МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.Ю. Горская, Э.Н. Хасанова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие для бакалавров очной формы обучения направлений подготовки 07.03.01 «Архитектура», 07.03.02 «Реконструкция и реставрация архитектурного наследия», 07.03.04 «Градостроительство»

Казань
2019

УДК 517.5
ББК 22.161
Г67

Горская Т.Ю., Хасанова Э.Н.

Г67 Высшая математика: Учебно-методическое пособие для бакалавров очной формы обучения направлений подготовки 07.03.01«Архитектура», 07.03.02 «Реконструкция и реставрация архитектурного наследия»,07.03.04 «Градостроительство» /Т.Ю. Горская, Э.Н. Хасанова. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2019. – 55 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Материал соответствует рабочей программе дисциплины «Высшая математика» для студентов очной формы обучения по направлениям подготовки 07.03.01 «Архитектура», 07.03.02 «Реконструкция и реставрация архитектурного наследия» и дисциплине «Математика» направления подготовки 07.03.04 «Градостроительство».

Разделы содержат теоретический материал, ряд примеров, иллюстрирующих теорию, и задачи для самостоятельного изучения. В конце приведен список литературы, рекомендуемой для более глубокого изучения материала.

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент кафедры ОМ К(П)ФУ
А.Г. Багоутдинова

Доктор физ.-матем. наук, профессор кафедры ВМ КГАСУ
В.Л. Крепкогорский

УДК 517.5
ББК 22.161

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2019
© Горская Т.Ю., Хасанова Э.Н., 2019

Оглавление

1.	Координатный метод решения геометрических задач	4
2.	Кривые второго порядка, пространственные кривые, винтовая линия, поверхности второго порядка, поверхности вращения	20
3.	Основные элементарные функции одного переменного, их графики, поверхности, образованные вращением графика функции одного переменного	28
4.	Функции двух переменных и их графики	30
5.	Дифференциальное исчисление функций одного и двух переменных	35
6.	Определенный интеграл, его применение для решения геометрических задач. Вычисление площадей плоских фигур, длин дуг кривых, в том числе и пространственных кривых, объёмов тел вращения	39
7.	Вычисление объемов пространственных тел. Поверхностный интеграл	44
8.	Решение типового задания	51
9.	Литература	55

1. КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Декартовы координаты. Пусть в пространстве заданы три взаимно перпендикулярные числовые оси Ox, Oy и Oz с общим началом O и общим масштабом (рис. 1.1). Пусть M – произвольная точка пространства, M_1, M_2, M_3 – проекции точки M на оси Ox, Oy и Oz (рис. 1.1).

Пусть x, y, z – координаты точек M_1, M_2, M_3 на соответствующих осях. Эти числа называются *координатами точки M* в пространстве $Oxyz$. То есть точки M_1, M_2, M_3 имеют координаты $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$, соответственно.

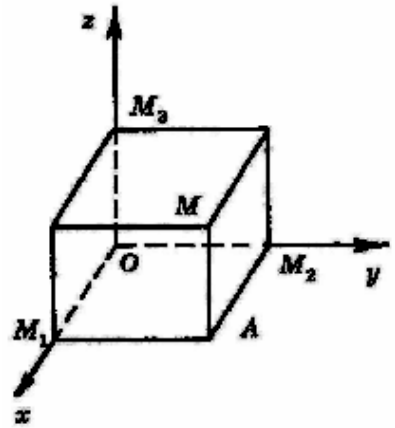


Рис. 1.1

Описанные выше системы координат в пространстве и на плоскости называют *прямоугольными декартовыми*.

Также можно представить: вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки *M*.

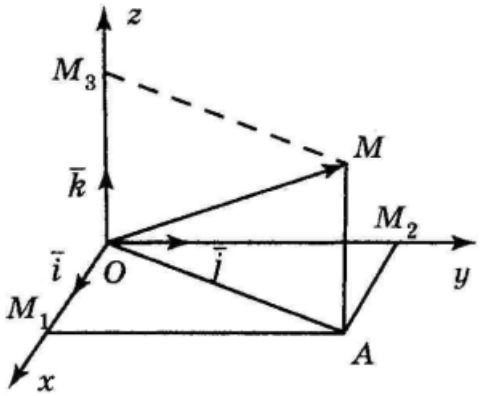


Рис. 1.2

Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор в системе координат $Oxyz$. Перенесем его параллельно самому себе так, чтобы начало вектора совпало с точкой *O,* а конец вектора – с точкой *M*. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, лежащие на осях Ox, Oy, Oz и направленные в положительную сторону этих осей, а их начала совпадают с началом координат O (рис. 1.2), $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Эти векторы

называются *базисными (основными)*. Тогда, приняв за проекции точки M на соответствующие координатные оси числа a_x, a_y, a_z, получим разложение вектора по базисным векторам: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

Длина вектора. Пусть вектор $\vec{a}$ задан своими проекциями: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Тогда очевидно, что

$$|\vec{a}|^2 = \left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2.$$

Следовательно, длина вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Расстояние между точками. Пусть в пространстве *Oxyz* точки А и В заданы координатами $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 1.3).

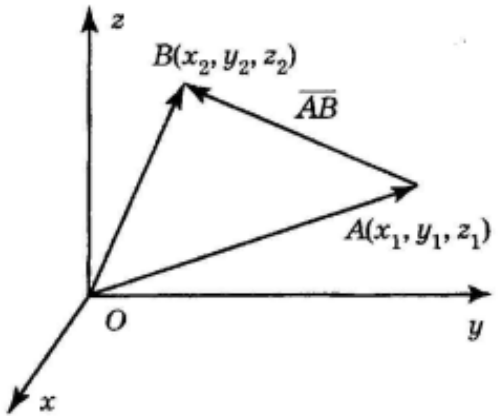


Рис. 1.3

Расстояние между точками А и В находим из формулы:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Примеры

1. Даны точки $A(3,4,6), D(-5,3,1)$. Найти расстояние между точками.

Решение. Вектор $\overrightarrow{AD} = (-5 - 3; 3 - 4; 1 - 6) = (-8; -1; -5)$.

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = 3\sqrt{10}.$$

2. Даны векторы: $\vec{a} = (3; 2; -1), \vec{b} = (-2; 1; 0)$. Определить проекции вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Решение:

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = (2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2); 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1; 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0) = (0; 7; -2).$$

3. Даны точки А(–1; 5; –10), В(5; –7; 8), С(2; 2; –7), D(5; –4; 2). Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположную сторону.

Решение. Запишем координаты векторов: $\overrightarrow{AB} = (5 — 1; -7 - 5; 8 — 10) = (6; -12; 18)$. $\overrightarrow{CD} = (5 - 2; -4 - 2; 2 — 7) = (3; -6; 9)$. Видно, что координаты векторов пропорциональны, и справедливо: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, следовательно, векторы коллинеарны. Так как коэффициент пропорциональности есть число положительное, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены.

Вычисление угла между векторами. Запишем $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через проекции. Тогда, используя $\cos\varphi = (\vec{a},\ \vec{b})/(|\vec{a}||\vec{b}|)$, имеем:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\ .$$

Зная $\cos\varphi$, найдем угол φ, $0 \le \varphi \le \pi$.

Условие ортогональности (перпендикулярности) двух векторов можно записать также следующим образом:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Пример

1. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a}$=(2; –4; 4) и $\vec{b}$=(–3; 2; 6).

Решение:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-6 - 8 + 24}{\sqrt{4 + 16 + 16}\cdot\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{10}{6\cdot 7} = \frac{5}{21}.$$

Векторным произведением *двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор (обозначаемый $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$), который обладает свойствами:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, т. е. длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на $\vec{a}$, $\vec{b}$ как на сторонах;
- $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$, т. е. $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости указанного параллелограмма;
- вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ совершается против хода часовой стрелки.

Для векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ применяют и другие обозначения: $[\vec{a}\times\vec{b}]$, $[\vec{a},\vec{b}]$.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями: $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$. Тогда векторное произведение определяется по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Эту формулу можно записать так:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Условие коллинеарности двух векторов. Если для ненулевых векторов выполняется условие: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. В самом деле, если $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, то $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi=0$ и $\sin\varphi=0$, т. е. $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$. Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ коллинеарны.

Примеры

1. Даны векторы $\bar{a}$=(3; –1; –2) и $\bar{b}$=(1; 2; –1). Найти координаты векторных произведений:

$$1)\quad \vec{a}\times\vec{b}; \qquad 2)\quad \left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-\vec{b}\right).$$

Решение. 1) Согласно формуле, определяющей проекции векторного произведения, запишем:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\vec{\imath}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-\vec{\jmath}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=$$
$$=5\vec{\imath}+\vec{\jmath}+7\vec{k}.$$

2) Воспользуемся свойствами векторного произведения, упростим и вычислим векторное произведение, использую результаты пункта 1):

$$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}\times\vec{a}+4\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}-2\vec{b}\times\vec{b}=-5\vec{a}\times\vec{b}=$$
$$=-5\left(5\vec{\imath}+\vec{\jmath}+7\vec{k}\right)=-25\vec{\imath}-5\vec{\jmath}-35\vec{k}.$$

2. Даны точки A(1; 2; 0), B(3; 0; –3), C(5; 2; 6). Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение. Вычислим сначала координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, затем воспользуемся геометрическим смыслом длины векторного произведения.

$$\overrightarrow{AB} = (2; -2; -3), \quad \overrightarrow{AC} = (4; 0; 6).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\vec{i} + 24\vec{j} + 8\vec{k} = 4(-3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}).$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 4\sqrt{9 + 36 + 4} = 28.$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 14.$$

3. Как изменится площадь треугольного паруса, если горизонтальная направляющая увеличится в 1,5 раза, а наклонная – в два раза.

Решение. Исходная площадь паруса вычисляется как $S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. Парус с новыми размерами будет иметь площадь :

$$S_{\text{нов}} = \left|1{,}5\vec{a} \times 2\vec{b}\right| = 1{,}5 \cdot 2\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 3S.$$

Таким образом, новая площадь будет в три раза больше площади паруса со старыми размерами.

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 2$, $\widehat{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)} = \frac{\pi}{6}$.

Решение. Искомая площадь вычисляется как

$$S = \left|\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} + \vec{b}\right)\right|.$$

$$\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} + \vec{b}\right) = 3\vec{a} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 3\vec{b} \times \vec{b} =$$

$$= -8\vec{a} \times \vec{b}.$$

Здесь учли, что $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, $\vec{b} \times \vec{b} = 0$. Таким образом,

$$S = \left|\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} + \vec{b}\right)\right| = \left|-8\vec{a} \times \vec{b}\right| = 8|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| sin\, \widehat{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)} = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16.$$

Когда векторы заданы своими проекциями $\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$, $\vec{c} = (c_x,\ c_y,\ c_z)$,смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения. Смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{d},\vec{c}) = |\vec{d}||\vec{c}|\cos\varphi$. Но $|\vec{d}| = S$ и $h = |\vec{c}|\cos\varphi$. Поэтому $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = Sh = V$, где V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, составляющих правую тройку векторов.

Примеры

1. Доказать, что четыре точки A(1; 2; –1), B(0; 1; 5), C(–1; 2; 1) и D(2; 1;3) лежат в одной плоскости.

Решение. Соединим точки векторами $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$. Проверим, будут ли векторы компланарны.

$$\overrightarrow{AB} = (-1;-1;6), \qquad \overrightarrow{AC} = (-2;0;2), \qquad \overrightarrow{AD} = (1;-1;4).$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 2 - 0 - 2 - 8 = 0.$$

Так как смешанное произведение равно нулю, следовательно, данные четыре точки лежат на одной плоскости.

2. Даны вершины тетраэдра: A(2; 3; 1), B(4; 1; –2), C(6; 3; 7), D(–5; –4; 8). Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Решение. Известно, что объем тетраэдра можно вычислить по известной формуле, как $V = \frac{1}{3}S\cdot h$. Основанием тетраэдра служит треугольник *ABC*. Его площадь равна: $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. С другой стороны, объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ от объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$. А тот, в свою очередь, численно равен смешанному произведению этих векторов. Поэтому длина высоты, опущенной из вершины D, вычисляется из формулы:

$$\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}h\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}.$$

Найдем смешанное произведение и модуль скалярного произведения, предварительно вычислив проекции векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2;-2;3), \qquad \overrightarrow{AC} = (4;0;6), \qquad \overrightarrow{AD} = (-7;-7;7).$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 7(0 + 12 - 12 - 0 + 12 + 8) = 140.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\vec{\imath} + 24\vec{\jmath} + 8\vec{k} = 4(-3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}).$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 4\sqrt{9 + 36 + 4} = 28.$$

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|} = \frac{140}{28} = 5.$$

3. Объем тетраэдра v=5, три его вершины находятся в точках A(2; 1; –1), B(3; 0; 1), C(2; –1; 3). Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси OY.

Решение. Так как вершина D лежит на оси OY, ее координаты можно записать как $(0; y; 0)$. Объем тетраэдра вычислим через смешанное произведение векторов, на ребрах которых построен тетраэдр, и запишем уравнение:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right| = 5.$$

$$\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2), \qquad \overrightarrow{AC} = (0; -2; 4), \qquad \overrightarrow{AD} = (-2; y - 1; 1).$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 8 - 8 - 4(y - 1) = 2 - 4y.$$

$$|2 - 4y| = 30.$$

$$2 - 4y = \pm 30 \quad \Rightarrow y_1 = -7; \quad y_2 = 6.$$

Таким образом, условию задачи соответствуют две точки:

$D_1(0; -7; 0)$ и $D_2(0; 6; 0)$.

