МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Задачник по темам

«ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

для студентов очной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство» (бакалавриат)

Казань
2017

УДК 517.5
Г704
Горская Т. Ю.

С 704 Задачник по темам «Векторная алгебра. Аналитическая геометрия» для студентов очной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство» (бакалавриат). / Т.Ю. Горская. – Казань: Изд-во казанск. гос. архитек. – строит. ун-та, 2017. – 34с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Материал соответствует части программы по дисциплине Математика для студентов очной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство» (бакалавриат), связанных с векторной алгеброй и аналитической геометрией. Разделы содержат теоретический материал, ряд примеров, иллюстрирующих теорию и задачи для самостоятельного изучения. В конце приведен список литературы, рекомендуемой для более глубокого изучения материала.

Рецензенты
Канд. тех. наук, доц. кафедры ОМ К(П)ФУ А.Г.Багоутдинова
Доктор физ.-матем. наук проф. кафедры ВМ КГАСУ В. Л. Крепкогорский

УДК 517.564/.7
ББК 22.161

Содержание

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА РАЗЛОЖЕНИЕМ ПО СТРОКЕ ИЛИ СТОЛБЦУ

Определители второго и третьего порядков. Пусть даны четыре числа $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}$. *Определителем второго порядка* называют число, равное $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, где левая часть формулы – обозначение определителя.

Пусть даны девять чисел $a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33}$. *Определителем третьего порядка* называется число, определяемое формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Левая часть формулы – обозначение определителя третьего порядка. Числа $a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33}$ называются *элементами определителя.* Будем обозначать их a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца, к которым принадлежит элемент.

Примеры.

1. Вычислить определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 6 + 4 = 10.$$

2. Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

3. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (2 + 4) + 3 \cdot (4 + 6)$$
$$= -12 + 30 = 18.$$

4. Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & x^2 & 1 \\ 0 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & x^2 & 1 \\ 0 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & x^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & x^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x^4 - 1 + 5x^2 + 5 = x^4 + 5x^2 + 4 = 0.$$

По теореме Виета и теореме о разложении многочлена на множители имеем:

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 + 1) = 0.$$

Вещественных корней уравнение не имеет, но имеем четыре комплексных простых корня: $\pm 2i, \pm i$.

Задачи.

1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 1{,}5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} x+iy & y \\ 2x & x-iy \end{vmatrix}$

2. Вычислить определители третьего порядка:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

3. Решить уравнения.

1) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & x \end{vmatrix} = 0$ 2) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ x & x \end{vmatrix} = 3$ 3) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 6$

4) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\begin{vmatrix} 4 & x & x \\ x & 4 & x \\ x & x & 4 \end{vmatrix} = 0$ 6) $\begin{vmatrix} x & x & x \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$

Задачи для самостоятельного изучения.

1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 7 & 2{,}5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 2\sin a \cdot \cos a & 2\sin^2 a - 1 \\ 2\cos^2 a - 1 & 2\sin a \cdot \cos a \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & \sin a \\ \sin a & 1 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} x+iy & iy \\ 2ix & x-iy \end{vmatrix}$

2. Вычислить определители третьего порядка:

1) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & 1 \\ \sin b & \cos b & 1 \\ \sin c & \cos c & 1 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -6 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 9 & 16 & 4 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

3. Решить уравнения.

1) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$ 2) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$ 3) $\begin{vmatrix} x & x \\ 3 & x \end{vmatrix} = -2$

4) $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & 5 & x \\ x & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ x^2 & 4 & x^2 \\ 4 & x^2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ 6) $\begin{vmatrix} x & 4 & x \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$

4. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x+5 & x \end{vmatrix} < 0$ 2) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$ 3) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} > 0$

4) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 5) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$ 6) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} < 0$

2. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ, ИХ СВОЙСТВА. УСЛОВИЕ КОЛЛИНЕАРНОСТИ ВЕКТОРОВ КАК УСЛОВИЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ ИХ ПРОЕКЦИЙ

Вектором называется направленный отрезок прямой, соединяющий две точки в пространстве. Если A и B – начало и конец вектора, то он обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Длиной (модулем) вектора называется число, равное длине отрезка, соединяющего начало и конец вектора. Длина вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$ или $|\vec{a}| = a$. Если начало вектора совпадает с концом, то вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{O}$.

Операции над векторами.

