x1}(x, y)\, z + u_{x2}(x, y)\, z^2 + \ldots,$$

$$u_y = u_{y1}(x, y)\, z + \ldots,$$

$$u_z = u_{z0}(x, y) + \ldots .$$

Так как толщина плиты мала, то величина z тоже мала, поэтому можно принять:

$$\begin{cases} u_x \approx u_{x1} \cdot z, \quad u_y \approx u_{y1} \cdot z, \\ u_z \approx u_{z0}. \end{cases}$$

Последнее выражение означает, что толщина пластины принимается неизменной.

Для дальнейшего упрощения функции u_{x1}, u_{y1} выражают через u_{z0} из геометрических соображений.

Поскольку толщина пластины не изменяется, то из рис.14.2 видно, что

$$u_x = -(\sin\beta)z. \qquad (14.2)$$

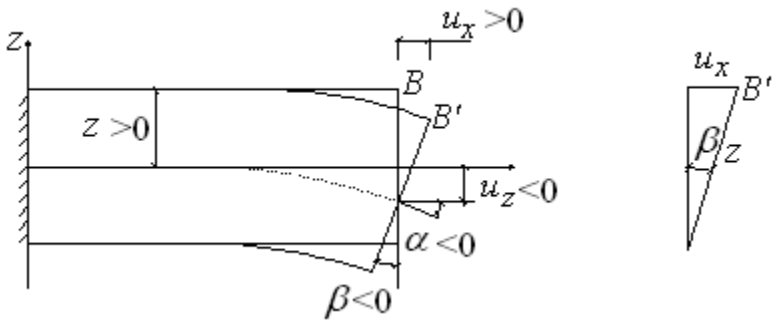


Рис. 14.2

Далее из рисунка видно, что $\alpha = \beta$, так как это углы с перпендикулярными сторонами (это будет справедливо, если нормаль к срединной плоскости останется нормалью к срединной изогнутой поверхности, нарисованной пунктиром на рис.14.2). Тогда $tg\alpha = tg\beta$.
Но так как $\alpha << 1$, то

$$tg\alpha = \sin\beta \approx \alpha \approx \beta.$$

А поскольку $tg\alpha = (u_z)'_x$, то получаем:

$$(u_z)'_x \approx \beta.$$

Согласно (14.2) окончательно получим:

$$u_x = z \cdot u_{x1} = -z \cdot \sin\beta = -(u_z)'_x \cdot z.$$

Аналогично

$$u_{y1} = -\ u_z{}'_y.$$

Для простоты записи функцию $u_z = u_{zo}(x,y)$ обозначают через $w(x,y)$, которую называют **прогибом**. Тогда:

$$u_z = w(x, y),$$

$$u_x = -\frac{\partial w}{\partial x} z, \qquad (14.3)$$

$$u_y = -\frac{\partial w}{\partial y} z.$$

Таким образом, **перемещения любой точки пластины нам будут**

известны, если будет известен прогиб *w*.

Эти упрощенные соотношения (14.3) называются геометрическими соотношениями Кирхгоффа-Лява (1850). Утверждение о том, что нормаль остается нормалью и после деформации, а также утверждение о том, что она не меняет своей длины (т.е. толщина пластины не изменяется) называют геометрическими **гипотезами** Кирхгоффа-Лява.

Теперь можно вычислить деформации по соотношениям Коши, а затем напряжения по соотношениям закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z,$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z, \qquad (14.4)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z.$$

Остальные деформации получаются равными нулю:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad (14.5)$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Эти соотношения приближенные, так как мы оборвали ряд Маклорена. На самом деле деформации γ_{xz}, γ_{yz} существуют, хотя и малы, а ε_z имеет порядок $\varepsilon_x, \varepsilon_y$.

14.2. Уравнение Софии-Жермен (уравнение для прогиба)

Выпишем уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0. \end{cases} \qquad (14.6)$$

Используем далее закон Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E},$$
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E}. \qquad (14.7)$$

Многочисленными исследованиями было доказано (см., в частности, формулы (14.10), (14.17), (14.19)), что для тонких пластин

$$\sigma_z << \sigma_x, \sigma_y . \qquad (14.8)$$

Аналогично

$$\tau_{yz}, \tau_{xz} << \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} .$$

Эти соотношения называются **статическими** гипотезами Кирхгофа-Лява.

Пользуясь соотношением (14.8), из закона Гука (14.7) получим:

$$\varepsilon_x \cong \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E},$$
$$\varepsilon_y \cong \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E}.$$

Отсюда можно найти σ_x, σ_y:

$$\sigma_x = \varepsilon_x + \mu\varepsilon_y \frac{E}{1-\mu^2}, \quad \sigma_y = \varepsilon_y + \mu\varepsilon_x \frac{E}{1-\mu^2}. \qquad (14.9)$$

Но в уравнениях равновесия $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ отбрасывать нельзя. Поскольку производная − это тангенс угла наклона кривой, то даже при малости функций τ_{yz}, τ_{xz} угол их наклона может оказаться очень большим (рис.14.3).

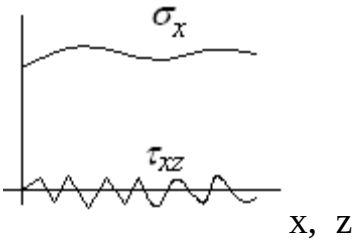


Рис.14.3

Выразим γ_{xy}, ε_x и ε_y через w по соотношениям Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z .$$

По закону Гука $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, а напряжения σ_x, σ_y выражаются через

деформации по формулам (14.9), следовательно:

$$\sigma_x = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$\sigma_y = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \qquad (14.10)$$

$$\tau_{xy} = -2G\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z.$$

Для изотропного материала $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$, тогда

$$\tau_{xy} = -\frac{E}{(1+\mu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z\,.$$

Подставим это в первые два уравнения равновесия (14.6).
Тогда из (14.6) получим:

$$\begin{cases} -\frac{Ez}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\nabla^2 w\right] + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\ -\frac{Ez}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\nabla^2 w\right] + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0. \end{cases} \qquad (14.11)$$

Здесь введено обозначение:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,.$$

Из (14.11) можно найти τ_{xz}, τ_{yz}:

$$\tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)}\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x} + \varphi_1(x,y)\,,$$

$$\tau_{yz} = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)}\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y} + \varphi_2(x,y)\,. \qquad (14.12)$$

Для отыскания φ_1, φ_2 используем уравнения равновесия граничных элементов.

Для простоты рассмотрим случай, когда имеется лишь нормальное давление $p(x,y)$ (рис.14.4). Тогда получим, что для элементов, примыкающих к верхней плоскости, т.е. при $z = \frac{h}{2}$, должны иметь место соотношения статики:

$$\tau_{zx} = 0, \qquad \tau_{yz} = 0\,. \qquad (14.13)$$

$$\sigma_z = -p\,. \qquad (14.14)$$

При рассмотрении элементов, примыкающих к нижней грани, получим:

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = 0\,. \qquad (14.15)$$

$$\sigma_z = 0\,. \qquad (14.16)$$

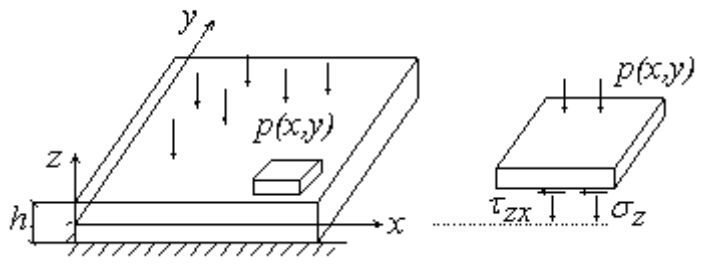


Рис.14.4

Подставим (14.12) в уравнения (14.13) и получим:

$$-\frac{Eh^2}{8\ 1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w = \varphi_1\ \ x, y\ \ ,$$

$$-\frac{Eh^2}{8\ 1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w = \varphi_2\ \ x, y\ \ .$$

Таким образом, для τ_{xz}, τ_{yz} получаем следующие выражения:

$$\tau_{xz} = \frac{E\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)}{2\left(1-\mu^2\right)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w, \qquad \tau_{yz} = \frac{E\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)}{2\left(1-\mu^2\right)}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w. \qquad (14.17)$$

Это аналоги известной в сопротивлении материалов формулы Журавского.

Проверим, выполняются ли уравнения равновесия (14.15) для граничных элементов, которые примыкают к нижней грани. Поскольку для них $z = -\frac{h}{2}$, $z^2 = \frac{h^2}{4}$, то два уравнения равновесия (14.15) тоже выполняются.

Рассмотрим третье уравнение равновесия внутреннего элемента:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0\,.$$

Подставим сюда выражения для τ_{xz}, τ_{yz} в (14.17). Тогда получим:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{E\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)}{2\ 1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla^2 w + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla^2 w\right) = 0 \cdot \qquad (14.18)$$

Обозначим:

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\ .$$

Найдем σ_z, проинтегрировав уравнение (14.18) по z:

$$\sigma_z = -\frac{E\left(\frac{z^3}{3} - \frac{h^2 z}{4}\right)}{2(1-\mu^2)}\nabla^2\nabla^2 w + \psi(x, y) \qquad (14.19)$$

Функцию $\psi(x,y)$ определяем из уравнения равновесия граничного элемента, примыкающего к нижней грани, т.е. при $z = -\frac{h}{2}$:

$$z = -\frac{h}{2}\ :\ \sigma_z = 0\,.$$

Подставляя σ_z, получим:

$$\frac{E\left(\frac{h^3}{8\cdot 3} - \frac{h^3}{8}\right)}{2(1-\mu^2)}\nabla^2\nabla^2 w + \psi = 0,$$

$$\psi = \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)}\nabla^2\nabla^2 w. \qquad (14.20)$$

Введем обозначение*:*

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

D – называют **<u>цилиндрической жесткостью пластины</u>**.

Окончательно уравнение для w получим из уравнения равновесия граничного элемента, примыкающего к верхней грани. При $z = \frac{h}{2}$ должно иметь вид:

$$\sigma_z = -p(x, y) \text{ при } z = \frac{h}{2}.$$

Подставляя сюда σ_z по формуле (14.19) с учетом (14.20), получим:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = -p(x, y). \qquad (14.21)$$

Можно проверить, что уравнение (14.16) будет выполняться

тождественно.

Уравнение (14.21) и есть уравнение Софи-Жермен.

Отметим достоинства полученной теории пластин:

1. Нужно находить только одну функцию *w*, через нее вычисляются все деформации и напряжения.
2. Функция *w* имеет физический смысл – это прогиб пластины, поэтому можно решение отыскивать даже по экспериментальным данным.

Отметим некоторые противоречия полученной теории (которые можно условно назвать ее недостатками), которые по сути являются следствиями того, что в разложениях перемещений в ряд Маклорена удержано всего по одному члену.

1. При выводе теории изгиба пластин используется утверждение о том, что нормаль остается нормалью и после деформации, а также утверждение о том, что она не меняет своей длины. Часто они записываются следующим образом: поперечных деформаций нет, т.е. $\varepsilon_z = 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \rightarrow u_z = w\ \ x, y\ \ .$$

Это предположение является противоречивым, так как при продольном растяжении-сжатии элемента тела появляются поперечные деформации в виду эффекта Пуассона (рис.14.5). Действительно, согласно закону Гука:

$$\varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} \neq 0.$$

Можно видеть (рис.14.5), что соотношение $\varepsilon_z = 0$ является справедливым только интегрально, т.е. для толщины пластины в целом, т.к. нижняя часть становится тоньше, а верхняя утолщается на такую же величину.

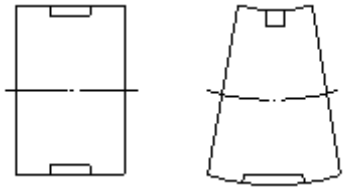


Рис.14.5

Это противоречие не влияет на расчеты на прочность, т.к. деформации не входят в условия прочности.

2. У гипотез Кирхгофа-Лява имеется и второе противоречие. Согласно соотношениям Коши было получено (см. выражения (14.5)),

что $\gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0$. Тогда из закона Гука для τ_{xz}, τ_{yz} следует, что

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = 0 \ , \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0 .$$

С другой стороны, при выводе уравнения Софи-Жермен (см. аналоги формулы Журавского (14.17)) считалось, что $\tau_{xz} \neq 0$.

Эти противоречия также есть следствие приближенности выражений для перемещений (оборван ряд Маклорена). Как показали теоретические исследования, в тонких пластинах напряжения $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ в сотни и более раз меньше, чем $\sigma_x, \sigma_y \ \tau_{xy}$. Это видно и из сравнения соотношений (14.10), (14.17), (14.19). Поэтому по отношению к $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ можно записать:

$$\sigma_z \approx 0, \quad \tau_{xz} \approx 0, \quad \tau_{yz} \approx 0 .$$

Ясно, что их значения не отражаются на расчетах на прочность изотропных материалов.

3. При подсчете реактивных сил шарнирно опертой пластины в углах расчеты дают сосредоточенные силы, а это противоречит основам теории упругости, так как сосредоточенных сил в природе не существует. Значит, теория Кирхгофа-Лява позволяет получать хорошие решения только внутри области пластины, вблизи края решение может сильно отличаться от истинного, поэтому использование решения задачи о пластине в рамках гипотез Кирхгофа-Лява не допустимо для расчета воздействия на опоры пластины.

4. Возникают трудности при формулировке уравнений равновесия граничных элементов, примыкающих к незакрепленным торцам пластины.

14.3. Условия на границах пластины

Уравнение Софи-Жермен – это уравнение равновесия внутреннего элемента в виде $\sum F_z = 0$. Кроме этого уравнения необходимо, чтобы выполнялись условия закрепления и уравнения равновесия граничных элементов на боковых кромках пластины (которые зависят от условий закрепления).

Если по краям пластина **защемлена**, то в явном виде можно записать только условия закрепления.

Рассмотрим защемленную пластину, изображенную на рис.14.6. Уравнения этих границ имеют следующий вид.

Левая граница: $x = 0$; правая: $x = a$;
передняя: $y = 0$; задняя: $y = b$.

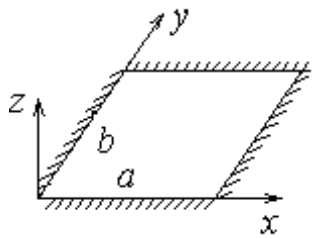


Рис.14.6

Рис.14.7

На границе должно быть:

$$w = 0.$$

Кроме того, на границах угол наклона должен быть равен нулю, т.е. $\alpha = 0$ (рис.14.7). Угол наклона на левой и правой границах определяется из соотношения $tg\alpha = w'_x$. Так как $\alpha = 0$, то на левой и правой кромках должно быть:

$$w'_x = 0.$$

Аналогично на передней и задней кромках должно быть:

$$w'_y = 0.$$

Если пластина **шарнирно (свободно) оперта** по краям, то на краю должно быть:

$$w = 0.$$

Для записи уравнения равновесия граничного элемента вырежем и рассмотрим граничный элемент (рис.14.9, 14.10). На него воздействует реактивная сила опоры R_{xz}. Поэтому касательные напряжения τ_{xz} компенсируются этой реактивной силой. Момент, образованный напряжениями τ_{xy}, компенсируется реактивным моментом M_{xy}, лежащим в плоскости yz.

