МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Л. Крепкогорский, Е.С. Рахматуллина, Н.К. Туктамышов

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Сборник задач
для слушателей курсов по подготовке
к поступлению в КГАСУ

Казань
2018

УДК 512+517
ББК 22.1
К79

Крепкогорский В.Л., Рахматуллина Е.С., Туктамышов Н.К.

К79 Алгебра и начала анализа: Сборник задач для слушателей курсов по подготовке к поступлению в КГАСУ / В.Л. Крепкогорский, Е.С. Рахматуллина, Н.К. Туктамышов. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.- строит. ун-та, 2018. – 52 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Сборник задач по элементарной математике содержит методические указания к решению задач, примеры для самостоятельной работы и контрольные задания по математике.

Рецензент

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики КГАСУ
С.Н. Тимергалиев

УДК 512+517
ББК 22.1

1. Действия с целыми числами

1.1. Условные обозначения

Перечислим общепринятые математические обозначения

N – множество всех натуральных чисел;
Z – множество всех целых чисел;
Q – множество всех рациональных чисел;
R – множество всех действительных чисел
$\Rightarrow$ – следует;
$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда;
$\stackrel{\text{def}}{=}$ – по определению равно;
$D(f)$ – область определения функции $f(x)$;
$E(f)$ – область значений функции $f(x)$;
const – постоянная величина;
$\in$ – принадлежит, например:
$x \in R$ – число x принадлежит множеству действительных чисел.

1.2. Признаки делимости

При сложении, вычитании и умножении целых чисел мы снова получаем целое число. При делении одного целого числа на другое результат необязательно целый. Если для двух целых чисел a и с число a/b – целое, то говорят, что a делится на b.

Для того чтобы выяснить, делится ли одно число на другое, можно использовать признаки делимости.

1° Деление на 2 и 5. Данное число a делится на 2 или на 5, если на них делится последняя цифра в десятичной записи a. При этом мы считаем, что ноль делится на любое другое число.

2° Деление на 4 и на 25. Данное число делится на 4 или на 25, если оно заканчивается на два нуля или две последние цифры образуют двузначное число, которое делится на 4 или на 25.

3° Деление на 3 или на 9. Число делится на 3 или на 9, если сумма цифр делится на 3 или на 9.

4° Деление на 10. Число делится на 10, если оно заканчивается на ноль.

1.3. Простые и составные числа

1° Число a называется *простым*, если оно делится только на себя и на 1.

2° Число a называется *составным,* если оно делится на число, не равное ему самому или единице.

3° Любое составное число можно представить в виде произведения простых чисел. Например, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Пример. Разложить на простые множители число 150.

Решение:

150	5
30	5
6	2
3	3
1	

$$150 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 5^2 \cdot 2 \cdot 3.$$

1.4. Общий делитель двух целых чисел

Натуральное число $a \neq 1$ является общим делителем целых чисел B и C, если оба числа делятся на a. Два целых числа, не имеющие общих делителей, называются взаимно простыми. Например, числа $25 = 5^2$ и $36 = 2^2 \cdot 3^2$ не имеют общих делителей. Следовательно, они взаимно простые.

1.5. Наименьшее общее кратное

Говорят, что число a кратно числам b и c, если a делится на b и c. Среди всех общих кратных всегда есть наименьшее. Это число называется наименьшим общим кратным (НОК). Для малых чисел можно НОК просто подобрать. Если числа большие, то следует их разложить на простые множители; выписать все множители, входящие хотя бы в одно из данных чисел; каждый из этих простых множителей возводим в наибольшую из тех степеней, в которых он входит в данные числа. Производим умножение и получаем НОК.

Пример. Найти НОК(270, 60, 75). Разлагаем эти числа на простые множители.

270	5	60	5	75	5
54	2	12	2	15	3
27	3	6	2	5	5
9	3	3	3	1	
3	3	1			
1					

Следовательно, $270 = 5 \cdot 2 \cdot 3^3$; $60 = 5 \cdot 2^2 \cdot 3$; $75 = 5^2 \cdot 3$ и

НОК$= 5^2 \cdot 3^3 \cdot 2^2 = 2700$.

Если числа взаимно простые, то их наименьшее общее кратное равно произведению.

1.6. Упражнения

1) Разложить на множители числа 196, 324, 250.

2) Найти наименьшие общие кратные для пар чисел:
а) 36 и 45, б) 224 и 294, в) 225 и 180.

2. Дробные числа и действия над ними

2.1. Обыкновенные дроби

Обыкновенные дроби имеют вид: $\frac{a}{b}$, где a и b – целые числа.

Число a называется *числителем* дроби, а b – *знаменателем*.
Если числитель меньше знаменателя, то дробь называется *правильной*. В противном случае дробь называется *неправильной*. В неправильной дроби можно выделить *целую часть*. Для этого разделим числитель на знаменатель. Если в результате получилось целое число, то оно и есть целая часть. Если при делении получился остаток, то частное дает нам целую часть, к которой прибавляется дробная часть, в числителе которой находится остаток, а в знаменателе остается прежний знаменатель.

Пример. Выделить целую часть неправильной дроби $\frac{37}{5}$.
Решение. Разделим $\frac{37}{5} = \frac{35+2}{5} = 7 + \frac{2}{5} = 7\frac{2}{5}$. Здесь целая часть равна 7.

2.2. Основные свойства дробей. Сокращение дробей

Дробь не изменится, если числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю. Деление числителя и знаменателя на общий множитель называется сокращением дроби.

Пример. Сократить дроби $\frac{25}{35}$; $\frac{169}{39}$.
Решение. $\frac{25}{35} = \frac{\cancel{5}\cdot 5}{\cancel{5}\cdot 7} = \frac{5}{7}$; $\frac{169}{39} = \frac{\cancel{13}\cdot 13}{\cancel{13}\cdot 3} = \frac{13}{3}$;

2.3. Сложение и вычитание дробей

При сложении дробей с одинаковыми знаменателями числители складываются, а знаменатель берется такой же, как у исходных дробей.

Приведение дробей к общему знаменателю. В качестве общего знаменателя берется наименьшее общее кратное исходных знаменателей. Числители умножить на дополнительные множители равные частному от деления общего знаменателя на знаменатели дробей.

Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

При сложении и вычитании дробей их надо привести к общему знаменателю, а затем сложить как дроби с одинаковыми знаменателями.

Примеры.

1. Сложить $\frac{21}{125}+\frac{104}{125}=\frac{125}{125}=1$.

2. Сложить $\frac{8}{15}+\frac{1}{9}$. Вычисляем общий знаменатель (НОК). Заметим, что $15=5\cdot 3$, $9=3\cdot 3$, берем каждый множитель в наибольшей степени и получаем общий знаменатель: $5\cdot 3\cdot 3=45$.

$$\overset{(3)}{\frac{8}{15}}+\overset{(5)}{\frac{1}{9}}=\frac{24}{45}+\frac{5}{45}=\frac{29}{45}$$

Числа (3) и (5) – дополнительные множители, которые получены при делении общего знаменателя на знаменатели соответствующих дробей $3=45/15$ и $5=45/9$. Затем умножаем числители на дополнительные множители: $8\cdot 3=24$ и $1\cdot 5=5$.

3. $9\frac{7}{8}-4\frac{5}{12}=(9-4)+\left(\frac{7}{8}-\frac{5}{12}\right)=5\frac{21-10}{24}=5\frac{11}{24}$

4. $7\frac{5}{8}-2\frac{9}{10}=5+\left(\frac{5}{8}-\frac{9}{10}\right)=5+\frac{25-36}{40}=\left(4+\frac{40}{40}\right)+\frac{25-36}{40}=4+\frac{40+25-36}{40}=4\frac{29}{40}$

Так как дробная часть получилась отрицательная, то нам пришлось разменять одну единичку из пятерки: $5=4+\frac{40}{40}$.

2.4. Умножение дробей

Умножение дробей $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$. При умножении дробей надо перемножить отдельно числители и знаменатели: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

Для умножения смешанных чисел нужно сначала преобразовать каждое смешанное число в неправильную дробь. Затем перемножить дроби по общему правилу.

Два числа называются взаимно обратными, если их произведение равно единице.

2.5. Деление дробей

1.Чтобы разделить какое-нибудь число на дробь, нужно умножить это число на дробь, обратную делителю.

Пример. $\frac{5}{7}:\frac{10}{21}=\frac{5}{7}\cdot\frac{21}{10}=\frac{3}{2}$.

2. Деление смешанных чисел. Для такого действия надо превратить смешанные числа в неправильные дроби и разделить как дробь на дробь.

3. Деление дроби на целое число. Целое число умножить на знаменатель дроби.

Пример. $\frac{5}{7}:3=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{21}$.

2.6. Десятичные дроби

Умножение десятичной дроби на десятичную дробь

Пример. Вычислить $\left[\left(5\frac{2}{15}-3\frac{1}{30}\right):0{,}7+0{,}15\right]:0{,}2$

Произведем вычисления в несколько этапов:

1) $5\frac{2}{15}-3\frac{1}{30}=(5-3)+\frac{2}{15}-\frac{1}{30}=2+\frac{4}{30}-\frac{1}{30}=2+\frac{3}{30}=2{,}1$

2) $2{,}1:0{,}7=3$.

3) $3+0{,}15=3{,}15$

4) $3{,}15:0{,}2=3{,}15:\frac{1}{5}=3{,}15\cdot 5=15{,}75$.

Ответ: 15,75.

2.7. Упражнения

Выполнить действия:

1) $\frac{(0{,}8-0{,}47)\cdot(0{,}8+0{,}47)}{0{,}4191}+\frac{(1+0{,}6)\cdot(1-0{,}6)}{1{,}6}$.

2) $\left(215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\frac{0{,}0001}{0{,}005}$.

3) $\left(1\frac{1}{12}+2\frac{5}{32}+\frac{1}{24}\right)\cdot 9\frac{3}{5}+2{,}13:0{,}4$.

4) $\left[\left(95\frac{7}{30}-93\frac{5}{18}\right)\cdot 2\frac{1}{4}+0{,}15\right]:0{,}2$

5) $\dfrac{0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$

3. Тождественные преобразования алгебраических выражений

3.1. Умножение многочленов. Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена, и полученные произведения сложить. Для упрощения вычислений можно использовать формулы сокращенного умножения.

3.2. Формулы сокращенного умножения

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

3.3. Свойства степени

$$a^0 = 1; a^m \cdot a^n = a^{n+m};\quad a^m : a^n = a^{m-n};\ (a^m)^n = a^{mn};\ (ab)^m = a^m \cdot b^m; a^{-n} = \frac{1}{a^n};\ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

3.4. Модуль и его свойства

Определение модуля числа

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Геометрически $|x|$ есть расстояние от точки x числовой оси до начала отсчета – точки O.

$|x-a|$ есть расстояние между точками x и a числовой оси.

Модуль произведения, частного и степени.

$$|xy| = |x| \cdot |y|;\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0;$$

$|x^n| = |x|^n,\ n > 0,\ n$ – целое число.

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

3.5. Сумма алгебраических дробей

Правила такие же, как для числовых дробей.

Пример 1. Найти сумму дробей $\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}=\frac{4(x+1)+3(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{7x+1}{(x-1)^2(x+1)}$.

3.6. Упражнения

1). Упростить выражение: $\frac{a-2}{a^2+2a}:\left(\frac{a}{a^2-2a}-\frac{a^2+4}{a^3-4a}-\frac{1}{a^2+2a}\right)$

2) $\frac{1}{(2a+1)^2}-\frac{4a-2}{2a+1}\cdot\left(\frac{1}{2-4a}+\frac{a+1}{8a^3-1}:\frac{2a+1}{4a^2+2a+1}\right)$

3) $\left(\frac{a+2}{a^3-8}+\frac{1}{4-a^2}\right):\frac{2a+4}{8a-a^4}-\frac{4(a+1)}{(a+2)^2}$

4) $\left(\frac{2ab(a+b)}{3a^3+3ab^2+a^2b+b^3}\cdot\frac{3a+b}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a^2+b^2}\right):\frac{ab}{a^2-b^2}$.