1. Сложение векторов. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ перенесём параллельно самому себе и поместим его начало в конец вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.
Свойства сложения векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}; \qquad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}; \qquad \vec{a} + \vec{O} = \vec{a}.$$

2. Разность векторов. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построим эти векторы с началом в общей точке. Тогда вектор, начало которого совпадает с концом вектора $\vec{b}$, а конец – с концом вектора $\vec{a}$, называется *разностью векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

3. Умножение вектора на число. Даны вектор $\vec{a}$ и число λ. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор $\vec{c} = \lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$, который:

- коллинеарен $\vec{a}$;
- имеет длину $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
- направлен так же, как и $\vec{a}$, при $\lambda > 0$, и противоположно – при $\lambda < 0$.

Свойства умножения вектора на число:

- $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$;

- $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$;
- $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})=\mu\cdot(\lambda\cdot\vec{a})$.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями: $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$. Тогда справедливо: $\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$.

$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z)$. $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

Пусть в пространстве $Oxyz$ точки A и B заданы координатами $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$. Расстояние между точками определим следующим образом.

Так как координаты точки A равны проекциям на оси координат радиус-вектора этой точки, то $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\overrightarrow{OB}=(x_2;y_2;z_2)$. Тогда $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, но $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$. Значит, $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$. Отсюда видно, что проекции на оси координат вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала.

Зная проекции $\overrightarrow{AB}$, найдём длину вектора $\overrightarrow{AB}$, следовательно, и расстояние между точками A и B: $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Примеры.

1. Даны точки $A(3,4,6), D(-5,3,1)$. Найти расстояние между точками.

Решение. Вектор $\overrightarrow{AD}=(-5-3;3-4;1-6)=(-8;-1;-5)$.

$$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+(-5)^2}=3\sqrt{10}.$$

2. Даны векторы $\vec{a}=(3;2;-1), \vec{b}=(-2;1;0)$. Определить проекции вектора $2\vec{a}+3\vec{b}$.

Решение.

$$2\vec{a}+3\vec{b}=(2\cdot 3+3\cdot(-2);2\cdot 2+3\cdot 1;2\cdot(-1)+3\cdot 0)=(0;7;-2).$$

3. Определить координаты точки M, если ее радиус-вектор составляет с координатными осями одинаковые углы и его модуль равен 3.

Решение. Известно, что

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3,\quad \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma.$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{|OM|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|OM|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|OM|}\Longrightarrow$$

$$x = y = z \;\Longrightarrow\; \sqrt{3x^2} = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

Поэтому координаты точки М могут быть: $(\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\,)$; $(-\sqrt{3}\,;-\sqrt{3}\,;-\sqrt{3}\,)$.

4. Даны точки А(–1; 5; –10), В(5; –7; 8), С(2; 2; –7), D(5; –4; 2). Проверить, что вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Установить какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположную стороны.

Решение. Запишем координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \big(5—1\big); -7-5; 8—10 = (6; -12; 18)$. $\overrightarrow{CD} = \big(5-2; -4-2; 2—7\big) = (3; -6; 9)$. Видно, что координаты векторов пропорциональны и справедливо, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, следовательно, векторы коллинеарны. Так как коэффициент пропорциональности – есть число положительное, поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены.

Задачи.

1. Построить следующие точки по их декартовым координатам: А(3; 4; 6), В(–5; 3; 1), С(1; –3; –5), D(0; –3; 5), Е(–3; –5; 0), F(–1, –5; –3).
2. Даны два вектора $\vec{a}$ = (3; –2; 6) и $\vec{b}$ = (–2; 1; 0). Определить проекции на координатные оси следующих векторов: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $\frac{-\vec{b}}{2}$; 5) $2\vec{a} + 5\vec{b}$; 6)$\frac{\vec{a}}{3} + \vec{b}$.
3. Вычислить расстояние от начала координат О до точек: А(4; –2; –4), В(–4; 12; 6), С(12; –4; 3); D(12; 16 –15).
4. Даны вершины M_1(3; 2; –5), M_2(1; –4; 3), M_3(–3; 0; 1) треугольника. Найти середины его сторон.
5. Определить точку N, с которой совпадает конец вектора $\vec{a} = (3;\ -1; 4)$, если его начало совпадает с точкой М(1; 2; –3).
6. Определить при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ коллинеарны.