Задачи

1. Построить следующие точки по их декартовым координатам: A(3; 4; 6), B(–5; 3; 1), C(1; –3; –5), D(0; –3; 5), E(–3; –5; 0), F(–1, –5; –3).
2. Вычислить расстояние от начала координат O до точек: A(4; –2; –4), B(–4; 12; 6), C(12; –4; 3); D(12; 16 –15).
3. Даны вершины треугольника: M_1(3; 2; –5), M_2(1; –4; 3), M_3(–3; 0; 1). Найти середины его сторон.
4. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ коллинеарны.
5. Даны вершины треугольника: A(–5; –2; 7), B(–3; –2; 6) и C(3; –2; 0). Определить его внутренний угол при вершине B.

6. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a}$=(3; –1; 4) и $\vec{b}$=(–3; 7; 1).
7. Вычислить треугольник с вершинами в точках A(–1; 0; 8), B(5; –2; 0) и C(6; 1; 7).
8. Даны точки: A(1; 2; 3), B(7; 0; –3), C(4; 5; 2). Вычислить площадь треугольника ABC.
9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+4\vec{b}$ и $2\vec{a}+\vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\frac{\pi}{6}$.
10. Найти объем треугольной пирамиды, вершины которой в точках: $A(2;5;\ -7)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;\ 4)$, $D(5;5;\ 6)$.
11. Дана пирамида с вершинами в точках: $A(0;5;0)$, $B(2;3;4)$, $C(6;2;\ 4)$, $D(3;5;26)$. Найти длину высоты пирамиды, опущенной на грань *BCD*.
12. Показать, что точки $A(0;5;0)$, $B(2;3;4)$, $C(6;2;\ 4)$, $D(3;5;26)$ лежат в одной плоскости.

Задачи для самостоятельного изучения

1. Найти расстояние между точками A и B, C и B, E и F в декартовом пространстве: A(-3;2; 6), B(1; 3; 5), C(1; –3; –5), D(0; –3; 5), E(–3; –5; 0), F(–1, –5; –3).
2. Вычислить расстояние от начала координат O до точек: A(4; –2; –4), B(–4; 12; 6), C(12; –4; 3); D(12; 16 –15).
3. Даны вершины треугольника: M_1(3; 2; –5), M_2(1; –4; 3), M_3(–3; 0; 1). Найти середины его сторон.
4. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}=2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+\beta\vec{k}$ и $\vec{a}=\alpha\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+3\vec{k}$ коллинеарны.
5. Даны вершины треугольника: A(–1; –2; 4), B(–4; –2; 0) и C(3; –2; 1). Определить его внутренний угол при вершине B.
6. Вычислить треугольник с вершинами в точках: A(–5; 2; 7), B(4; –1; 0) и C(3; 2; 1).
7. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках: $A(-1;2;4)$, $B(4;3;2)$, $C(1;-2;5)$.
8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=6\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+6\vec{k}$.
9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$-3$\bar{b}$ и $\bar{a}$+2$\bar{b}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3\sqrt{2}$, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\frac{\pi}{4}$.
10. Проверить с помощью векторного произведения, будут ли векторы $\vec{a}=2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-4\vec{k}$ и $\vec{b}=-6\vec{\imath}-9\vec{\jmath}+12\vec{k}$ коллинеарные.
11. Найти объем треугольной пирамиды, вершины которой в точках: $A(2;5;\ -7)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;\ 4)$, $D(5;5;\ 6)$.

12. Дана пирамида с вершинами в точках:
$A(0;5;0)$, $B(2;3;4)$, $C(6;2;\ 4)$, $D(3;5;2)$. Найти длину высоты пирамиды, опущенной на грань *BCD*.

Общее уравнение плоскости

Пусть в пространстве *Oxyz* задана плоскость (рис. 1.4), т. е. заданы: координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0 , лежащей на этой плоскости, и известен вектор нормали $\vec{N} = (A, B, C)$, который перпендикулярен плоскости.

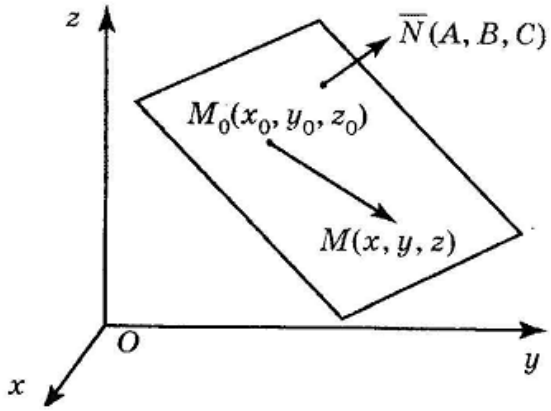


Рис. 1.4

Пусть $M(x, y, z)$– произвольная точка плоскости.

Рассмотрим вектор:

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

Уравнение вида $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ будет являться уравнением этой плоскости.

Путем раскрытия скобок и приведения подобных членов, из предыдущего уравнения можно получить общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + C\,z + D = 0.$$

Пусть в пространстве *Oxyz* заданы две плоскости, соответственно, уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

тогда векторы $\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы этих плоскостей. За угол φ между плоскостями примем один из двухгранных углов (образованных ими), равный углу между их нормальными векторами. Поэтому справедливо:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если $A_1 / A_2 = B_1 / B_2 = C_1 / C_2$, то плоскости параллельны между собой, так как коллинеарны их нормальные векторы.

Если $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$, то плоскости перпендикулярны между собой, так как перпендикулярны их нормальные векторы.

Примеры

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n}=(1; -2; 3)$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, содержащей точку и перпендикулярной заданному вектору, подставив координаты точки M_1, а вместо A,B,C – координаты нормального вектора; имеем:

$$1(x-2) - 2(y-1) + 3(z+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 2y + 3z + 3 = 0.$$

2. Даны две точки: $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение. Так как вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$перпендикулярен плоскости, его можно взять за ее нормальный вектор, для этого найдем проекции вектора$\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1;\ -1;\ -3),$$

$$1(x-3) - 1(y+1) - 3(z-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - y - 3z + 2 = 0.$$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a}=(3; -1; 4)$.

Решение. Так как вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости, можно утверждать, что вектор принадлежит плоскости. Вектор, соединяющий точки M_1 и M_2, тоже принадлежит этой же плоскости. Нам необходимо задать вектор, перпендикулярный плоскости векторов $\vec{a}$ и$\overrightarrow{M_1M_2}$. Таким вектором может стать векторное произведение векторов $\vec{a}$ и$\overrightarrow{M_1M_2}$. Сначала найдем проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1;\ 2;\ -1),$$

$$\vec{N} = \vec{a} \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -7\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Тогда уравнение искомой плоскости будет:

$$-7(x-2) + 7(y+1) + 7(z-3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - y - z = 0.$$

4. Определить, при каких значениях l и m следующая пара уравнений:

$$\begin{cases} 2x + ly + 3z - 5 = 0, \\ mx - 6y - 6z + 2 = 0. \end{cases}$$

будет определять параллельные плоскости.

Решение. Плоскости будут параллельны, если их нормальные векторы удовлетворяют условию: $A_1 / A_2 = B_1 / B_2 = C_1 / C_2$. Тогда получим условия для нахождения неизвестных l и m:

$$\frac{2}{m} = \frac{l}{-6} = \frac{3}{-6} \implies l = 3, \qquad m = -4.$$

5. Определить двугранные углы, образованные между плоскостями:

$$x + y + 2z - 7 = 0,$$
$$3x - 2y + z + 6 = 0.$$

Решение. Имеем $\overrightarrow{N_1} = (1; 1; 2)$, $\overrightarrow{N_1} = (3; -2; 1)$. Тогда, согласно формуле: $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$, имеем:

$$\cos\varphi = \frac{3 - 2 + 2}{\sqrt{1 + 1 + 4}\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}.$$

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\right), \quad \varphi_2 = \pi - \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\right).$$

Задачи

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор: $\vec{n}$=(5; 0; –3).
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1(3; 4; –5) и параллельно двум векторам: $\overrightarrow{a_1}$=(3; 1; –1) и $\overrightarrow{a_2}$=(1; –2; 1).
3. Определить, при каком l уравнения $7x–2y–z = 0$ $lx + y–3z–1 = 0$ будут определять перпендикулярные плоскости.
4. Определить двугранные углы, образованные пересечением плоскостей: $3y–z = 0, 2y + z = 0$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M_1(1; –1; –2) и M_2(3; 1; 1) перпендикулярно плоскости $x–2y + 3z–5 = 0$.
6. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M(–5; 2; –1) параллельно плоскости OYZ.

Задачи для самостоятельного изучения

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $Q_1(3; -2; 5)$ и $Q_2(2; 3; 1)$ параллельно оси OZ;
2. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ от координатного угла OXY.
3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; -3; 3)$ параллельно плоскости OXY.
4. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(7; 2; -3)$ и $M_2(5; 6; -4)$ параллельно оси OX.
5. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.
6. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; -1; 1)$ перпендикулярно к двум плоскостям: $2x - z + 1 = 0, y = 0$.

Общие уравнения прямой в пространстве. Пусть в пространстве *Oxyz* две плоскости заданы уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 – известные числа. Пусть эти плоскости не параллельны (не выполняется условие параллельности плоскостей), тогда они пересекаются по прямой. Уравнения в этой системе являются уравнениями прямой пересечения двух плоскостей. Их называют *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Даны две точки : $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащие на прямой. Координаты этих точек – заданные числа. Нужно записать уравнения прямой, проходящей через эти две точки, как геометрическое место точек $M(x, y, z)$, для которых векторы $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1, z - z_1)$ $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ будут коллинеарными. При этом вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ можно назвать направляющим вектором прямой. Тогда уравнение запишется в виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пусть в пространстве *Oxyz* две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

соответственно. Здесь $x,\ y,\ z$ – текущие координаты, остальные величины – заданные числа: $x_1,\ y_1,\ z_1$ – координаты точки M_1 на первой прямой; $x_2,\ y_2,\ z_2$ – координаты точки M_2 на второй прямой; $m_1,\ n_1,\ p_1$ – проекции на оси координат направляющего вектора $\overrightarrow{a_1}$ первой прямой; $m_2,\ n_2,\ p_2$ – проекции на оси координат направляющего вектора $\overrightarrow{a_2}$ второй прямой.

За угол φ между этими прямыми примем угол между их направляющими векторами $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$.

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

По $\cos\varphi$ найдем угол φ, измеряемый от 0 до π.

Если $m_1/m_2=n_1/n_2=p_1/p_2$, то прямые будут параллельны, так как коллинеарны их направляющие векторы. Если $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$, то прямые перпендикулярны, так как перпендикулярны их направляющие векторы.

Примеры

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M(4; 1; –5) параллельно:

1) вектору $\bar{a}$=(7; –3; 1); 2) прямой $\frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-6}$.

Решение. 1) Воспользуемся каноническим уравнением прямой, взяв $\vec{a}$ за направляющий вектор прямой.

$$\frac{x-4}{7}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+5}{1}.$$

2)Так как заданная прямая параллельна искомой, то направляющие векторы их могут совпадать, поэтому уравнение прямой будет:

$$\frac{x-4}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{-6}.$$

2. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки (3; –1; 2), (2; 1; 1).

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки, получим:

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y+1}{1+1}=\frac{z-2}{1-2}\quad\Rightarrow\quad\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

3. Составить канонические уравнения следующей прямой:

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}.$$

Решение. Для канонического уравнения необходимо знать точку, принадлежащую прямой и направляющий вектор ее. Любое решение системы можно взять за точку на прямой, а векторное произведение нормальных векторов двух плоскостей, пересечением которых является прямая, может выступить как направляющий вектор искомой прямой. Итак, зададим для определенности $z=0$, тогда решим систему:

$$\begin{cases} x-2y=4 \\ 3x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2, y=\frac{1}{2}(4-3x)=-1.$$

Имеем точку с координатами $(2,-1,0)$.

$$\vec{q}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=4\vec{i}+14\vec{j}+12\vec{k}.$$

Таким образом, уравнение прямой будет в записано в виде:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{12}.$$

4. Найти угол между прямыми:

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-9}{-7}$$

и

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+5}{8}=\frac{z+3}{1}.$$

Решение. Угол между прямыми найдем по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

$$\cos\varphi=\frac{-20+32-7}{\sqrt{25+16+49}\sqrt{16+64+1}}=\frac{5}{27\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}}{27\sqrt{2}}.$$

$$\varphi=\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{27\sqrt{2}}\right).$$

5. Составить параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z + 5 = 0 \\ -2x + 3y - 5z - 6 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Для этого найдем любое решение системы и направляющий вектор прямой, как векторное произведение нормальных векторов пересечённых плоскостей. Предложим $z = 0$, тогда система имеет решение:

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ -y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Точка, лежащая на прямой может быть с координатами: $(3, 4, 0)$.

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\vec{i} + 11\vec{j} - \vec{k}.$$

Тогда параметрическое уравнение прямой запишем в виде:

$$\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 4 + 11t \\ z = -t \end{cases}.$$

Задачи

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M(2; 0; –3) параллельно:

   1) вектору $\bar{a}$=(2; –3; 5); 2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$; 3) оси OX; 4) оси OY; 5) оси OZ.

2. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки: (3; –1; 2), (2; 1; 1).

3. Составить канонические уравнения следующей прямой:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}.$$

4. Доказать перпендикулярность прямых:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}.$$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости:
$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; -5)$ перпендикулярно плоскости $6x-3y-5z+2=0$.
7. Найти проекцию точки $P(2; -1; 3)$ на прямую $x=3t, y=5t-7, z=2t+2$.

Задачи для самостоятельного изучения

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:
   1) (1; –2; 1), (3; 1; –1); 2) (3; –1; 0), (1; 0; –3); 3) (0; –2 ; 3), (3; –2; 1); 4) (1; 2; –4), (–1; 2; –4).
2. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки (0; 0; 1), (0; 1; –2).

3. Доказать перпендикулярность прямых:

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-2 \\ z=-6t+1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}.$$

4. Найти острый угол между прямыми:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -1; -1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ, ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ, ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Настоящий раздел носит теоретический характер, формулы, с которыми познакомимся в этом разделе, понадобятся для описания внешних поверхностей архитектурных сооружений.

Окружность радиуса R с центром в точке $O_1(a,b)$ имеет уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами,* есть величина постоянная. Эту постоянную обозначим через $2a, a>0,$ а фокусы – через $F_1(c,0),\ F_2(-c,0)$. Расстояние между ними $F_1F_2=2c.$ Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса, соединим ее с F_1 и F_2 (рис. 2.1). По определению эллипса сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов равна $2a,$ т. е.

$$F_1M+F_2M=2a.$$

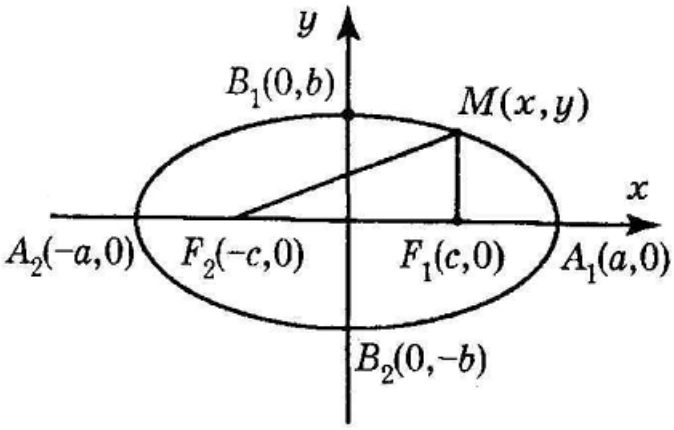


Рис. 2.1

Обозначая $b^2=a^2-c^2$ (так как $a>c$), и считая $b>0$, имеем соотношение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Такое уравнение эллипса называется *каноническим.*

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (рис. 2.2). Обозначим эту постоянную $2a>0,$ а фокусы – через $F_1,\ F_2,$ Расстояние между ними $F_1F_2=2c.$ Фокусы имеют координаты $F_1(c,0),\ F_2(-c,0).$ Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка гиперболы, тогда по определению

$$F_1M-F_2M=\pm 2a.$$

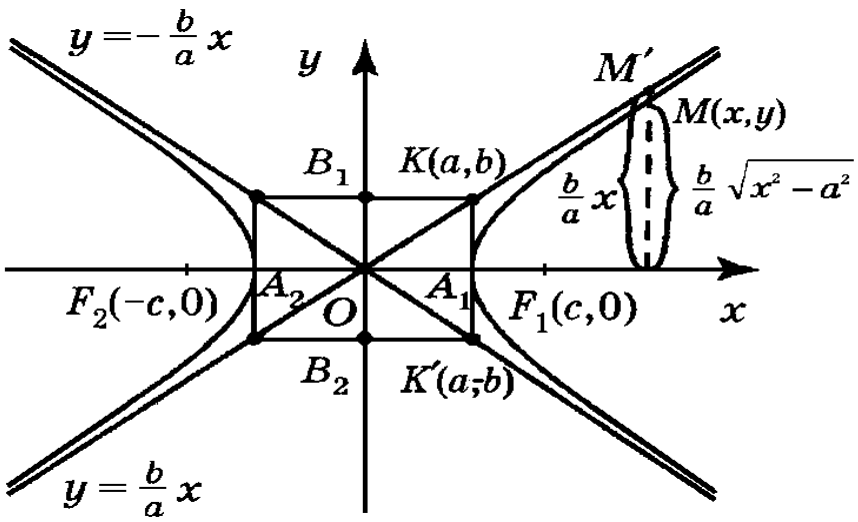


Рис. 2.2

Выражая $b^2 = c^2 - a^2$, b как действительное число, которое будем считать положительным, получим *каноническое уравнение гиперболы:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Прямые с уравнением:

$$y = \pm(b/a)x$$

называются *асимптотами гиперболы.*

Параболой называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой *фокусом*, и заданной прямой, называемой *директрисой*. Пусть F – фокус. Ось Ox проведем через F перпендикулярно директрисе (рис. 2.3).

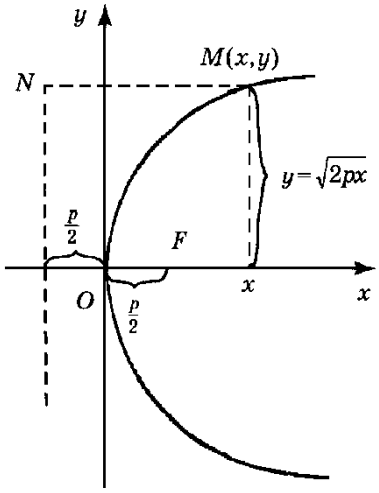


Рис. 2.3

Пусть p – расстояние от фокуса F до директрисы. Это число задано, и называется *параметром параболы.* Начало координат возьмем в середине

перпендикуляра, опущенного из точки F на директрису. Тогда фокус будет иметь координаты $F(p/2\,,0)$. Директриса имеет уравнение: $x = -p/2$.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Преобразование координат на плоскости

Общий случай. Пусть Oxy – исходная система координат, $O_1x'y'$– новая система координат (рис.). Положение новой системы по отношению к старой определим, задав:

координаты x_0, y_0 нового начала O_1 в старой системе координат;

угол α, который образует ось O_1x_1 с Ox.

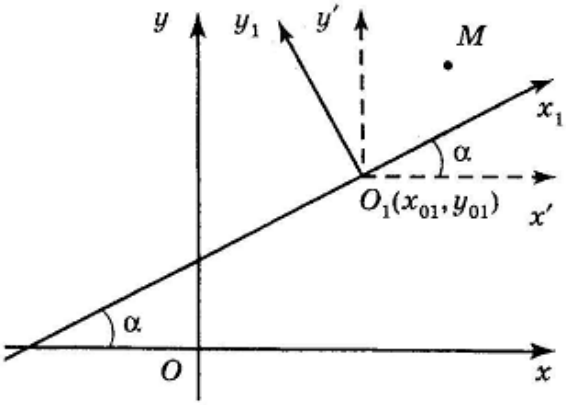


Рис. 2.4

Пусть x, y – координаты точки M в старой системе, а x_1, y_1 – координаты точки M в новой системе. Тогда, учитывая, что новая система координат получена поворотом вспомогательной системы $O_1x'y'$ на угол α, и параллельным переносом Oxy в новый центр $O_1(x_0, y_0)$, старые координаты x, y точки M через ее новые координаты x', y' в новой системе выражаются в виде:

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha + x_0, \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

поверхностью второго порядка в пространстве.

Сфера с центром в точке $O_1(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R имеет уравнение: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, где $x_0, y_0, z_0 -$ координаты центра сферы, $R -$ радиус сферы, заданные числа (рис. 2.5).

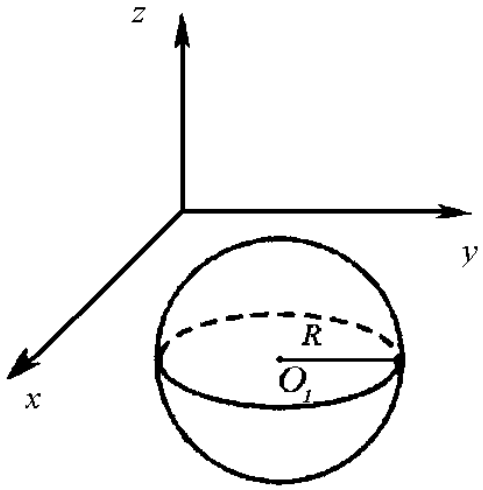


Рис. 2.5

Цилиндры второго порядка. *Цилиндрической* называется поверхность, описываемая прямой, остающейся параллельной некоторому направлению и пересекающей данную линию. Последняя называется *направляющей цилиндрической поверхности*, а прямая – *образующей*.

Пусть, например, образующие цилиндрической поверхности параллельны оси Oz , и направляющей служит эллипс (рис. 2.6) в плоскости Oxy с уравнением :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

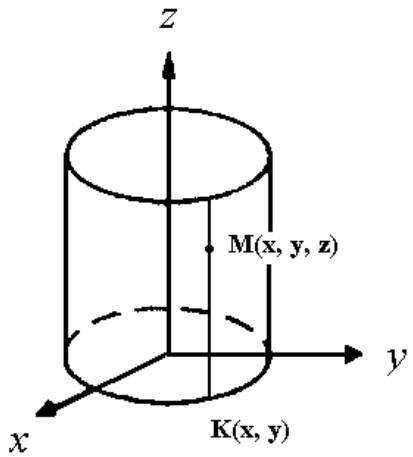


Рис. 2.6

Эта поверхность называется *эллиптическим цилиндром*.

Эллипсоидом называется поверхность, определяемая уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a, b, c – заданные положительные числа, называемые полуосями эллипсоида (рис. 2.7).

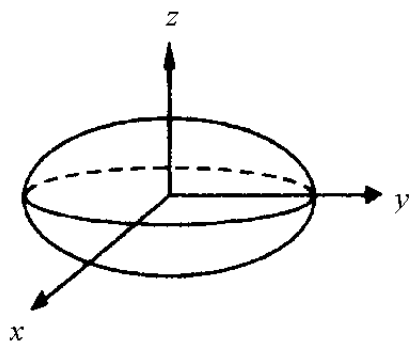


Рис. 2.7

При $a = b$ имеем *эллипсоид вращения,* поскольку в плоскости $z = h$ вместо эллипса получаем окружность. Эта поверхность получается при вращении вокруг оси Oz эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, расположенного в плоскости Oxy.

Конусом второго порядка называется поверхность, определяемая уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

где a, b, c – заданные положительные числа (рис. 2.8). В сечениях плоскостями $z = h$ имеем эллипсы.

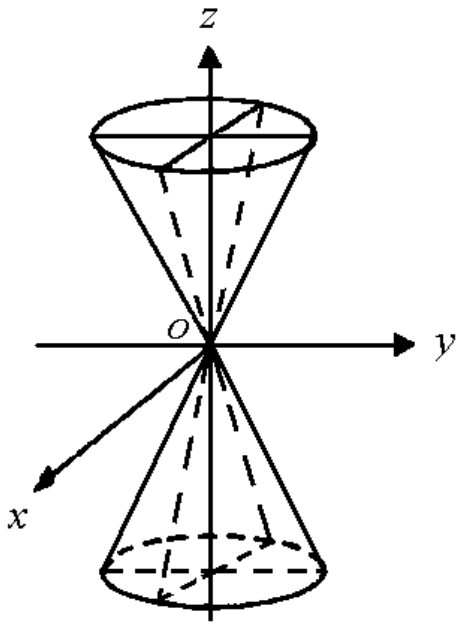


Рис. 2.8

При $a = b$ получаем *конус вращения* (вокруг оси Oz).

Однополостный гиперболоид – это поверхность, определяемая уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c – заданные положительные числа. Исследуем форму этой поверхности. В сечении ее плоскостью $z = h$ получается эллипс с полуосями $a(1 + +h^2/c^2)^{1/2}$ и $b(1 + h^2/c^2)^{1/2}$. С увеличением h эти полуоси увеличиваются.

В сечениях поверхности гиперболоида плоскостью Oyz (с уравнением $x = 0$) и плоскостью Oxz ($y = 0$) получаются гиперболы:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \ ,$$

соответственно. Поверхность имеет вид, указанный на рис. . При $a = b$ получаем *однополостный гиперболоид вращения* (Oz – ось вращения).

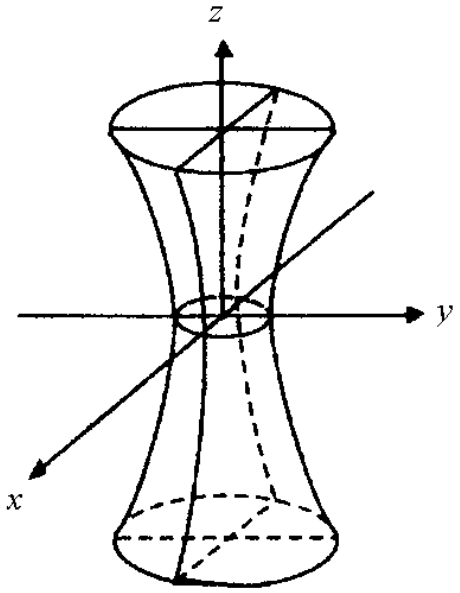


Рис. 2.9

Двуполостный гиперболоид – это поверхность, определяемая уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где a, b, c – заданные положительные числа. Рассекая поверхность двуполостного гиперболоида плоскостью $z = h$ ($|h| \geq c$), в сечении получим эллипс с полуосями: $a\sqrt{-1 + h^2/c^2}$ и $b\sqrt{-1 + h^2/c^2}$ (рис. 2.10).