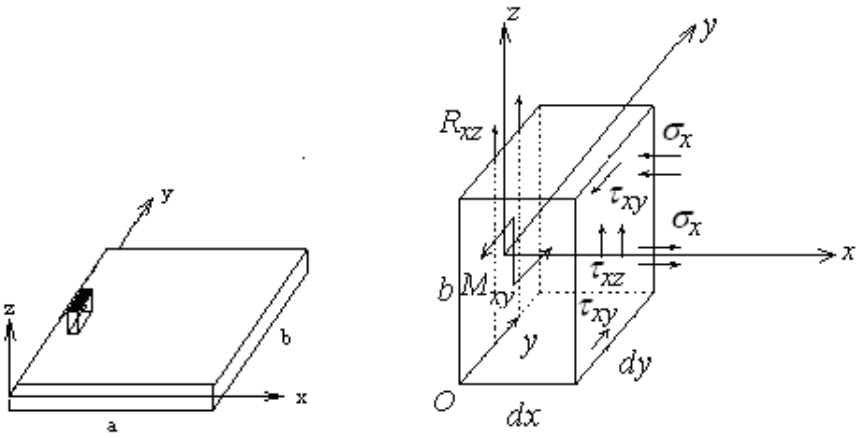


Рис.14.8

Рассмотрим другие уравнения равновесия. Из рисунка видно, что условие $\sum F_y = 0$ удовлетворяется автоматически (т.к. при $dx/dy \to 0$ на верхней и нижней гранях вклад касательных напряжений будет

пренебрежим по сравнению с вкладом касательных напряжений τ_{xy}). Уравнение $\sum F_x = 0$ также выполняется тождественно. Из уравнения $\sum M_{oy} = 0$ следует соотношение:

$$\left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \cdot dz \right) dy = 0 .$$

Подставляя σ_x по формуле (14.10), получим:

$$\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E \cdot z^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx \cdot dy = 0 .$$

Отсюда вытекает, что на грани $x = 0$ должно быть:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad (14.22)$$

Поскольку вдоль этой грани $w = 0$, то $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$. Тогда из (14.22) и из условия опирания <u>для граничного элемента на краю $x = 0$</u> свободно опертой пластины имеем 2 условия:

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 .$$

Такие же условия должны выполняться на краю $x = a$.
Аналогично на краях $y = 0$ и $y = b$ должны выполняться условия:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 . \qquad (14.23)$$

<u>Случай незакрепленного края</u>. Пусть край $x = 0$ загружен погонной силой Q_{xz}^o и погонными моментами M_y^o, M_{xy}^o (см. рис. 14.9-14.10). Условия равновесия граничного элемента для этого случая вызывали большие споры в течении многих лет. Впервые правильные уравнения были получены Кирхгоффом в 1850г.

Рассмотрим элемент, подобный рассмотренному в предыдущем случае (рис. 14.9–14.10).

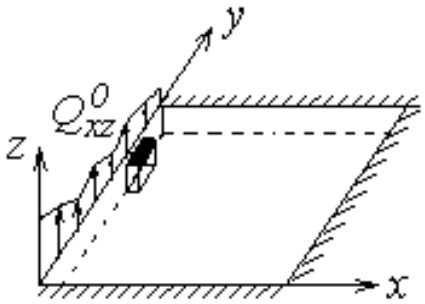


Рис.14.9

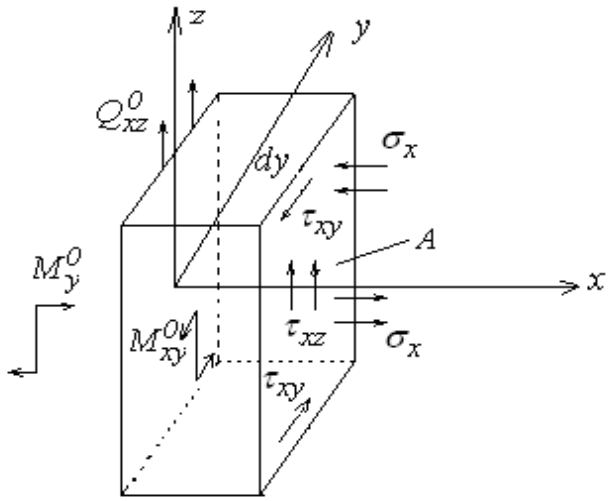


Рис.14.10

Также аналогично предыдущему можно увидеть, что уравнения равновесия $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ удовлетворяются автоматически. Остаются следующие:

$$\sum M_y = 0, \tag{14.24}$$

$$\sum F_Z = 0, \tag{14.25}$$

$$\sum M_x = 0, \tag{14.26}$$

$$\sum M_Z = 0. \tag{14.27}$$

Первое уравнение дает (см. предыдущий случай):

$$\left[\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E \cdot z^2}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) dz\right] \cdot dy = M_y^0 \cdot dy .$$

Отсюда, сокращая на dy, получаем:

$$\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = M_y^0 . \tag{14.28}$$

Рассмотрим уравнение (14.25).

Так как выражение для τ_{xz} содержит z, (то есть τ_{xz} переменна по высоте), то его равнодействующую искать простым умножением на площадь недопустимо. Поэтому разбиваем площадь A на элементарные площадки dA (рис.14.11), на каждой из них находим равнодействующую τ_{xz} и, суммируя, получим силу Q_{xz}:

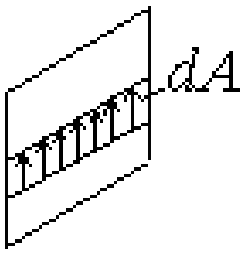


Рис.14.11

$$Q_{xz} = \sum \tau_{xz} dA = \int_A \tau_{xz} dA = \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \right) dy . \qquad (14.29)$$

Подставляем этот результат в уравнение равновесия (14.25):

$$\left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \right) dy = -Q_{xz}^0 \cdot dy . \qquad (14.30)$$

Здесь на dy можно сократить.

Из третьего уравнения (14.26) после аналогичных рассуждений вытекает соотношение:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cdot \tau_{xy} dz = -M_{xy}^0 . \qquad (14.31)$$

Если удовлетворено уравнение (14.30), то уравнение (14.31) может быть выполнено разве что случайно, т.е. обычно оно не может быть удовлетворено и наоборот. Можно эти два последних уравнения удовлетворить приближенно (т.е. в среднем). Например, из условия минимума невязки этих уравнений. Однако, как показал Кирхгофф (1850 г.), из закона сохранения энергии следует другой вариант приближенного удовлетворения этих уравнений, а именно, соотношение вида:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\tau_{xz} + z \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz = -Q_{xz}^0 - \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial y} . \qquad (14.32)$$

Лишь спустя 17 лет лорд Кельвин в 1867 году дал наглядное объяснение такому способу удовлетворения уравнений равновесия

граничного элемента.

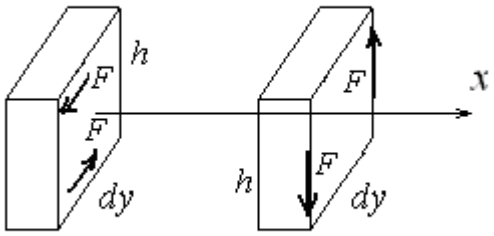


Рис.14.12

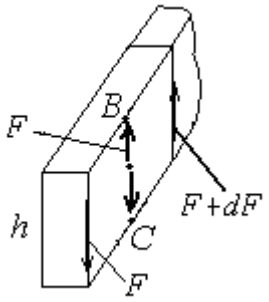


Рис.14.13

Подсчитаем момент относительно оси x, который создается напряжениями τ_{xy} на элементе ширины dy (ось x проходит через центр тяжести грани элемента по нормали к этой грани):

$$dM_{xy} = \left(\int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \tau_{xy} dz \right) dy .$$

Заменим его парой сил $F = dM_{xy} / dy$ с плечом dy, как это изображено на рис.14.12. Кельвин предложил далее заменить эту пару горизонтальных сил парой **вертикальных** сил (рис.14.12).

На соседнем элементе эти силы будут отличаться мало, а именно на величину dF.

Если после этого рассмотреть два соседних элемента, то увидим картину, изображенную на рис.14.13.

Видно, что силы F на общей средней линии ВС компенсируются и остается лишь dF. Расписывая dF, получим:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \tau_{xy} dz \right) dy .$$

Поделив на dy, получим вместо момента M_{xy} погонную вертикальную силу

$$\tilde{Q}_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} = \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dz .$$

Аналогично **внешний** погонный момент M_{xy}^0 можно заменить погонной вертикальной силой:

$$\tilde{Q}_{xz}^0 = \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial y} .$$

Следовательно, система сил, $Q_{xz}^0, M_{xy}^0, \tau_{xy}, \tau_{yz}$, действующая на наш

элемент, эквивалентна системе только вертикальных сил $Q_{xz}^0, \tilde{Q}_{xz}^0, \quad Q_{xz}, \tilde{Q}_{xz}$.

Таким образом, получим для граничного элемента на кромке $x = 0$ уравнение $\sum F_z = 0$ в виде (14.32).

Аналогично, на кромке $y = 0$ уравнение равновесия (14.25) примет вид:

$$Q_{yz} + \tilde{Q}_{yz} = -Q_{yz}^0 - \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial x},$$

где

$$Q_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz, \qquad \tilde{Q}_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dz.$$

Выражая напряжения через прогиб по формулам (14.10) и (14.17), условия равновесия на незакрепленных кромках можно записать следующим образом.

На незакрепленном краю $x = 0$ (или $x = a$):

$$D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = Q_{xz}^0 + \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial y}. \qquad (14.33)$$

На незакрепленном краю $y = 0$ (или $y = b$):

$$D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) = Q_{yz}^0 + \frac{\partial M_{yx}^0}{\partial x}. \qquad (14.34)$$

Здесь Q_{xz}^0, Q_{yz}^0, M_{yx}^0, M_{xy}^0 – заданные на кромках внешние погонные поперечные силы и моменты (рис. 14.10).

14.4. Точные решения задачи об изгибе жестких пластин

1. Решение задачи об изгибе защемленной эллиптической пластины

Рассмотрим эллиптическую пластину, жестко заделанную по краям.

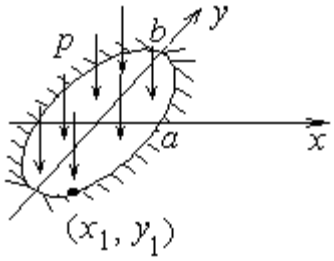


Рис.14.14

Рассмотрим случай *p(x,y) = const* (точное решение можно найти только для этого случая). Решение ищем в виде:

$$w = \frac{B}{D}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 .$$

где *a, b* – полуоси эллипса, *D* – цилиндрическая жесткость пластины, *B* – константа, которая определяется из уравнения Софи-Жермен:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = -p(x, y).$$

Подставляя *w*, получим:

$$B\left(\frac{24}{a^4} + \frac{24}{b^4} + \frac{8}{a^2b^2}\right) = -p \qquad => \qquad B = \frac{-p}{24\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{3a^2b^2}\right)} .$$

Проверим выполнение условий закреплений.

Если взять точку (x_1, y_1) на границе, то для нее выполняется уравнение эллипса $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$. Подставляя это в уравнение для *w*, видим, что w=0 в точке (x_1, y_1).

Проверим выполнение условия w'_x=0.

$$w'_x = 2\frac{B}{D}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(-\frac{2x}{a^2}\right).$$

С учетом уравнения эллипса для точки x_1, y_1, получим w'_x=0. Аналогично получим, что w'_y=0 в точке (x_1, y_1).

Итак, во всех точках контура w'_x=0, w'_y=0. Следовательно, в любом направлении, в том числе и по нормали к контуру, угол наклона пластины будет равен нулю.

2. Задача о свободно опертой прямоугольной пластине под синусоидальной нагрузкой

Свободное опирание часто изображают штриховой линией, как это показано на рис. 14.15. Используем для аппроксимации нагрузки (например, от сыпучего материала) следующую функцию (рис 14.16):

$$p = p_o \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} .$$

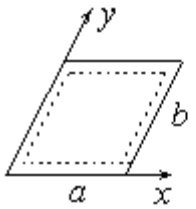


Рис.14.15

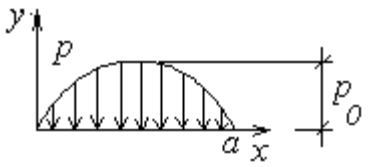


Рис.14.16

Запишем уравнение Софи-Жермен:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = -p_o \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

Очевидно, что w надо искать в виде:

$$w = B\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

Тогда:

$$w'_x = B\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi}{b}, \quad \ldots \quad w''''_{xxxx} = B\frac{\pi^4}{a^4}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

В результате подстановки в уравнение Софи-Жермен получим:

$$B\left(\frac{\pi^4}{a^4} + \frac{2\pi^4}{a^2b^2} + \frac{\pi^4}{b^4}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} = -p_o \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

Отсюда:

$$B = \frac{1}{D}\frac{-p_o}{\pi^4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-2}.$$

Проверим, выполняются ли условия закрепления. На границах либо $x = 0$, либо $y = 0$, либо $x = a$, либо $y = b$. Тогда во всех случаях

$$w = B\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} = 0.$$

Таким образом, условия закрепления выполняются.

Проверяем, выполняются ли уравнения равновесия граничных элементов.. Должно быть σ_x=0 для любого y при $x = 0$ и при $x = a$. Имеем:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\ \varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\ = \frac{E}{1-\nu^2}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z - \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z\right) =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{B}{D}\frac{\pi^2}{a^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}z + \nu\frac{B}{D}\frac{\pi^2}{b^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}z\right).$$

При x=a имеем:

$$\sin\frac{\pi x}{a} = \sin\frac{\pi a}{a} = 0.$$

Отсюда $\sigma_x \equiv 0$.

Аналогично на других границах. Таким образом, уравнения равновесия граничных элементов выполняются. Так как все уравнения равновесия и условия закрепления выполняются, то решение точное.

14.5. Решение задачи изгиба свободно опертой по краям пластины при произвольной нагрузке методом Бубнова-Галеркина

Пусть имеется распределенная по поверхности пластины нагрузка p. Для этого случая решение ищем в виде ряда:

$$w = B_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + B_{21}\sin\frac{\pi 2x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + B_{12}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi 2y}{b} + \ldots +$$

$$+ B_{ij}\sin\frac{\pi i x}{a}\sin\frac{\pi j y}{b} + \ldots$$

Подставляя в уравнение Софи-Жермен, получим:

$$D = \left(B_{11}\left(\frac{\pi^4}{a^4} + 2\frac{\pi^4}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4}{b^4}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + \ldots \right.$$

$$\left. + B_{ij}\left(\frac{(\pi i)^4}{a^4} + 2\frac{(\pi i)^2(\pi j)^2}{a^2 b^2} + \frac{(\pi j)^4}{b^4}\right)\sin\frac{\pi i x}{a}\sin\frac{\pi j y}{b} + \ldots \right) = -p(x, y).$$

Для получения алгебраических уравнений относительно B_{11}, $B_{22}\ldots$ можно использовать любые методы (например, коллокаций), но наиболее удобным является метод, который является по сути методом Бубнова-Галеркина, и который в нашем случае сразу дает выражения для B_{ij}.

Умножим уравнение на $\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$, проинтегрируем по площади пластины:

$$\int_A \ldots dA = \int_0^a dx \int_0^b \ldots dy.$$

Справа получим: $\int_0^a dx \int_0^b p(x, y)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}dy$.

Рассмотрим левую часть:

$$D\left(B_{11}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 \int_0^a dx \sin^2\frac{\pi x}{a}\int_0^b \sin^2\frac{\pi y}{b}dy + \ldots + \right.$$

$$\left. + B_{ij}\left(\frac{\pi i^2}{a^2}+\frac{\pi j^2}{b^2}\right)^2 \int_0^a dx \sin\frac{\pi i x}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\int_0^b \sin\frac{\pi j y}{b}\sin\frac{\pi y}{b}dy \right).$$

Оказывается, все слагаемые, кроме первого, равны нулю, причем

$$\int_0^a \sin^2\frac{\pi x}{a}dx = \frac{a}{2}, \qquad \int_0^b \sin^2\frac{\pi y}{a}dy = \frac{b}{2}.$$

Таким образом, из уравнения Софи-Жермен получаем:

$$DB_{11}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 \frac{a}{2}\frac{b}{2} = -\int_A p\ \ x,y\ \ \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}dA.$$

Отсюда:

$$B_{11} = \frac{-\int_A p\ \ x,y\ \ \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}dA}{D\pi^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2\frac{ab}{4}}$$

Аналогично находим:

$$B_{ij} = -\int_A p\ \ x,y\ \ \sin\frac{\pi i x}{a}\sin\frac{\pi j y}{b}dA \Big/ D\pi^4\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)^2\frac{ab}{4}.$$

Впервые это решение получил А.Навье.