Задачи для самостоятельного изучения.

1. Найти расстояние между точками А и В, С и В, Е и F в декартовом пространстве: А(-3;2; 6), В(1; 3; 5), С(1; –3; –5), D(0; –3; 5), Е(–3; –5; 0), F(–1, –5; –3).

2. Даны два вектора $\overline{a}$=(3; –2; 6) и $\overline{b}$=(–2; 1; 0). Определить проекции на координатные оси следующих векторов: 1) $3\overline{a}+2\overline{b}$; 2) $4\overline{a}-3\overline{b}$; 3) $2\overline{a}$; 4) $\frac{1}{3}\overline{b}$; 5) $5\overline{a}+6\overline{b}$; 6) $5\overline{a}-\overline{b}$.
3. Вычислить расстояние от начала координат O до точек: A(4; –2; –4), B(–4; 12; 6), C(12; –4; 3); D(12; 16 –15).
4. Даны вершины M_1(3; 2; –5), M_2(1; –4; 3), M_3(–3; 0; 1) треугольника. Найти середины его сторон.
5. Определить точку N, с которой совпадает конец вектора $\vec{a}=(-3;1;2)$, если его начало совпадает с точкой M(1; 2; –3).
6. Определить при каких значениях α и β векторы $\vec{a}=2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+\beta\vec{k}$ и $\vec{a}=\alpha\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+3\vec{k}$ коллинеарны.

3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ, ЕГО СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ. УСЛОВИЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ВЕКТОРОВ. ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ обозначается $(\vec{a},\vec{b})$ (либо $\vec{a}\,\vec{b}$) и определяется как число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е.

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать также $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

- $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$;
- $(\lambda\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$, где λ – скалярный множитель;
- $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$.

Пусть векторы заданы своими проекциями: $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, поэтому $\vec{a}=a_x\vec{\imath}+a_y\vec{\jmath}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{\imath}+b_y\vec{\jmath}+b_z\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - базисные векторы, тогда скалярное произведение запишем в виде:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Таким образом, скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных проекций этих векторов.

Вычисление угла между векторами. Запишем $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через проекции. Тогда, используя $\cos\varphi = (\vec{a},\ \vec{b})/(|\vec{a}||\vec{b}|)$, имеем:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Зная $\cos\varphi$, найдем угол φ, $0 \le \varphi \le \pi$.

Условие ортогональности (перпендикулярности) двух векторов. Если для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b})=0$, то вектор $\vec{a}$ ортогонален вектору $\vec{b}$.

Условие ортогональности двух векторов можно записать также следующим образом:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Примеры.

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: 1) $(\vec{a}, \vec{b})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

Решение.

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| cos\varphi = 3 \cdot 4 \cdot cos\frac{2\pi}{3} = -6.$

2) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a}, \vec{a}) + 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot (-6) + |\vec{b}|^2 = 9 - 12 + 16 = 13.$

2. Дано, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Определить при каком значении α векторы $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

Решение.

Условие перпендикулярности векторов – это равенство нулю их скалярного произведения. Поэтому, запишем уравнение, из которого найдем искомое значение α:

$$(\vec{a} + \alpha\vec{b}, \vec{a} - \alpha\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - \alpha^2|\vec{b}|^2 = 0,$$

$$9 - \alpha^2 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{9}{25} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\frac{3}{5}.$$

3. Даны векторы $\vec{a}$ =(4; –2; –4), $\vec{b}$=(6; –3; 2). Вычислить:

1) $(\vec{a},\vec{b})$; 2) $(2\vec{a}-3\vec{b},\vec{a}+2\vec{b})$.

Решение.

1) $(\vec{a},\vec{b})=4\cdot 6+(-2)\cdot(-3)+(-4)\cdot 2=22.$

2) $(2\vec{a}-3\vec{b},\vec{a}+2\vec{b})=2(\vec{a},\vec{a})+4(\vec{a},\vec{b})-3(\vec{a},\vec{b})-6(\vec{b},\vec{b})=$

$$=2(4^2+(-2)^2+(-4)^2)+22-6(6^2+(-3)^2+2^2)=-200.$$

4. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a}$=(2; –4; 4) и $\vec{b}$=(–3; 2; 6).

Решение.