4. Решение алгебраических уравнений

4.1. Решение квадратных уравнений

Квадратные уравнения $ax^2+bx+c=0$ решаются с помощью формулы:

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, где дискриминант $D=b^2-4ac$. Если $D>0$, то уравнение имеет два решения (корня), если $D=0$, то решение – единственное, если $D<0$, то действительных решений нет.

Теорема Виета. Для квадратного уравнения, у которого $D>0$, сумма корней $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, а произведение $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

Обратная теорема. Если для чисел x_1 и x_2 справедливы равенства $x_1+x_2=-b/a$ и $x_1\cdot x_2=c/a$, то x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Если дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c больше нуля, этот трехчлен можно представить в виде:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена.

В случае, когда дискриминант равен нулю,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Пример 1. Разложить на множители $9x^2 - 10x + 1$.

Решение: $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{9}$. Тогда $9x^2 - 10x + 1 = 9(x - 1)\left(x - \frac{1}{9}\right)$.

Пример 2. Разложить на множители: 1) $x^2 - 6x + 9$; 2) $2x^2 + 3x + 7$.

Решение. 1) Находим корни уравнения $x^2 - 6x + 9 = 0,\ D = 0,\ x_1 = x_2 = 3$. Отсюда $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

2) Уравнение $2x^2 + 3x + 7 = 0$ не имеет действительных корней, т.к. $D = -47 < 0$. Следовательно, разложить этот трехчлен на множители нельзя.

4.2. Уравнения, приводящиеся к квадратным

Пример 1. Решить уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Решение. Обозначим $x^2 = y$, тогда $y^2 - 5y + 4 = 0$, откуда $y_1 = 4,\ y_2 = 1$. Возвращаясь к переменной x, получим равенства: $y_1 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2;\ y_2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$.

Пример 2. Решить уравнение: $\frac{x-2}{x-4} + \frac{x-4}{x-2} + 2 = 0$.

Решение. Найдем ОДЗ $= \{x \neq 2; x \neq 4\}$. Приведем левую часть к общему знаменателю:

$$\frac{(x-2)^2 + (x-4)^2 + 2(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-2)} = 0$$

Раскроем скобки в числителе и приравняем нулю.

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 + 2x^2 - 12x + 16 = 0.$$

$$4x^2 - 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0.$$

Ответ: $\{3\}$.

4.3. Упражнения. Разложить на множители: 1) $x^2 - 5x + 4$;

2) $3x^2 - 5x + 2$; 3) $9x^2 - 6x + 1$.

Решить уравнения:

4) $x^3 - x = 0$;

5) $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$;

6) $x^4 - x^2 - 12 = 0$;

7) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$;

8) $\frac{12}{x^2-25} + \frac{x+1}{x-5} = 1$;

9) $\frac{x}{x-10} - \frac{8}{x-6} = \frac{4x}{x^2-16x+60}$;

10) $\frac{x+3}{6x^2-x-15} + \frac{5x}{2x^2+x-3} = \frac{9}{2x+3}$;

4.4. Разложение многочлена на множители

Многочленом называют сумму степеней переменной x вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0$.

Для того чтобы разложить многочлен на множители, можно использовать следующие приемы:

а) вынести общий множитель;

б) использовать формулы сокращенного умножения;

в) группировать слагаемые;

г) использовать теорему Безу.

Теорема Безу. Если число a является корнем многочлена $P(x)$, то этот многочлен делится без остатка на двучлен $x - a$.

Следствие. Пусть $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_{n-1}x + a_n$ – многочлен с целыми коэффициентами. Тогда любой целый корень является множителем числа a_n.

Деление многочленов. Многочлен можно делить на другой многочлен «уголком», как это делалось с многозначными числами. Рассмотрим пример:

$$
\begin{array}{l|l}
\quad 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1 & x + 2 \\
-\underline{2x^3 + 4x^2} & \overline{2x^2 - x - 1} \\
\qquad -x^2 - 3x & \\
\qquad \underline{-x^2 - 2x} & \\
\qquad\qquad -x + 1 & \\
\qquad\qquad \underline{-x - 2} & \\
\qquad\qquad\qquad 3 &
\end{array}
$$

Здесь $2x^2 - x - 1$ – частное (целая часть дроби), а 3 – остаток. В результате мы можем записать, что $\frac{2x^3+3x^2-3x+1}{x+2} = 2x^2 - x - 1 + \frac{3}{x+2}$.

Этот прием можно использовать для решения уравнений третьего и более высокого порядка.

Пример. Решить уравнение $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$. По теории, если есть целые корни, то они являются делителями числа 20. Значит, надо вычислить многочлен при $x = \pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 5; \pm 10; \pm 20$. Но мы не будем проверять их все, так как уже при $x = 2$,

$$P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 20 = 8 - 20 - 8 + 20 = 0.$$

Значит, многочлен делится без остатка на $(x - 2)$. Разделим уголком и получим, что $x^3 - 5x^2 - -4x + 20 = (x - 2)(x^2 - 3x - 10)$. Решая уравнение $x^2 - 3x - 10 = 0$, найдем оставшиеся корни $x_2 = -2$ и $x_3 = 5$.

Ответ. $x_1 = 2$; $x_2 = -2$ и $x_3 = 5$.

4.5. Упражнения

1) Решить уравнение: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

2) Решить уравнение: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

4.6. Задачи, приводящие к квадратным уравнениям

Задачи на движение

1. Товарный поезд был задержан в пути на 12 *мин*, а затем на расстоянии 60 *км* наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найти первоначальную скорость поезда.

Задачи на совместную работу

2. Петя может убрать квартиру за 2 часа, а Маша за 3 часа. За какое время они уберут эту квартиру, если будут работать вместе. (Указать количество минут).

Задачи на проценты

3. В январе завод выполнил 105% месячного плана выпуска готовой продукции, а в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

Задачи на смеси и разбавление

4. Смешали 30%-й раствор соляной кислоты с 10%-м и получили 600 *г* 15%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Примеры решения задач

Решение задачи № 1. Пусть x – первоначальная скорость поезда. Тогда, двигаясь с этой скоростью, он преодолеет 60 *км* за $\frac{60}{x}$ часов. При движении с увеличенной скоростью ему потребуется $\frac{60}{x+15}$ часов. По условию в первом случае он потратит на 12 *мин* = 0,2 часа больше. Запишем уравнение:

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+15}=0{,}2;\ \frac{60\cdot(x+15-x)}{x(x+15)}=0{,}2;\ 60\cdot 15=x(x+15)\cdot 0{,}2;$$

$$60\cdot 15\cdot 5=\ x(x+15);\quad x^2+15x-4500=0$$

$$D=15^2+4\cdot 4500=18225=135^2; x_1=\frac{-15+135}{2}=60;$$

$x_2=\frac{-15-135}{2}=-75$. Ответ: первоначальная скорость равна *60км/час*.

Решение задачи № 2. Пусть x – время, за которое они вместе уберут квартиру. Примем всю работу за единицу. Тогда за один час Петя выполнит ½ часть всей работы, а Маша 1/3 всей работы. Значит, за время x они выполнят: $x\cdot\frac{1}{2}+x\cdot\frac{1}{3}$. Приравнивая эту работу к единице, получаем уравнение: $x\cdot\frac{1}{2}+x\cdot\frac{1}{3}=1;\ x\cdot\frac{5}{6}=1;\ \ x=\frac{6}{5}$ часа.

Ответ: за $x=72$ мин.

Решение задачи № 3. Пусть P – объем выпуска за месяц по плану. Тогда в январе произведено $1{,}05P$, а в феврале $1{,}05\cdot 1{,}04P=1{,}092P$. Итого за два месяца получается $2{,}142P$ при плане $2P$. Это означает, что двухмесячный план будет перевыполнен на

$$\frac{2{,}142P-2P}{2P}\cdot 100\%=7{,}1\%.$$

Решение задачи № 4. Пусть x – количество взятого 30% -го раствора, тогда $(600-x)$ – количество взятого 10%-го раствора. Приравняем количество чистой серной кислоты в растворах до и после смешивания.

$$0{,}3x+0{,}1*(600-x)=0{,}15\cdot 600;$$

$$0{,}2x + 60 = 90;$$
$$\frac{x}{5} = 30; x = 150.$$

Ответ: 30%-го раствора надо было взять 150 *г*, а 10%-го 450 *г*.

4.7. Упражнения

1.Из двух мест, расстояние между которыми 600 км, отправляются два поезда друг другу навстречу. Если оба поезда тронутся одновременно, то они встретятся через 10 часов. Если же второй поезд отправится на 4 часа и 20 минут раньше первого, то встреча произойдет через 8 часов после отправления первого. Определить скорость каждого поезда.

2. Велосипедист каждую минуту проезжает на 500 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 120 *км* он затрачивает на 2 *ч* больше, чем мотоциклист. Вычислите скорость каждого из них.

3. Бригада слесарей может выполнить задание на 15 *ч* скорее, чем бригада учеников. Если бригада учеников отработает 18 *ч*, выполняя это задание, а потом бригада слесарей продолжит выполнение этого задания в течение 6 *ч*, то будет выполнено только 0,6 всего задания. Сколько времени требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения данного задания?

4. Свежие грибы содержат по весу 90% воды, а сухие – 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 22 *кг* свежих грибов?

5. После встречи двух пароходов один из них пошел на юг, а другой на запад. Через два часа после встречи расстояние между ними было 60 *км*. Найти скорость каждого парохода, если известно, что скорость первого из них была на 6 км/час больше скорости второго.

6. Два завода А и В взялись выполнить заказ в 12 дней. Через два дня завод А был закрыт на ремонт, и в дальнейшем над выполнением заказа работал только завод В. Зная, что производительность завода В составляет $66\frac{2}{3}\%$ от производительности завода А, определить, через сколько дней будет выполнен заказ.

7. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 *кг*, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

8. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 *т* стали с содержанием никеля 30%?

9. Имелось два разных сплава меди. Процент содержания меди в первом сплаве был на 40 меньше, чем процент содержания меди во втором сплаве. После того, как их сплавили вместе, получили сплав, содержащий 36% меди. Оп-

ределить процентное содержание меди в первом и во втором сплавах, если известно, что меди в первом сплаве было 6 *кг*, а во втором 12 *кг*.

4.8. Решение систем линейных и нелинейных уравнений

Рассмотрим три примера, в которых используем разные методы решения систем.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - xy + y^2 + x - y - 6 = 0 \\ 4x - y + 6 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Используем метод подстановки: из второго уравнения выразим y через x и подставим в первое уравнение:

$$\begin{cases} 3x^2 - x(4x+6) + (4x+6)^2 + x - (4x+6) - 6 = 0 \\ y = 4x + 6 \end{cases}.$$

Раскрывая скобки в первом уравнении, получим: $15x^2 + 39x + 24 = 0$, или $5x^2 + 13x + 24 = 0$, отсюда $x_1 = -8/5$; $x_2 = -1$.

Теперь из второго уравнения находим соответствующие значения y_1, y_2: $y_1 = 4(-8/5) + 6 = -2/5$; $y_2 = 4(-1) + 6 = 2$.

Ответ: имеется два решения:

$$\begin{cases} x = -8/5; \\ y = -2/5. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1; \\ y = 2. \end{cases}$$

Пример 2. Решить систему: $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$.

Эту систему можно решить так же, как первую, методом подстановки. Но мы решим ее, используя обратную теорему Виета. Пары значений x и y можно принять за корни квадратного уравнения: $z^2 - 5z + 4 = 0$, у которого $z_1 = 1, z_2 = 4$ так, что

$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ y_1 = z_2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = z_2 \\ y_2 = z_1 \end{cases}$. Отсюда, т.к. $z_1 = 1$ и $z_2 = 4$, получаем: $x_1 = 1,\ y_1 = 4,\ x_2 = 4,\ y_2 = 1$.

Ответ: $\{(1; 4);\ (4;\ 1)\}$.