При $|h| < c$ плоскость и поверхность не пересекаются.

В сечениях поверхности плоскостью Oyz ($x = 0$) и плоскостью Oxz ($y = 0$) будем иметь гиперболы: $z^2/c^2 - y^2/b^2 = 1$ и $z^2/c^2 - x^2/a^2 = 1$, соответственно. При $a = b$ получим *двуполостный гиперболоид вращения* (Oz – ось вращения).

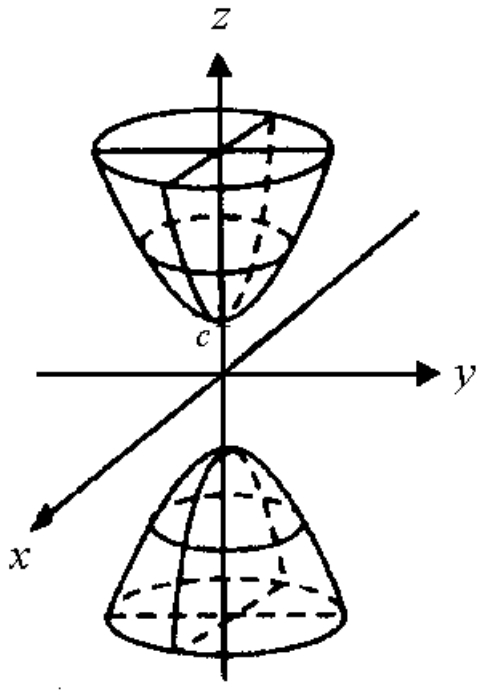


Рис. 2.10

Эллиптический параболоид – это поверхность, определяемая уравнением:

$$x^2/p + y^2/q = 2z,$$

где p, q – заданные положительные числа.

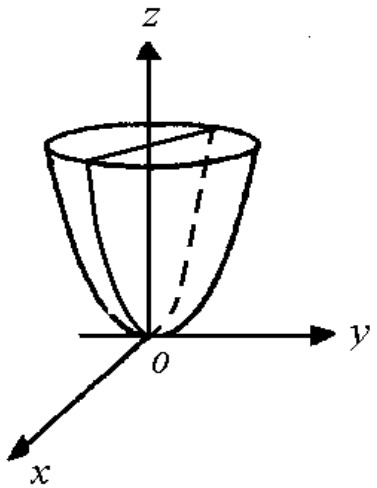


Рис. 2. 11

Рассекая поверхность плоскостью $z = h$ $(h \geq 0)$, в сечении получим эллипс с полуосями $\sqrt{2hp}$ и $\sqrt{2hq}$ см. (рис.). Поверхность параболоида пересекается с плоскостью Oxz $(y = 0)$ по параболе $x^2 = 2pz,$ а с плоскостью Oyz $(x = 0)$ – по параболе $y^2 = 2qz$. При $p = q$ получим *параболоид вращения* (Oz – ось вращения).

Гиперболический параболоид – это поверхность, определяемая уравнением:

$$x^2/p - y^2/q = 2z,$$

где $p, q -$ заданные положительные числа. Поверхность пересекается с плоскостью Oxz $(y = 0)$ по параболе $x^2 = 2pz,$ ветви которой направлены в положительную сторону оси Oz (рис. 2.12).

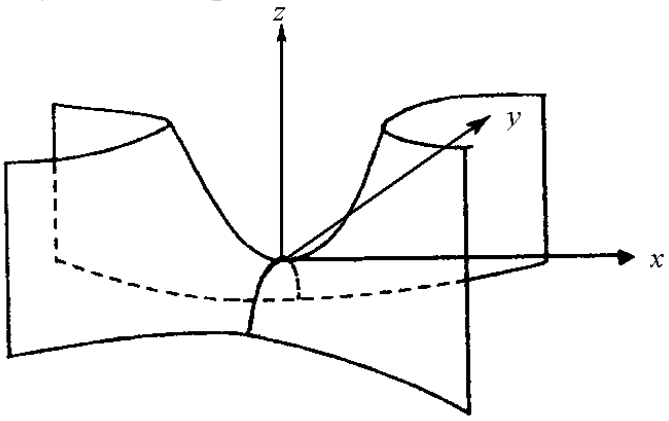


Рис. 2.12

Винтовая линия – пространственная кривая, расположенная на поверхности круглого цилиндра, пересекающая все образующие под одинаковым углом (рис. 2.13).

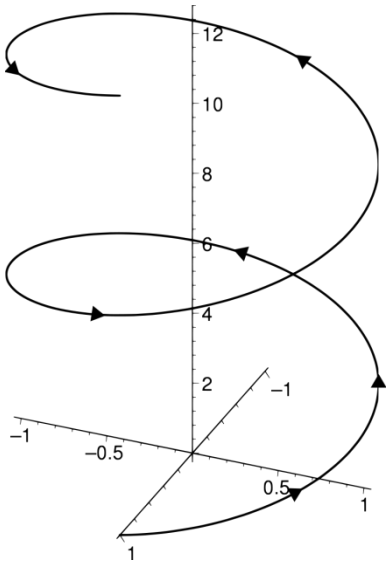


Рис. 2.13

Параметрическое уравнение винтовой линии имеет вид:

$$x = a \cos t,\ y = a \sin t,\ z = ht,$$

где t – длина дуги кривой, а – радиус цилиндра. Длина отрезка винтовой линии между двумя последовательными точками ее встречи с какой-либо образующей называется витком, а длина соответствующего отрезка образующей – шагом винтовой линии.

3. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ИХ ГРАФИКИ, ПОВЕРХНОСТИ, ОБРАЗОВАННЫЕ ВРАЩЕНИЕМ ГРАФИКА ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Понятие функции, область определения, множество значений

Функцией называется правило, ставящее в соответствие каждому значению *x* из множества M, называемого множеством определения функции, число *y* из множества N, называемого множеством значений функции. Введенная функция обозначается как *y=f(x)*, где *x* называется аргументом функции. Область определения функции обозначается через *D(f)*, а множество ее значений – через *E(f)*.

Задача. Найти область определения функции: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{2x-1}$.

Решение. Заданная функция определена при $2x - 1 \neq 0,\ x \neq 0{,}5$ b и $1 + x > 0, x > -1$. Таким образом, областью определения является пересечение интервалов:
$D(f) = (-1{,}0{,}5) \cup (0{,}5, +\infty)$.

Задача. Найти область определения *D(f)* и множество значений *E(f)* функции: $f(x) = \ln(1 - 2cosx)$.

Решение. Область определения формируется из неравенства:
$1 - 2cosx > 0, -1 \leq cosx < 1/2,$ которое приводит к объединению интервалов:
$D(f) = \cup_k \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right)$. Множество значений для натурального логарифма при изменении его аргумента $1 - 2cosx \in (0{,}3]$, определяется как:
$E(f) = (-\infty, ln3]$.

Задача. Найти область определения и множество значений функции:

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2} \cdot tg(x - 2).$$

Решение. Область определения *D(f)* формируется из пересечения областей определения сомножителей. Так, для радикала $\sqrt{16 - x^2}$ имеем: $|x| \leq 4$, что соответствует отрезку:$[-4{,}4]$. Функция $tg(x - 2)$ имеет область определения: $x - 2 \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$. Пересекая эти множества, имеем: $D(f) = \{x \neq 2 + \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = -2, -1{,}0\}$.

Множество значений *E(f)* получим объединением множеств функций-сомножителей, т.е. $E(f) = (-\infty, +\infty)$.

Задача. Построить график функции $y = \sqrt{16 - (x - 2)^2}$.

Решение. Известно, что графиком данной функции является верхняя дуга окружности радиуса 4, с центром в точке с координатами $O_1(2,0)$. Это легко проверить. Действительно,

$$y^2 = \left(\sqrt{16-(x-2)^2}\right)^2 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 16.$$

Задачи для самостоятельного изучения

1. Найти области определения функций:

1) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{x}$

2) $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

3) $f(x) = \dfrac{1}{xe^x}$

4) $f(x) = \frac{x-2}{cos2x}$

5) $f(x) = \frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$

6) $f(x) = \ln(3x^2 + 2x - 1)$

7) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$

8) $f(x) = \sqrt{sin2x}$

9) $f(x) = \ln(cos2x)$

10) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

2. Найти множество значений функций:

1) $f(x) = |x| + 1$

2) $f(x) = \frac{5}{x}$

3) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

4) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$

5) $f(x) = 1 - 3cosx$

6) $f(x) = 4^{-x^2}$

7) $f(x) = \sqrt{1-|x|}$

8) $f(x) = \arccos(2sinx)$

9) $f(x) = arccos\frac{1-2x}{4}$

10) $f(x) = \sqrt{sin\sqrt{x}}$

4. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ГРАФИКИ

На практике при описании физических процессов используют закономерности, связывающие несколько параметров. Данные закономерности могут носить функциональный характер. Например, объем конуса V как функцию от высоты x и образующей y можно определить как функцию двух переменных в виде: $V=(\pi/3)x(y^2-x^2)$. Поэтому возникает необходимость изучения функций нескольких переменных.

Пусть E – некоторое множество пар действительных чисел, и пусть каждой паре (x, y) из E поставлено в соответствие число z. Тогда говорят, что на множестве значений E задана функция $z = f(x, y)$, и множество значений $f(x, y)$ образуют область значений функции, назовем ее F.

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется геометрическое место точек в пространстве $Oxyz$, координаты которых удовлетворяют уравнению: $z = f(x, y)$.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется геометрическое место точек плоскости Oxy, для которых данная функция имеет одно и то же значение (изокривая) $f(x, y) = c$.

Примеры

1. Найти область определения функции: $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

Решение. Из свойства функции квадратного корня имеем: $y \geq 0$, $x - \sqrt{y} \geq 0$. $y \geq 0$ $x \geq \sqrt{y}$ $\Rightarrow y \geq 0$, $x \geq 0$, $x^2 \geq y$. Получили область $E=\{(x,y) \mid y \geq 0,\ x \geq 0,\ x^2 \geq y\}$.

2. Для функции $z = f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ построить линии уровня при $z = 1, 2, 3, 4$, и сделать чертеж.

Решение. Подставим в уравнение вместо $z = 1, 2, 3, 4$:

$z = 1$ $x^2 + y^2 = 1$; $z = 2$ $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$;

$z = 3$ $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{3}$; $z = 4$ $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$.

Легко видеть, что линиями уровня будут окружности радиуса $\dfrac{1}{z}$, причем $z \neq 0$, а с ростом z радиусы данных окружностей стремятся к нулю (рис. 4.1).

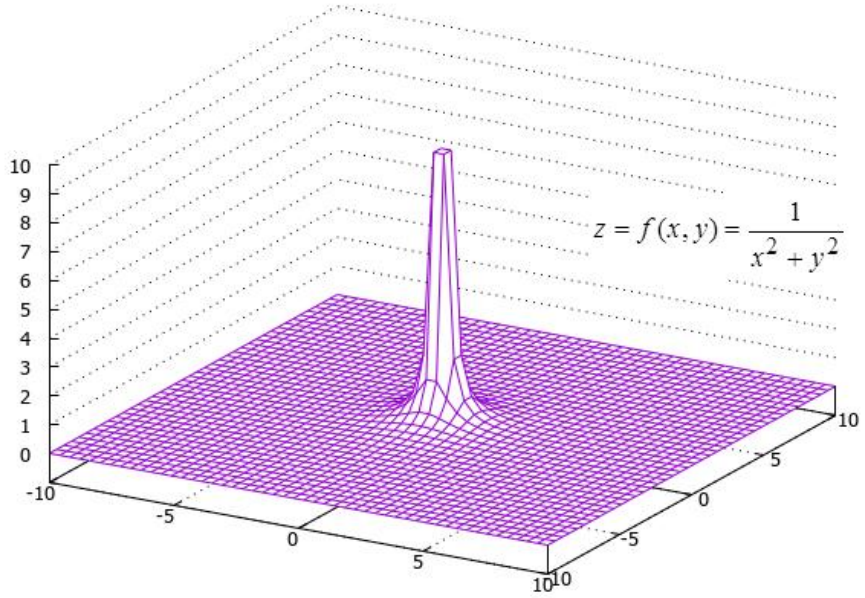


Рис. 4.1

3. Сделать чертеж функций: а) $z = e^{x-2y}$.

Решение. Введем замену переменного $t = x - 2y$. Полученные уравнения определяют семейство параллельных прямых, с угловым коэффициентом, равным 0,5, т.е. наклоненных под углом 60° к оси *OX*. Тогда относительно новой переменной *t* получим $z = e^t$ – известная показательная функция (рис. 4.2).