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-6-8+24}{\sqrt{4+16+16}\cdot\sqrt{9+4+36}}=\frac{10}{6\cdot 7}=\frac{5}{21}.$$

5. Найти проекцию вектора $\vec{s}$=($\sqrt{3}$; $-2\sqrt{2}$; –5) на ось, составляющую с координатными осями OX и OZ углы α=30°, γ=60°, а с осью OY – острый угол β.

Решение. Найдем ось l, составляющую с координатными осями OX и OZ углы α=30°, γ=60°, а с осью OY – острый угол β. Предварительно вычислим угол β из основного тригонометрического тождества:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\equiv 1$$

$$\cos^2 30^\circ+\cos^2\beta+\cos^2 60^\circ\equiv 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{4}+\cos^2\beta+\frac{1}{4}=1 \quad\Rightarrow$$

$$\cos^2\beta=0 \quad\Rightarrow\beta=90^\circ.$$

Таким образом, искомая ось определяется: $l=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2};0;\frac{1}{2}\right\}$.

$$\text{Пр}_l s=|s|\cos\left(\widehat{s,l}\right)=|s|\frac{(s,l)}{|s|\cdot|l|}=|(s,l)|.$$

Здесь учли, что направление, ось l, задано единичным вектором, однако, мы не знаем какой угол составляет вектор с осью, острый или тупой, поэтому поставили модуль. Следовательно,

$$(s,l)=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-2\sqrt{2}\right)\cdot 0+(-5)\cdot\frac{1}{2}=-1 \quad\Rightarrow\quad \text{Пр}_l s=1.$$

Задачи.

1. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{f}$=(–2;3; 5), когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A(2; –1; 4) в положение B(4; –2; –3).
2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}|$=3, $|\vec{b}|$ =4, вычислить:

   1)$(\vec{a}, \vec{a})$; 2) $(\vec{b}, \vec{b})$; 3) $(4\vec{a}-2\vec{b}, 3\vec{a}+2\vec{b})$; 4) $(\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b})$.
3. Даны векторы $\vec{a}$=(1; –2; 4), $\vec{b}$=(7; –3; 1). Вычислить:

   1) $\sqrt{(\vec{b}, \vec{b})}$; 2) $(3\vec{a}-2\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b})$; 3) $(\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b})$.
4. Даны вершины треугольника A(–5; –2; 7), B(–3; –2; 6) и C(3; –2; 0). Определить его внутренний угол при вершине B.
5. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a}$=(3; –1; 4) и $\vec{b}$=(–3; 7; 1).
6. Вычислить треугольник с вершинами в точках A(–1; 0; 8), B(5; –2; 0) и C(6; 1; 7).

Задачи для самостоятельного изучения.

1. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{f}$=(3; –2; –5), когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A(2; –3; 5) в положение B(3; –2; –1).
2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}|$=3, $|\vec{b}|$ =2, вычислить:

   1)$(\vec{a}, \vec{a})$; 2) $(\vec{b}, \vec{b})$; 3) $(4\vec{a}-2\vec{b}, 3\vec{a}+2\vec{b})$; 4) $(\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b})$.
3. Даны векторы $\vec{a}$=(4; –2; –4), $\vec{b}$=(6; –3; 2). Вычислить:

   1) $\sqrt{(\vec{b}, \vec{b})}$; 2) $(\vec{a}-2\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b})$; 3) $(\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b})$.
4. Даны вершины треугольника A(–1; –2; 4), B(–4; –2; 0) и C(3; –2; 1). Определить его внутренний угол при вершине B.

5. Найти проекцию вектора $\vec{s}$=($\sqrt{2}$; –3; –5) на ось, составляющую с координатными осями OX и OZ углы α=45°, γ=60°, а с осью OY – острый угол β.

6. Вычислить треугольник с вершинами в точках A(–5; 2; 7), B(4; –1; 0) и C(3; 2; 1).

4.ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ, ЕГО СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор (обозначаемый $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$), который обладает свойствами:

- $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, т. е. длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на $\vec{a}$, $\vec{b}$ как на сторонах;
- $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$, т. е. $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости указанного параллелограмма;
- вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ совершается против хода часовой стрелки.