Пример 3. Решить систему: $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13 \end{cases}$.

Решение. Решим систему с помощью замены переменных. Обозначим $1/x=u$, $1/y=v$. Тогда $1/x^2=u^2$, $1/y^2=v^2$. Переходя к новым переменным, получим:

$$\begin{cases} u+v=5 \\ u^2+v^2=13. \end{cases}$$

Выразим u из первого уравнения $u=5-v$. Подставляя выражение для u во второе уравнение, получим: $(5-v)^2+v^2=13$;
$25-10v+v^2+v^2=13; v^2-5v+6=0$, корни этого уравнения: $v_1=2$, $v_2=3$. Следовательно, $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{1}{3}$.
Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)\right\}$.

4.9. Упражнения. 1) Найти точки пересечения параболы $y=x^2+6x$ и прямой $y=2x-3$.

Решить данные системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y^2=7 \\ xy^2=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=2{,}5xy \\ x-y=0{,}25xy \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x(y+6)=0 \end{cases}$.

5. Иррациональные уравнения

5.1. Квадратные корни и их преобразование

Квадратным корнем из числа a называется число, квадрат которого равен a. Заметим, что для любого положительного числа найдется два значения корня. Например, $2^2=4$ и $(-2)^2=4$. Следовательно, числа 2 и –2 являются квадратными корнями из 4. Чтобы устранить двузначность корня из числа a, вводится понятие *арифметического* квадратного корня. Арифметическим корнем из числа a называется такое положительное число, квадрат которого равен a. Арифметический корень обозначается с помощью знака $\sqrt{a}$.

Свойства корней. Пусть $a\geq 0$ и $b\geq 0$. Тогда

1. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$; 2. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; 3. $\sqrt{x^2}=|x|$; 4. Если $a_1>a_2\geq 0$, то $\sqrt{a_1}>\sqrt{a_2}$.

Примеры. 1. Упростить выражение: $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}$.

Решение. $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}$ $=|x+1|+|x-1|$.

2) Избавиться от иррациональности в знаменателе $\frac{1}{5+\sqrt{2}}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель на сопряженный для знаменателя множитель $5-\sqrt{2}$. Тогда

$$\frac{1}{5+\sqrt{2}}\cdot\frac{5-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}=\frac{5-\sqrt{2}}{5^2-2}=\frac{5-\sqrt{2}}{23}.$$

3) Вычислить $\left(\frac{3}{\sqrt{21}-\sqrt{18}}+\frac{3}{\sqrt{15}-\sqrt{18}}-\sqrt{21}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}$

Решение. $\left(\frac{3}{\sqrt{21}-\sqrt{18}}+\frac{3}{\sqrt{15}-\sqrt{18}}-\sqrt{21}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}=$

$=\left(\frac{3}{\sqrt{21}-\sqrt{18}}\cdot\frac{\sqrt{21}+\sqrt{18}}{\sqrt{21}+\sqrt{18}}+\frac{3}{\sqrt{15}-\sqrt{18}}\cdot\frac{\sqrt{15}+\sqrt{18}}{\sqrt{15}+\sqrt{18}}-\sqrt{21}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}=$

$=\left(\frac{3\cdot(\sqrt{21}+\sqrt{18})}{21-18}+\frac{3\cdot(\sqrt{15}+\sqrt{18})}{15-18}-\sqrt{21}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}=$

$=\left(\sqrt{21}+\sqrt{18}-\sqrt{15}-\sqrt{18}-\sqrt{21}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}=-1.$

5.2. Упражнения

1) Проверить справедливость равенства:

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$$

2) Упростить выражения:

a) $\frac{27-a^3}{3+a}\cdot\left(3+\frac{a^2}{3+a}\right)^{-1}$.

b) $\left(\frac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\frac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\frac{a^2+2}{1-a^3}\right)\cdot(1+a+a^2)$.

3) Вычислить $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

5.3. Иррациональные уравнения

При решении иррациональных уравнений приходится освобождаться от корней при помощи возведения обоих частей уравнения в степень, при этом может получиться уравнение, не равносильное данному. Поэтому проверка по-

лученных корней путем их подстановки в исходное уравнение является обязательной частью решения иррациональных уравнений.

Пример. Решить уравнение: $\sqrt{3x+4}-1=2x$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду:

$$\sqrt{3x+4}=2x+1,$$

и возведя обе части равенства в квадрат, получаем :

$3x+4=(2x+1)^2$, $3x+4=4x^2+4x+1$, $4x^2+x-3=0$.

Находим корни квадратного уравнения: $x_1=-1$, $x_2=\frac{3}{4}$.

Проверка. При $x_2=\frac{3}{4}$ получаем: $\sqrt{3\cdot\frac{3}{4}+4}-1=2\cdot\frac{3}{4}$;

$\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}}-1=\frac{6}{4}$; $\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$. Верно.

При $x_1=-1$ получаем: $\sqrt{3(-1)+4}=2(-1)+1$;

$\sqrt{-3+4}=-1$.

Неверно.

Итак, $x_1=-1$ – посторонний корень.

Ответ: $\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

5.4. Упражнения

1) Решить уравнение: $\sqrt{5x^3+6x^2+9}-3=x^2$.

2) Решить уравнение: $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$.

3) $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4$.

4) $3\sqrt{9-x}+\sqrt{9x+4}=13$.

6. Решение неравенств

6.1. Линейные неравенства и системы неравенств

Неравенства вида $ax+b>0$, где a и b – произвольные числа, называются линейными. Неравенство такого вида решается аналогично линейному уравнению. Нужно следовать только следующему правилу: если обе части неравенства умножаются или делятся на отрицательное число, то знак неравенства меняется на противоположный.

Несколько неравенств с одним неизвестным могут рассматриваться как система. Для решения системы неравенств следует решить каждое из неравенств и затем, представляя на числовой оси, выбрать из них общее решение.

Пример 1. Решить неравенства: 1) $3x - 1 > 5x + 2$;

2) $2x > 2(x + 2)$; 3) $2x > 2(x - 1)$.

Решение. 1) $3x - 1 > 5x + 2$. Переносим слагаемые, содержащие неизвестные, в одну сторону, а остальные – в другую, затем приводим подобные члены:

$3x - 5x > 2 + 1, \quad -2x > 3.$

Делим обе части уравнения на коэффициент при неизвестном, получим решение:

$x < -3/2, \quad$ или $\; x \in (-\infty; -3/2).$

2) $2x > 2(x + 2)$, $2x > 2x + 4, 0 > 4$ – это неравенство при любых x – неверно, поэтому не имеет решения.

3) $2x > 2(x - 1)$, $2x > 2x - 2$, $0 > -2$ – это неравенство выполняется при любых x, поэтому решением является любое значение x, т.е. $x \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 2. Решить систему неравенств: $\begin{cases} 3x + 4 < 13 \\ 15 - 4x \geq 9 \end{cases}$.

Решаем каждое неравенство системы:

$$\begin{cases} 3x + 4 < 13 \\ 15 - 4x \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 9 \\ -4x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Теперь решение первого неравенства представим на числовой оси штриховкой вправо, и решение второго – штриховкой влево (рис. 1). При этом точку $x = 1{,}5$, входящую в решение отметим темным кружком, а точку $x = 3$ – светлым. Отмеченный двойной штриховкой интервал $(-\infty; 1{,}5]$ является решением системы.

Ответ: $(-\infty; 1{,}5]$.

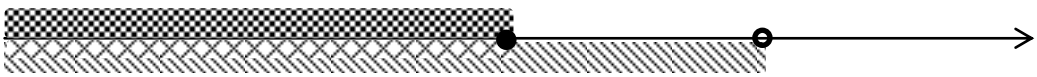

Рис. 1

6.2. Упражнения. Решить системы неравенств:

а) $\begin{cases} 2 - x < 0 \\ 1 - 2x \leq 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 12x - 6 \leq 0 \\ 12 - 3x < 0 \end{cases}$.

6.3. Квадратные и дробно-линейные неравенства

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ (или < 0 или ≥ 0 или ≤ 0) называются квадратными. Решение таких неравенств основано на следующих свойствах квадратного трехчлена:

1. Если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ положителен, то трехчлен

имеет два различных корня x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$). Тогда при $x < x_1$ и $x > x_2$ трехчлен имеет тот же знак, что и коэффициент a, а при $x_1 < x < x_2$ трехчлен имеет знак, противоположный знаку коэффициента a (рис. 2 и 3).

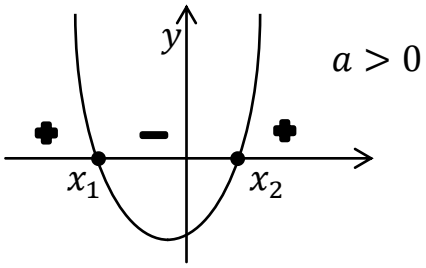

Рис. 2

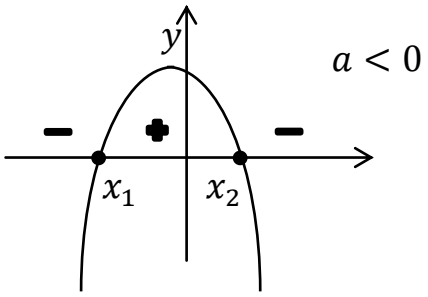

Рис. 3

2. В случае если дискриминант $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ и при всех x, кроме $x = x_1 = -\frac{b}{2a}$, трехчлен имеет тот же знак, что и коэффициент a (рис. 4 и 5)

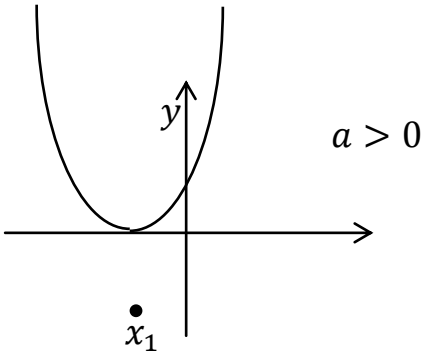

Рис.4

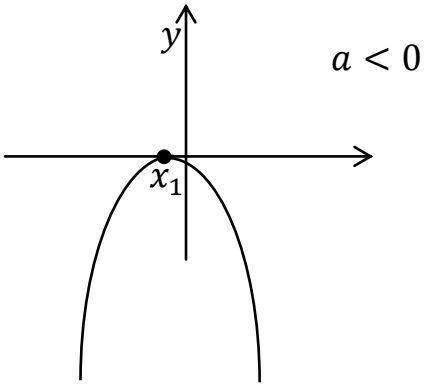

Рис.5

3.Когда дискриминант отрицателен, то трехчлен имеет тот же знак, что и коэффициент a (рис. 6 и 7)

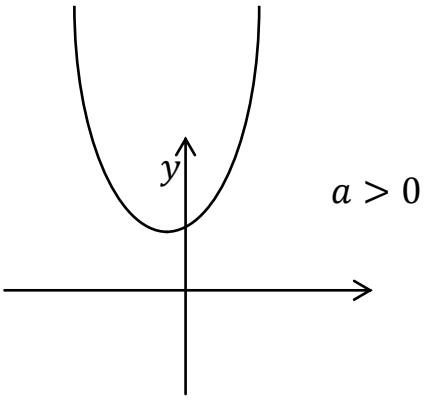

Рис. 6

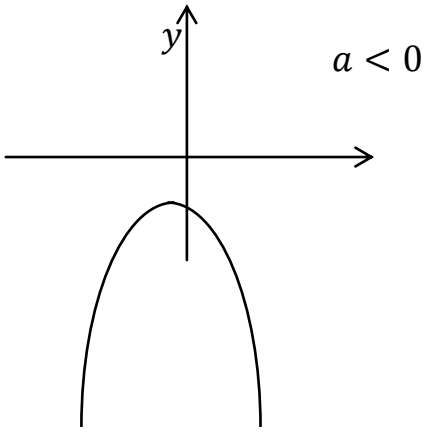

Рис. 7

Пример. Решить неравенства:

1) $3x^2 - 9x + 6 > 0$;

2) $-3x^2 + 6x - 3 < 0$;

3) $x^2 - 2x + 5 > 0$;

4) $\frac{2-x}{3+x} \leq 1$.