14.6. Изгиб пластины под действием сосредоточенных сил

Координаты x_P, y_P точки приложения силы P будем считать известными. Найдем $w(x, y)$.

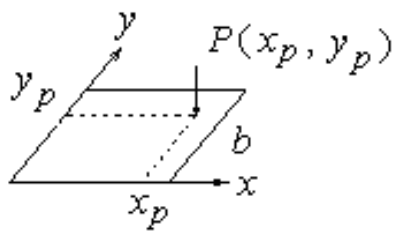


Рис.14.17

Имеем уравнение равновесия:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = -q(x, y).$$

Заменим P равномерной нагрузкой q, которая распределена по

бесконечно малой площадке $dA = dxdy$. Из условия эквивалентности получаем:

$$P = qdxdy \to q = \frac{P}{dxdy}.$$

Здесь $q(x, y) = 0$ везде, кроме площадки $dA = dxdy$ около точки (x_p, y_p). Подставим q в уравнение Софи-Жермен. Согласно методу Бубнова-Галеркина умножим его на $\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$ и проинтегрируем по площади пластины:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q \Big| \cdot \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \quad \to \quad \int \ldots dxdy.$$

Это дает уравнение:

$$\int_A D\nabla^2\nabla^2 w \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} dA = \int_A q \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} dA.$$

В правой части $q=0$ везде, кроме микроплощадки dA. Тогда получаем:

$$\int_A q \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} dA = \int_{A-dA} 0 \cdot \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} dA + \int_{dA} \frac{P}{dxdy}\sin\frac{\pi x_p}{a}\sin\frac{\pi y_p}{b} dxdy =$$

$$= 0 + P\sin\frac{\pi x_p}{a}\sin\frac{\pi y_p}{b}.$$

Таким образом, правая часть в случае сосредоточенных сил сразу вычисляется без интегрирования.

14.7. Пластина на упругом основании

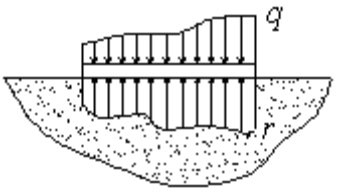


Рис.14.18

Сопротивление грунта обозначим реакцией $r(x,y)$. Как видим, к внешней нагрузке добавляется реакция r, поэтому уравнение равновесия принимает вид:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = -q + r.$$

Закон Винклера для определения r в простейшем случае имеет вид:

$$r = -kw.$$

где k – коэффициент постели. Тогда получаем уравнение для w в виде:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = -q - kw.$$

Как и в разделе 14.6 в случае шарнирного опирания w следует искать в виде:

$$w = \sum B_{ij} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}.$$

Коэффициенты B_{ij} также легко находятся методом Бубнова-Галеркина.

15. Приближенное выражение для касательных напряжений и угла закрутки при чистом кручении тонкой пластины

Рассмотрим задачу кручения пластины (см. рис. 15.1).

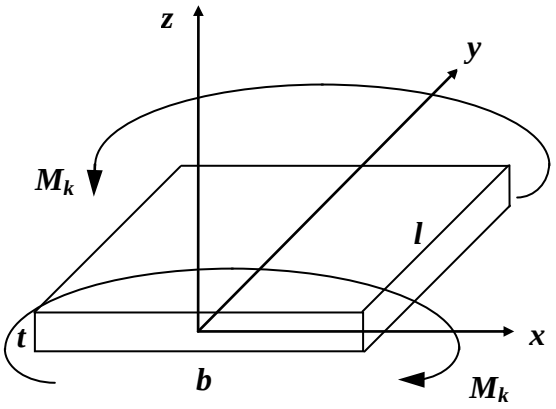


Рис.15.1

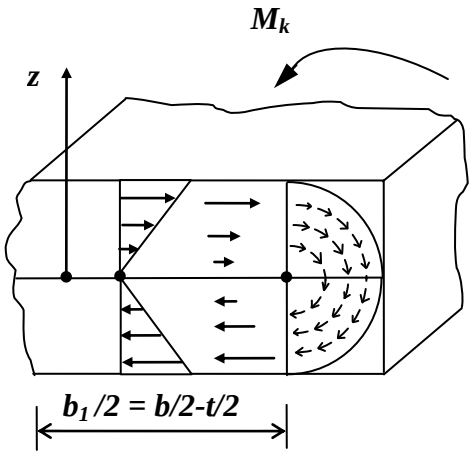


Рис.15.2

Введем гипотезу о распределении напряжений в виде, изображенном на рис.15.2. Тогда в области A_1 $(|x| \le b/2 - t/2)$

$$\tau = k\,z \quad \left(-\frac{t}{2} \le z \le \frac{t}{2}\right). \tag{15.1}$$

Составим уравнение равновесия:

$$\int_A \tau \cdot \xi \cdot dA = M_k \tag{15.2}$$

здесь ξ – плечо силы $\tau\, dA$ (см. рис. 15.3).

Разобьем интеграл на 3 части по трем площадям – по среднему прямоугольному $(|x| \le b/2 - t/2)$ и двум полукругам A_2. Тогда получим:

$$M_1 + 2M_2 = M_k, \tag{15.3}$$

$$M_1 = (b-t)\cdot \int_{-t/2}^{t/2} kz^2 dz, \qquad M_2 = \int_{A_2} \tau \cdot \xi \cdot dA$$

Обозначим $b_1 = b\text{-}t$. Тогда для M_1 можно записать выражение

$$M_1 = b_1 \int_{-t/2}^{t/2} k \cdot z^2 dz \quad = \quad k\frac{b_1 t^3}{12} \quad = \quad k \cdot J_x^{(1)}$$

Здесь $J_x^{(1)}$ - момент инерции первой (прямоугольной) области (площади A_1).

В области полукруга A_2 распределение τ принимаем таким же, как и при кручении круглых стержней, т.е.

$$\tau = k \cdot \rho, \quad \rho \le \frac{t}{2}. \tag{15.4}$$

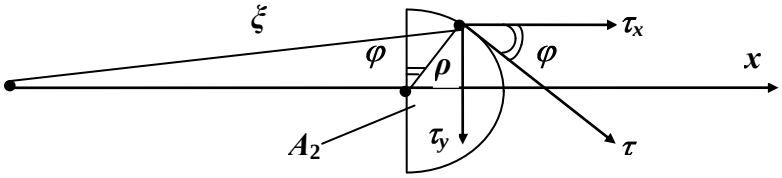


Рис.15.3

Разложим τ на τ_x и τ_y :

$$\tau_x = \tau \cdot \cos\varphi, \quad \tau_y = \tau \cdot \sin\varphi$$

Тогда для M_2 можно записать выражение

$$2M_2 = 2[\int_{A_2} \left(\tau_x \cdot \rho \cdot \cos\varphi + \tau_y \cdot (\frac{b-t}{2} + \rho \cdot \sin\varphi) \right) dA] =$$

$$= \int_{2A_2} \tau\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\rho\,dA \;+\; (b-t)\int_0^{t/2}\int_0^{\pi} \tau \cdot \sin\varphi \cdot \rho \;\; d\varphi\, d\rho; \tag{15.3}$$

Учитывая закон распределения (15.4) и подставляя τ получим:

$$2M_2 = \quad k \cdot [J_p^{(2)} + \frac{b-t}{12} t^3] \quad = \quad k \cdot [J_p^{(2)} + J_x^{(1)}]$$

Здесь $J_p^{(2)}$ - полярный момент круга (двух полукругов A_2):

Подстановка M_1 , $2M_2$ в условие равновесия (15.3) дает уравнение для k:

$$M_k = 2k \cdot J_x^{(1)} + k \cdot J_p^{(2)} \tag{15.6}$$

Отсюда получим выражение для коэффициента k:

$$k = \frac{M_k}{2J_x^{(1)} + J_p^{(2)}}$$

Окончательно для касательного напряжения получим выражение в виде:

$$\tau = \frac{M_k}{2J_x^{(1)} + J_p^{(2)}} z, \qquad J_x^{(1)} = \frac{(b-t)t^3}{12}, \qquad J_p^{(2)} = \frac{\pi t^4}{32} \tag{15.7}$$

Максимальное касательное напряжение будет достигаться при максимальном z (т.е. при $z = t$):

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{4J_x^{(1)} + 2J_p^{(2)}} t, \tag{15.8}$$

Приведем для разных соотношений b/t сравнение $\tau_{\max}$, вычисленным по формуле (15.8), с точным решением, полученным Сен-Венаном:

$$b = t: \qquad \tau_{\max}^{прибл} / \tau_{\max}^{точн} = 1{,}060 \quad (6{,}0\%)$$
$$b = 2t: \qquad \tau_{\max}^{прибл} / \tau_{\max}^{точн} = 0{,}929 \quad (7{,}1\%)$$
$$b = 4t: \qquad \tau_{\max}^{прибл} / \tau_{\max}^{точн} = 0{,}962 \quad (3{,}8\%)$$
$$b = 10t: \qquad \tau_{\max}^{прибл} / \tau_{\max}^{точн} = 0{,}979 \quad (2{,}1\%)$$

Далее упростим полученное выражение для тонких пластин. В этом случае t << b. Тогда можно принять, что длина b_1 первой (прямоугольной) области A_1 равна приближенно полной длине b:

$$b_1 = b - t \approx b$$

Далее упрощаем знаменатель в выражении для касательного напряжения:

$$2J_x^{(1)} + J_p^{(2)} = 2\frac{(b-t)t^3}{12} + \frac{\pi t^4}{32} = 2\frac{bt^3}{12} - 2\frac{t^4}{12} + \frac{\pi t^4}{32} = 2\frac{b - 0{,}411t}{12}t^3 \approx 2\frac{bt^3}{12}$$

Таким образом, в случае тонкой пластины для касательного напряжения можно записать приближенную формулу в виде

$$\tau = \frac{M_k}{2J_x} z \tag{15.9}$$

Здесь J_x - момент инерции всей прямоугольной площади ширины *b*:

$$J_x = \frac{bt^3}{12}$$

Теперь рассмотрим задачу вычисления угла закрутки сечения.

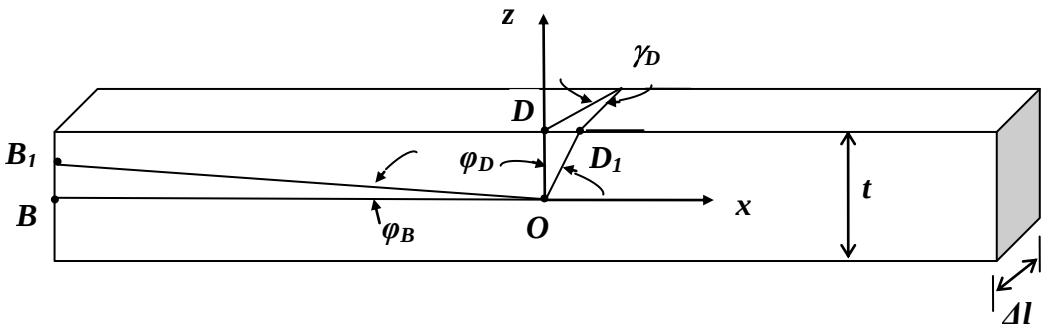


Рис.15.4

Вырежем диск ширины *Δl*. Точка *B* перейдет в т. B_1, а точка *D* перейдет в т. D_1. Поскольку считается, что

$$\tau_{\max} = \tau\big|_{z=t/2} = const = \frac{M_k}{4J_x}t = \tau_0, \qquad (15.10)$$

то по закону Гука

$$\gamma_B = \gamma_D = \frac{\tau_0}{G}. \qquad (15.11)$$

Из рисунка следует, что

$$\varphi \cdot y = \gamma \cdot \Delta l \qquad (15.12)$$

Найдем выражение для φ из условия равенства работы крутящего момента M_K работе касательных напряжений τ:

$$W_M = \frac{1}{2}M_K\varphi$$

$$W_\tau = \frac{1}{2}\int_A \tau \cdot dA \cdot \gamma \cdot \Delta l = \frac{1}{2}\int_{A_1} \tau \cdot dA_1 \cdot \gamma \cdot \Delta l + \int_{A_2} \tau \cdot dA_2 \cdot \gamma \cdot \Delta l \qquad (15.13)$$

Далее пренебрегаем работой касательных напряжений на полукруге A_2 (поскольку площадь A_2 значительно меньше, чем площадь прямоугольника A_1, а напряжения имеют один и тот же порядок, то работа на полукругах значительно меньше, чем на прямоугольнике A_1). Это дает:

$$W_\tau \cong \frac{1}{2}\int_{A_1}\frac{M_K}{2J_x}y\cdot\frac{M_K y}{2J_x G}dA_1\cdot\Delta l = \frac{M_K^2}{2\cdot 4}\int_{A_1}y^2\frac{dA_1}{GJ_x^2}\Delta l = \frac{M_K^2}{2\cdot 4}J_x\frac{\Delta l}{GJ_x^2} = \frac{M_K^2\cdot\Delta l}{8GJ_x}$$

Из условия $W_M = W_\tau$ находим

$$\varphi = \frac{M_K\,\Delta l}{4J_x G} \qquad (15.14)$$

Это соотношение можно получить и по-другому.
Из рис.15.4 видно, что

$$DD_1 = \frac{\tau_0\Delta l}{G},\quad BB_1 = \frac{\tau_0\Delta l}{G}.$$

Следовательно, $BB_1 = DD_1$. Найдем φ_D. Из рис.15.4 следует, что

$$\varphi_D = \frac{DD_1}{t/2} = \frac{\tau_0\Delta l}{G\cdot t/2} = \frac{M_k\Delta l}{G\cdot 2J_x}.$$

Если пластина тонкая, т.е. $b >> t$, то тогда $\varphi_D >> \varphi_B$ (это видно из рисунка 15.4). Поэтому в точке B можно принять, что

$$\varphi_B \approx 0.$$

Осредняя угол φ получим

$$\varphi = \frac{\varphi_D + \varphi_B}{2} = \frac{M_k\Delta l}{4J_x G}. \qquad (15.14)$$

Погонный угол θ будет

$$\theta = \frac{M_k}{4J_x G}. \qquad (15.15)$$

Обычно используют обозначение $J_k = 4J_x$. Тогда получим

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{J_k}t,\quad \varphi = \frac{M_k l}{J_k G},\quad \theta = \frac{M_k}{J_k G}. \qquad (15.16)$$

16. Устойчивость плоской формы изгиба тонких балок

Пусть на торцы балки действуют моменты m (см.рис.16.1). Верхние волокна при этом сжимаются

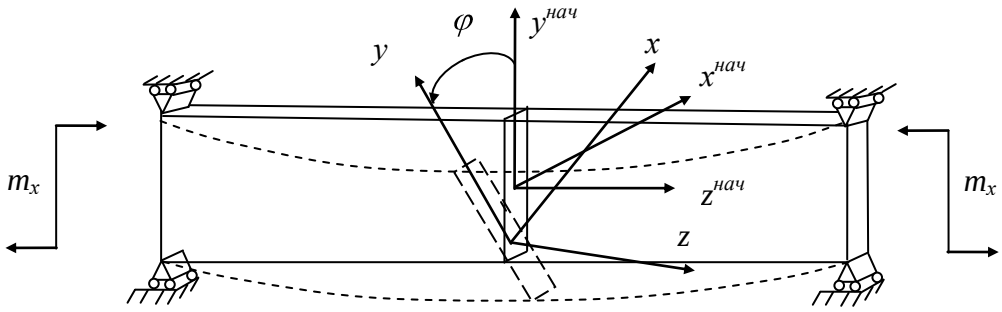


Рис.16.1

При больших напряжениях верхняя часть балки может потерять устойчивость и изогнуться из плоскости, как показано на рис.16.16.