Для векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ применяют и другие обозначения: $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-1)[\vec{b}\times\vec{a}];$$

$$[\lambda\vec{a}\times\vec{b}]=[\vec{a}\times\lambda\vec{b}]=\lambda[\vec{a}\times\vec{b}];$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями: $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$. Тогда векторное произведение определяется по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}..$$

Эту формулу можно записать так:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Условие коллинеарности двух векторов. Если для ненулевых векторов выполняется условие $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0},$ то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. В самом деле, если $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0},$ то $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi=0$ и $\sin\varphi=0$, т. е. $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$. Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ коллинеарны.

Примеры.

1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$; зная, что $\left|\bar{a}\right|=6$, $\left|\bar{b}\right|=5$, вычислить $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Решение.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sin\varphi=6\cdot 5\cdot sin\frac{\pi}{6}=15.$$

2. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$; зная, что $\left|\bar{a}\right|=1$, $\left|\bar{b}\right|=2$, вычислить:

$|(3\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-3\bar{b})|$.

Решение.

$$|(3\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-3\vec{b})|=|3\vec{a}\times\vec{a}-9\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}-3\vec{b}\times\vec{b}|=|-10\vec{a}\times\vec{b}|=$$

$$=10\cdot 1\cdot 2\cdot sin\frac{2\pi}{3}=10\sqrt{3}.$$

3. Даны векторы $\bar{a}$=(3; –1; –2) и $\bar{b}$=(1; 2; –1). Найти координаты векторных произведений:

$$1)\quad \vec{a}\times\vec{b};\qquad 2)\quad (\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b}).$$

Решение. 1) Согласно формуле, определяющей проекции векторного произведения, запишем:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}.$$

2)Воспользуемся свойствами векторного произведения, упростим и вычислим векторное произведение, использую результаты пункта 1):

$$(\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{a}+4\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}-2\vec{b}\times\vec{b}=-5\vec{a}\times\vec{b}=$$

$$=-5(5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k})=-25\vec{i}-5\vec{j}-35\vec{k}.$$

4. Даны точки A(1; 2; 0), B(3; 0; –3), C(5; 2; 6). Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение. Вычислим сначала координаты векторов $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},$ затем воспользуемся геометрическим смыслом длины векторного произведения.

$$\overrightarrow{AB} = (2; -2; -3), \qquad \overrightarrow{AC} = (4; 0; 6).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\vec{\imath} + 24\vec{\jmath} + 8\vec{k} = 4(-3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}).$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 4\sqrt{9 + 36 + 4} = 28.$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 14.$$

5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b},$ если известно, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2,\quad \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{6}.$

Решение. Искомая площадь вычисляется как

$$S = \left|\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} + \vec{b}\right)\right|.$$

$$\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} + \vec{b}\right) = 3\vec{a} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 3\vec{b} \times \vec{b} =$$

$$= -8\vec{a} \times \vec{b}.$$

Здесь учли, что $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},\ \vec{a} \times \vec{a} = 0,\ \vec{b} \times \vec{b} = 0.$ Таким образом,

$$S = \left|\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} + \vec{b}\right)\right| = \left|-8\vec{a} \times \vec{b}\right| = 8|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| sin\,\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16.$$

Задачи.

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; зная, что $|\vec{a}| = 3, \left|\vec{b}\right| = 3\sqrt{2},$ вычислить $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$
2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3, \left|\vec{b}\right| = 2,$ вычислить:
   $|(2\vec{a}+\vec{b})\times (\vec{a}-4\vec{b})|.$

3. Даны векторы $\vec{a}$=(1; –4; –2) и $\vec{b}$=(1; 0; –6). Найти координаты векторных произведений:

$$1)\quad \vec{a}\times\vec{b}; \qquad 2)\quad \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right).$$

4. Даны точки A(1; 2; 3), B(7; 0; –3), C(4; 5; 2). Вычислить площадь треугольника ABC.

5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+4\vec{b}$ и $2\vec{a}+\vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\frac{\pi}{6}$.

6. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$.

Задачи для самостоятельного изучения.

1. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+5\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$.
2. Найти модуль векторного произведения векторов $2\overline{a}$-3$\overline{b}$ и $\overline{a}$+2$\overline{b}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=7$, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\frac{\pi}{6}$.

3. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(-1;2;4)$, $B(4;3;2)$, $C(1;-2;5)$.

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=6\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+6\vec{k}$.
5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$-3$\overline{b}$ и $\overline{a}$+2$\overline{b}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3\sqrt{2}$, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\frac{\pi}{4}$.