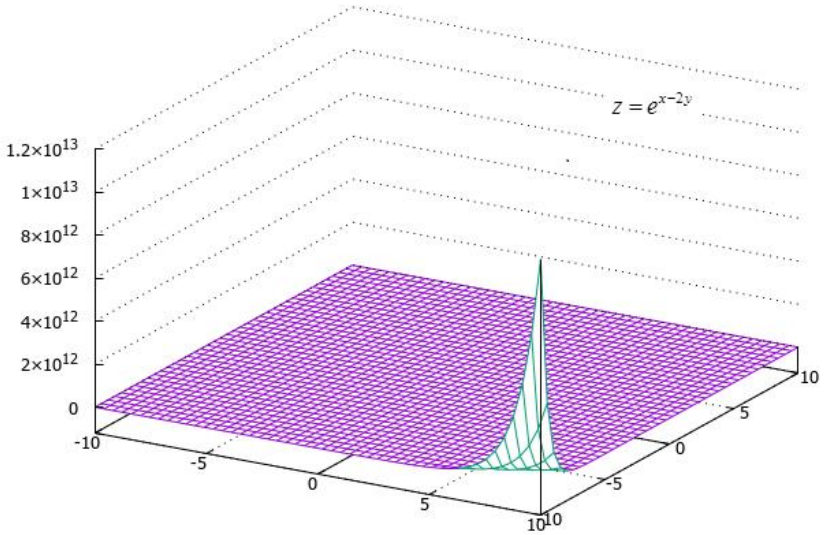


Рис. 4.2

б) $z = \arcsin(x - y)$.

Решение. Аналогично предыдущей задаче, вводя переменную $t = x - y$, которая представляет семейство прямых, расположенных в полосе $t \in [-1; 1]$, наклоненных под углом 45° к оси *OX*. Тогда относительно новой

переменной t легко построить график: $z = arcsint$. В трехмерном пространстве поверхность представляется в виде (рис. 4.3).

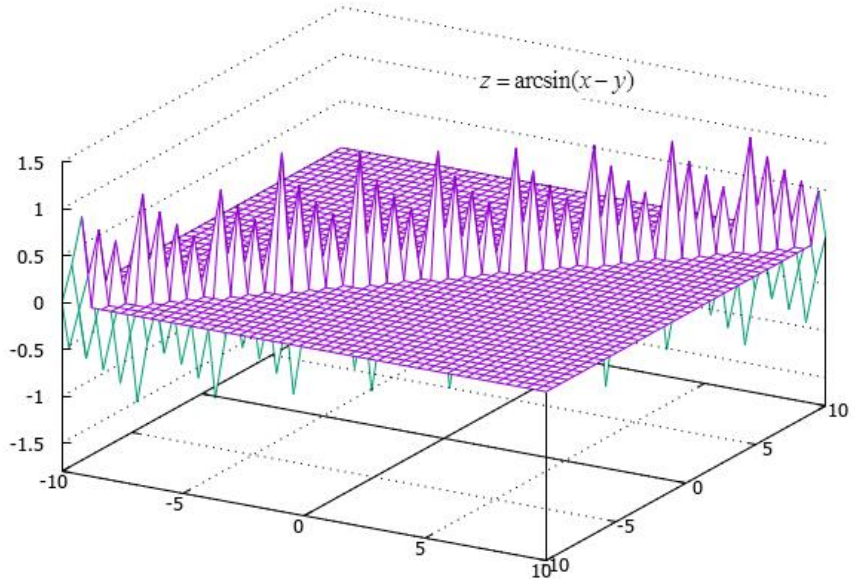


Рис. 4.3

в) $z = arctg(x + y)$.

Решение. При построении поверхности поступаем аналогично предыдущему примеру. На рис. 4.4 представлен искомый график.

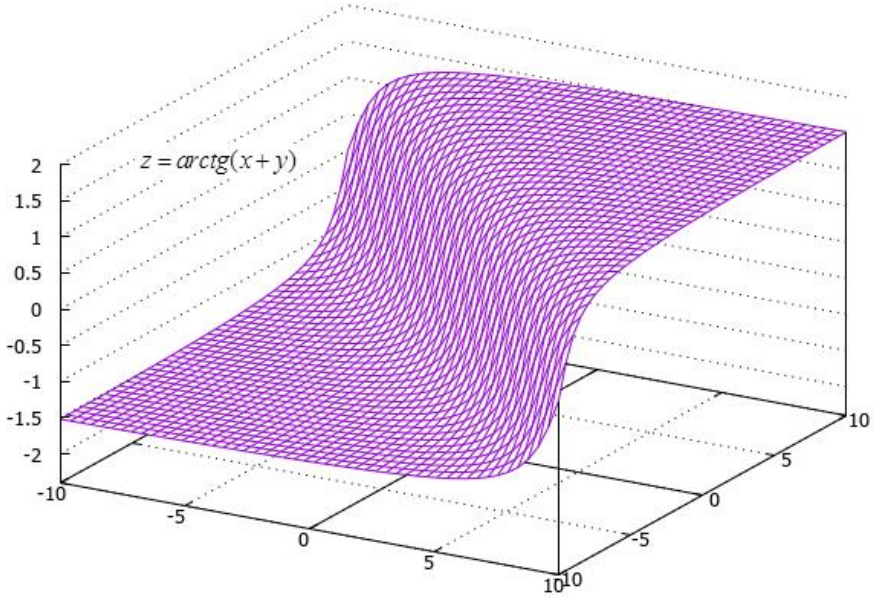
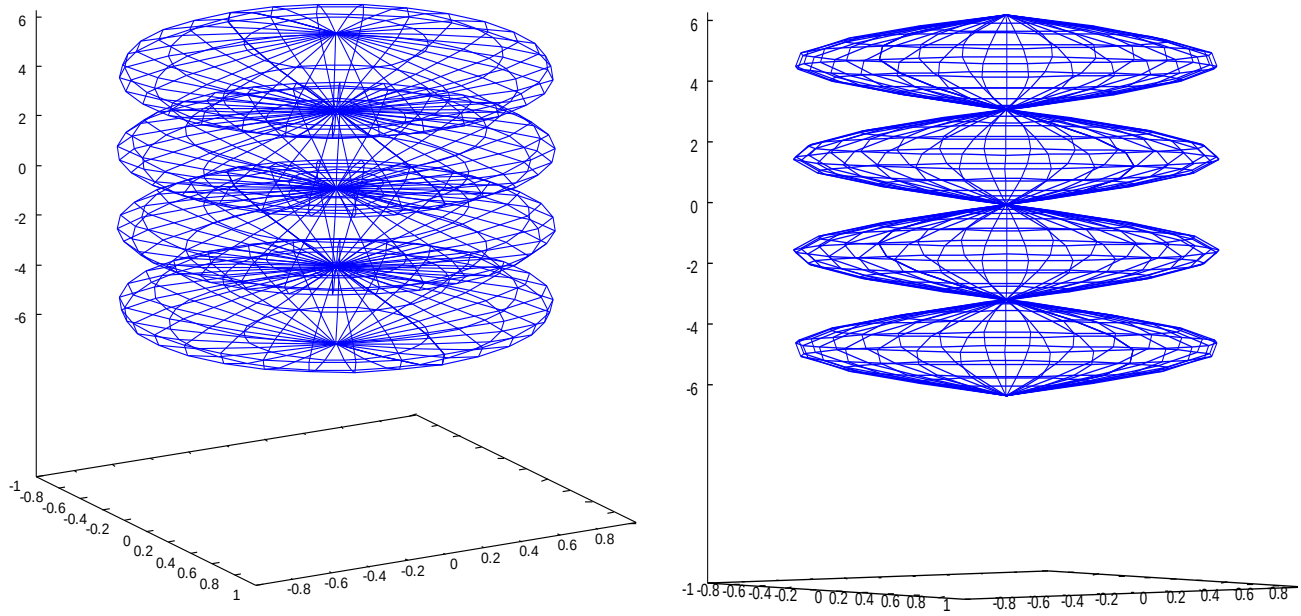


Рис. 4.4.

г)$z = \arcsin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Решение. Введем цилиндрические координаты, обозначив их через $\rho^2 = x^2 + y^2$. Учитывая, что $\rho -$ полярный радиус, вращаясь в плоскости XOY, образует окружность, следовательно, искомая поверхность $z = \arcsin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

является поверхностью вращения кривой $z = \arcsin(\rho)$ вдоль оси OZ, графическое представление ее можно получить в программе MAXIMA, на рис. 4.5а, б представлены два ракурса этой поверхности.



а) б)

Рис. 4.5

Заметим также, что на практике, как правило, при построении графиков поверхностей пользуются пакетами прикладных программ, рисующих графики аналитических функций одной и двух переменных так, как сделали мы в этом пособии. Графики поверхностей данного раздела выполнены в онлайн-режиме, в одном из графических редакторов.

Задачи

1) Найти область определения функций:

а) $u = y + \sqrt{x}$; *б)* $u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$;

в) $u = \ln\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; *г)* $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

д) $u = 1/\ln\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

2) Найти линии уровня функций, задавая z значения от – 5 до 5 через 1.

а) $z = x^2 y + x$; *б)* $z = y(x^2 + 1)$;

в) $z = \dfrac{xy - 1}{x^2}$; *г)* $z = \sqrt{x/y}$;

д) $z = e^{xy}$.

3) Сделайте чертеж функций:

а) $z = \arcsin(x - y)$ б) $z = \ln(x^2 + y^2)$

Задачи для самостоятельного изучения

1. Найти область определения функций:

1) $z = \cos(ax - by)$, 2) $z = \dfrac{y}{x}$, 3) $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$,

4) $z = \dfrac{x}{3y - 2x}$, 5) $z = \dfrac{xy}{x - y}$, 6) $z = \sqrt{x^2 y + 3xy^2}$,

2. Найти линии уровня функций и построить их графики:

1) $z = \sin xy$, 2) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$, 3) $z = arctg(x + y)$

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента Δx, при стремлении последнего к нулю, если этот предел существует и конечен. Производная записывается как:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Правила дифференцирования и основные формулы дифференцирования

1. $c' = 0,$
2. $(u + v - w)' = u' + v' - w',$
3. $(cu)' = cu',$
4. $(uv)' = u'v + v'u,$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$
6. $y'_x = y'_z \, z'_x,$
7. $x'_y = \frac{1}{y'_x},$
8. $(x^n)' = nx^{n-1},$
9. $(\sin x)' = \cos x,$
10. $(\cos x)' = -\sin x,$
11. $(\mathrm{tg}\, x)' = \sec^2 x,$
12. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\mathrm{cosec}^2 x,$
13. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$
14. $(\ln x)' = \frac{1}{x},$
15. $(a^x)' = a^x \ln a,$
16. $(e^x) = e^x,$
17. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$
18. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}},$
19. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2},$
20. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2},$
21. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x,$
22. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x,$
23. $(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x},$
24. $(\mathrm{cth}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$

Напомним, что $secx = \frac{1}{cosx}$, $cosecx = \frac{1}{sinx}$.

Задача. Найти производную функции: $y = \left(\frac{a}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{\sqrt[5]{x^2}}{b}\right).$

Решение:

$$y' = \left(\frac{a}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{\sqrt[5]{x^2}}{b} \right)' = \left(ax^{\frac{-3}{5}} + \frac{1}{b} x^{\frac{2}{3}} \right)' = -\frac{3}{5} a x^{-\frac{3}{5}-1} + \frac{2}{3b} x^{\frac{2}{3}-1} =$$

$$= -\frac{3}{5} \frac{a}{\sqrt[5]{x^8}} + \frac{2}{3} \frac{1}{b\sqrt[3]{x}}.$$

Задача. Продифференцировать функцию: $y = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

Решение:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{1+\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)'(1+\sin x) - (1+\sin x)' \cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{1+\sin x}.$$

Задачи

Найти производные функций:

1) $y = 3x^2 - 2x + 1$, 2) $y = \dfrac{x^3}{3} - 5x^2 + 4x - 3$, 3) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$,

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$; 5) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, 6) $y = (1+2x)^{30}$,

7) $y = \dfrac{x}{1-\cos x}$, 8) $y = \dfrac{1}{4} tg^4 x$, 9) $y = \sqrt{tg \dfrac{x}{2}}$,

10) $y = \arcsin \dfrac{x}{2}$, 11) $y = arctg\sqrt{6x-1}$.

Частной производной функции $z = f(x,y)$ по x называется предел (если такой существует) отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции к частному приращению Δx этой переменной при стремлении последнего к нулю, и обозначается: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$.

Имеем: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.

Аналогично определяется частная производная $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ от функции $z = f(x, y)$ по y $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$.

Заметим, что если от функции $z = f(x, y)$ берется частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$, то y считается постоянным; если же находится $\frac{\partial z}{\partial y}$, то x считается постоянным, и $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d}{dx}[f(x, y)]_{y=const}$; $\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{d}{dy}[f(x, y)]_{x=const}$.

Примеры

Найти частные производные функции:

$a)$ $z = \ln(x + \ln y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \ln y} \cdot (x + \ln y)'_x = \frac{1}{x + \ln y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}.$$

$b)$ $z = \arcsin \frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2} \cdot x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{(-x)}{y^2} = \frac{y(-x)}{\sqrt{y^2 - x^2} \cdot y^2} = -\frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2} \cdot y};$$

Получим, $dz = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \left(\frac{y}{x} dx - \frac{x}{y} dy \right)$.