Решение. 1) $D = 9 > 0, x_1 = 1, x_2 = 2,\ \ a = 3 > 0$. Следовательно (рис. 2), неравенство $3x^2 - 9x + 6 > 0$ выполняется при $x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$.

2) $D = 0, x_1 = 1, a = -3 < 0$. Следовательно (рис. 3), неравенство $-3x^2 + 6x - 3 < 0$ выполняется всюду, кроме точки $x_1 = 1$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

3) $D = -16 < 0, a = 1 > 0$. Следовательно (рис. 6), неравенство $x^2 - 2x + 5 > 0$ выполняется при любом x.

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

6.4. Упражнения. Найдите множество решений неравенства:

а) $x^2 - 3x \geq -10$; б)$x^2 \ - 12 < x$; в) $9x^2 + 6x \leq -1$;

г) $2x^2 > 4x - 9$; д) $\frac{5}{x^2-7x+14} < 0$.

6.5. Метод интервалов

Метод интервалов является одним из основных приемов решения неравенств, содержащих неизвестное в степени выше единицы. Разберем этапы решения неравенств этим методом на следующем примере.

Пример. Решить неравенство: $\frac{x^2-2x-71}{x^2-8x+7} > 7$.

1) Переносим все члены неравенства влево и приводим к общему знаменателю:

$$\frac{x^2-2x-71}{x^2-8x+7} - 7 > 0.$$

$$\frac{x^2-2x-71-7(x^2-8x+7)}{x^2-8x+7} > 0$$

$$\frac{-6x^2+54x-120}{x^2-8x+7} > 0.$$

2) Раскладываем числитель и знаменатель на линейные множители, сократив предварительно обе части неравенства на (–6),

$$\frac{(x-4)(x-5)}{(x-1)(x-7)} < 0.$$

3) На числовой оси отмечаем корни числителя и знаменателя. Тогда вся ось разделится на интервалы знакопостоянства. В каждом интервале берем любое значение, подставляя его вместо x, выясним знак дроби в каждом из полученных интервалов.

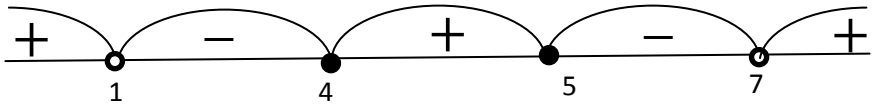

Рис. 8

Например, при $x = 8$ левая часть неравенства равна $\frac{(8-4)(8-5)}{(8-1)(8-7)} = \frac{12}{7} > 0$, значит на всем интервале $(7;\ +\infty)$ дробь положительна.

Решением неравенства является объединение интервалов, в которых знак дроби отрицателен (рис. 8).

Ответ: $(1; 4) \cup (5; 7)$.

Пример. Решить неравенство:

$$\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x^2-x+4}\leq\frac{2-2x}{x^3+8}.$$

Решение. Переносим все члены в левую часть и приводим к общему знаменателю. При этом учитываем, что

$x^3+8=(x+2)(x^2-x+4)$,

следовательно,

$$\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x^2-x+4}-\frac{2-2x}{(x+2)(x^2-x+4)}\leq 0,$$

$$\frac{x^2-x+4-2(x+2)-\ (2-2x)}{(x+2)(x^2-x+4)}\leq 0,$$

$$\frac{x^2-x-2}{(x+2)(x^2-x+4)}\leq 0.$$

Дискриминант выражения x^2-x+4 меньше нуля, коэффициент при x^2 равен $1>0$. Поэтому $x^2-x+4>0$ при любом x. Следовательно, обе части неравенства можно умножить на x^2-x+4. Получим равносильное неравенство:

$$\frac{x^2-x-2}{(x+2)}\leq 0.$$

Числитель можно разложить на множители: $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. Неравенство

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)}\leq 0$$

решаем методом интервалов (рис. 9).

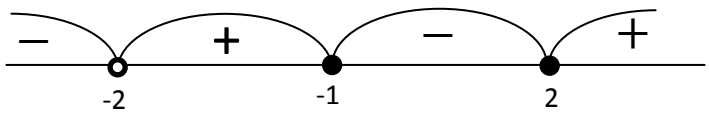

Рис. 9

Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup[-1;2]$.

6.6. Упражнения. Решить неравенство:

а) $(x+3)(x+2)x(x-1)>0$; б) $(x-2)^3(x+1)(x-1)^2<0$;

в) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x+4}<0$; г) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4x+4}>0$.

6.7. Неравенства с модулями

При решении неравенства с неизвестными под знаком абсолютной величины нужно использовать следующие свойства:

а) если $|x|<d$ $(d>0)$, то $-d<x<d$;

б) если $|x|>\text{c}$ $(\text{c}>0)$, то $x<-c$ или $x>c$.

Пример. Решить неравенство $\left|\frac{2x-3}{x}\right|>1$.

Решение. Используя свойство б), получим, что это неравенство равносильно двум следующим: 1) $\frac{2x-3}{x}<-1$ либо 2) $\frac{2x-3}{x}>1$.

Решением неравенства 1) является интервал $(0;1)$, а неравенства 2) – объединение интервалов $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

Решением исходного неравенства является объединение решений неравенств 1) и 2).

Ответ: $x\epsilon\ (-\infty;0)\cup\ (0;1)\cup(3;+\infty)$.

При решении неравенств типа $|x-a|<d$ или $|x-a|>d$ используем геометрический смысл модуля разности $|x-a|$, который равен расстоянию на действительной оси между точками x и a.

Пример. Решить неравенство: $|x-2|\leq 3$.

Решение. Это неравенство означает, что расстояние от точки x до точки 2 должно быть не более 3. Этим свойством обладают точки интервала $[2-$ *3;2+3=[−1;5].*

Построить график функции $y=\frac{1+|x|}{|x-3|}$.

Решение. Модуль от x определяется равенством:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{при } x \geq 0 \\ -x, & \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

Найдем корни выражений, стоящих под знаком модуля. В этих точках происходит «переключение» с одной формулы на другую.

В данном случае мы получаем корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Используя определение модуля, получаем для вычисления y следующие формулы:

1) $y = \frac{1+x}{x-3}$, при $x > 3$; 2) $y = \frac{1+x}{3-x}$, при $0 \leq x < 3$; 3) $y = \frac{1-x}{3-x} = \frac{x-1}{x-3}$, при $x < 0$.

Разберем случай 1). Выделим целую часть дроби:

$$y = \frac{1+x}{x-3} = \frac{x-3+4}{x-3} = 1 + \frac{4}{x-3};$$

График этой функции – гипербола с асимптотами $x = 3$ (вертикальная) и $y = 1$. При этом $x > 3$ (рис. 10).

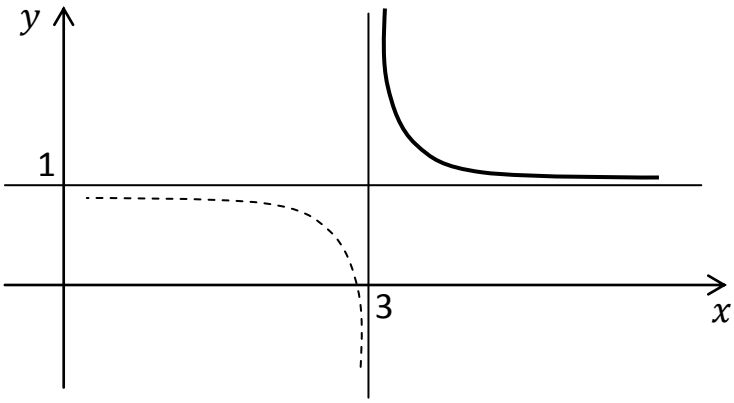

Рис. 10

2) Выделим целую часть:

$$y = \frac{1+x}{3-x} = -\frac{1+x}{x-3} = -\frac{x-3+4}{x-3} = -1 - \frac{4}{x-3} = -1 + \frac{4}{3-x}.$$

График – гипербола с асимптотами $x = 3$ и $y = -1$. При этом $0 \leq x < 3$.

Вычислим $y(0) = \frac{1}{3}$ (рис. 11)

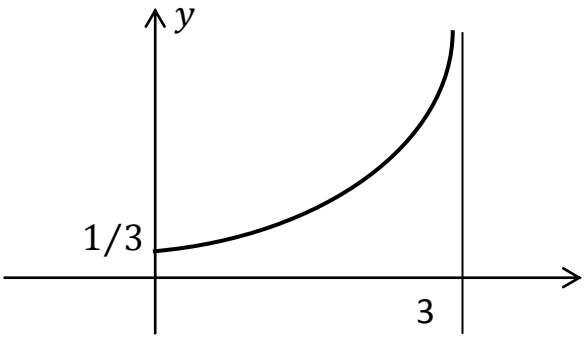

Рис. 11

3) Выделим целую часть:

$y = \frac{x-1}{x-3} = \frac{x-3+2}{x-3} = 1 + \frac{2}{x-3} = 1 - \frac{2}{3-x}$.

График – гипербола с асимптотами $x = 3$ и $y = 1$ (рис. 12). Пересекает ось Oy при $y = \frac{1}{3}$.

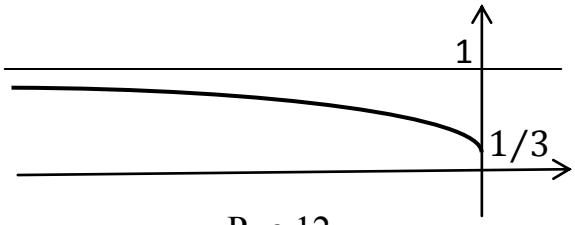

Рис.12

Объединяя эти графики, получим график исходной функции (рис. 13).

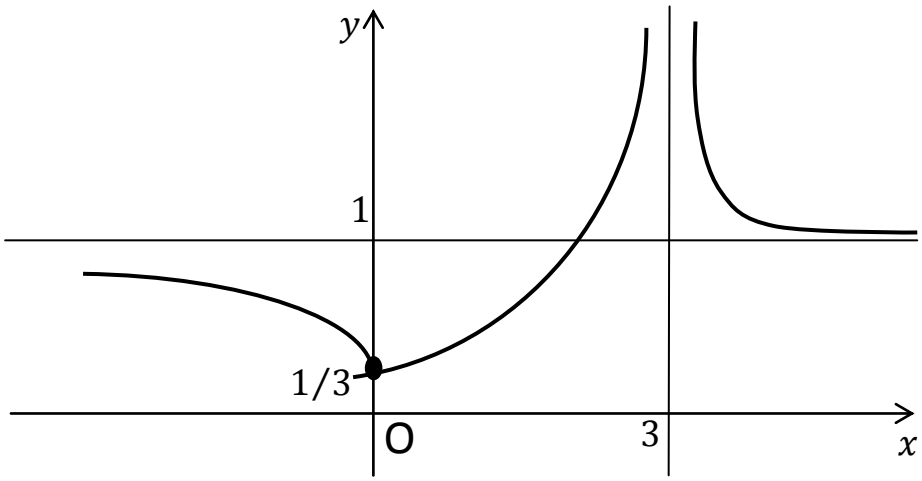

Рис.13

Пример. Решить неравенство: $|4 - 2x| + |x - 3| \leq 5$.

Решение. Пусть $y = |4 - 2x| + |x - 3|$. Найдем корни выражений под знаком модуля $4 - 2x = 0; x_1 = 2;$ $x - 3 = 0; x_2 = 3$. Значит, действительная ось разбивается на части $x \leq 2;$ $2 \leq x \leq 3; 3 \leq x$. На каждом из этих интервалов функция $y(x)$ определяется соответствующей формулой:

$$y = \begin{cases} 4 - 2x + 3 - x & \text{при } x \leq 2 \\ 2x - 4 + 3 - x & \text{при } 2 \leq x \leq 3 \\ 2x - 4 + x - 3 & \text{при } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 7 - 3x \\ x - 1 \\ 3x - 7 \end{cases}$$

Решим неравенство $y \leq 5$ для каждого интервала.