6. Проверить с помощью векторного произведения, будут ли векторы $\vec{a}=2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-4\vec{k}$ и $\vec{b}=-6\vec{\imath}-9\vec{\jmath}+12\vec{k}$ коллинеарные.

5.СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ, ВЫЧИСЛЕНИЕ, ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ перемножим векторно и получим $\vec{d} = \vec{a}\times\vec{b}$. Этот вектор умножим скалярно на $\vec{c}$ и получим число $(\vec{d},\vec{c})$, которое называется *смешанным (векторно-скалярным) произведением трёх исходных векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и обозначается

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{d},\vec{c}) = ([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c}).$$

Когда векторы заданы своими проекциями $\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$, $\vec{c} = (c_x,\ c_y,\ c_z)$, тогда смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения. Смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{d},\vec{c}) = |\vec{d}\,||\vec{c}\,|\cos\varphi$. Но $|\vec{d}\,| = S$ и $h = |\vec{c}\,|\cos\varphi$. Поэтому $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = Sh = V$, где V – объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, составляющих правую тройку векторов.

Примеры.

1. Даны три вектора $\vec{a}$=(1; –1; 3), $\vec{b}$=(–2; 2; 1) и $\vec{c}$=(3; –2; 5). Вычислить

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Решение.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 - 3 - 18 + 2 - 10 = -7.$$

2. Доказать, что четыре точки A(1; 2; –1), B(0; 1; 5), C(–1; 2; 1) и D(2; 1;3) лежат в одной плоскости.

Решение. Соединим точки векторами $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}.$ Проверим, будут ли векторы компланарны.

$$\overrightarrow{AB} = (-1;-1;6), \qquad \overrightarrow{AC} = (-2;0;2), \qquad \overrightarrow{AD} = (1;-1;4).$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 2 - 0 - 2 - 8 = 0.$$

Так как смешанное произведение равно нулю, следовательно, данные четыре точки лежат на одной плоскости.

3. Даны вершины тетраэдра: A(2; 3; 1), B(4; 1; –2), C(6; 3; 7), D(–5; –4; 8). Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Решение. Известно, что объем тетраэдра можно вычислить по известной формуле, как $V = \frac{1}{3}S\cdot h$. Основанием тетраэдра служит треугольник *ABC*. Его площадь равна $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. С другой стороны, объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ от объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$. А тот, в свою очередь, численно равен смешанному произведению этих векторов. Поэтому длина высоты, опущенной из вершины D, вычисляется из формулы:

$$\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}h\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}.$$

Найдем смешанное и модуль скалярного произведений, предварительно вычислив проекции векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2;-2;3), \qquad \overrightarrow{AC} = (4;0;6), \qquad \overrightarrow{AD} = (-7;-7;7).$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 7(0 + 12 - 12 - 0 + 12 + 8) = 140.$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\vec{i} + 24\vec{j} + 8\vec{k} = 4(-3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}).$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = 4\sqrt{9 + 36 + 4} = 28.$$

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{140}{28} = 5.$$

4. Установить компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если $\vec{a}$=(2; –1; 2), $\vec{b}$=(1; 2; –3) и $\vec{c}$=(3; –4; 7).

Решение. Вычислим величину смешанного произведения заданных векторов.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & -4 & 7\end{vmatrix}=28-8+9-12-24+7=0.$$

Так как величина смешанного произведения равна нулю, то векторы компланарны.

5. Объем тетраэдра v=5, три его вершины находятся в точках A(2; 1; –1), B(3; 0; 1), C(2; –1; 3). Найти координаты четвертой вершины D,если известно, что она лежит на оси OY.

Решение. Так как вершина D лежит на оси OY, ее координаты можно записать как $(0; y; 0)$. Объем тетраэдра вычислим через смешанное произведение векторов, на ребрах которых построен тетраэдр, и запишем уравнение:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|=5.$$

$$\overrightarrow{AB}=(1;-1;2),\qquad \overrightarrow{AC}=(0;-2;4),\qquad \overrightarrow{AD}=(-2;y-1;1).$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 4\\ -2 & y-1 & 1\end{vmatrix}=-2+8-8-4(y-1)=2-4y.$$

$$|2-4y|=30.$$

$$2-4y=\pm30 \quad \Rightarrow y_1=-7;\quad y_2=6.$$

Таким образом, условию задачи соответствуют две точки:
$D_1(0;-7;0)$ и $D_2(0;6;0)$.