Задачи

4) Найти частные производные функций:

а) $z = \ln(x^2 y + 3xy^2)$, б) $z = xtg(2x - 5y)$, в) $z = \sin^2(8x - 2y)$,

Задачи для самостоятельного изучения

1. Найти производные функций:

1) $y = x^2 \log_3 x$, 2) $y = \sqrt{\ln x}$, 3) $y = \ln(1 - 2x)$,

4) $y = (1 - sin^3 x)^4$, 5) $y = ctg\sqrt[3]{1 + x^2}$, 6) $y = sin^2(cos3x)$,

10) $y = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, 11) $y = \ln(1 + sinx)$, 12) $y = \ln(1 + cosx)$,

2. Найти частные производные функций:

1) $z = e^{2x - \ln y}$, 2) $z = \sqrt{1 - 4x^2 + 10y^3}$, 3) $z = 3^{\sin x - \operatorname{tg} y}$,

4) $z = xye^{10y - x}$, 5) $z = \sqrt{4x^2 y - 5xy^2}$ 6) $z = x^2 \sin 2y - y^2 \cos x$.

6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР, ДЛИН ДУГ КРИВЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ, ОБЪЕМОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Пусть, например, требуется найти площадь $S_{A_2A_1B_1B_2}$ заштрихованной фигуры, ограниченной сверху кривой A_1B_1, с уравнением: $y = f_1(x)$, снизу – кривой A_2B_2, с уравнением: $y = f_2(x)$, причем в обоих случаях $a \le x \le b$, а также отрезками A_1A_2 и B_1B_2, параллельными оси Oy (рис. 6.1), при этом $f_1(x)$ и $f_2(x)$

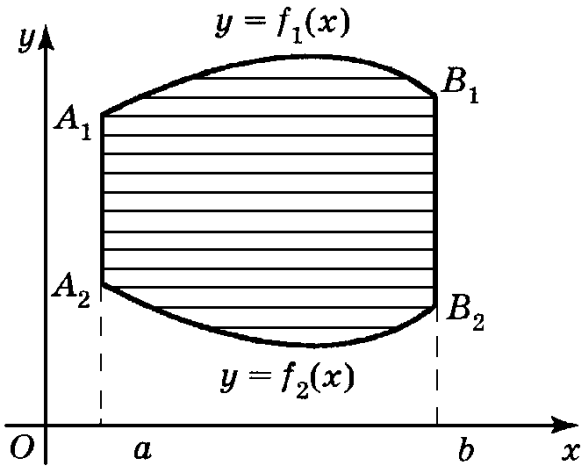


Рис. 6.1

непрерывны в интервале $[a,b]$. Ясно, что искомая площадь $S_{A_2A_1B_1B_2} = S_{aA_1B_1b} - S_{aA_2B_2b}$. Известно, что площади в правой части выражаются через соответствующие определенные интегралы, поэтому $S_{A_2A_1B_1B_2} = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx.$ Отсюда получаем:

$$S_{A_2A_1B_1B_2} = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x) \right] dx.$$

Эта формула справедлива и в том случае, когда A_2 совпадает с A_1, а B_2 – с B_1.

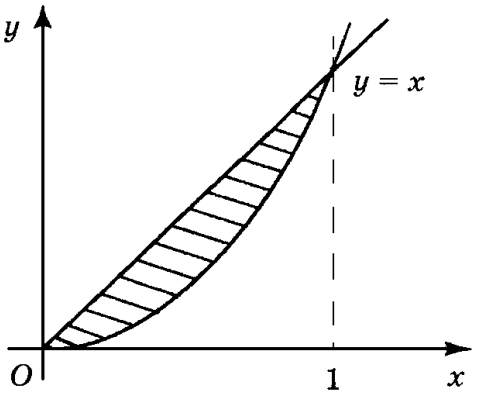


Рис. 6.2

В качестве примера найдем площадь конечной фигуры, заключенной между линиями $y = x$ и $y = x^2$, пересекающимися в точке $O(0,0)$ и в точке с координатами $x = 1, y = 1$, поскольку координаты каждой из указанных точек удовлетворяют уравнениям обеих кривых (рис. 6.2). Эта фигура лежит между прямыми $x = a = 0$ и $x = b = 1$. Ее площадь определяется по формуле, в которой $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2$. Итак,

$$S = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(x^2/2 - x^3/3\right)_0^1 = 1/6.$$

Пусть теперь на плоскости Oxy кривая AB (рис. 6.3) задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta.$$

При этом

$$a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta).$$

Здесь, как и ранее, $a < b$. Функция $\psi(t)$ и производная $\varphi'(t)$ непрерывны в интервале $[\alpha, \beta]$. Тогда справедлива формула:

$$S_{aABb} = \int_a^b \psi\left[t(x)\right]dx.$$

Или, с учетом замены переменного:

$$S_{aABb} = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Эта формула позволяет найти площадь криволинейной трапеции, когда кривая AB задана параметрически (рис. 6.3).

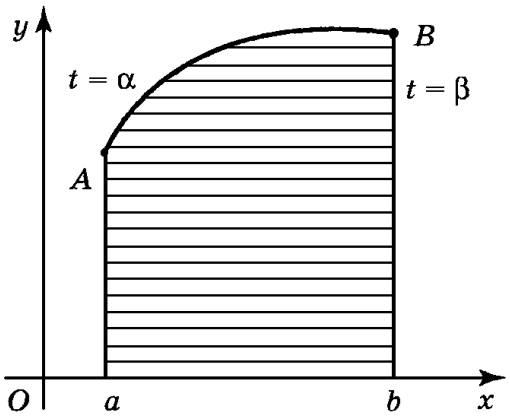


Рис. 6.3

Пример. Вычислим площадь S эллипса, заданного параметрическими уравнениями:

$$x = a_1 \cos t,\ \ y = b_1 \sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Точка (x, y), при изменении t от 0 до 2π пробегает весь эллипс, начиная от точки B (рис. 6.4), против хода часовой стрелки. При $t = \pi/2$ точка эллипса совпадает с точкой A.

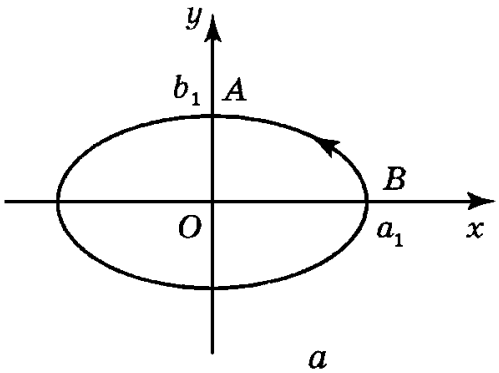


Рис. 6.4

Найдем $S/4$ – площадь четверти эллипса, лежащего в первой четверти плоскости Oxy. Эта фигура сверху ограничена кривой AB. Точке A отвечает $t=\pi/2$, следовательно, $\alpha=\pi/2$. Точке B отвечает $t=0$, следовательно, $\beta=0$. Здесь $\varphi(t)=a_1\cos t$, $\psi(t)=b_1\sin t$, тогда имеем:

$$\frac{S}{4}=\int_{\pi/2}^{0} b_1\sin t\cdot a_1\left(-\sin t\right)dt=a_1b_1\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t dt=a_1b_1\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

$$=(a_1b_1/2)[t-(1/2)\sin 2t]_0^{\pi/2}=\pi a_1b_1/4;\quad S=\pi a_1b_1.$$

Следующая формула позволяет вычислить **длину дуги кривой** AB, заданной уравнением: $y=f\left(x\right)$, $a\le x\le b$, a,b – абсциссы точек A, B.

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}dx.$$

Пример. Найдем длину l дуги четверти окружности с центром в точке $(0,0)$ и радиусом 1, расположенной в первой четверти плоскости Oxy (рис. 6.5). Уравнение такой окружности $x^2+y^2=1$. Отсюда $y=+\sqrt{1-x^2}$ (берем знак «+», так как рассматриваем первую четверть). Здесь $a=0$, $b=1$ и

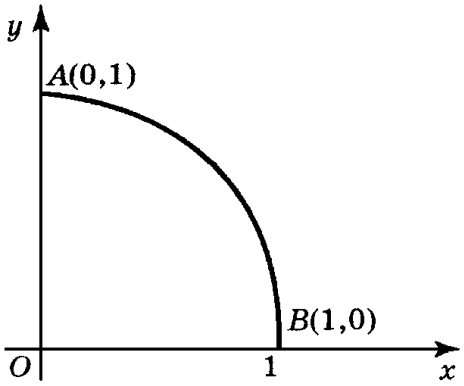


Рис. 6.5

$f\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}$. Найдём $f'\left(x\right)$, и, подставив в формулу, получим:

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)}dx=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

Объем тела вращения

Пусть в плоскости Oxy кривая AB задана уравнением: $y = f(x),\ a \le x \le b,\ a, b$ – абсциссы точек A и B соответственно. Будем считать, что $f(x)$ непрерывна в интервале $[a, b]$, и всюду $f(x) > 0$. При вращении этой кривой вокруг оси абсцисс получим поверхность, ограничивающую тело вращения (рис. 6 6.6). Требуется найти его объём.

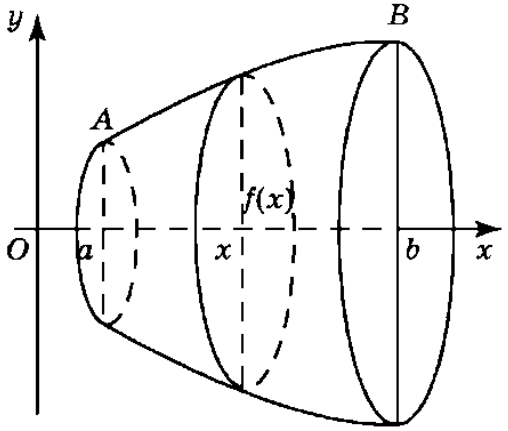


Рис. 6.6

Для нахождения искомого объема можем воспользоваться формулой :

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx .$$

Пример. Вычислим объем тела вращения, полученного вращением вокруг оси Ox кривой на плоскости Oxy с уравнением: $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ (рис. 6.7).

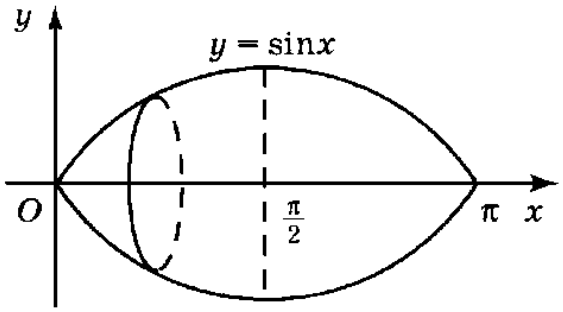


Рис. 6.7

Итак, $a = 0,\ \ b = \pi,\ \ f(x) = \sin x.$ При вычислении нужно учесть, что $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2.$ Имеем:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = (\pi / 2) \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = (\pi / 2) \left(\int_0^\pi dx - \int_0^\pi \cos 2x dx \right) =$$

$$= (\pi / 2) \left[\pi - (1/2) \int_0^\pi \cos 2x d(2x) \right] = \pi^2 / 2 - (\pi / 4)(\sin 2\pi - \sin 0) = \pi^2 / 2.$$

Задачи

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 4x,\ \ y = 0.$ 2) $y = 9 - x^2,\ \ y = 0.$

3) $y = -x^2 + 3x,\ \ y = 0.$ 4) $y = x^2 - 4x - 5,\ \ y = 0.$

5) $y = 2^x,\ \ y = 2, x = 0.$ 6) $y = x^2,\ \ y = 2x - x^2.$

2. Вычислить длину дуги кривой:

1) $y = \frac{x}{6}\sqrt{x+12}, -11 \le x \le -1.$ 2) $y = \sqrt{x(5-x)}, 1 \le x \le 4.$

3) $y = \frac{x^2}{4}, 0 \le x \le 2.$ 4) $y = 4 - \frac{x^2}{2}, -2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2}.$

5) $y = 2\sqrt{x-3}, 4 \le x \le 7.$ 6) $y = lncosx, 0 \le x \le \frac{\pi}{3}.$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями:

1)$y = \frac{x}{2}, x = 0, x = 6, y = 0.$ 2) $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0.$

3) $y^2 = 4x, x = 3$ 4) $y = sinx, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, y = 0.$

Задачи для самостоятельного изучения

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 + 3x,\ \ y = 0.$ 2) $y = 4 - x^2,\ \ y = 0.$

3) $y = -x^2 + 4x,\ \ y = 0.$ 4) $y = x^2 + 2x - 3,\ \ y = 0.$

5) $y = 2x - x^2,\ \ y + x = 0.$ 6) $y = x^2 + 2x,\ \ y = x + 2.$

2. Вычислить длину дуги кривой:

1) $y = \sqrt{8x}, \quad 2 \le x \le 8.$ 2) $y = \sqrt{2x - x^2} - 1, 0.25 \le x \le 1.$

3) $y = \frac{(3-x)\sqrt{x}}{3}, 3 \le x \le 4.$ 4) $y = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}, 0 \le x \le 9.$

5) $y = 4\sqrt{x-2}, 3 \le x \le 6.$ 5) $y = ln(x^2 - 1), 2 \le x \le 5.$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями:

1)$y = \frac{1}{x}, x = 2, y = x, y = 0.$ 2) $xy = 3, x = -6, x = -2, y = 0.$

3) $y^2 = 2 - x, x = -3, x = 1$ 4) $y = e^x, \quad x = 0, x = 3, y = 0.$

7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть в области D на плоскости Oxy задана функция $f(x,y)$, которая принимает положительные значения всюду в области D (рис. 7.1).