а) $\begin{cases} 7 - 3x \leq 5 \\ x \leq 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2 \leq 3x \\ x \leq 2 \end{cases}$; $2/3 \leq x \leq 2$.

б) $\begin{cases} x-1 \le 5 \\ 2 \le x \le 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 6 \\ 2 \le x \le 3 \end{cases}$; $2 \le x \le 3$.

в) $\begin{cases} 3x-7 \le 5 \\ x \ge 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x \le 12 \\ x \ge 3 \end{cases}$; $3 \le x \le 4$.

Объединим все множества решений. Получим неравенства

$2/3 \le x \le 4$.

6.8. Упражнения. Построить графики функций:

1) $y = \frac{|x-1|}{|x|-1}$; 2) $y = \frac{2}{|x-1|-1}$; 3) $y = \frac{|x-1|}{x+2}$.

Решить неравенства:

4) $|3-2x| + |x-4| \le 4$

5) $|3-x| - |x-5| \le 1$;

6) $|1-5x| + |x-2| \le 3$.

6.9. Иррациональные неравенства

При решении иррациональных неравенств приходится возводить обе части неравенства в квадрат. Однако в отличие от иррациональных уравнений мы не можем сделать проверку, так как неравенства имеют, как правило, бесконечно много решений.

Решение неравенств вида: $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$.

1) Найти ОДЗ, решив неравенство: $f(x) \ge 0$;

2) Решим неравенство: $g(x) \ge 0$ и рассмотрим два случая:

а) $g(x) \ge 0$ и

б) $g(x) < 0$.

В случае а) обе части исходного неравенства положительны, и возведя в квадрат обе части, мы получим равносильное неравенство. В случае б) исходное неравенство выполняется во всех точках ОДЗ.

Пример. Решить неравенство: $\sqrt{x-4} \ge 10 - x$.

Решение. 1) ОДЗ: $x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 4$. 2) $10 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 10$.

Возведем в квадрат обе части основного неравенства: $\left(\sqrt{x-4}\right)^2 \geq (10-x)^2 \Leftrightarrow x-4 \geq 100-20x+x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-21x+104 \leq 0$. Решим уравнение: $x^2-21x+104=0$.

Получим корни $x_1=8,\ x_2=13$. Решая методом интервалов неравенство $x^2-21x+104 \leq 0$, получим решение: $8 \leq x \leq 13$. Учитывая все неравенства, получим в случае а) систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 10 \\ 8 \leq x \leq 13 \end{cases} \Leftrightarrow 8 \leq x \leq 10.$$

Рассмотрим случай б). Если $x > 10$, то правая часть отрицательна и исходное неравенство выполняется автоматически.

Ответ: неравенство выполняется на объединении интервалов $[8;10] \cup (10;+\infty) = [8;\ +\infty)$.

6.10. Упражнения. Решить неравенство:

1) $\sqrt{x-1} < 3-x$;

2) $\sqrt{x-1} > 3-x$;

3) $\sqrt{9x-20} < x$;

4) $\sqrt{x} > -3$;

5) $\sqrt{x+1} > \sqrt{-x}$;

6) $x+1 > \sqrt{x+3}$.

7. Показательные уравнения и неравенства

7.1. Показательные уравнения

Уравнения, содержащие переменную в показателе степени, называются *показательными.*

Решение показательного уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) основано на том, что это уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример. Решить уравнение:

1) $3^{x^2-\left(\frac{5}{7}\right)x} = \sqrt[7]{9}$; 2) $3^{2x+2} + 3^{2x} = 30$; 3) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$;

4) $3 \cdot 9^x + 6^x - 2 \cdot 4^x = 0$.

Решение. 1) Представив $\sqrt[7]{9}$ как $3^{2/7}$, получим: $3^{x^2-\left(\frac{5}{7}\right)x} = 3^{2/7}$, т.е. левая и правая части уравнения приведены к одному основанию. Следовательно, данное уравнение равносильно квадратному уравнению: $x^2 - \left(\frac{5}{7}\right)x = 2/7$, откуда $x_1 = -\frac{2}{7}$; $x_2 = 1$.

2) Представим 3^{2x+2} как $3^{2x} \cdot 3^2$ и положим: $3^{2x} = y$. Тогда получим $9y + y = 30 \Leftrightarrow 10y = 30 \Leftrightarrow y = 3 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = 1/2$.

3) Положим $5^x = y$. Тогда $5^{2x} = y^2$ и данное уравнение примет вид: $y^2 - 6y + 5 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = 5$. Пусть , $5^x = 1$, тогда $x_1 = 0$; если же $5^x = 5$, тогда $x_2 = 1$. Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

4) Заменим $9^x = 3^{2x}$, $6^x = 2^x \cdot 3^x, 4^x = 2^{2x}$. Тогда уравнение приобретает вид: $3 \cdot 3^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^{2x} = 0$.

Разделим обе части этого уравнения на 2^{2x}.

$$3 \cdot \frac{3^{2x}}{2^{2x}} + \frac{2^x \cdot 3^x}{2^{2x}} - 2 = 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0.$$

Обозначив $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$, приходим к квадратному уравнению:

$$3y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = -1, \ y_2 = 2/3.$$

Первый корень $y_1 = -1 < 0$ надо отбросить, так как $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$. Если $y_2 = 2/3$, то $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$.

Ответ: $x = -1$.

7.2. Упражнения

Решить уравнения:

1) $6^{x+1} - 2 \cdot 6^x = 144$;

2) $5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-2} = 26$;

3) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2$;

3) $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$;

4) $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$;

7.3. Показательные неравенства

Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется *показательным*.

Решение показательных неравенств вида: $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) основано на следующих утверждениях:

если $a > 1$, то $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$;
если $0 < a < 1$, то $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

Примеры. Решить неравенство:

1) $3^x < \frac{1}{9}$; 2) $(0{,}25)^{6x-x^2} > 0{,}25^5$; 3) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$.

Решение. 1) Замечая, что $\frac{1}{9} = 3^{-2}$, перепишем данное неравенство в виде: $3^x < 3^{-2}$. Так как основание степени больше 1, то $x < -2$. Итак, получаем ответ: $(-\infty; -2)$.

2) Так как основание степени меньше единицы, то получаем обратное неравенство для показателей $6x - x^2 < 5$, т. е.

$$6x - x^2 < 5; x^2 - 6x + 5 > 0; \quad (x-1)(x-5) > 0.$$

Решая последнее, получаем ответ: $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$.

3) Положим $2^x = y$; тогда $4^x = (2^x)^2 = y^2$ и данное неравенство примет вид: $y^2 - 6y + 8 < 0$. Решая это неравенство, находим $2 < y < 4$. Возвращаясь к переменной x, получаем $2 < 2^x < 2^2$, откуда $1 < x < 2$. Итак, $x \epsilon (1; 2)$ – решение данного неравенства.

7.4. Упражнения

1) Найти область определения функции $y = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^{4-5x} - \frac{8}{125}}$;

2) $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$;

3) $(0{,}3)^{2x^2-3x+6} \leq 0{,}00243$;

4) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$.

8. Логарифмические уравнения

8.1. Свойства логарифмов

1. Логарифмом числа b по основанию a (где $a > 0, a \neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить число b. Обозначается символом $\log_a b$. По определению логарифма $a^{\log_a b} = b$. Например, $3^{\log_3 6} = 6$.

2. Логарифмы существуют только для положительных чисел, т.е. $\log_a N$ существует, если $a > 0, a \neq 1,\ N > 0$.

3. Равным положительным числам соответствуют и равные логарифмы, т.е. $N_1 = N_2 \Leftrightarrow \log_a N_1 = \log_a N_2$.

4. При $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает, при $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ – убывает.

5. $\log_a 1 = 0$; 6. $\log_a a = 1$; 7. $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$.

8. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ при $x > 0, y > 0$.

9. $\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$ при $x > 0, y > 0$.

10. $\log_a x^n = n \log_a x, x > 0$.

11. $\log_a x^k = k \log_a |x|$, k– четное целое.

12. $\log_{10} x = \lg x$.

8.2. Решение логарифмических уравнений

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется *логарифмическим*. Простейшее логарифмическое уравнение имеет вид: $\log_a x = b$. По определению логарифма $x = a^b$.

Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при дополнительных условиях:

$f(x) > 0, g(x) > 0, 0 < a < 1$ или $1 < a$.

Примеры. Решить уравнения:

1) $\log_{\sqrt[3]{4}}(x - 1) = 6$; 2) $\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x)$;

3) $\lg(x-6)-0{,}5\lg 2=\lg 3+\lg\sqrt{x-10}$.

4) $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$.

5) $\lg x+\lg(x-1)=\lg 6$.

Решение:

1) $\log_{\sqrt[3]{4}}(x-1)=6$;

По определению логарифма $x-1=\left(\sqrt[3]{4}\right)^6; x=1+16; x=17$.

2) $\log_3(x^2-4x-5)=\log_3(7-3x)$;

Данное уравнение сводится к уравнению:

$(x^2-4x-5)=(7-3x)$, откуда получаем: $x^2-x-12=0$, т.е. $x_1=4$, $x_2=-3$. Проверку выполняем с помощью условий: $x^2-4x-5>0$ и $(7-3x)>0$. Значение $x_1=4$ этой системе не удовлетворяет (и, значит, является посторонним корнем) , а значение $x_2=-3$ удовлетворяет. Итак, $x_2=-3$ – единственный корень этого уравнения.

3) $\lg(x-6)-0{,}5\lg 2=\lg 3+\lg\sqrt{x-10}$;

ОДЗ: $\begin{cases} x-6>0 \\ x-10>0 \end{cases} \Leftrightarrow x-10>0 \Leftrightarrow x>10$.

Так как $\lg\sqrt{x-10}=\frac{1}{2}\lg(x-10)$, то умножая обе части

неравенства на 2, получим:

$$2\lg(x-6)-\lg 2=2\lg 3+\lg(x-10);$$

$\lg(x-6)^2=\lg 2+\lg 3^2+\lg(x-10)$; $\lg(x-6)^2=\lg 18(x-10)$.

В результате данное уравнение сводится к уравнению:

$$(x-6)^2=18(x-10), \text{или } x^2-30+216=0,$$

откуда $x_1=12; x_2=18$.

Выше было показано, что ОДЗ состоит из всех $x>10$. Оба найденных значения x этому требованию удовлетворяют и, значит, служат корнями исходного уравнения.

4) $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$.

ОДЗ $= \{x > 0\}$. Запишем $\lg 5 = \frac{\log_x 5}{\log_x 10}$. Тогда

$$5^{\lg x} = 50 - x^{\frac{\log_x 5}{\log_x 10}};$$

$$5^{\lg x} = 50 - \left(x^{\log_x 5}\right)^{\frac{1}{\log_x 10}}; \quad 5^{\lg x} = 50 - 5^{\frac{1}{\log_x 10}}.$$

Так как $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, то получаем уравнение:

$$5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x}; \quad 2 \cdot 5^{\lg x} = 50; \quad 5^{\lg x} = 25; \ \lg x = 2.$$

Потенцируем, т.е. избавляемся от знака логарифма. Для этого возведем 10 в степень $\lg x$ и 2. Тогда получим ответ: $x = 10^2$.

5) $\lg x + \lg(x-1) = \lg 6$.

ОДЗ определяется системой неравенств: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$.

Преобразуем левую часть: $\lg x\,(x-1) = \lg 6$;

$$x(x-1) = 6; \ x^2 - x - 6 = 0;$$

$$x_1 = 3; x_2 = -2.$$

Заметим, что $x_1 = 3 \in$ ОДЗ, но $x_2 = -2 \notin$ ОДЗ. Ответ: $\{3\}$.