Задачи.

1. Показать, что векторы $\vec{a}=(2;5;\,-7)$, $\vec{b}=(1;1;\,-1)$, $\vec{c}=(1;2;\,2)$ компланарны.
2. Найти объем треугольной пирамиды, вершины которой в точках $A(2;5;\,-7)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;\,4)$, $D(5;5;\,6)$.
3. Дана пирамида, с вершинами в точках $A(0;5;0)$, $B(2;3;4)$, $C(6;2;\,4)$, $D(3;5;26)$.Найти длину высоты пирамиды, опущенной на грань *BCD*.
4. Показать, что точки $A(0;5;0)$, $B(2;3;4)$, $C(6;2;\,4)$, $D(3;5;26)$ лежат в одной плоскости.

5. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = -3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{a} = -\vec{\imath} + 3\vec{k}$.
6. Определите, при каком значении m векторы $\vec{a} = (m; 1; -m)$, $\vec{b} = (1; 0; -2)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$ будут компланарными.

Задачи для самостоятельного изучения.

1. Показать, что векторы $\vec{a} = (2; 5; -7)$, $\vec{b} = (1; 1; -1)$, $\vec{c} = (1; 2; 2)$ компланарны.
2. Найти объем треугольной пирамиды, вершины которой в точках $A(2; 5; -7)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$, $D(5; 5; 6)$.
3. Дана пирамида, с вершинами в точках $A(0; 5; 0)$, $B(2; 3; 4)$, $C(6; 2; 4)$, $D(3; 5; 2)$.Найти длину высоты пирамиды, опущенной на грань *BCD*.
4. Показать, что точки $A(0; 5; 0)$, $B(2; 3; 4)$, $C(6; -1; 12)$, $D(3; 5; 6)$ лежат в одной плоскости.
5. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = -3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{a} = -\vec{\imath} + 3\vec{k}$.
6. Определите, при каком значении m векторы $\vec{a} = (m; 1; -m)$, $\vec{b} = (1; 0; -2)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$ будут компланарными.

6.УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ДАННОМУ ВЕКТОРУ. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

Пусть в пространстве *Oxyz* задана плоскость, т. е. заданы:

- координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0, лежащей на этой плоскости;

- A, B, C – проекции на оси координат ненулевого вектора $\vec{N}=(A,B,C)$, перпендикулярного плоскости, который называется *нормальным вектором плоскости*. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ лежит на плоскости и поэтому перпендикулярен нормальному вектору $\vec{N}$ этой плоскости, следовательно, скалярное произведение этих векторов $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{N}\right)=0$. Выражая скалярное произведение через проекции векторов, получим уравнение:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Общее уравнение плоскости.

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

очевидно, что оно может быть получено также путем раскрытия скобок и приведения подобных членов из предыдущего уравнения.

Пусть в пространстве $Oxyz$ заданы две плоскости соответственно уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

тогда векторы $\vec{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{N_2}=(A_2,B_2,C_2)$ – нормальные векторы этих плоскостей. За угол φ между плоскостями примем один из двухгранных углов (образованных ими), равный углу между их нормальными векторами. Поэтому справедливо:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Если $A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2$, то плоскости параллельны между собой, так как коллинеарны их нормальные векторы.

Если $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$, то плоскости перпендикулярны между собой, так как перпендикулярны их нормальные векторы.

Примеры.

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n}=(1; -2; 3)$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, содержащей точку, и перпендикулярной заданному вектору, подставив координаты точки M_1, а вместо A,B,C - координаты нормального вектора, имеем:

$$1(x-2)-2(y-1)+3(z+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x-2y+3z+3=0.$$

2. Даны две точки $M_1(3;\ -1;\ 2)$ и $M_2(4;\ -2;\ -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей, через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение. Так как вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$перпендикулярен плоскости, его можно взять за ее нормальный вектор, для этого найдем проекции вектора$\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1;\ -1;\ -3),$$

$$1(x-3)-1(y+1)-3(z-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x-y-3z+2=0.$$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;\ -1;\ 3)$ и $M_2(3;\ 1;\ 2)$ параллельно вектору $\vec{a}=(3;\ -1;\ 4)$.