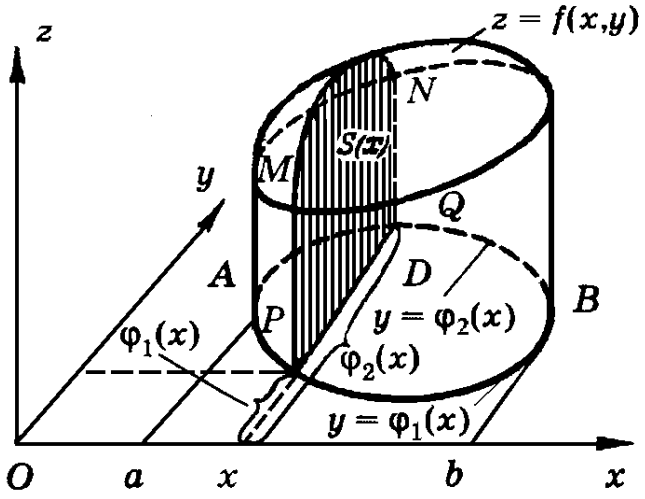


Рис. 7.1

Тогда двойной интеграл от этой функции по области D, как мы знаем, равен объему цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D, а сверху – поверхностью с уравнением $z = f(x, y)$:

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma = \iint_D f(x, y)\,dxdy = V.$$

Пусть область D лежит между прямыми $x = a$ и $x = b$, параллельными оси Oy и имеющими общие точки с границей области D. Кривые APB, AQB – части границы области D, заданные, соответственно, уравнениями: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $a \le x \le b$. Здесь a, b – абсциссы точек A, B границы области D. Будем считать, что функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ однозначны.

Тогда для вычисления объема заданного пространственного тела получим формулу вида:

$$V = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right] dx.$$

Эта формула справедлива и тогда, когда граница области D имеет участки, лежащие на прямых $x = a$, $x = b$ (или на других прямых, параллельных оси Oy), т. е. когда область D имеет вид, указанный на рис. 7.2.

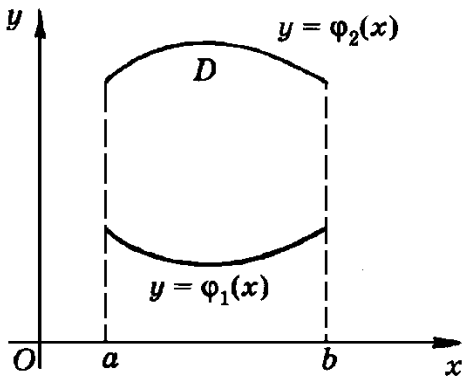


Рис. 7.2

Пример. Вычислить $\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dxdy,$ где D – конечная область, лежащая между параболой $y=x^2$ и прямой $y=x$ (рис. 7.3).

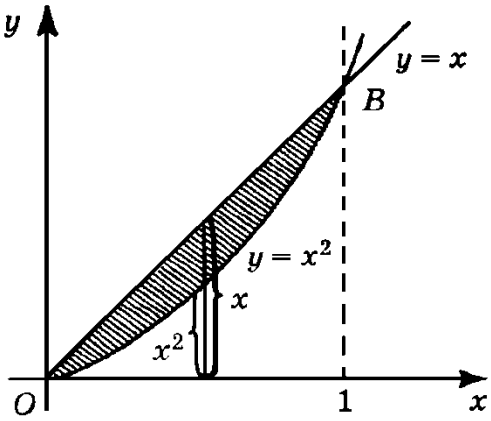


Рис. 7.3

Эти кривые пересекаются в точках $O(0,0)$ и $B(1,1)$. Область D – заштрихованная область. Она расположена между прямыми $x=0$ и $x=1,$ следовательно, в нашем случае $a=0,\ b=1.$ С одной стороны область ограничена кривой $y=x^2,$ с другой – прямой $y=x.$ Тогда:

$$\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x}\left(x^2+y\right)dy.$$

Сначала вычислим внутренний интеграл по y при $x=\text{const}$. Он является обычным определенным интегралом, поэтому вычислим его по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x}=\int\limits_0^1 dx\left[x^3+\frac{x^2}{2}-\left(x^4+\frac{x^4}{2}\right)\right]=$$

$$=\int\limits_0^1(-3x^4/2+x^3+x^2/2)dx=\left(-3x^5/10+x^4/4+x^3/6\right)\Big|_0^1=7/60.$$

Переход к полярным координатам. Пусть x, y – декартовы координаты точки M области D, а θ и ρ – полярные координаты этой точки. Как видно из рис. 7.4,

$$x = \rho\cos\theta;\ \ y = \rho\sin\theta.$$

Пусть граница области D задана уравнениями в полярных координатах, а именно участок APB кривой L задан уравнением $\rho = \varphi_1(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$, а участок AQB кривой L – уравнением $\rho = \varphi_2(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$.

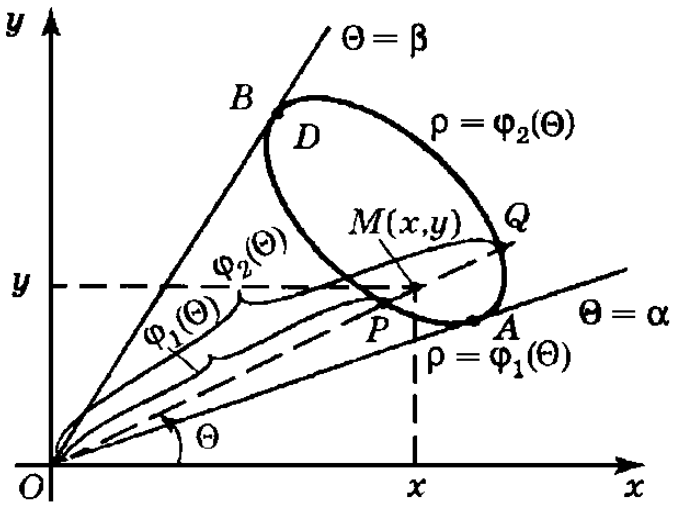


Рис. 7.4

Справедлива формула:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f\left[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right]\cdot \rho d\theta d\rho.$$

Это есть *формула перехода в двойном интеграле к полярным координатам,* здесь D' – область в декартовой системе $O'\theta\rho$. Теперь двойной интеграл по этой области D' вычисляем как:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\theta \int\limits_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f\left[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right]\cdot \rho d\rho.$$

Пример. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \qquad D: x^2 + y^2 \le y, x \ge 0.$$

Решение. Определим область интегрирования, для этого запишем уравнение границы области D в виде:

$$x^2 + y^2 \le y \ \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}.$$

С учетом $x \ge 0$ имеем полукруг радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $O_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Переходя к полярным координатам, имеем следующее описание области интегрирования D':

$$\rho^2 \le \rho sin\theta, \qquad \rho cos\theta \ge 0.$$

$$0 \le \rho \le sin\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{sin\theta} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1-\rho^2}\Big|_0^{sin\theta} =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(sin\theta)^2} d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta = -sin\theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = -sin\frac{\pi}{2} = -1.$$

Рассмотрим пространственное тело (рис. 7.5), ограниченное сверху поверхностью $z = \Phi_2(x,y)$, а снизу поверхностью $z = \Phi_1(x,y)$. Область D является проекцией на плоскость Oxy при проектировании параллельно оси Oz. Тогда объем этого тела вычислим по формуле:

$$V = \iint_D \left[\Phi_2(x,y) - \Phi_1(x,y)\right] d\sigma, \; d\sigma = dxdy.$$

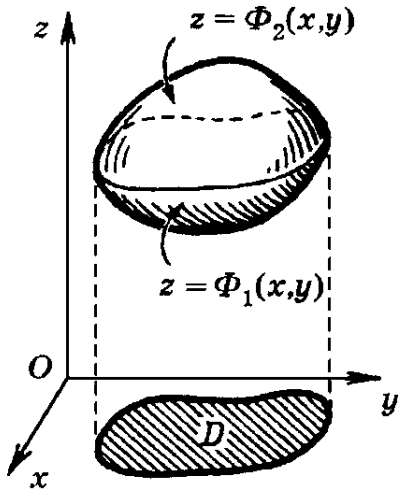


Рис. 7.5

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$z = x^2 + y^2, \; z = \sqrt{12 - x^2 - y^2}$.

Решение. Объемное тело снизу ограничено параболоидом, сверху – поверхностью сферы радиуса $\sqrt{12}$. Найдем пересечение этих поверхностей:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{12 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$z = \sqrt{12 - z}.$$

Для $z \ge 0$ получаем решение $z = 3$. Тогда область D задается уравнением: $x^2 + y^2 \le 3$. Переходя к полярным координатам, опишем область интегрирования в виде:

$$0 \le \rho \le \sqrt{3}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Поверхность, ограничивающая тело снизу, имеет уравнение: $z = \rho^2$, сверху – $z = \sqrt{12 - \rho^2}$. Тогда объем тела получим как интеграл вида:

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{12-\rho^2}-\rho^2\right)\rho d\rho=2\pi\cdot\left(\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-\rho^2}\,\rho d\rho-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3 d\rho\right)=2\pi\cdot\left(-\frac{\sqrt{(12-\rho^2)^3}}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}-\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}\right)=2\pi\cdot\left(-9+4\sqrt{12}-\frac{9}{4}\right).$$

Вычисление площади поверхности. Пусть в области D на плоскости Oxy задана функция: $z=f(x,y)$. Будем считать, что эта функция имеет непрерывные частные производные по x и y в области D. Для определенности предположим, что $f(x,y)>0$ в D. При этом в пространстве $Oxyz$ функции $z=f(x,y)$ отвечает поверхность, расположенная выше плоскости Oxy (рис. 7.6).

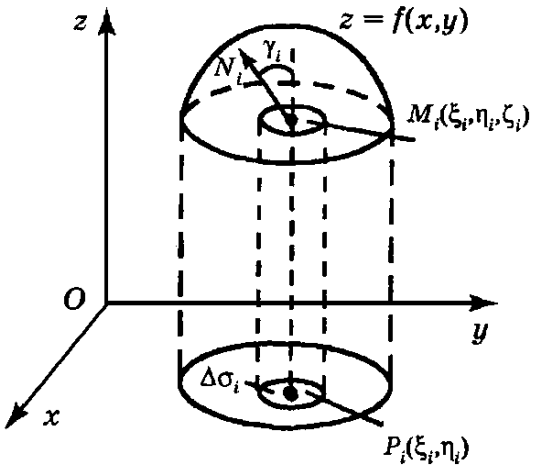


Рис. 7.6

Следующая формула позволяет вычислить площадь поверхности S, заданной уравнением $z=f(x,y)$.

$$S=\iint\limits_D\sqrt{f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)+1}\,d\sigma,\ d\sigma=dxdy.$$

Пример. Требуется вычислить площадь $S/2$ верхней половины сферы с уравнением $x^2+y^2+z^2=1$.

Для точек верхней половины сферы имеем: $z=f(x,y)$, $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Здесь область D – круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=1$. Найдем частные производные:

$$f_x'(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad f_y'(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Эти производные подставим в формулу, в правой части которой вместо S мы должны взять $S/2$. Тогда будем иметь:

$$S/2=\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy.$$

В двойном интеграле перейдем к полярным координатам и получим:

$$S/2=\iint\limits_D \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\theta d\rho.$$

$$S/2=\int\limits_0^{2\pi} d\theta\int\limits_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi} d\theta\int\limits_0^1 \frac{(-1/2)d(1-\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\theta\left[-\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^1=\int\limits_0^{2\pi} d\theta=2\pi.$$

Задачи

1. Вычислить двойной интеграл:
   1. $\iint_D (xy+y^2-4)\,dxdy,\quad D: 3x+5y\le 15,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$
   2. $\iint\ (5x-4xy+3)\,dxdy,\quad D: 2x+3y\le 12,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$
   3. $\iint_D (2x^2-3xy+1)\,dxdy,\quad D: 2x-y\ge 6,\ y\ge x-6,\ y\le 0.$
   4. $\iint_D (3y^2-x+2)\,dxdy,\quad D: y\ge x^3,\ x\ge y^3.$
   5. $\iint_D (3x-4y^2+5)\,dxdy,\quad D: y\le 2x,\ y\ge x^3.$
   6. $\iint_D (7x^2-3xy+2)\,dxdy,\quad D: x\ge y^2,\ x\le 4.$
2. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам:
   1. $\iint_D\ xydxdy,\ D: x^2+y^2\le x,\ y\ge 0.$
   2. $\iint_D\ ydxdy,\ D: x^2+y^2\le 2x,\ y\le 0.$
   3. $\iint_D\ (x+y)dxdy,\ D: x^2+y^2\le 2Ry,\ y\le x.$
   4. $\iint_D\ \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,\ D: x^2+y^2\le ax,\ y\le x,\ y\ge 0.$
   5. $\iint_D\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy,\ D: x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$
   6. $\iint_D\ dxdy,\ D: x^2+y^2\le 4(x+y),\ x\ge 0,\ y\ge 0.$
3. Вычислить объемы тел, ограниченных заданными поверхностями:
   1. $x^2+y^2=8,\ x=0, y=0, z=0,\ x+y+z=4.$
   2. $x=2y^2,\ x+2y+z=4,\ y=0,\ z=0.$
   3. $x^2+4y^2+z=1,\ z=0.$
   4. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$
   5. $z=4-x^2,\ 2x+y=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$
   6. $z^2=xy,\ x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=4,\ z=0.$
4. Вычислить площадь части поверхности:
   1. $3z=xy$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=9$.
   2. сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, расположенной в первом октанте.
   3. $z^2=4x$, расположенной между поверхностями $y^2=4x, x=1$.
   4. $z=xy$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=16$.