Обозначим через φ угол отклонения сечения от вертикальной оси $y^{нач}$, прогиб (т.е. перемещение центра тяжести сечения вдоль оси $Ox^{нач}$) через u. Если посмотреть на сечение с конца оси z и изобразить момент m в виде вектора, то получим картину, приведенную на рис.16.2. Тогда получим, что согласно определению изгибающий момент относительно оси y будет:

$$M_y^{изг} \cong -m_x \varphi \tag{16.1}$$

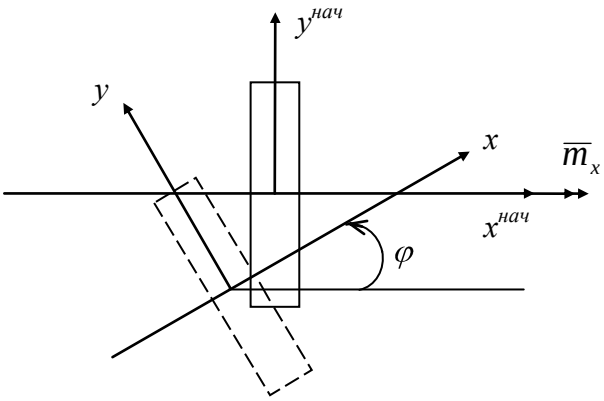


Рис.16.2

Поскольку кривизна оси балки пропорциональна $M_y^{изг}$, то получим

$$M_y^{изг} = EJ_y u'' \tag{16.2}$$

Подставив сюда (16.1) получим уравнение

$$-\frac{1}{m_x}EJ_y u'' = \varphi \qquad (16.3)$$

Далее рассмотрим связь крутящего момента с моментом *m*. Для этого необходимо посмотреть на балку с конца оси *y* (см.рис.16.3).

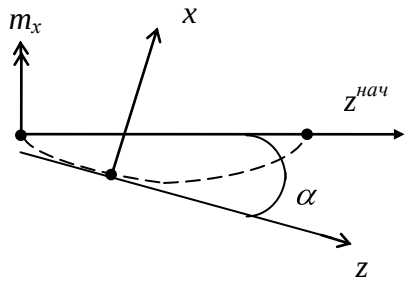


Рис.16.3

Согласно определению крутящий момент – это момент относительно оси *z*. Тогда, как видно из рис.16.3:

$$M_{крут} = m_x\alpha = m_x u' \qquad (16.4)$$

Здесь учтено, что на рисунке $\alpha = u' < 0$.

Крутящий момент $M_{крут}$ связан с φ соотношением

$$GJ_k\varphi' = M_{крут}. \qquad (16.5)$$

Тогда из (16.4) и (16.5) вытекает связь

$$GJ_k\varphi' = m_x u' \qquad (16.6)$$

Подставляя сюда φ из (16.3) получим уравнение относительно *u*:

$$-\frac{GJ_k EJ_y}{m_x}u''' = m_x u' \qquad (16.7)$$

Обозначим

$$a = \frac{GJ_k EJ_y}{m_x^2} \qquad (16.8)$$

Тогда получим

$$-au''' = u' \qquad (16.9)$$

Условиям закрепления удовлетворяет функция

$$u = u_0 \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1,2,... \qquad (16.10)$$

Здесь u_0 – некоторая константа.

Подставив *u* в (16.9) получим:

$$\frac{ak^3\pi^3}{l^3}\cos\frac{k\pi x}{l}=\frac{k\pi}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}. \qquad (16.11)$$

Подстановка сюда a по формуле (16.8) дает:

$$\frac{GJ_kEJ_y}{m_x^2}\cdot\frac{k^2\pi^2}{l^2}=1.$$

Отсюда:

$$m_x=\frac{k\pi}{l}\sqrt{GJ_kEJ_y} \qquad (16.12)$$

Минимального значения момент m_x при потере устойчивости достигает тогда, когда k = 16.

Если концы защемлены, то вместо (16.10) надо брать функцию

$$u=u_0\sin^2\frac{j\pi x}{l}, \quad j=1,2,... \qquad (16.13)$$

Тогда граничные условия будут также выполняться. Подстановка (16.13) в (16.9) дает выражение вида

$$m_x=\frac{2j\pi}{l}\sqrt{GJ_kEJ_y}. \qquad (16.14)$$

Снова минимального значения момент m_x достигает при j = 16.

Таким образом, в обоих случаях получаем формулу вида

$$(m_x)_{крит}=\frac{k\pi}{l}\sqrt{GJ_kEJ_y}. \qquad (16.15)$$

При шарнирном закреплении k = 1, при защемлении k = 2. Аналогично можно получить, что при других видах закрепления $k=\frac{1}{\mu}$, где μ - коэффициент приведенной длины, введенный для обычных задач о потере устойчивости сжатых стержней.

17. Устойчивость пластин

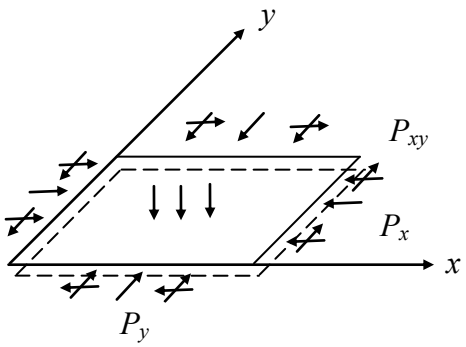


Рис.17.1

Рассмотрим сжатие пластины $a \times b \times h$ давлениями p_x , p_y , p_{xy} , (см.рис.17.1).

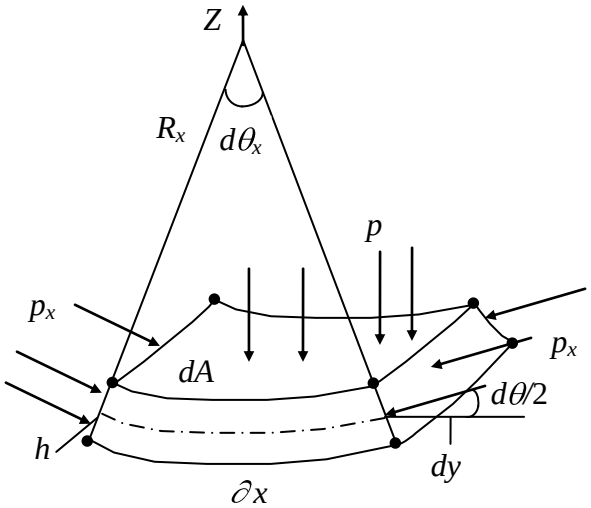


Рис.17.2

Из рисунка 17.2 видно, что на ось Z проецируется не только сила

$$-dP_1 = -pdA = -pdxdy, \tag{17.1}$$

но и сила, вызванная давлением p_x:

$$-dP_2 = -2p_x \sin\frac{d\theta_x}{2} dy \cdot h \cong -p_x d\theta_x \cdot dy \cdot h. \tag{17.2}$$

Суммарно получаем

$$-dP = -dP_1 - dP_2 = -pdxdy - p_x d\theta_x dyh. \tag{17.3}$$

Деля на площадь dA получим суммарное (приведенное) давление $p^{прив.}$:

$$-p^{прив.} = -\frac{dP}{dA} = -\frac{dP}{(dxdy)} = -p - p_x \frac{d\theta_x}{dx} h. \tag{17.4}$$

Согласно определению изменение угла наклона θ_x на единицу длины есть кривизна линии, т.е.

$$\frac{d\theta_x}{dx} = \frac{1}{R_x}. \qquad (17.5)$$

Таким образом, получим, что

$$p^{прив.} = p + \frac{p_x h}{R_x}. \qquad (17.6)$$

При малых углах θ_x имеет место связь:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{d^2 w}{dx^2} = w''_{xx}. \qquad (17.7)$$

Окончательно находим, что

$$p^{прив.} = p + p_x h \cdot w''_{xx}. \qquad (17.8)$$

В случае дополнительного воздействия (кроме p_x) давлений p_y и p_{xy} получим

$$p^{прив.} = p + p_x h \cdot w''_{xx} + p_y h \cdot w''_{yy} + 2 p_{xy} h \cdot w''_{xy}. \qquad (17.9)$$

Подставляя в уравнение Софи-Жермен получим

$$D(w''''_{xxxx} + 2w''''_{xxyy} + w''''_{yyyy}) + p_x h w''_{xx} + 2 p_{xy} h w''''_{xy} + p_y h w''_{yy} = -p. \qquad (17.10)$$

Это уравнение равновесия элемента пластины при продольно поперечном изгибе.

Если нет поперечных воздействий, т.е. $p = 0$, то (17.10) называется уравнением устойчивости элементов пластины. Оно примет вид:

$$D(w''''_{xxxx} + 2w''''_{xxyy} + w''''_{yyyy}) + p_x h w''_{xx} + 2 p_{xy} h w''''_{xy} + p_y h w''_{yy} = 0. \qquad (17.11)$$

Рассмотрим простой случай, когда имеется лишь $p_x \neq 0$, а пластина шарнирно опёрта. Тогда на краях должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} &w = 0 \\ &w''''_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = a, \\ &w''''_{yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ y = b. \end{aligned} \qquad (17.12)$$

Этим условиям удовлетворяет функция:

$$w = w_0 \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}, \qquad (17.13)$$

где w_0 – некоторая константа (максимальный прогиб), $k = 1, 2, 3, .., m = 1, 2, 3, ...$

Подстановка (17.13) в (17.11) после сокращения на $\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$ дает:

$$D\left(\frac{k^4\pi^4}{a^4} + \frac{2k^2m^2\pi^4}{a^2b^2} + \frac{m^2\pi^4}{b^4}\right) = p_x h\frac{k^2\pi^2}{a^2}. \qquad (17.14)$$

Отсюда находим

$$p_x = \frac{D\pi^2a^2}{hk^2}\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^2. \qquad (17.15)$$

Для отыскания $((p_x)_{\min})$, которое приводит к изгибу пластины от сжимающего давления p_x, необходимо перебрать значения k, m. Это даст критическое давление $(p_x)_{крит}$. Например, для $\frac{a}{b} = 2$ получим:

$$p_x = \frac{E\pi^2h^2}{12(1-v^2)b^2}\frac{1}{k^2}\left(\frac{k^2}{4} + m^2\right)^2 = \frac{p_x^0}{k^2}\left(\frac{k^2}{4} + m^2\right)^2, \quad p_x^0 = \frac{E\pi^2h^2}{12(1-v^2)b^2}$$

(17.16)

Составим таблицу значений $\frac{p_x}{p_x^0}$:

k \ m	1	2	3
1	1,56	18,06	85,6
2	1	6,25	25
3	2,64	4,34	14,06

Значит, пластина потеряет устойчивость при

$$p_x = \frac{\pi^2Eh^2}{12(1-v^2)b^2} \qquad (17.17)$$

Сравним с $\sigma_{кр}^{эйл}$ при $v = 0$. Тогда из (17.17) при $a = 2b$ получим:

$$p_x = \frac{4\pi^2Eh^2}{12b^2}. \qquad (17.18)$$

По Эйлеру

$$\sigma_{кр}^{эйл} = \frac{\pi^2EJ}{a^2A} = \frac{\pi^2Ebh^3}{12a^2bh} = \frac{\pi^2Eh^2}{12\cdot 4b^2}. \qquad (17.19)$$

Таким образом, пластина выдержит в 16 раз больше.

Рассмотрим теперь квадратную пластину. Тогда $a = b$, а минимизация (17.15) дает $k = m = 1$. Тогда:

$$p_x = \frac{4\pi^2 Eh^2}{12b^2} \tag{17.20}$$

Таким образом, квадратная пластина выдержит столько же, сколько пластина двойной длины.

18. РАСЧЕТ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Особенности работы оболочек заключаются в следующем.

1. Они обладают прочностью и жесткостью, которые превышают в десятки и сотни раз, соответственно, прочность и жесткость пластин и балок.

2. Большая часть оболочки при плавных нагрузках работает только на растяжение или сжатие, на изгиб работает узкая полоса по ширине в несколько толщин, вблизи закреплений, т.е., в отличие от пластин и балок, усиливать оболочку приходится только вблизи закреплений.

18.1. Расчет куполов по безмоментной теории

Рассмотрим оболочку вращения, которую называют куполом.

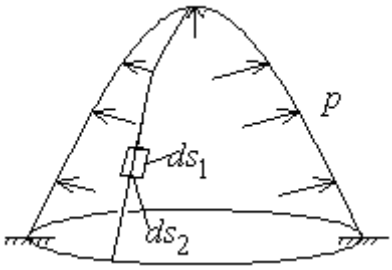


Рис.18.1

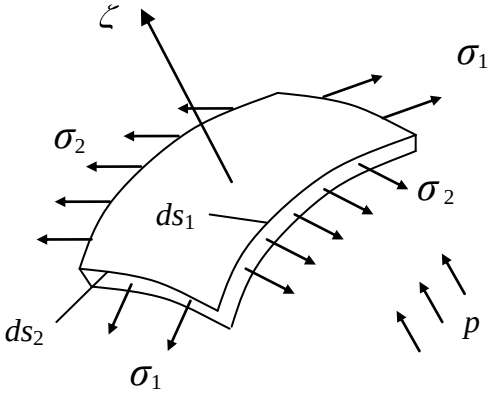


Рис.18.2

Вырежем малый элемент. Обозначим через h толщину оболочки.

Считаем, что изгибающих моментов нет. Наш элемент будет растягиваться напряжениями σ_1, σ_2. Их найдем из соотношений статики. Направление нормали к поверхности в центре элемента обозначим осью ζ.

Запишем первое уравнение:

$$\Sigma F_{\zeta} = 0\,. \qquad (18.1)$$

Равнодействующая давления p будет:

$$P = p \cdot ds_1 \cdot ds_2\,. \qquad (18.2)$$

Равнодействующая напряжений σ_1 будет (см. рис.18.3).

$$2\sigma_1 \cdot h \cdot \sin d\theta \cdot ds_2 \approx 2\sigma_1 \cdot h \cdot d\theta \cdot ds_2 = \sigma_1 \cdot h \cdot \frac{ds_1}{R_1} ds_2\,. \qquad (18.3)$$

Здесь учтено, что $ds_1 = R_1 \cdot 2d\theta$.

Аналогично, проекция на ось ζ равнодействующей напряжений σ_2 будет:

$$\sigma_2 \cdot h \cdot \frac{ds_1 ds_2}{R_2}\,. \qquad (18.4)$$

Подставляя (18.2) – (18.4) в уравнение (18.1) получим

$$p \cdot ds_1 \cdot ds_2 - \sigma_1 \cdot h \cdot \frac{ds_1 \cdot ds_2}{R_1} - \sigma_2 \cdot h \cdot \frac{ds_1 \cdot ds_2}{R_2} = 0\,.$$

Поделив на $ds_1\, ds_2$, приходим к соотношению:

$$\frac{\sigma_1 \cdot h}{R_1} + \frac{\sigma_2 \cdot h}{R_2} = p\,. \qquad (18.5)$$

Это первое уравнение равновесия, которое называется <u>уравнением Лапласа.</u>

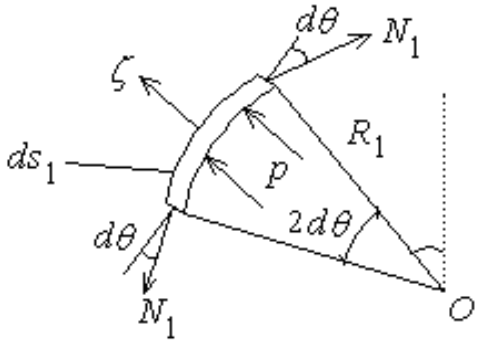


Рис.18.3. Здесь $N_1 = \sigma_1 \cdot h$

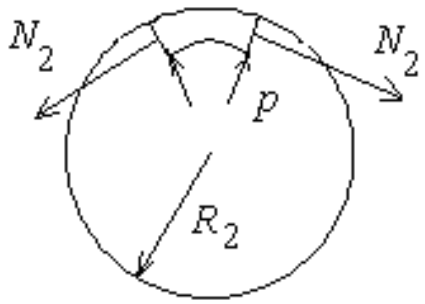


Рис.18.4. Здесь $N_2 = \sigma_2 \cdot h$

Получим далее второе уравнение (уравнение для σ_1).

Вырежем часть купола (рис.18.5). При этом r и θ известны.