8.3. Упражнения

1) Решить уравнения:
а) $\log_2(12 + x) = -2$;
б) $\log_7(11 - 2x) = \log_7 3 + 1$;
в) $\log_3(4x - 15) = \log_3(x + 3)$;
г) $\lg(13 - x - x^2) = 0$;
д) $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$.

2) Найти область определения функции:
а) $y = \lg(x^3 - 3x^2 + 2x)$;
б) $y = \log_{x+1}\left(\frac{x+2}{3-x}\right)$.

8.4. Логарифмические неравенства

Приемы решения логарифмических неравенств аналогичны приемам решения логарифмических уравнений. Однако то обстоятельство, что найденное решение практически невозможно проверить, требует обязательного определения ОДЗ исходного уравнения.

При решении простейших неравенств вида: $\log_a x < \log_a b$ нужно учесть величину основания логарифма и ОДЗ. Если число $a > 1$, то функция $\log_a x$ – возрастающая, и $\log_a x < \log_a b \Leftrightarrow \begin{cases} x < b \\ x > 0 \end{cases}$. Если же $0 < a < 1$, то функция $\log_a x$ – убывающая, и большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Поэтому в этом случае $\log_a x < \log_a b \Leftrightarrow \begin{cases} x > b \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > b$.

Пример. Решить неравенство: $\log_2 x < \log_2 3$.

Решение. Так как основание логарифма равно $2 > 1$, то $\log_2 x < \log_2 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 3$.

Ответ. $x \in (0; 3)$.

Пример. Решить неравенство: $\log_{1/2} x < 1$.

Решение. Заметим, что $1 = \log_{1/2} 1/2$. Так как основание логарифма равно $1/2$, то неравенство $\log_{1/2} x < \log_{1/2} 1/2$ заменяется на противоположное. Поэтому

$$\log_{1/2} x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1/2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Ответ. $x \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Пример. Решить неравенство: $\log_{0,5}(x^2 + x - 2) > -2$.

Решение. Находим ОДЗ. Для этого решаем неравенство:

$(x^2 + x - 2) > 0$, $(x - 1)(x + 2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Теперь решаем основное неравенство

$$\log_{0,5}(x^2 + x - 2) > -2 \Rightarrow \log_{0,5}(x^2 + x - 2) > \log_{0,5} 0{,}5^{-2} = \log_{0,5} 4;$$

$$x^2 + x - 2 < 4 \Rightarrow x^2 + x - 6 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) < 0 \Rightarrow$$

$$x \in (-3; +2)$$

Но это не окончательное решение, так как мы должны взять только ту его часть, которая входит в ОДЗ (рис. 14).

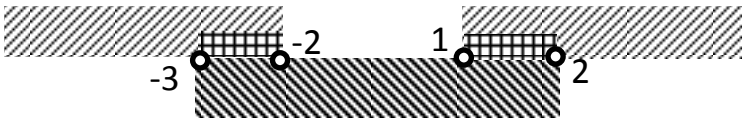

Рис.14

Ответ: $(-3;-2) \cup (1,2)$.

Пример. Решить неравенство: $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1$.

Решение. Вместо 1 в правой части напишем 5^0. Тогда получаем $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1 \Rightarrow \log_3 \frac{x-2}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x} < 1 \Rightarrow \frac{x-2-x}{x} < 0 \Rightarrow x > 0$. Рассмотрим ОДЗ : $\frac{x-2}{x} > 0$. Критические точки $x_1 = 0$; $x_2 = 2$. Изучим знаки этой дроби с помощью метода интервалов

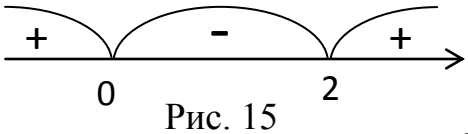

Рис. 15

Это означает, что система неравенств $\begin{cases} \frac{x-2}{x} > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ имеет решение $x > 2$.

Ответ: $(2;\infty)$.

8.5. Упражнения

1. Решить неравенства:

а) $\lg(-x) > \lg 5$;

б) $\log_{0,5} x \geq 1$;

в) $-\lg(5-x) > 2$;

2. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt{\lg \frac{1-2x}{x+3}}$; б) $\log_3 \log_{0,5} x$.

3. Решить неравенство: $2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}$

4. $\frac{\log_3 x - 1}{\log_3\left(\frac{x}{3}\right)} - 2\log_3 \sqrt{x} + \log_3^2 x > 3$

9. Пример решения экзаменационного билета

1. Вычислить:

$$\frac{0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$$

2) Решите уравнение:

$$6^{x+1}-2\cdot 6^{x}=144\,.$$

3) Решите уравнение: $\sin 2x\cdot\cos 2x+0{,}5=0$

4) Найдите область определения функции:

$$y=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^{4-5x}-\frac{8}{125}}$$

5) Решите уравнение :

$$\sqrt{8x^2-x-5}+2x=\sin 0$$

6) Решите систему:

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)=10\\(x+y)(xy+1)=25\end{cases}$$

7) Решите уравнение:

$$\log_2^2\,(x^2)=16\log_2(8x)-60$$

8) Решите неравенство:

$$\sqrt{\log_2 x-3}\geq 5-\log_2 x$$

9) Решите уравнение:

$x^2+18x+82=(1-\lg(x+10))\cdot(1+\lg(x+10))$.

10) Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26 см. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большой стороне. Найти радиус окружности.

Решение примеров

1.Вычислить:

$$\frac{0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}\ .$$

Разобьем процесс вычисления на несколько частей:

а) $0{,}5 : 1{,}25 = \frac{1}{2} : \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$;

б) $\frac{7}{5} : 1\frac{4}{7} = \frac{7}{5} : \left(1 + \frac{4}{7}\right) = \frac{7}{5} : \frac{11}{7} = \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{11} = \frac{49}{55}$;

в) $\frac{2}{5} + \frac{49}{55} - \frac{3}{11} = \frac{2 \cdot 11 + 49 \cdot 1 - 3 \cdot 5}{55} = \frac{56}{55}$;

вычислим теперь знаменатель:

г) $1{,}5 + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{4} = \frac{7}{4}$;

д) $\frac{7}{4} : 18\frac{1}{3} = \frac{7}{4} : \left(18 + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{4} : \frac{18 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{55} = \frac{21}{4 \cdot 55}$;

е) $\frac{56}{55} : \frac{21}{4 \cdot 55} = \frac{56}{55} \cdot \frac{4 \cdot 55}{21} = \frac{7 \cdot 8}{1} \cdot \frac{4}{3 \cdot 7} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$.

Ответ: $10\frac{2}{3}$

2. Решить уравнение:

$$6^{x+1} - 2 \cdot 6^x = 144.$$

Сделаем замену переменных $6^x = y$. Тогда получаем уравнение $6y - 2y = 144$; $4y = 144; y = 36$. Возвращаясь к переменной x, находим $6^x = 36$, $6^x = 6^2$. Следовательно, $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

3. Решите уравнение: $\sin 2x \cdot \cos 2x + 0{,}5 = 0$.

Используем формулу $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$. Для этого умножим обе части уравнения на 2:

$2\sin 2x \cdot \cos 2x + 1 = 0$; $\sin 4x = -1$.

При решении уравнения $\sin y = -1$ можно использовать формулу $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in Z$. В данном случае получаем: $4x = -\frac{\pi}{2} + +2\pi n; n \in Z \Rightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; n \in Z$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; n \in Z$.

4. Найдите область определения функции:

$$y = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^{4-5x} - \frac{8}{125}}.$$

Число x принадлежит области определения функции, если выполняется неравенство: $\left(\frac{2}{5}\right)^{4-5x} - \frac{8}{125} \geq 0$. Решаем это неравенство

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4-5x} \geq \frac{8}{125} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{4-5x} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{3}.$$

Так как $\frac{2}{5} < 1$, то из последнего неравенства следует обратное неравенство для показателей: $4 - 5x \leq 3 \Rightarrow 4 - 3 \leq 5x \Rightarrow x \geq \frac{1}{5}$.

Ответ. Область определения $D(y) = \left[\frac{1}{5}; \infty\right)$.

5. Решите уравнение:

$$\sqrt{8x^2 - x - 5} + 2x = \sin 0.$$

Так как $\sin 0 = 0$, то $\sqrt{8x^2 - x - 5} = -2x$. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$8x^2 - x - 5 = 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - x - 5 = 0.$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5) = 1 + 80 = 81.$$

Тогда

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm 9}{8} = \frac{5}{4} \text{ или } -1.$$

Проверка: а) $x_1 = \frac{5}{4}$, $\sqrt{8\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right) - 5} = -2\left(\frac{5}{4}\right)$, неверно, т.к. правая часть отрицательна, а левая неотрицательная.

б) $x_2 = -1$, $\sqrt{8 \cdot 1^2 - (-1) - 5} = -2(-1)$, $\sqrt{4} = 2$. Верно.

Ответ: $x_2 = -1$.

6. Решите систему:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 10 \\ (x+y)(xy+1) = 25 \end{cases}$$

слагаемые Раскроем скобки в первом уравнении и сгруппируем:

$$\begin{cases} xy + x + y + 1 = 10 \\ (x+y)(xy+1) = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (xy+1) + (x+y) = 10 \\ (x+y)(xy+1) = 25 \end{cases}$$

Сделаем замену переменных. Пусть $u = x + y$; $v = xy + 1$. Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} u + v = 10 \\ uv = 25. \end{cases}$$

Выразим v из первого уравнения: $v = 10 - u$ и подставим во второе уравнение:

$$u(10 - u) = 25;\ -u^2 + 10u - 25 = 0; u^2 - 10u + 25 = 0;$$

$$(u - 5)^2 = 0; u_1 = 5 \Rightarrow v_1 = 10 - 5 = 5.$$

Возвращаемся к старым переменным:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy + 1 = 5 \end{cases}.$$

Выразим y из первого уравнения и подставим во второе: $y = 5 - x$,

$$x(5 - x) + 1 = 5 \Rightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Дискриминант $D = 25 - 4 \cdot 4 = 9$, корни $x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4$ или 1.

Найдем соответствующие значения y. Если $x = 4$, то $y = 1$; если $x = 1$, то $y = 4$.

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$.

7) Решить уравнение: $\log_2^2(x^2) = 16\log_2(8x) - 60$.

Решение. Найдем ОДЗ: $8x > 0$ и $x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$. Преобразуем уравнение, используя формулы: $\log x^n = n \log x$, $\log_a a^n = n$. Тогда $(2\log_2 x)^2 - 16(\log_2 8 + \log_2 x) + 60 = 0$;

$$4\log_2^2 x - 16(3 + \log_2 x) + 60 = 0.$$

Обозначим $\log_2 x = y$. Получаем:

$$4y^2 - 48 - 16y + 60 = 0;$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0.$$

Решая, найдем $y_1 = 3$; $y_2 = 1$. Если $y_1 = 3$, то $\log_2 x = 3$,

$$\log_2 x = \log_2 2^3;\ \log_2 x = \log_2 8; \quad x_1 = 8.$$

Если $y_2 = 1$, то $\log_2 x = 1$

$$\log_2 x = \log_2 2;\ x_2 = 2\,.$$

Оба значения x принадлежат ОДЗ.

Ответ. $x_1 = 8,\ x_2 = 2.$

8) Решите неравенство:

$$\sqrt{\log_2 x - 3} \geq 5 - \log_2 x.$$

Решение. Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \geq \log_2 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 8.$$

Сделаем замену переменной $y = \log_2 x$. Тогда исходное неравенство превращается в неравенство:

$$\sqrt{y - 3} \geq 5 - y. \qquad (*)$$

Если обе части неравенства положительны, то при возведении в квадрат правой и левой части мы получим равносильное неравенство. Поэтому рассмотрим два отдельных случая.