5. сферы $x^2+y^2+z^2=16$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4x$.
6. $x+2y+4z=8$, расположенной в первом октанте.

Задачи для самостоятельного изучения

1. Вычислить двойной интеграл:
   1. $\iint_D (x+3y)\,dxdy, \quad D: x+2y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$
   2. $\iint_D (3x-y)\,dxdy, \quad D: x-2y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$
   3. $\iint_D (2x+3y)\,dxdy, \quad D: x+y\le -2,\ x\le 0,\ y\le 0.$
   4. $\iint_D (y-2x)\,dxdy, \quad D: 3x+y\le 3,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$
   5. $\iint_D (y-3x)\,dxdy, \quad D: 2x+3y\le 6,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$
   6. $\iint_D (2y-x)\,dxdy, \quad D: 3y-2x\le 6,\ x\le 0,\ y\ge 0.$
2. Вычислить двойной интеграл, переходя к полярным координатам:
   1. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,\ D: x^2+y^2\le 1,\ y\ge x,\ y\ge -x.$
   2. $\iint_D dxdy,\ D: x^2+y^2\le 4y,\ y\ge 2.$
   3. $\iint_D dxdy,\ D: x^2+y^2\le 4,\ x\ge 1.$
   4. $\iint_D dxdy,\ D: x^2+y^2\le R^2,\ y\ge x,\ y\le x\sqrt{3}.$
   5. $\iint_D xydxdy,\ D: x^2+y^2\le a^2,\ y\ge x,\ x\ge 0.$
   6. $\iint_D (3-x-y)dxdy,\ D: x^2+y^2\le 4.$
3. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:
   1. $z=5x,\ x^2+y^2=9,\ z=0.$
   2. $x+y+z=6,\ 3x+2y=12,\ 3x+y=6,\ y=0, z=0.$
   3. $z=x+y+1,\ y^2=x,\ x=1, y=0,\ z=0.$
   4. $z=0,\ z=xy,\ x^2+y^2=4.$
   5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=0,\ z=\frac{x}{2},\ z=x.$
   6. $x^2+y^2=a^2,\ x^2+z^2=a^2.$
4. Вычислить площадь части поверхности:
   1. Конуса $z^2=x^2+y^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2ax$.
   2. $x+y+z=4$, вырезанной плоскостями $x=0, y=0, x=2, y=2$.
   3. Конуса $z^2=x^2+y^2$, расположенной между плоскостями $x=0, y=0, z=0,\ z=1$.
   4. Конуса $z^2=x^2+y^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.
   5. $2x-y+z=4$, расположенной между плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0$.
   6. $z^2=4y$, расположенной между поверхностями $x^2=4y,\ y=1$.

8. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ЗАДАНИЯ

ЗАДАНИЕ. Предложить архитектурное сооружение, внешние поверхности которого должны быть описаны математическими формулами. Кроме того, рекомендуется использование поверхностей с кривизной. Рассчитать метрические характеристики объекта.

Итак, предлагается здание (рис. 8.1):

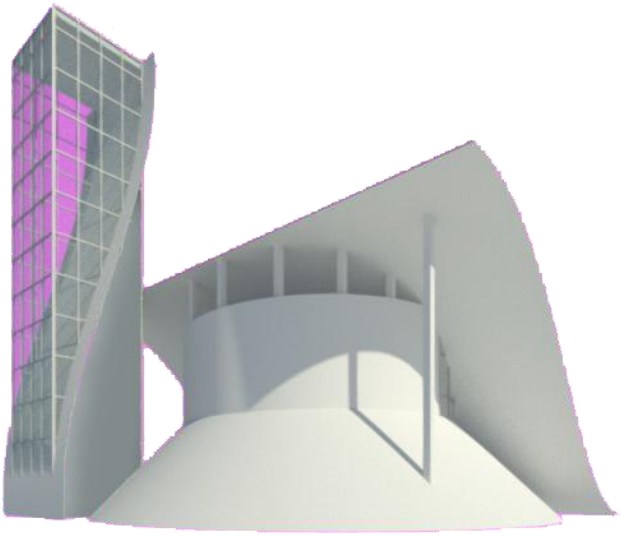


Рис. 8.1

Опишем его внешние поверхности:

ПРИЗМА

Задана следующими точками:

A (0;0;0), B (6;0;0), C (6;6;0), D (0;6;0), A1 (0;0;30), B1 (6;0;30), C1 (6;6;30) и D1 (0;6;30).

Имеем параллелепипед с длинами сторон 6, 6 и 30 метров.

Vстен = 6*6*30 – 5*5*30 = 1080 – 750 = 330 (м^3)

Так как половина башни будет иметь стеклянные стены, то высчитаем площадь стен башни:

S= 6*30*4=720 (м^2).

Крыша башни:

Крыша имеет форму параллелепипеда с вершинами в точках **K (0,5;0,5;29), L (5;0,5;29), M (5;5;29), N (0,5;5;29), K1 (0,5;0,5;28,5), L1 (5;0,5; 28,5), M1 (5;5; 28,5) и N1 (0,5;5; 28,5).**

Длины сторон параллелепипеда: 5,5 и 0,5 метров. Крыша размещена так, что высота парапета – 1 м.

Посчитаем объем крыши:
V = 5*5*0,5 = 12,5 (м^3).
<u>КОНУС</u>
Внешняя граница стены:

$$\begin{cases} \frac{(x-15)^2}{15^2} + (y-15)^2 - (z-15)^2 = 0 \\ 0 \le z \le 6. \end{cases}$$

Внутренняя граница стены:

$$\begin{cases} \frac{(x-15)^2}{15^2} + \frac{(y-15)^2}{0{,}5^2} - (z-15)^2 = 0 \\ 0 \le z \le 6. \end{cases}$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h\ .$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi * 15^2 * 15 - \frac{1}{3}\pi * 9^2 * 9 = \frac{1}{3}\pi(3375 - 729) = 882\pi \approx 2769{,}48(\text{м}^3).$$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi * 14{,}5^2 * 15 - \frac{1}{3}\pi * 8{,}5^2 * 9 = \frac{1}{3}\pi(3153{,}75 - 650{,}25) = 834{,}5\pi \approx$
$\approx 2620{,}33(\text{м}^3)$.

$V_{\text{стен}} = V_1 - V_2 = 2769{,}48 - 2620{,}33 = 149{,}15\ (\text{м}^3)$.

<u>ЦИЛИНДР</u>

Уравнение цилиндра:

$$\begin{cases} (x-15)^2 + (y-15)^2 = 81 \\ 0 \le z \le 12\ . \end{cases}$$

Площадь поверхности стены:

$S = 2\pi Rh = 2 * 9 * 12 * \pi = 216\pi \approx 678{,}24(\text{м}^2)$.

Крыша цилиндра:

Крыша размещена так, что высота парапета – 1 м.

Зададим плоскость, параллельную плоскости (O;x;y), поднятую на высоту 12 м по оси z, с помощью точки A(6;15;12) и вектора $\bar{n}$ (0;0;1).

Уравнение плоскости крыши примет вид:

$$\begin{cases} (x-15)^2 + (y-15)^2 \le 81 \\ z = 12\ . \end{cases}$$

Найдем объем крыши, учитывая, что ее толщина – 0,5 м.

$V_{\text{крыши}} = 81 * 0{,}5\pi = 40{,}5\pi \approx 127{,}17\ (\text{м}^3)$.

СИНУСОИДА

Криволинейная крыша имеет форму синусоиды, которая описывается формулой:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ x \in [6; 30] \\ y \in [0; 30] \\ z = 15cos\left(\frac{\pi(x-6)}{48}\right) \end{cases}.$$

Найдем длину дуги:

$L_1 = \int_6^{30} \sqrt{1 + \cos x}\ dx$ =21,178 (м).

Найдем объем крыши, учитывая, что ее толщина 0,5 м, а длина – 30 м.

V = 21,178 * 0,5 * 30 = 317,67 (м^3).

ТАНГЕНСОИДА

Стена, имеющая вид тангенсоиды, задана формулой:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le z \le 30 \\ 0 \le y \le 30 \\ z = tg\ \frac{\pi k}{12} \end{cases}.$$

Найдем коэффициент k:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le kx \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le x \le 6 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2k} \le x \le \frac{\pi}{2k} \\ 0 \le x \le 6 \end{cases}$$

$$0 \le x \le \frac{\pi}{12}$$

Найдем длину дуги:

$$L = \int_0^6 \sqrt{1 - \frac{1}{cos^2 x}}\ dx = 26\ (\text{м}).$$

На рис. 8.2 можно посмотреть вид на сооружения со стороны поверхности крыши в виде синусоиды.

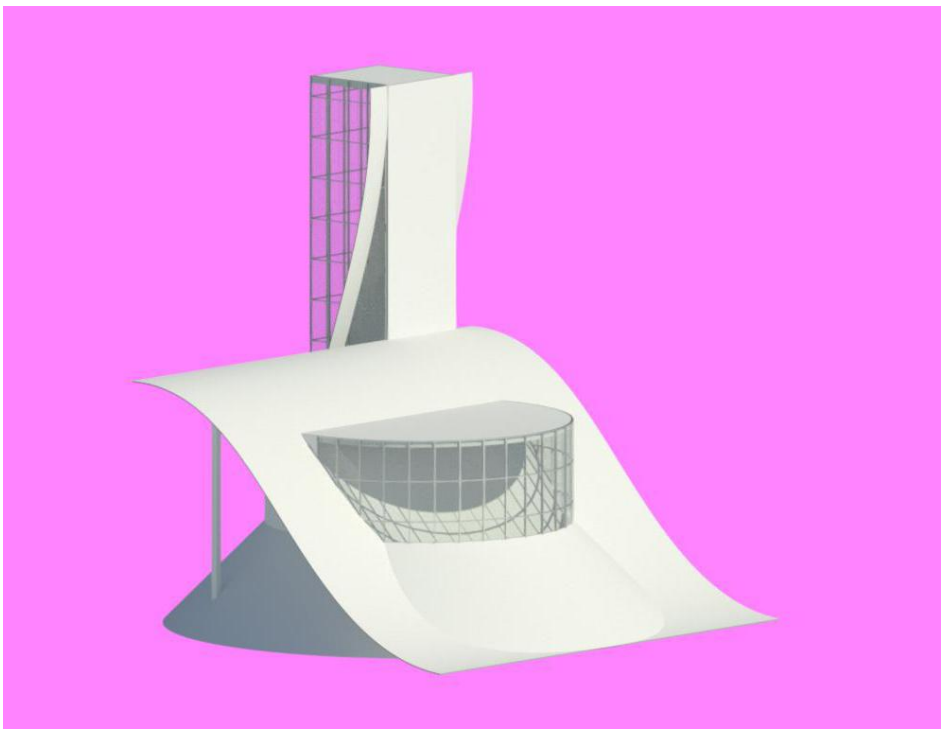


Рис. 8.2

Заметим, что типовой пример, приведенный выше, был выполнен студентами гр. 6АП03 Мцариашвили Н., Шайсутдиновой А. в рамках дисциплины «Высшая математика» при подготовке к зачету. Выражаем им благодарность.

Литература

1. Салимов Р.Б. Математика для студентов строительных и технических специальностей. СПб.: Изд-во «Лань», 2018 – 364 с.

2. Бугров Я.Ф., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. 8-е изд.– М.: Дрофа, 2006. – 914 с.

3. Задания для практических занятий по темам «Векторная и линейная алгебра. Аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»/ Сост.: Н.В.Лапин, Л.А. Онегов. Казань: КГАСУ, 2013 – 35 с.

4. Задачник по темам «Векторная алгебра. Аналитическая геометрия» для студентов очной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство» (бакалавриат). / Т.Ю. Горская. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2017. – 34 с.

5. Сборник задач по темам «Пределы. Производные» для студентов дневного отделения (бакалавриат) направления 270800.62 «Строительство» / Сост.: Н.К. Туктамышов, Т.Ю. Горская.– Казань: КГАСУ, 2015. – 32 с.

6. Учебно-методическое пособие по решению задач по теме «Функции многих переменных» для студентов очной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство» (бакалавриат) / Т.Ю. Горская. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект. – строит. ун-та, 2016. – 30 с.

7. Сборник задач для экономистов: Учебное пособие для экономических специальностей вузов / Р.Ш. Марданов, А.Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А.Г. Фатыхов; под науч. ред. проф. Р.Ш. Марданова. – Казань: Казанск. гос. ун-т, 2009. – 576 с.

Горская Татьяна Юрьевна

Хасанова Энже Назиповна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие для бакалавров очной формы обучения направлений подготовки 07.03.01 «Архитектура», 07.03.02 «Реконструкция и реставрация архитектурного наследия», 07.03.04 «Градостроительство»