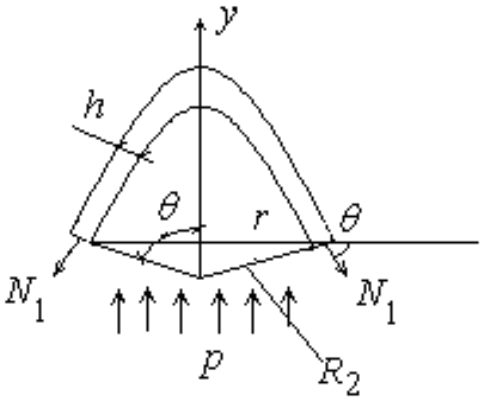


Рис.18.5 Здесь $N_1 = \sigma_1 \cdot h$

Тогда уравнение равновесия $\Sigma F_y = 0$ дает:

$$p \cdot \pi r^2 - \sigma_1 \cdot h \cdot 2\pi r \sin\theta = 0 \quad => \sigma_1 \cdot h = \frac{p \cdot r}{2\sin\theta} = \frac{p \cdot R_2}{2h} \qquad (18.6)$$

Из уравнения Лапласа (18.5) находим σ_2:

$$\sigma_2 = (p - \frac{\sigma_1 \cdot h}{R_1}) \cdot \frac{R_2}{h} = (p - p\frac{R_2}{2R_1}) \cdot \frac{R_2}{h}. \qquad (18.7)$$

Окончательно из (18.6), (18.7) вытекает:

$$\sigma_1 = p\frac{R_2}{2h}, \qquad \sigma_2 = p \cdot (1 - \frac{R_2}{2R_1}) \cdot \frac{R_2}{h}. \qquad (18.8)$$

После этого можно проводить расчет на прочность, выбрав теорию прочности. Например, для стали используют 4-ю теорию прочности в виде

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \le [\sigma]. \qquad (18.9)$$

Для хрупких материалов, например, для бетона часто используют критерий Гениева:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 + (\sigma_1 + \sigma_2)(R_b - R_{bt}) \le R_b R_{bt}. \qquad (18.10)$$

Связь перемещений и деформаций в оболочке вращения

В общем случае перемещение точки меридиана можно представить состоящим из вертикального перемещения v и горизонтального перемещения u. Рассмотрим малую дугу $BC = ds$ (рис. 18.6).

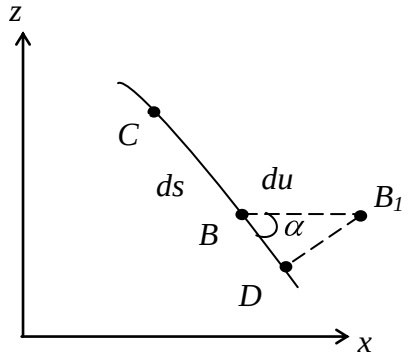


Рис.18.6

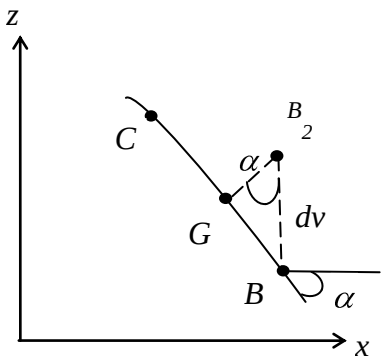


Рис.18.7

Пусть точка B переместилась в точку B_1 на малое расстояние du. Тогда отрезок BC удлиняется на величину $DB_1 = BB_1 \cos\alpha$. Учтем, что

$$tg\alpha = f',\ BC = ds = \sqrt{1+(f')^2}dx,\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}. \qquad (18.11)$$

Здесь штрихом обозначена производная по переменной x.
Тогда получим, что относительная деформация меридиана будет:

$$\varepsilon_1 = \frac{du\ \cos\alpha}{ds} = \frac{du/\sqrt{1+(f')^2}}{dx\sqrt{1+(f')^2}} = \frac{u'}{1+(f')^2}. \qquad (18.12)$$

Рассмотрим теперь случай, в котором точка B перемещается вдоль оси вращения в точку B_2 на величину dv (рис.18.7). Из рисунка видно, что BC укоротится на величину

$$BG = BB_2 \sin\alpha = dv.$$

Примем во внимание, что

$$\sin\alpha = \frac{f'}{\sqrt{1+(f')^2}}.$$

Тогда выражение для деформация примет вид:

$$\varepsilon_1 = -\frac{dv\sin\alpha}{ds} = \frac{dv\cdot f'}{dx[1+(f')^2]} = \frac{v'\cdot f'}{1+(f')^2}. \qquad (18.13)$$

Здесь учтено, что $f' = tg\alpha < 0$.

Окончательно выражение для ε_1 в общем случае получим, суммируя (18.12) и (18.13):

$$\varepsilon_1 = u' + v' \cdot f' \frac{1}{1+(f')^2}. \qquad (18.14)$$

Выразим далее деформацию ε_2 вдоль параллели через перемещения. Пусть точки *B* и *C* (рис.18.8) перемещаются на величину u. Это означает, что радиус дуги *BC* увеличился, тогда и длина дуги *BC* увеличится до величины B_1C_1.

Следовательно,

$$\varepsilon_2 = \frac{B_1C_1 - BC}{BC} = \frac{OC_1\varphi - OC\varphi}{OC\varphi} = \frac{(x+u\ ) - x}{x} = \frac{u}{x}. \qquad (18.15)$$

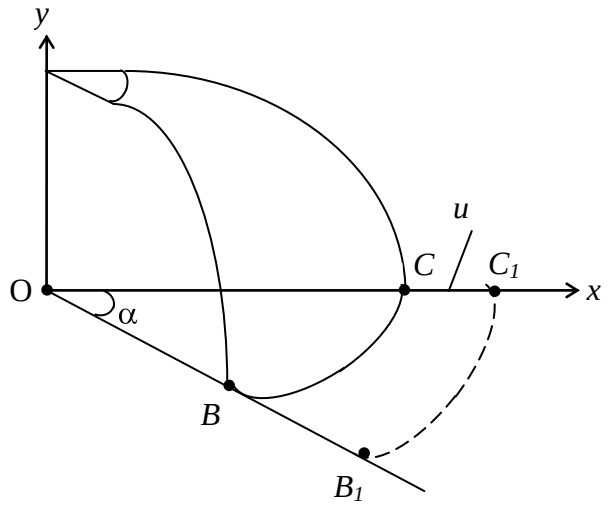


Рис.18.8

Вертикальное смещение точек B и C длину дуги BC не изменяет. Поэтому ε_2 от перемещения v не зависит. Таким образом, получим окончательное выражение для ε_2 в виде

$$\varepsilon_2 = \frac{u}{x}. \qquad (18.16)$$

В тонких балках, пластинах и оболочках напряжения, возникающие в направлении нормали $\bar{n}$ (рис. 18.9), как было отмечено ранее, намного меньше, чем σ_1, σ_2:

$$\sigma_3 << \sigma_1, \quad \sigma_3 << \sigma_2.$$

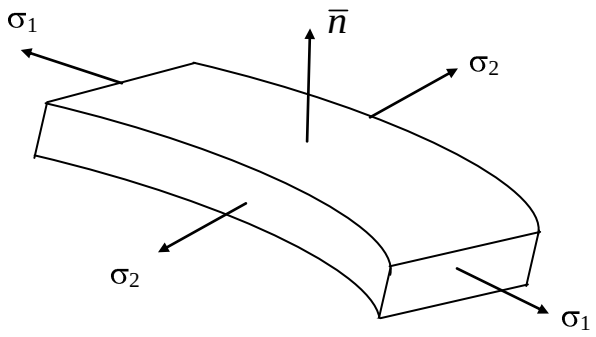


Рис.18.9

Закон Гука с учетом этого факта имеет вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E} \approx \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E},$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E} \approx \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E}. \qquad (18.17)$$

Из этих соотношений σ_1, σ_2 выражаются через $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ в следующем виде:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2),$$
$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1). \qquad (18.18)$$

Таким образом, зная перемещения точек меридиана оболочки можно найти деформации с помощью формул (18.14), (18.16), а затем вычислить напряжения по закону Гука (18.18). И наоборот, зная σ_1, σ_2, можно найти деформации по формулам (18.17), а затем из соотношений (18.16) определить сначала перемещение *u* точек меридиана оболочки, а затем из (18.14) найти перемещение *v*. Однако при этом приходится решать дифференциальное уравнение (18.14) относительно *v*. Это можно сделать и в общем виде. Действительно, т.к. $u, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, известны, то из (18.14) получаем:

$$v = C + \int_0^x \frac{\varepsilon_1(1+(f')^2) - u'}{f'}\,dx.$$

Константа интегрирования определяется из условия закрепления.

Для обеспечения безмоментности напряженного состояния оболочки необходимо, чтобы опорный край был закреплен шарнирно, причем, шарнир не должен препятствовать перемещениям по нормали к поверхности оболочки. Поэтому уравнение для определения C имеет вид:

$$u \cdot \cos\alpha - v \cdot \sin\alpha = 0.$$

Подставляя сюда выражение (18.16), окончательно получим соотношение для вычисления C:

$$C = \left[\varepsilon_{2осн} \cdot x_{осн} \cdot \cos\alpha_{осн} - \int_0^{x_{осн}} \frac{\varepsilon_1 (1 + (f')^2) - u'}{f'} dx \cdot \sin\alpha_{осн} \right] / \sin\alpha_{осн}.$$

18.2. Краевой эффект

Исследования показали, что в оболочках вблизи закрепленных краев большими будут изгибные напряжения. При этом перемещения и напряжения имеют осциллирующий характер. Рассмотрим эту задачу на примере цилиндрической оболочки (рис.18.10).

Вырежем узкую полоску-балку ширины b.

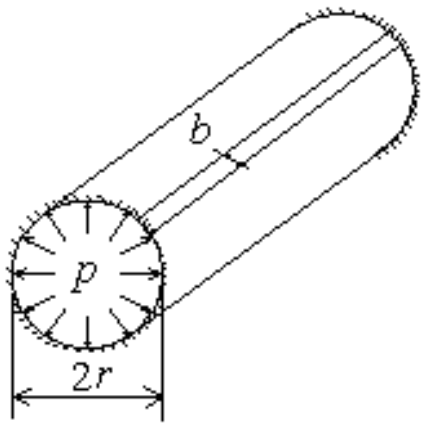


Рис.18.10.

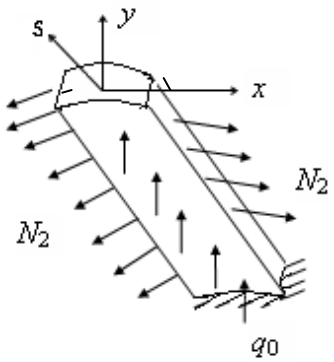


Рис.18.11

Сведем эту задачу к задаче о балке. Уравнение изогнутой оси балки и уравнения равновесия имеют вид:

$$v''_{ss} = \frac{M_x}{\tilde{E}J_x}; \quad (M_x)'_s = Q_y; \quad (Q_y)'_s = q;$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12}, \; q_0 = pb. \tag{18.19}$$

Здесь дифференцируем по координате s (далее индекс «s» для простоты опускаем). Вместо обычного модуля упругости E согласно закону Гука (1.15) используется приведенный модуль

$$\tilde{E} = \frac{E}{(1-\mu^2)}.$$

Это связано с тем, что оболочка находится в состоянии плоского напряженного состояния.

Главная особенность рассматриваемой балки состоит в том, что к q_0 добавляются погонные усилия N_2 (рис.18.11).

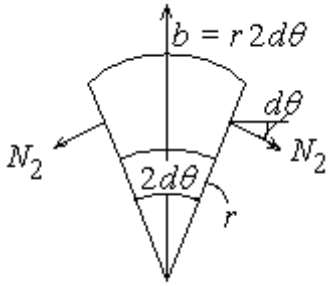


Рис.18.11

Тогда, как это следует из рис.18.11,

$$q = q_0 - 2N_2 \cdot \sin d\theta \approx q_0 - 2N_2 \cdot d\theta =$$

$$= q_0 - 2 \cdot \frac{b}{2r} \cdot N_2 = q_0 - N_2 \cdot \frac{b}{r}. \tag{18.20}$$

Выразим N_2 через прогиб v. Пусть радиус r увеличился на величину прогиба v. Тогда длина окружности увеличится на Δl:

$$\Delta l = 2\pi(r+v) - 2\pi r = 2\pi v.$$

Согласно определению деформация ε_2 будет:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l}{l} = \frac{2\pi v}{2\pi r} = \frac{v}{r}. \qquad (18.21)$$

По закону Гука:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{\tilde{E}} - \mu \frac{\sigma_1}{\tilde{E}}.$$

Для простоты рассмотрим случай, когда коэффициент Пуассона достаточно мал, а именно случай, т.е. когда можно принять, что

$$\varepsilon_2 \approx \frac{\sigma_2}{E} = \frac{N_2}{h \cdot E}.$$

Отсюда

$$\frac{N_2}{h \cdot} = \frac{v}{r} \quad \rightarrow \quad N_2 = \frac{v \cdot h \cdot}{r}.$$

Таким образом, на балку будет воздействовать погонная сила

$$q = q_0 - v \cdot \frac{h}{r} \cdot E \cdot \frac{b}{r} = p \cdot b - v \cdot \frac{h \cdot E \cdot b}{r^2}. \qquad (18.22)$$

Запишем уравнение изогнутой оси балки:

$$v'''' \; EJ_x = p \cdot b - v \cdot \frac{h \cdot E \cdot b}{r^2}. \qquad (18.23)$$

Учитывая, что $J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$, получим:

$$v'''' \cdot E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12} = p \cdot b - v \cdot \frac{h \cdot E \cdot b}{r^2}. \qquad (18.24)$$

Итак, разрешающее уравнение для прогиба *v* примет вид:

$$v'''' \cdot E \cdot \frac{h^3}{12} = p - v \cdot \frac{h \cdot E}{r^2}. \qquad (18.25)$$

Представим решение в виде однородного и частного решений:

$$v = v_{одн} + v_{част}. \qquad (18.26)$$

Пусть $v_{част} = const$. Тогда из (18.24) вытекает, что

$$v_{част} = \frac{p \cdot r^2}{h \cdot E}. \qquad (18.27)$$

Теперь рассмотрим однородное уравнение.

$$v''''_{одн.} \cdot E \cdot \frac{h^3}{12} = -v_{одн} \cdot \frac{h \cdot E}{r^2}$$

Обозначим $\lambda^4 = \dfrac{3}{r^2 \cdot h^2}$. Тогда (18.27) примет вид

$$v''''_{одн} = -v_{одн} 4\lambda^4 \qquad (18.28)$$

Решение такого уравнения имеет вид:

$$v_{одн} = C_1 \cdot e^{-\lambda s} \cdot \cos \lambda s + C_2 \cdot e^{-\lambda s} \cdot \sin \lambda s + C_3 \cdot e^{\lambda s} \cdot \cos \lambda s + C_4 \cdot e^{\lambda s} \cdot \sin \lambda s .$$

Константы C_1 , C_2, C_3 , C_4 определяют из условий закрепления.

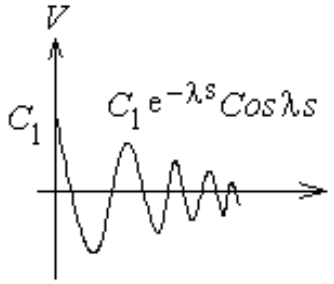


Рис.18.12

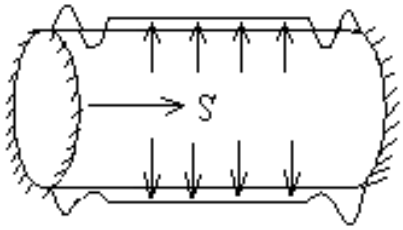


Рис.18.13

Рассмотрим пример. Примем l=1*м*, r=0.1 *м*, h=0.001 *м*.
Тогда получим λ=186. Т.к. λ – очень большое, то составить систему уравнений для C_i, можно только с помощью специальных приемов. Вот один из них.