а) $5 - y \geq 0$. В этом случае можно возвести обе части неравенства в квадрат $y - 3 \geq (5 - y)^2$; $y - 3 \geq 25 - 10y + y^2$; $y^2 - 11y + 28 \leq 0$. Решаем уравнение: $y^2 - 11y + 28 = 0$, $D = 121 - 4 \cdot 28 = 9$,

$x_{1,2} = \frac{11 \pm 3}{2} = 7$ или 4. График функции $y^2 - 11y + 28$ – это парабола с ветвями, направленными вверх. Нам нужен тот отрезок, на котором график лежит ниже оси и при этом выполняется условие $5 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 5$.

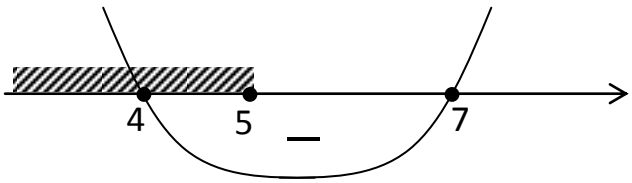

Рис. 16

Значит, в случае а) неравенство (*) выполняется при $4 \leq y \leq 5$.

б) $5 - y < 0$. В этом случае мы не можем возводить в квадрат обе части неравенства (*), но само неравенство выполняется автоматически, так как левая часть положительна, а правая – отрицательна. Суммируя результаты в случаях а) и б), получаем неравенство: $4 \leq y$. Заметим, что $y = \log_2 x$. Неравенство $4 \leq y$ соответствует неравенству $4 \leq \log_2 x \Leftrightarrow \log_2 2^4 \leq \log_2 x \Leftrightarrow 16 \leq x$. При этом выполняются условия ОДЗ.

Ответ: $16 \leq x$.

9) Решите уравнение:

$$x^2 + 18x + 82 = (1 - \lg(x + 10)) \cdot (1 + \lg(x + 10)) \ .$$

Решение. Рассмотрим две функции $y_1(x) = x^2 + 18x + 82$, $y_2(x) = (1 - \lg(x + 10)) \cdot (1 + \lg(x + 10))$. Решения уравнения можно найти как значения x, соответствующие точкам пересечения графиков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Исследуем обе функции на экстремум: $y_1'(x) = 2x + 18 = 0 \Rightarrow x_1 = -9$ – критическая точка. У функции $x^2 + 18x + 82$ график – парабола с ветвями, направленными вверх, есть единственная точка экстремума, которая является точкой минимума. Очевидно, она и есть критическая точка $x_1 = -9$. Значит, наименьшее значение функции $y_1(x)$ равно:

$$y_1(-9) = (-9)^2 + 18 \cdot (-9) + 82 = 81 - 162 + 82 = 1.$$

Найти наибольшее значение функции $y_2(x)$ можно не вычисляя производных:

$$y_2(x) = (1 - \lg^2(x + 10)).$$

Очевидно, наибольшее значение функции будет достигнуто, когда $\lg^2(x + 10) = 0 \Leftrightarrow \lg(x + 10) = \lg 1 \Leftrightarrow x + 10 = 1 \Leftrightarrow x = -9$. Вычислим значение: $y_2(-9) = (1 - \lg^2(-9 + 10)) = 1$. Оба графика проходят через точку $(-9; 1)$. Других точек пересечения быть не может, так как при $x \neq -9$ парабола $y_1(x) = x^2 + 18x + 82$ целиком лежит выше прямой $y = 1$, а график функции $y_2(x) = (1 - \lg^2(x + 10))$
лежит ниже этой прямой.

Ответ: единственное решение уравнения: $x = -9$.

10) Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26 см. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большой сто роне. Найти радиус окружности.

Решение. С помощью теоремы косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$

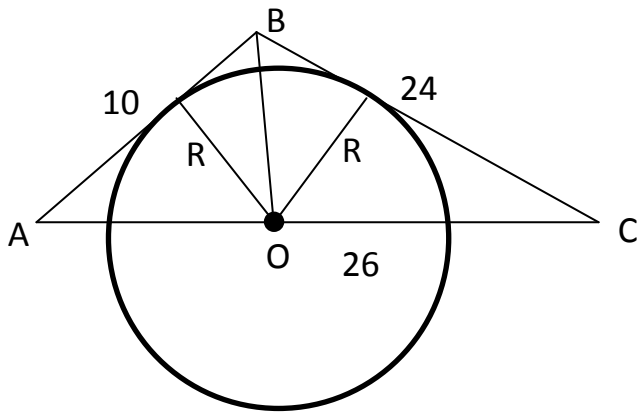

Рис. 17

найдем косинус угла B. Для этого подставим $c = 26, a = 10, b = 24$. Получим равенство: $26^2 = 10^2 + 24^2 - 2 \cdot 10 \cdot 24 \cdot \cos B$. Очевидно, $\cos B = 0$. Следовательно, угол B – прямой.

Вычислим площадь треугольника ABC.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120.$$

С другой стороны,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta BCO} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot R + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot R = 17R.$$

Следовательно, $17R = 120$, $R = \frac{120}{17}$.

Ответ: $R = \frac{120}{17}$.

10. Функции, область определения, область значений, графики

Область определения. Областью определения функции называется множество значений аргумента, при которых функция имеет смысл. Для функции $y = f(x)$ обозначим область определения как $D(y)$. Например, для функции $y = \sqrt{x}$ область определения $D(\sqrt{x}) = [0, +\infty)$. Перечислим области определения основных элементарных функций.

1. $D(\sqrt{x}) = [0, +\infty)$ *и для любого четного* $n = 2k$ $D(\sqrt[n]{x}) = [0, +\infty)$.

2. $D(\sqrt[3]{x}) = (-\infty; +\infty)$ *и для любого нечетного* $n = 2k + 1$ $D(\sqrt[n]{x}) = (-\infty; +\infty)$.

3. $D\left(\frac{1}{x-a}\right) = (-\infty; a) \cup (a; +\infty)$.

4. $D(\log_a x) = (0; +\infty)$.

5. $D(P\ \ (x)) = (-\infty; +\infty)$, где $P\ \ (x)$ – произвольный многочлен.

6. $D(a^x) = (-\infty; +\infty)$ при любом положительном a.

7. $D(\sin x) = D(\cos x) = (-\infty; +\infty)$.

8. $D\big(\mathrm{tg}(x)\big) = \left\{x \neq \pi n + \frac{\pi}{2}\right\}$, $D\big(\mathrm{ctg}(x)\big) = \{x \neq \pi n\}$.

9. $D(\arcsin x) = D(\arccos x) = [-1; 1]$.

10. $D\big(\mathrm{arctg}\,(x)\big) = D\big(\mathrm{arcctg}(x)\big) = (-\infty; +\infty)$.

Область значений. Областью значений E(y) функции y = f(x) называется множество всех чисел y_0, для каждого из которых существует такая точка $x_0 \in D(y)$, что $y_0 = f(x_0)$.

1. $E(kx + b) = (-\infty; +\infty)$. 2. $E(x^2) = [0; +\infty)$. 3. $E(x^3) = (-\infty; +\infty)$.

4. $E(ax^2 + bx + c) = [m; +\infty)$, при $a > 0$. $E(ax^2 + bx + c) = (-\infty; M]$, при $a < 0$. Здесь $m = min(ax^2 + bx + c)$, $M = max(ax^2 + bx + c)$.

5. $E(a^x) = (0, +\infty)$. 6. $E\big(log\, x) = (0; +\infty)$. 7. $E(\sqrt{x}\big) = [0; \infty)$.

8. $E\big(\sqrt[3]{x}\big) = (-\infty; +\infty)$. 9. $E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1]$.

10. $E(\mathrm{tg}\, x) = E(\mathrm{ctg}\, x) = (-\infty; +\infty)$.

11. $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

12. $E(\arccos x) = [0; \pi]$.

13. $E(\mathrm{arctg}\, x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. 14. $E(\mathrm{arcctg}\, x) = (0; \pi)$.

Четность и нечетность функций

Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство: $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Многие функции не являются ни четными, ни нечетными. Такие функции называются функциями **общего вида**. Функции могут быть четными или нечетными, только если область определения симметрична относительно начала координат.