Обозначим $C_3 = \tilde{C}_3 \cdot e^{-\lambda l}$, $C_4 = \tilde{C}_4 \cdot e^{-\lambda l}$. Тогда

$$C_3 \cdot e^{\lambda s} = \tilde{C}_3 \cdot e^{\lambda (s-l)}, \qquad C_4 \cdot e^{\lambda s} = \tilde{C}_4 \cdot e^{\lambda (s-l)}.$$

Выражение для перемещения v примет вид:

$$v = C_1 \cdot e^{-\lambda s} \cdot \cos \lambda s + C_2 \cdot e^{-\lambda s} \cdot \sin \lambda s + \tilde{C}_3 \cdot e^{\lambda (s-l)} \cdot \cos \lambda (s-l) +$$
$$+ \tilde{C}_4 \cdot e^{\lambda (s-l)} \cdot \sin \lambda (s-l) + \frac{p \cdot r^2}{h \cdot E}.$$

На краях оболочки прогиб равен нулю. Из этого условия вытекают уравнения для $C_1, \tilde{C}_3$:

при s=0: $v \approx C_1 + 0 + 0 + \dfrac{p \cdot r^2}{h \cdot E}$,

при s=l: $v \approx 0 + 0 + \tilde{C}_3 + \dfrac{p \cdot r^2}{h \cdot E}$.

Здесь учтено, что $e^{-\lambda l} \approx 0$. Отсюда получаем выражения для $C_1, \tilde{C}_3$:

$$C_1 = \tilde{C}_3 = -\frac{p \cdot r^2}{h \cdot E}.$$

Из условия, что в заделке равна нулю производная v', получаем:

$$s=0: \quad v' \approx C_1 \cdot e^{-\lambda s} \cdot (-\lambda) \cdot \sin 0 + C_2 \cdot e^{-\lambda s} \cdot (-\lambda) \cdot \cos 0 = 0.$$

Отсюда вытекает, что $C_2 = 0$.

Аналогично получим, что на правом краю в заделке равна нулю производная v'. Это дает

$$\tilde{C}_4 = 0.$$

Таким образом, решение имеет вид:

$$v = \frac{p \cdot r^2}{h \cdot E} \cdot (1 - e^{-\lambda s} \cdot \cos \lambda s - e^{\lambda (s-l)} \cdot \cos \lambda s) \qquad (18.29)$$

Отсюда видно следующее.

1. Функция осциллирует, поскольку имеются тригонометрические функции.

2. Множители $e^{-\lambda s}$, $e^{\lambda (s-l)}$ говорят о том, что функция $v_{одн}$ является затухающей при удалении от краев.

С помощью формулы (18.26)- (18.29) можно найти форму изгиба меридиана оболочки (качественная картина приведена на рис. 18.14).

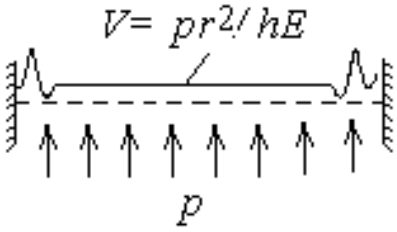


Рис.18.14

Как видно, около краев возникают сильные изгибы. Вычислив изгибающий момент

$$M_x = EJ_x \cdot v'' = EJ_x \lambda^2 \frac{p \cdot r^2}{h \cdot E} \cdot (-e^{-\lambda s} \cdot \cos \lambda s + ...),$$

можно найти изгибные напряжения:

$$\sigma_x = \frac{-M_x}{EJ_x} y \approx \lambda^2 y \cdot \frac{p \cdot r^2}{h \cdot E} \cdot (e^{-\lambda s} \cdot \cos \lambda s - ....).$$

Отсюда следует, что около краев напряжения получаются очень большими, т.к. выражение для скобок имеет порядок единицы, а множитель λ^2 достаточно большой.

<u>Следствие.</u> Таким образом, оболочки хорошо работают в основной области (в большей части) конструкций, но получают большие изгибные деформации возле закреплений. Значит, их достаточно укреплять только вблизи опор (в отличие от балок и пластин, которые плохо работают в основной, т.е. в большей части пролета). Это говорит о большом преимуществе оболочечных конструкций.

19. Теория пологих оболочек

Оболочки по сравнению с пластинами обладают гораздо большей прочностью и жесткостью. Это связано с тем, что в них нагрузка p частично компенсируется распорными реакциями T_1, T_2, T_{12} (на рис. 19.1 показана только T_1).

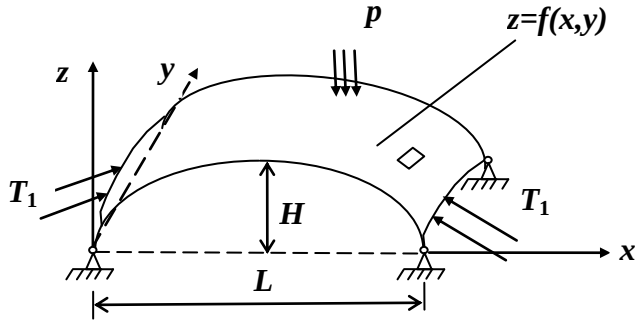


Рис.19.1

Если оболочка пологая, т.е. $H^2 << L^2$, то положение элемента можно определять декартовыми координатами x, y. Кроме того, длина элемента дуги также может вычисляться по простым формулам. Для элемента дуги вдоль в сечении *y=const*:

$$ds_1 = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + \left[f_x'(x, y) \right]^2} \approx dx. \qquad (19.1)$$

Аналогично для элемента дуги *x=const*:

$$ds_2 = \sqrt{dy^2 + dz^2} = dy\sqrt{1 + \left[f_y'(x, y) \right]^2} \approx dy. \qquad (19.2)$$

Радиусы кривизны этих дуг можно определить по обычным формулам:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta_1}{ds_1} \cong \frac{d^2 f}{ds_1^2} \cong f_{xx}''(x, y), \qquad (19.3)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{d\theta_2}{ds_2} \cong \frac{d^2 f}{ds_2^2} \cong f_{yy}''(x, y). \qquad (19.4)$$

Таким образом, можно работать не с дуговыми координатами, а с декартовыми x, y.

Рассмотрим уравнения равновесия элемента оболочки. Введем напряжения σ_1, σ_2, τ, которые действуют на уровне срединной поверхности. Аналогично введем $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$ – деформации, а также перемещения u, v, w на этом же уровне.

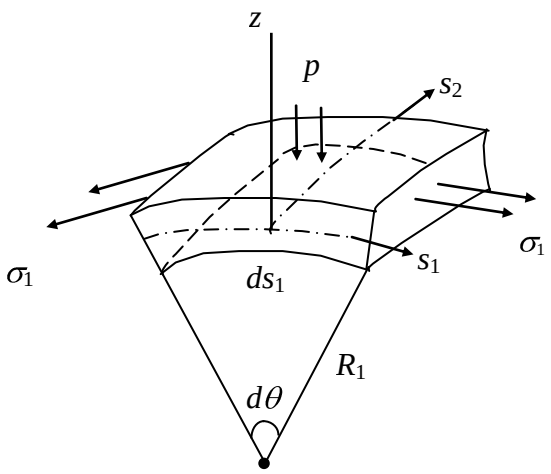


Рис.19.2

Запишем уравнения равновесия в направлениях s_1, s_2:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial s_2} = 0 \qquad (19.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial s_1} = 0 \qquad (19.6)$$

Ввиду пологости и соотношений (19.1), (19.2) используем далее dx, dy вместо ds_1, ds_2. В направлении оси z уравнение будет почти таким же, как уравнение Софи-Жермен, но с добавлением проекций σ_1, σ_2 на ось z:

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right) = -\left(p - \frac{\sigma_1 h}{R_1} - \frac{\sigma_2 h}{R_2}\right). \qquad (19.7)$$

$$1/R_1 = f''_{xx}(x, y), \quad 1/R_2 = f''_{yy}(x, y). \qquad (19.8)$$

Здесь учтено, что кривые *y=const, x=const* на рис.19.1 имеют отрицательную кривизну, следовательно, $R_1 < 0, R_2 < 0$.

Как следует из (19.7), уравнение для w имеет почти такой же вид, как и для пластин. Отличие лишь в правой части. При этом видно, что эта правая часть меньше, чем *p*. Таким образом, получаем решение, аналогичное задаче изгиба пластины, но с меньшей внешней нагрузкой. Это показывает, что оболочка гораздо жестче и прочнее, чем пластина.

Для получения уравнения относительно прогиба используется функция напряжений (фактически следующая замена переменных):

$$\sigma_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \ \sigma_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \ \tau = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \qquad (19.9)$$

Тогда уравнения (19.5), (19.6) удовлетворяются тождественно.

Кроме уравнений равновесия σ_1, σ_2, τ должны удовлетворять условию совместности деформаций. Для их получения надо сначала записать выражения для деформаций. Если т. *B* имеет только касательное перемещение u, то

$$\varepsilon_1^{касат} = \frac{du}{ds_1} \cong \frac{du}{dx_1}. \qquad (19.10)$$

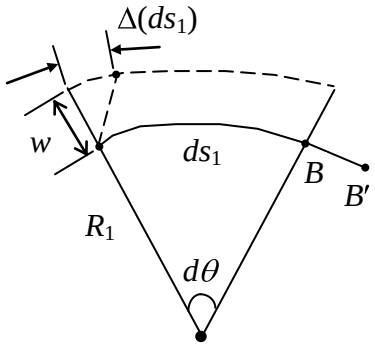


Рис.19.3

Однако при наличии прогиба w дуга ds_1 дополнительно удлиняется на величину

$$\Delta(ds_1) = w d\theta_1. \qquad (19.11)$$

Тогда дополнительная деформация будет:

$$\varepsilon_1^{доп} = \frac{\Delta(ds_1)}{ds_1} = w\frac{d\theta_1}{ds_1} = \frac{w}{R_1}. \qquad (19.12)$$

Суммарно получим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{касат} + \varepsilon_1^{доп}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}. \qquad (19.13)$$

Аналогично получим

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + \frac{w}{R_2}. \qquad (19.14)$$

При сдвиге изменение прямого угла

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2. \qquad (19.15)$$

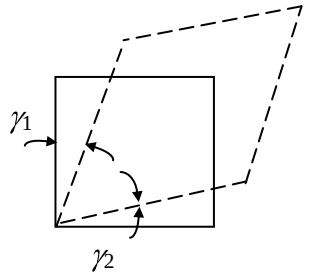


Рис.19.4

Видно, что изменение длин у сторон элемента на углы не влияет. Поэтому дополнительных слагаемых в выражении для γ (во втором соотношении Коши) не будет:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}. \qquad (19.16)$$

Составим следующее выражение:

$$\beta = \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial x \partial y}. \qquad (19.17)$$

После подстановки сюда формул (19.13), (19.14), (19.17) получим, что β связана только с w:

$$\beta = \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \qquad (19.18)$$

Здесь учтено, что ввиду пологости

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R_2}\right) \cong 0 \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R_1}\right) \cong 0. \qquad (19.19)$$

Они следуют из соотношений дифференциальной геометрии (формулы Петерсона-Кодацци и Гаусса).

Если подставить теперь в (19.17) деформации, выразив их через напряжения по закону Гука, то получим, что функция $\beta = \beta(\sigma_1, \sigma_2, \tau)$ выражается через прогиб w по соотношению (19.18). Далее, по соотношениям (19.9) получим, что

$$\beta = \beta(\varphi). \qquad (19.20)$$

Таким образом, φ связана только с w.

Проделаем эти процедуры, учитывая, что $\sigma_3 \approx 0$.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right). \qquad (19.21)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right). \qquad (19.22)$$

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau = -\frac{1}{G}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = -\frac{2(1+\mu)}{E}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}. \qquad (19.23)$$

После подстановки в (19.18) получим:

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\right) = \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \qquad (19.24)$$

Для исключения σ_1, σ_2 из (19.7) используем уравнение (19.24). Подставим в (19.7) напряжения σ_1, σ_2, выраженные через функцию φ по формуле (19.8). Затем применим к (19.7) оператор $\nabla^2\nabla^2$.

Учтем, что

$$\frac{D}{E} = \frac{h^3}{12(1-\mu^2)}.$$

В результате получим уравнение вида

$$\frac{D}{Eh}\nabla^8 w + \nabla_R^2\nabla_R^2 w = 0. \qquad (19.25)$$

Цилиндрическая панель.

Рассмотрим пример шарнирно опертой цилиндрической панели. Тогда

$$\frac{1}{R_1} = 0, \quad R_2 = -R = const. \tag{19.26}$$

Рассмотрим случай нагрузки p вида

$$p = p_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}. \tag{19.27}$$

Отметим связь R с пролетом a и высотой H:

$$R^2 - \frac{a^2}{4} = (R - H)^2.$$

Отсюда

$$R = \frac{\left(H^2 + \frac{a^2}{4}\right)}{2H} \approx \frac{a^2}{8H}. \tag{19.28}$$

Уравнения (19.7) и (19.24) примут вид

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = -p - \frac{h}{R}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \tag{19.29}$$

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{19.30}$$

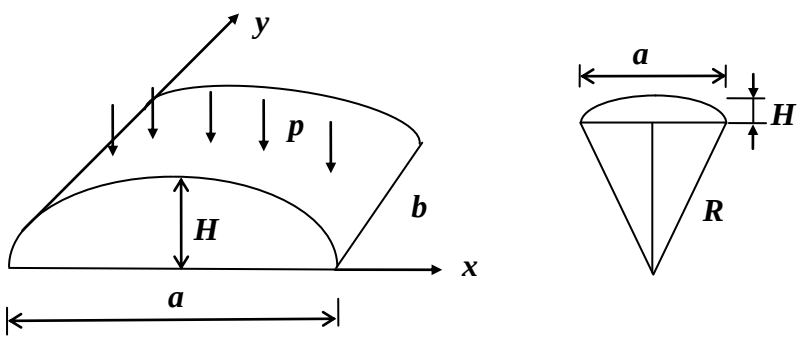


Рис.19.5

Тогда решение можно искать в виде:

$$w = w_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \tag{19.31}$$

$$\varphi = \varphi_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \qquad (19.32)$$

Здесь w_0 - это прогиб в центре (размерность - м), φ_0 - амплитуда функции напряжений (размерность - Н).

Подставляя в (19.29), (19.30) получим:

$$Dw_0\pi^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 = -p_0 - \varphi_0\frac{\pi^2 h}{Ra^2} \qquad (19.33)$$

$$\frac{1}{E}\varphi_0\pi^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 = w_0\frac{\pi^2}{Ra^2} \qquad (19.34)$$

Исключим w_0 из (19.33) с помощью (19.34). Учтем, что

$$\frac{D}{E} = \frac{h^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Тогда найдем:

$$\varphi_0 = -p_0\left[\frac{Rh^3a^2\pi^6}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^4 + \frac{\pi^2 h}{Ra^2}\right]^{-1}. \qquad (19.35)$$

Подставив в (19.33) найдем

$$w_0 = -p_0\left(1-\frac{\pi^2 h}{Ra^2}\left[\frac{Rh^3a^2\pi^6}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^4 + \frac{\pi^2 h}{Ra^2}\right]^{-1}\right) \Big/ D\pi^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 \qquad (19.36)$$

Отсюда видно, что по сравнению с пластиной прогиб панели может быть значительно меньше

Обозначим решение (19.35) в виде:

$$\varphi_0 = -Kp_0, \qquad K = \left[\frac{Rh^3a^2\pi^6}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^4 + \frac{\pi^2 h}{Ra^2}\right]^{-1}$$

Тогда из (19.36) находим

$$w_0 = -p_0\frac{\left(1-K\dfrac{\pi^2 h}{Ra^2}\right)}{D\pi^4\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2} \qquad (19.37)$$

Из (19.37)видно, что для предварительно искривленной пластины с радиусом R перемещения уменьшаются, поскольку p_0 уменьшается. Это можно назвать эффектом поддерживающим эффектом оболочечной

формы. Интересно отметить, что при этом поддерживающий эффект оболочечной формы не зависит от модуля Юнга E.

Из (19.34) видно также, что при больших R величина φ_0 уменьшается и в пределе в панели не возникает распора, что соответствует физическому смыслу задачи, так как панель в этом случае превращается в пластину.

Сферическая панель.

Далее рассмотрим сферическую панель. Тогда

$$R_1 = R_2 = -R = const\,. \tag{19.38}$$

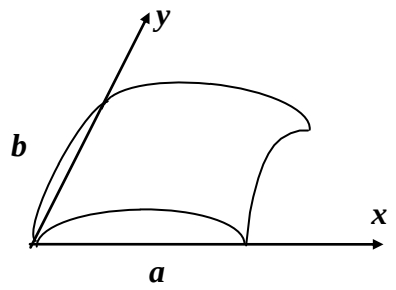


Рис.19.6

Уравнения (19.7) и (19.24) примут вид

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = -p - \frac{h}{R}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right). \tag{19.39}$$

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{19.40}$$

Снова рассмотрим панель под синусоидальной нагрузкой (19.27). Ищем решение в виде

$$w = w_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \qquad \varphi = \varphi_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

Из (19.39), (19.40) вытекают соотношения

$$Dw_0\pi^4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 = -p_0 - \varphi_0\frac{\pi^2 h}{R}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \tag{19.41}$$

$$\frac{1}{E}\varphi_0\pi^4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 = w_0\frac{\pi^2}{R}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \tag{19.42}$$

Таким образом, (19.42) представляет собой связь прогиба в центре w_0 с амплитудой функции напряжений φ_0:

$$w_0 = \frac{\pi^2 R}{E}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\varphi_0$$

Из (19.41) получим уравнение для φ_0:

$$\frac{D}{E}\varphi_0\pi^6 R\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^3 = -p_0 - \varphi_0\frac{\pi^2 h}{R}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

Представим решение в виде

$$\varphi_0 = -Kp_0, \quad K = \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}\left[\frac{Rh^3\pi^6}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{\pi^2 h}{R}\right]^{-1} \qquad (19.43)$$

Снова из (19.43) видно, что при больших R величина φ_0 уменьшается и в пределе в панели не возникает распора, так как панель в этом случае превращается в пластину. Из (19.41) находим w_0

$$w_0 = -p_0\frac{\left(1-K\dfrac{\pi^2 h}{R}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\right)}{D\pi^4\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2} \qquad (19.44)$$

Из (19.44) видно, что перемещения у панели меньше , чем для пластины таких же размеров (как и для цилиндрической панели), поскольку p_0 уменьшается. Например, при соотношении *R/h = 50, R=2a, a=b,* прогиб у пластины будет в 20 раз больше чем у панели. При *R/h = 50* прогиб у пластины будет больше уже в 80 раз.

20. Устойчивость цилиндрической панели

Рассмотрим пологую панель длины *l*. Выделим малый элемент панели и запишем условия его равновесия:

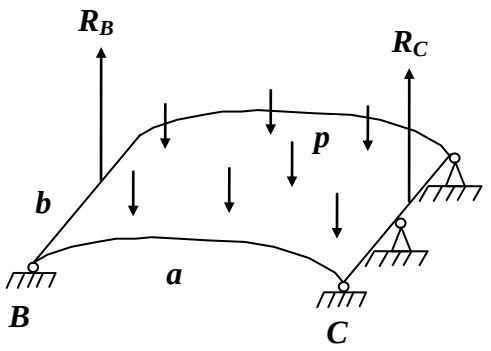


Рис.20.1

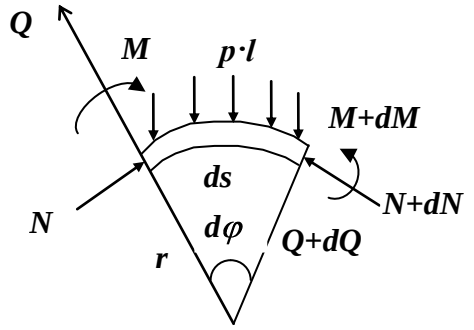


Рис.20.2

$$\begin{cases} dM - Qds = 0 \\ p \cdot b \cdot ds + dQ - Nd\varphi = 0 \\ dN + Qd\varphi = 0 \end{cases} \qquad (20.1)$$

Деля уравнения на ds и учитывая, что

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} \qquad (20.2)$$

Получим систему:

$$\begin{cases} M' - Q = 0 \\ pl + Q' - \dfrac{N}{r} = 0 \\ N' + \dfrac{Q}{r} = 0 \end{cases} \qquad (20.3)$$

Если панель пологая, то $R_B = R_C \approx \dfrac{p \cdot a \cdot b}{2}$, тогда $Q_B = R_B$, $Q_C = -R_C$,

следовательно,

$$Q' \approx -\frac{2R_B}{a} = -pb \qquad (20.4)$$

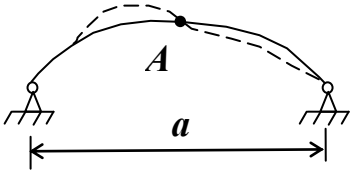


Рис.20.3

Рассмотрим форму панели в момент потери устойчивости. В точке *A* (см. рис.20.3) изгибающий момент и поперечная сила равны нулю. Тогда получим расчетную схему, изображенную на рис. 20.4.

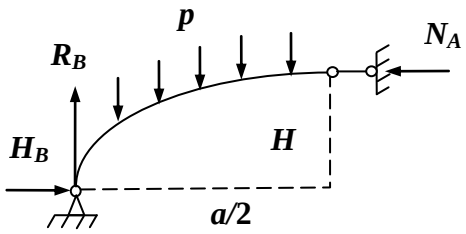


Рис.20.4

Запишем уравнения равновесия. Ввиду пологости их можно представить в виде:

$$\begin{cases} pab + R_B \approx 0 \\ H_B = N_A \\ pab\dfrac{a}{2} - N_A H \approx 0 \end{cases} \tag{20.5}$$

Из последнего уравнения находим N_A:

$$N_A = p\frac{a^2 b}{2H}. \tag{20.6}$$

В момент потери устойчивости

$$N_A = P_{кр}^{эйл} \cong \frac{\pi^2 \tilde{E} J}{\left(\dfrac{a^2}{4} + H^2\right)} = \frac{\pi^2 \tilde{E} bh^3}{12\left(\dfrac{a^2}{4} + H^2\right)} \cong \frac{\pi^2 Ebh^3}{3a^2}, \quad \tilde{E} = E/(1-v^2). \tag{20.7}$$

Из (20.6), (20.7) находим

$$p_{кр} = \frac{2}{3}\frac{\pi^2 Eh^3 H}{a^2} \tag{20.8}$$

21. Устойчивость замкнутой цилиндрической оболочки

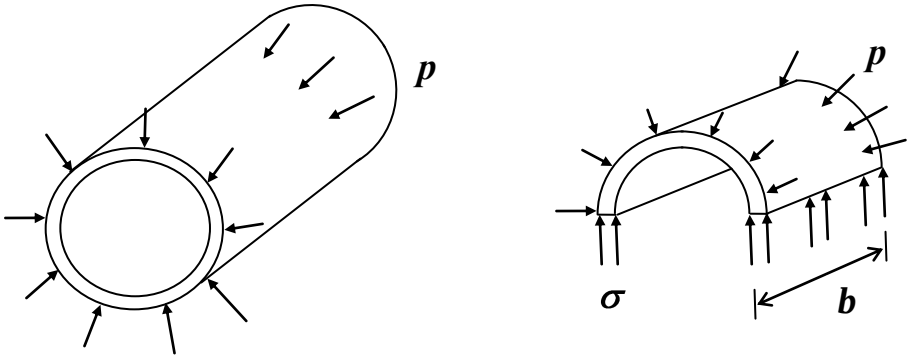
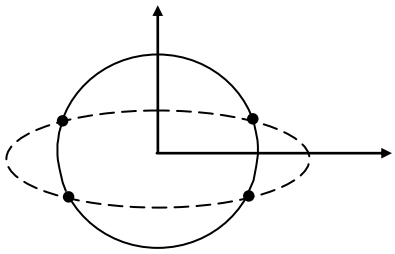


Рис.21.1

Вырежем полоску ширины b и рассмотрим ее половину. Тогда из условия равновесия получим (r – радиус срединной поверхности оболочки):

$$\sigma hb = 2prb \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{2pr}{h}.$$

Считаем, что круговая оболочка превращается в эллиптическую цилиндрическую оболочку в момент потери устойчивости. Это значит, что она изгибается по четырем полуволнам, каждая из которых имеет следующую длину $l = \dfrac{2\pi r}{4}$



Используем формулу Эйлера находим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \tilde{E} J}{l^2 A} = \frac{\pi^2 \tilde{E} bh^3}{12\ \ \pi r / 2\ \ ^2 bh}.$$

Поскольку

$$\sigma = \frac{2pr}{h} = \frac{\tilde{E}h^2}{2r^2} \quad ,$$

то из условия $\sigma = \sigma_{кр}$ получим $p_{кр}$:

$$p_{кр} = \frac{\tilde{E}h^3}{6r^3}.$$

22. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ

Рассмотрим армированную плиту или балку. Отличие будет заключаться лишь в том, что в случае плиты вместо модуля $E_б$ необходимо брать приведенный модуль:

$$\tilde{E}_б = \frac{E_б}{(1-\nu^2)}$$

Параметры, относящиеся к бетону, будем снабжать индексом «б», а относящиеся к арматуре – индексом «а».

Связь прогиба *w* с изгибающим моментом при изгибе в плоскости *ZY* как обычно представима в виде:

$$EJ_x w''_{yy} = M_x$$

Выразим EJ_x через механические характеристики бетона, арматуры и геометрические параметры балки.

Как обычно для этого используются уравнения равновесия части балки. Сделаем сечение и рассмотри ее левую часть (см.рис.22.1). Здесь h_a - толщина защитного слоя. Запишем условия ее равновесия.

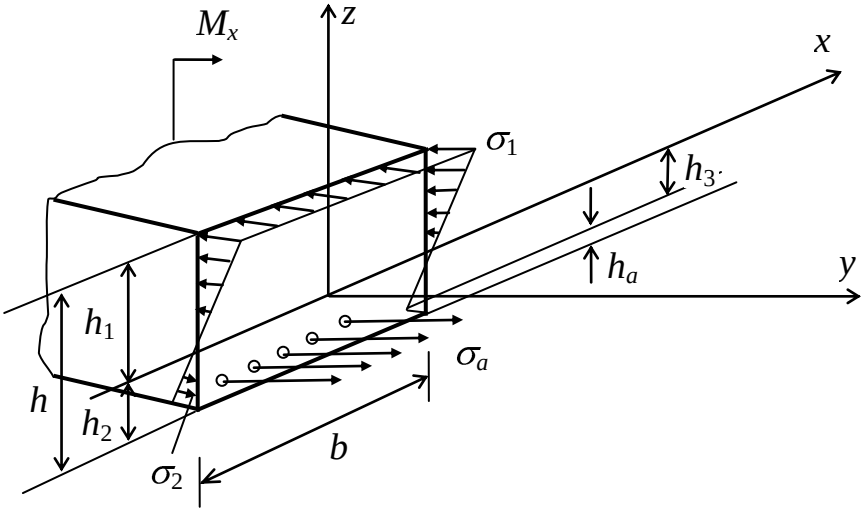


Рис.22.1

Для простоты изложения используем абсолютные значения напряжений и деформаций, а максимальные напряжения в бетоне σ_1, σ_2 будем писать без индекса «б». Первое уравнение запишем в виде:

$$\sum F_z = 0: \; -\frac{1}{2}\sigma_1 h_1 b + \frac{1}{2}\sigma_2 h_2 b + \sigma_a A_a = 0 \qquad (22.1)$$

Здесь A_a – суммарная площадь арматуры. Из условия подобия вытекает, что

$$\sigma_1 = kh_1, \; \sigma_2 = kh_2 \qquad (22.2)$$

Второе условие равновесия представим в виде:

$$\sum {}_x M = 0: \quad \sigma_1 h_1 b h_1 \frac{1}{3} + \sigma_2 h_2 b h_2 \frac{1}{3} + \sigma_a A_a h_3 = M_x \qquad (22.3)$$

Запишем геометрические соотношения:

$$\varepsilon_1 = h_1 w''_{yy}, \ \ \varepsilon_2 = h_2 w''_{yy}, \quad \varepsilon_a = h_3 w''_{yy} \tag{22.4}$$

Согласно закона Гука имеем из (22.4), (22.2):

$$h_1 w''_{yy} E_б = k h_1, \qquad h_2 w''_{yy} E_б = k h_2 \tag{22.5}$$

$$h_3 w''_{yy} E_a = \sigma_a \tag{22.6}$$

Из (22.5) вытекает, что

$$k = w''_{yy} E_б \tag{22.7}$$

Из (22.7), (22.1) следует выражение:

$$-E_б w''_{yy} h_1^2 b + w''_{yy} h_2^2 E_б b + 2 h_3 w''_{yy} E_a A_a = 0 \tag{22.8}$$

Учтем, что

$$h_1 = h - h_2 \tag{22.9}$$

Тогда из (22.8) вытекает

$$E_б b(-h^2 - h_2^2 + 2hh_2 + h_2^2) = -E_a h_3 A_a 2 \tag{22.10}$$

Отсюда можно найти h_2:

$$h_2 = \frac{1}{E_б 2hb} \left[2E_a A_a h_3 + E_б b h^2 \right] \tag{22.11}$$

Здесь

$$h_3 = h_2 - h_a \tag{22.12}$$

Подставляя (22.12) в (22.11) и решая полученное уравнение получим выражение:

$$h_2 = \frac{E_б h^2 b + 2E_a h_a A_a}{2(E_б hb + E_a A_a)} \tag{22.13}$$

Далее рассмотрим второе уравнение равновесия. Из (22.3), (22.7) вытекает

$$E_б w''_{yy} h_1^3 b \frac{1}{3} + w''_{yy} E_б h_2^3 b \frac{1}{3} + h_3^2 w''_{yy} E_a A_a = M_x \tag{22.14}$$

Из (22.14) вытекает выражение для изгибной жесткости при изгибе в плоскости *ZY*

$$EJ_x = \frac{b}{3} E_б (h_1^3 + h_2^3) + h_3^2 E_a A_a \tag{22.15}$$

В случае пластины вместо $E_б$ нужно подставлять $\tilde{E}_б$. Кроме того, в теории пластин используется цилиндрическая жесткость, т.е. жесткость на единицу ширины *b* пластины (погонная жесткость). Тогда из (22.15) получим

$$D_{22} = \frac{1}{3} E_б (h_1^3 + h_2^3) + h_3^2 E_a A_a \frac{1}{b}$$

Таким же способом находится D_{11} - изгибная жесткость при изгибе в плоскости *ZX*:

$$D_{11} = \frac{1}{3} E_б (H_1^3 + H_2^3) + H_3^2 E_a A_a \frac{1}{B} \tag{22.16}$$

Здесь H_1, H_2, H_3, B аналогичны h_1, h_2, h_3, b, но в плоскости, ортогональной оси *X*.

Если продольная и поперечная арматуры не сварены между собой, то крутильная жесткость для плиты определяется как обычно: $D_{12} = \dfrac{2Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

23. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ В СЛУЧАЕ СИММЕТРИЧНОГО АРМИРОВАНИЯ

Однако использовать изгибные жесткости (22.15), (22.16) для анализа пластин можно только в случае цилиндрического изгиба, т.к. высоты h_2, H_2 могут быть неодинаковы. Кроме того, есть еще жесткость на кручение. Но если армирование симметрично относительно срединной плоскости, то нейтральные линии, на которых $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$ будут лежать на этой срединной плоскости. Тогда $\sigma_1 = \sigma_2$.