Графики основных элементарных функций

а) Степенные функции

Рис. 19–23

$y = ax^2 + bx + c$

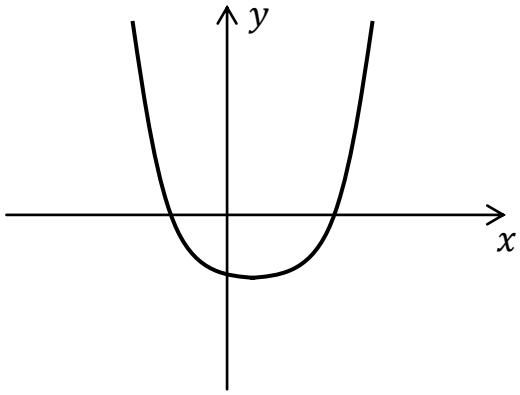

Рис. 18

$y = x^3$

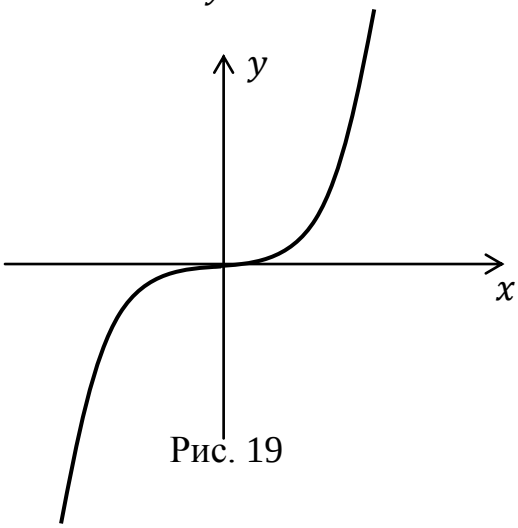

Рис. 19

$y = \sqrt{x}$

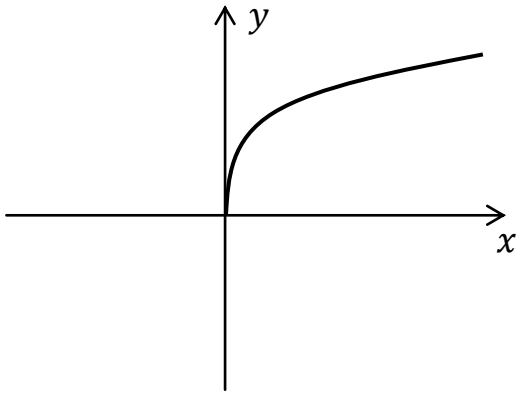

Рис. 20

$y = \sqrt[3]{x}$

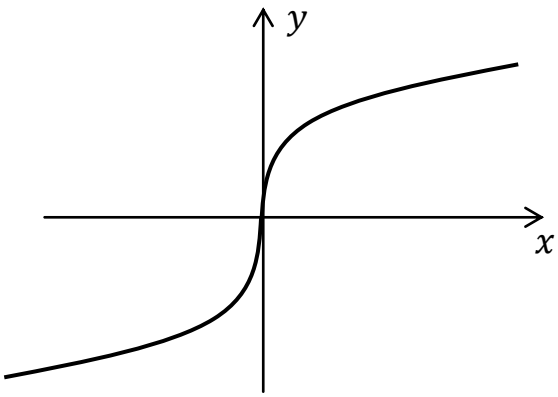

Рис.21

$y = \frac{1}{x}$

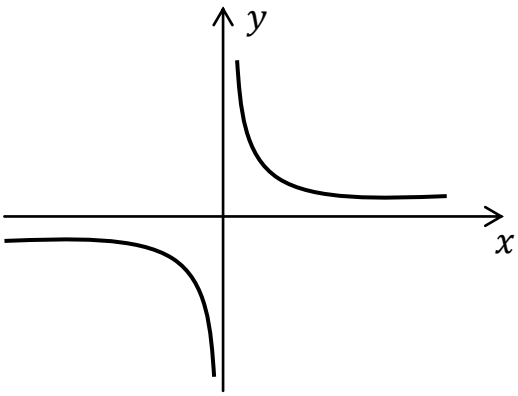

Рис. 22

$y = \frac{1}{x^2}$

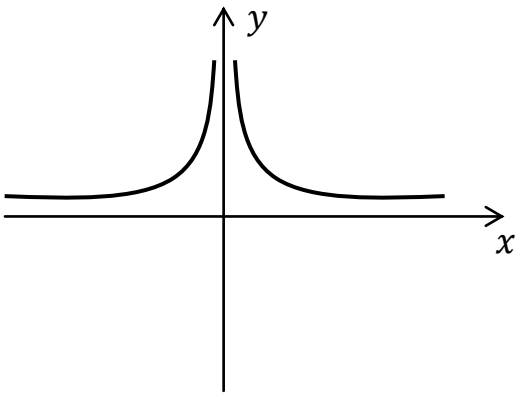

Рис.23

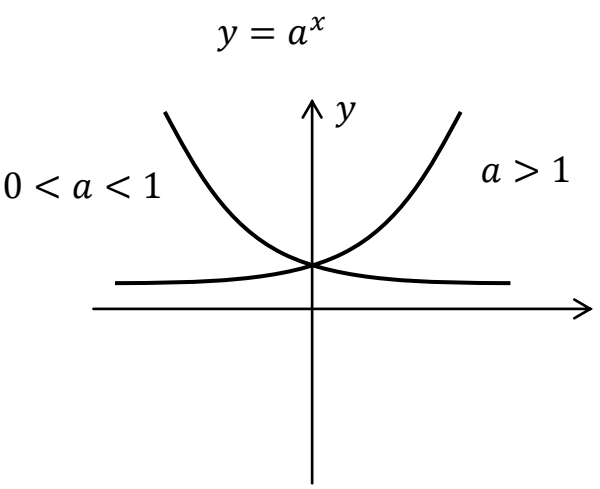

Рис. 24

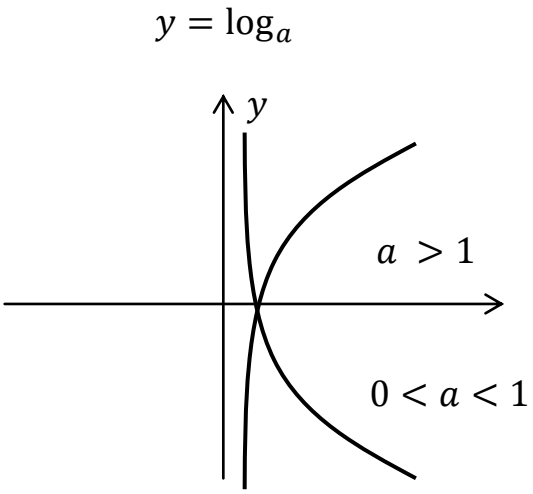

Рис. 25

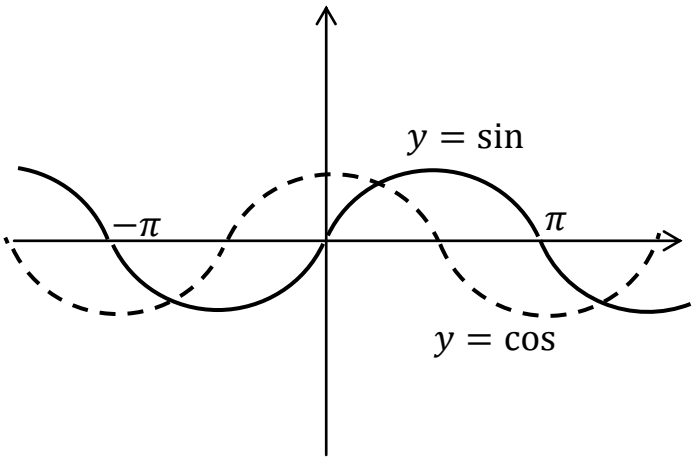

Рис. 26

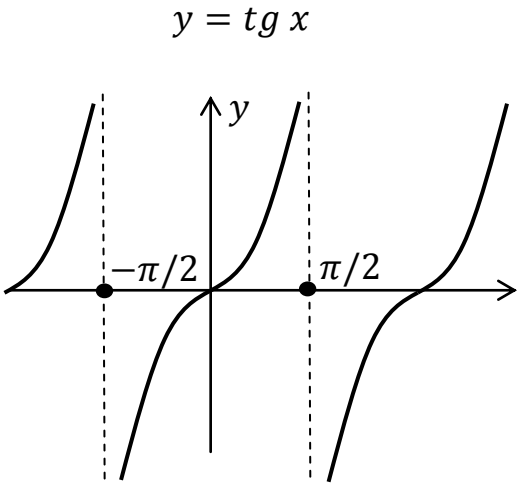

Рис. 27

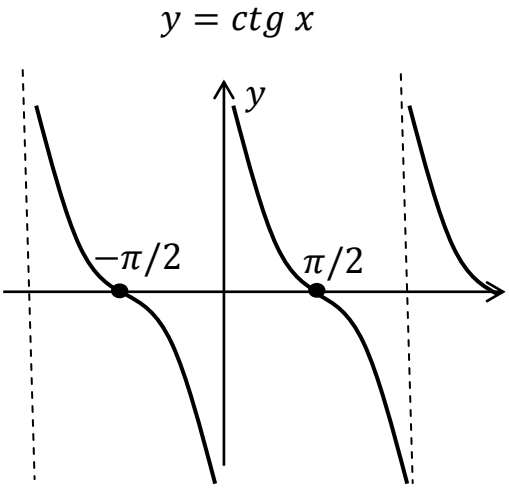

Рис. 28

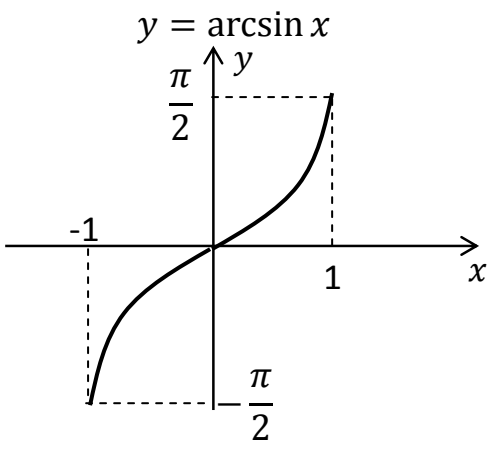

Рис. 29

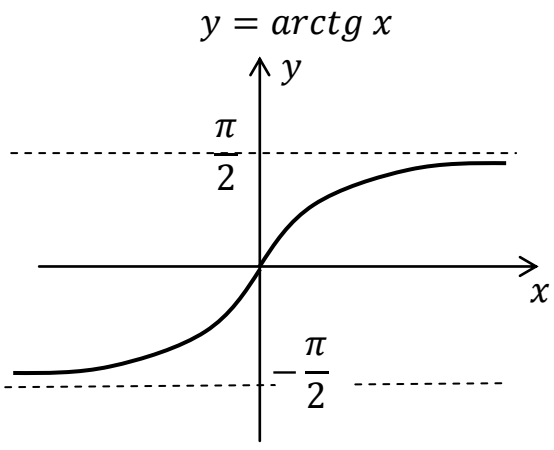

Рис. 30

ОТВЕТЫ

1.6. 1) $196 = 2^2 \cdot 7^2$; $324 = 2^2 \cdot 3^4$; $250 = 2 \cdot 5^3$. 2) НОК$(36;\ 45) = 180$; НОК$(224;\ 294) = 10584$; НОК$(225;\ 180) = 900$.

2.7. 1) 1,4; 2) 365, 625; 3) 36,825; 4) 22,75; 5) 10,6666.

3.6. 1) $a - 2$; 2) 0; 3) -1; 4) $\frac{a+b}{ab}$.

4.3. 1) $(x-4)\cdot(x-1)$; 2) $(x-1)\cdot(3\cdot x-2)$; 3) $(3\cdot x-1)^2$;
4) $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$; 5)$x_1 = -5, x_2 = 1$;6) $x_1 = -2, x_2 = 2$;
7) $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm 2$; 8) $x_1 = 7$; 9) $x_1 = 8$; 10)$x_1 = 3$; $x_2 = 16/11$.

4.5. 1) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. 2) $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1$.

4.7. 1) Первый поезд 45км/час, второй – 20км/час.
2) 30км/ч и 60 км/ч. 3) 45 *ч*. 4) 2,5 *кг*. 5) скорость первого – 24 км/час, второго – 18км/час. 6) через 27 дней после начала работ. 7) надо прибавить 1,5 *кг* олова. 8) нужно взять 40 *т* первого сорта и 100 *т* второго сорта. 9) 20% и 60%.

4.9. 1) Точки $(-3;-9)$, $(-1;-5)$. 2) а) $\{(4;\sqrt{3});(4;-\sqrt{3});(3;2);(3;-2)\}$.
б)$\{(0;0);(4;2);\ (-2;-4)\}$; в) $(0;\pm 10)$; $(\pm 8;\ -6)$.

5.2. 2) а) $3 - a$; б) -1; в) 1.

5.4. 1) $x_1 = 0$; $x_2 = 5$. 2) $x_1 = 1$; $x = -3$ – посторонний корень. 3) $x_1 = -4$; $x_2 = 4$. 4) $x_1 = 5$.

6.2. а) $x \in (2;\infty)$ б) $\emptyset$.

6.4. а) $(-\infty;\ +\infty)$; б) $(-3;4)$; в) $\{-1/3\}$; г)$(-\infty;\ +\infty)$; д) $\emptyset$.

6.6. а) $(-\infty;\ -3) \cup (-2;0) \cup (1;+\infty)$. б) $(-1;1) \cup (1;2)$. в) $(2;3)$. г) $(-\infty;-3) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$.

6.8. 4) $1 \le x \le 3$. 5) $x \le 4{,}5$. 6) $0 \le x \le 0{,}5$.

6.10. 1) $[1;2)$; 2) $(2;+\infty)$; 3) $[20/9\,;4) \cup (5;+\infty)$; 4) $[0;\ +\infty)$; 5) $(-0{,}5;\ 0]$; 6) $(1;\ +\infty)$.

7.2. 1) $x_1 = 2$; 2) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; 3) $x_1 = 0$; 4) $x_1 = 0$; 5) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$.

7.4. 1) Область определения $[0{,}2;\ \infty)$; 2) $\left[-\sqrt{3}\,;\ \sqrt{3}\right]$; 3) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right) \cup (1;\ \infty)$; 4) $(0;1)$.

8.3. **1**а) $x_1 = -11{,}75$; **1**б) $x_1 = 5$; **1**в) $x_1 = 6$; **1**г) $x_1 = -4$; $x_2 = 3$;
1д) $x_1 = 1$.

2а) Область определения $(0;1) \cup (2;\ +\infty)$. 2б) Область определения $(-1;0) \cup (0;3)$.

8.5. 1а) $x \in (-\infty;-5)$; 1б) $x \in (0;0{,}5)$; 1в) $x \in (4{,}99;5)$. 2а) Область определения $(-3;-\frac{2}{3}]$. 2б) Область определения $(1;\ +\infty)$.

3) $x \in (3;4) \cup (4;\infty)$. 4) $x \in \left(0;\frac{1}{3}\right) \cup (9;\infty)$.

Литература

1. Крамор В.С. Алгебра и начала анализа.– М.: Высшая школа, 1981.– 335 с.
2. Авилов Н.И., Дерезин С.В. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. ЭГЭ-2018 Математика. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов.– Ростов-на-Дону: ЛЕГИОН, 2017.– 416 с.

Содержание

Крепкогорский В.Л., Рахматуллина Е.С., Туктамышов Н.К.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Сборник задач
для слушателей курсов по подготовке
к поступлению в КГАСУ

Редактор В.Н. Сластникова

Издательство
Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Подписано в печать 11.12.18		Формат 60×84/16
Заказ № 331	Печать ризографическая	Усл. печ. л. 3,25
Тираж 50 экз.	Бумага офсетная № 1	Уч.-изд. л. 3,25

Отпечатано в полиграфическом секторе
Издательства КГАСУ.
420043, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1