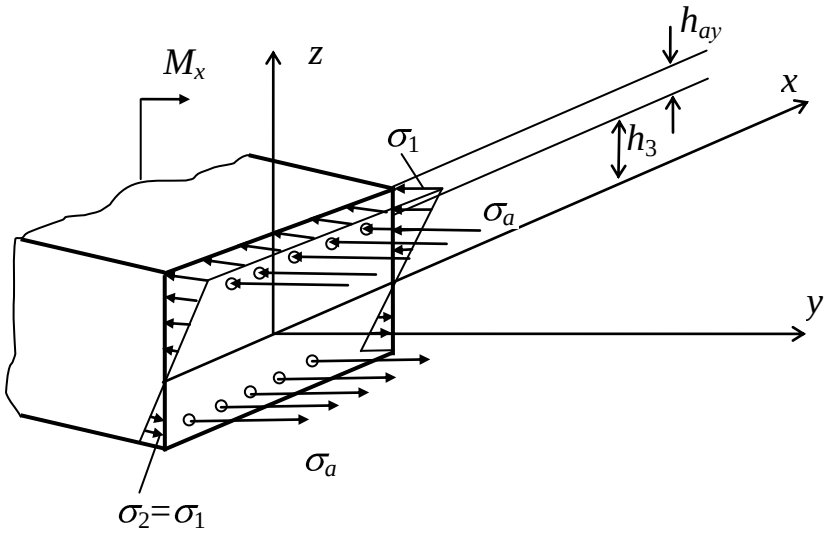


Рис.23.1

Снова рассмотрим левую часть балки или плиты. Условие ее равновесия имеют вид (далее учтено, что $\sigma_1 = \sigma_2$):

$$\sum F_z = 0: \quad -\sigma_1 \frac{h}{2} b + \sigma_2 \frac{h}{2} b + \sigma_a A_a - \sigma_0 A_{ay} = 0 \tag{23.1}$$

$$\sum {}_x M = 0: \quad \sigma_1 \frac{h^2 b}{12} + \sigma_2 \frac{h^2 b}{12} + 2\sigma_a A_{ay} h_3 = M_x \tag{23.2}$$

Поскольку

$$\sigma_1 = E_б \varepsilon_1 = \frac{h}{2} w''_{yy} E_б, \quad h_3 w''_{yy} E_a = \sigma_a \tag{23.3}$$

То из (23.2) получим:

$$w''_{yy} \left(\frac{Eh^3}{12} b + 2E_a h_3 A_{ay} \right) = M_x \tag{23.4}$$

Учитывая, что

$$h_3 = \frac{h}{2} - h_a$$

Получим

$$w''_{yy}\left(\frac{Eh^3b}{12}+2E_a\left(\frac{h}{2}-h_a\right)A_{ay}\right)=M_x \qquad (23.5)$$

Скобка при w''_{yy} называется для балки изгибной жесткостью в плоскости *ZY*. Обозначим ее через EJ_x:

$$EJ_x=\frac{Eh^3b}{12}+2E_a\left(\frac{h}{2}-h_{ay}\right)A_{ay} \qquad (23.6)$$

Аналогично получим изгибную жесткость в плоскости *ZX*:

$$EJ_y=\frac{Eh^3a}{12}+2E_a\left(\frac{h}{2}-h_{ax}\right)A_{ax} \qquad (23.7)$$

Здесь A_{ax} - суммарная площадь арматуры, уложенной в направлении оси x, а h_{ax} - толщина защитного слоя этой арматуры.

Для пластин вместо изгибной жесткости вводят понятие цилиндрическая жесткость. Она представляет собой погонную жесткость и может быть получена по формулам:

$$D_{11}=\frac{EJ_x}{(1-\nu^2)a_x} \qquad (23.8)$$

$$D_{22}=\frac{EJ_y}{(1-\nu^2)a_y} \qquad (23.9)$$

Здесь a_x, a_y размеры пластины вдоль осей *x, y* соответственно.

Если продольная и поперечная арматуры не сварены между собой, то крутильная жесткость для плиты определяется как обычно:

$$D_{12}=\frac{2Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (23.10)$$

Уравнение равновесия элемента пластины принимает вид, аналогичный уравнению Софи-Жермен:

$$D_{11}w''''_{xxxx}+D_{12}w''''_{xxyy}+D_{22}w''''_{yyyy}=-p \qquad (23.11)$$

Ясно, что в случае шарнирного опирания оно решается тем же методом, что и для изотропной пластины, т.е. перемещение может быть представлено в виде:

$$w=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}A_{ij}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}. \qquad (23.12)$$

Коэффициенты A_{ij} определятся методом Бубнова-Галеркина.

24. ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН

Рассмотрим предельное состояние элемента железобетонной балки или пластины. В этом случае обычно считают, что в растянутой зоне напряжения вызывают растрескивание бетона. Поэтому там напряжениями пренебрегают.

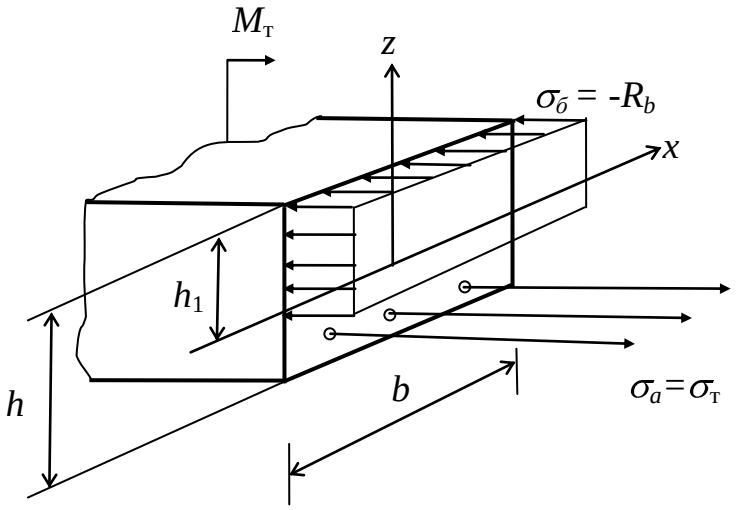


Рис.24.1

Рассмотрим левую часть балки (см.рис.24.1)

В сжатой зоне бетона напряжения считаются постоянными и равными предельному значению R_b. Напряжения в арматуре полагают равными пределу текучести:

$$\sigma_a = \sigma_T \tag{24.1}$$

Высоту сжатой зоны h_1 найдем из условия равновесия левой части балки:

$$\sum F_y = -R_b h_1 b + \sigma_T A_{ay} = 0 \tag{24.2}$$

$$h_1 = \frac{\sigma_T A_{ay}}{R_b b} \tag{24.3}$$

Из второго уравнения равновесия найдем предельный момент $M_т$:

$$M_T = \sigma_a A_{ay}(h - h_1 - h_{ay}) + R_b \frac{h_1^2}{2} b \tag{24.4}$$

Здесь h_a - толщина защитного слоя.

В случае пластины используют погонный предельный момент:

$$m_T = \frac{M_T}{b} \tag{24.5}$$

Рассмотрим случай армирования под некоторым углом α к оси y:

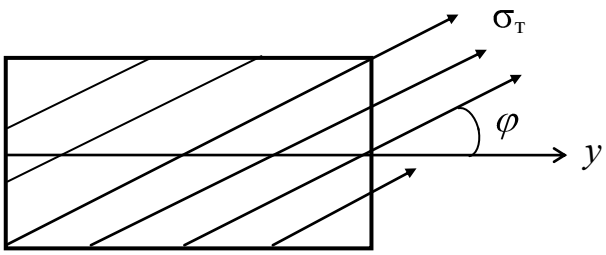


Рис.24.2

Тогда при проектировании на ось *y* вклад напряжений в арматуре будет меньше. Вместо (24.2) получим

$$-R_b h_1 b + \sigma_T \cos\varphi A_{ay} = 0 \qquad (24.6)$$

Отсюда

$$h_1^{(\varphi)} = \frac{\sigma_T \cos\varphi A_{ay}}{R_b b} \qquad (24.7)$$

Выражение для M_T также изменится:

$$M_T^{(\varphi)} = \sigma_a A_{ay} \cos\varphi (h - h_1^{(\varphi)} - h_{ay}) + R_b \frac{(h_1^{(\varphi)})^2}{2} b \qquad (24.8)$$

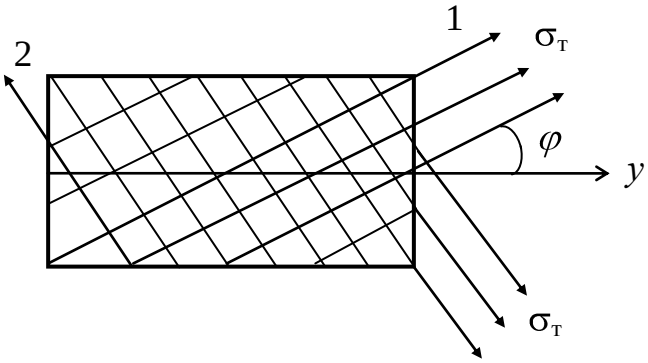


Рис.24.3

В случае армирования сеткой (рис.24.3) вместо (24.6) получим

$$-R_b h_1^{(\varphi)} b + \sigma_T (A_{ay}^{(1)} \cos\varphi + A_{ay}^{(2)} \sin\varphi) = 0 \qquad (24.9)$$

Следовательно высота сжатой зоны бетона будет

$$h_1^{(\varphi)} = \frac{\sigma_T}{R_b b} (A_{ay}^{(1)} \cos\varphi + A_{ay}^{(2)} \sin\varphi) \qquad (24.10)$$

Выражения для M_T при изгибе около оси X получим из соотношения

$$M_T = R_b \frac{(h_1^{(\varphi)})^2 b}{2} + \sigma_T (A_{ay}^{(1)} \cos\varphi + A_{ay}^{(2)} \sin\varphi) \cdot (h - h_1^{(\varphi)} - h_a) \qquad (24.11)$$

Здесь $A_{ay}^{(1)}, A_{ay}^{(2)}$ - суммарная площадь арматуры в направлениях 1 и 2 соответственно. Можно показать, что для квадратной сетки

$$A_{ay}^{(2)} = A_{ay}^{(1)} \sin\varphi \qquad (24.12)$$

25. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ ПЛАСТИН КИНЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Рассмотрим простейший случай нагружения постоянной нагрузкой p. Эксперименты и расчеты показывают, что разрушение происходит по линиям, изображенным на рис.25.1.

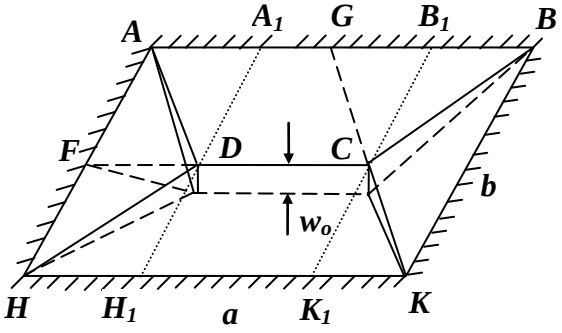


Рис.25.1

Пусть известен погонный предельный момент M_T. Для оценки P_* сверху надо задать поле перемещений. Для простоты будем считать, что ∠ВСК = 90°. Пусть перемещение w=1, тогда угол излома на линии DC легко вычисляется (см.рис.25.2).

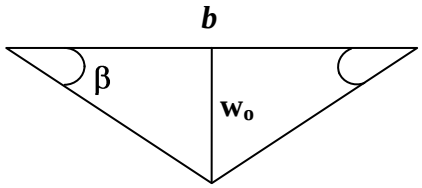


Рис.25.2

$$\beta = \frac{2w_o}{b} = \frac{2}{b} \tag{25.1}$$

Следовательно, работа изгибающего момента M_T будет

$$W_{CD} = \frac{4M_T}{b} CD = \frac{M_T}{b}(a-b) \tag{25.2}$$

Аналогично вычисляется работа на линии излома СК (см.рис.25.3). Тогда

$$\theta = \frac{w_o}{CK} = \frac{1}{\sqrt{2}b} \tag{25.3}$$

$$W_{CK} = 2 \cdot CK \cdot M_T \cdot \theta = 2 \cdot \sqrt{2b} M_T \frac{1}{\sqrt{2}b} = 2M_T \tag{25.4}$$

На линии излома АВ угол излома равен β. Поэтому

$$W_{AB} = AB \cdot M_T \beta = \frac{M_T}{2} \tag{25.5}$$

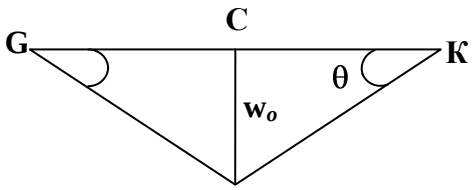


Рис.25.3

На линии АН угол излома будет

$$\alpha = \frac{w_0}{DF} = \frac{w_0}{b/2} = \frac{2}{b} \tag{25.6}$$

Следовательно,

$$W_{AH} = \frac{2M_T}{b} b = 2M_T \tag{25.7}$$

Суммируя работу на всех линиях излома получаем работу изгибающего момента M_T:

$$W_{M_T} = M_T \frac{a-b}{b} + 8M_T + 4 \cdot 2M_T = (15 + \frac{a}{b})M_T \tag{25.8}$$

Чтобы найти работу нагрузки p_* учтем, что перемещения изменяются линейно по линиям координат. Тогда получим, что она равна объему, образующемуся под плоскостью АВКН, умноженному на p_*:

$$W_p = p_* V = p_* \left(A_{ADH} w_0 \frac{1}{3} 2 + 4 A_{DAA_1} w_0 \frac{1}{3} + A_{DCB_1A_1} w_0 \frac{1}{2} 2 \right) = p_* (A_{ADH} \frac{4}{3} + A_{DCB_1A_1}) \tag{25.9}$$

Здесь A_{ADH} - площадь треугольника *ADH*, $A_{DCB_1A_1}$ - площадь прямоугольника DCB_1A_1 (см.рис.25.1). Выразим их через *a,b*:

$$A_{ADH} \frac{4}{3} + A_{DCB_1A_1} = \frac{4}{3}\frac{b^2}{2} + \frac{b}{2}(a-b) = \frac{b^2}{3} + \frac{ab}{2}$$

Приравнивая работы W_{M_T} и W_p и учитывая, что $w_0 = 1$, получим значение p_* в виде:

$$p_* = (15 + \frac{a}{b})M_T \Big/ \left(\frac{b^2}{3} + \frac{ab}{2} \right) \tag{25.10}$$

Сравним со случаем замены давления нагрузки сосредоточенной силой $P = p\, A_{ABKH}$. Тогда точное решение дает

$$p_* = \frac{6 \cdot 16 M_T}{5a^2}$$

Приближенное решение дает $p_* = \frac{16M_T}{a^2}$, т.е. на 20% меньше.

Список литературы

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
2. Терегулов И.Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. – М.: «Высшая школа», 1984. – 472 с.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: «Наука», 1979. – 744 с.
4. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. – 368 с.
5. Александров А.В. Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности.- М.: Высшая школа, 1990.- 400 с.
6. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.
7. Саргасян А.Е. Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности. – М.: «Высшая школа», 2002.-286 с.
8. Кац А.М. Теория упругости. - СПб.: Лань, 2002. – 208 с.
9. Елисеев В.В. Механика упругих тел. - СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. - 336 с.
10. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1986. – 512 с.
11. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. – М.: Издательство «Физматлит», 2002 –416 с.
12. Кожаринова Л.В. Основы теории упругости и пластичности: учебное пособие для студентов строительных специальностей. – Орел: ОрелГТУ, 2009. – 85 с.
13. Барашков В.Н., Смолина И.Ю., Путеева Л.Е., Песцов Д.Н.. Основы теории упругости. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2011. – 184 с.

Содержание

Каюмов Рашит Абдулхакович

Основы теории упругости и элементы теории пластин и оболочек

Редактор

Корректор

Подписано в печать 22.11.15 Формат 60x84/16
Заказ № Печать ризографическая Усл.печ.л. 5
Тираж 90 Бумага офсетная №1 Уч.-изд.л. 5

Отпечатано в полиграфическом секторе
Издательства КГАСУ.
420043, г.Казань, ул.Зеленая, д.1