Решение. Так как вектор $\vec{a}$параллелен плоскости, можно утверждать, что вектор принадлежит плоскости. Вектор, соединяющий точки M_1 и M_2, тоже принадлежит этой же плоскости. Нам необходимо задать вектор, перпендикулярный плоскости векторов $\vec{a}$ и$\overrightarrow{M_1M_2}$. Таким вектором может стать векторное произведение векторов $\vec{a}$ и$\overrightarrow{M_1M_2}$. Сначала найдем проекции вектора$\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1;\ 2;\ -1),$$

$$\vec{N}=\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 4\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-7\vec{i}+7\vec{j}+7\vec{k}.$$

Тогда уравнение искомой плоскости будет:

$$-7(x-2)+7(y+1)+7(z-3)=0 \quad \Rightarrow \quad x-y-z=0.$$

4. Определить при каких значениях l и m следующая пара уравнений

$$\begin{cases} 2x+ly+3z-5=0,\\ mx-6y-6z+2=0.\end{cases}$$

будет определять параллельные плоскости.

Решение. Плоскости будут параллельны, если их нормальные вектора удовлетворяют условию: $A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2$. Тогда получим условия для нахождения неизвестных l и m:

$$\frac{2}{m}=\frac{l}{-6}=\frac{3}{-6} \quad \Rightarrow \quad l=3, \qquad m=-4.$$

5. Определить двугранные углы, образованные между плоскостями:

$$x + y + 2z - 7 = 0,$$
$$3x - 2y + z + 6 = 0.$$

Решение. Имеем $\overrightarrow{N_1} = (1; 1; 2)$, $\overrightarrow{N_1} = (3; -2; 1)$. Тогда, согласно формуле $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$, имеем:

$$\cos\varphi = \frac{3 - 2 + 2}{\sqrt{1 + 1 + 4}\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}.$$

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\right), \quad \varphi_2 = \pi - \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\right).$$

Задачи.

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\vec{n}$=(5; 0; –3).
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1(3; 4; –5) и параллельно двум векторам $\overrightarrow{a_1}$=(3; 1; –1) и $\overrightarrow{a_2}$=(1; –2; 1).
3. Определить при каком l уравнения $7x–2y–z = 0$ $\quad lx + y–3z–1 = 0$ будут определять перпендикулярные плоскости.
4. Определить двугранные углы, образованные пересечением плоскостей: $3y–z = 0, 2y + z = 0$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M_1(1; –1; –2) и M_2(3; 1; 1) перпендикулярно плоскости $x–2y + 3z–5 = 0$.
6. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M(–5; 2; –1) параллельно плоскости OYZ.

Задачи для самостоятельного изучения.

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки Q_1(3; –2; 5) и Q_2(2; 3; 1) параллельно оси OZ;
2. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x–6y + 3z + 120 = 0$ от координатного угла OXY.
3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M_1(2; –3; 3) параллельно плоскости OXY.
4. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки M_1(7; 2; –3) и M_2(5; 6; –4) параллельно оси OX;

5. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x – 3y + 6z – 12 = 0$ и координатными плоскостями.
6. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; -1; 1)$ перпендикулярно к двум плоскостям: $2x – z + 1 = 0, y = 0$.

7.ОБЩИЕ И КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Общие уравнения прямой в пространстве. Пусть в пространстве *Oxyz* две плоскости заданы уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2$ – известные числа. Пусть эти плоскости не параллельны (не выполняется условие параллельности плоскостей), тогда они пересекаются по прямой. Уравнения в этой системе являются уравнениями прямой пересечения двух плоскостей. Их называют *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Даны две точки $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$, лежащие на прямой. Координаты этих точек заданные числа. Нужно записать уравнения прямой, проходящей через эти две точки, как геометрическое место точек $M(x, y, z)$, для которых векторы $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1, z - z_1)$ $\overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$ будут коллинеарными. При этом вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$ можно назвать направляющим вектором прямой. Тогда уравнения запишется в виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пусть в пространстве $Oxyz$ две прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

соответственно. Здесь $x,\ y,\ z$ – текущие координаты, остальные величины – заданные числа: $x_1,\ y_1,\ z_1$ – координаты точки M_1 на первой прямой; $x_2,\ y_2,\ z_2$ – координаты точки M_2 на второй прямой; $m_1,\ n_1,\ p_1$ – проекции на оси координат направляющего вектора $\overrightarrow{a_1}$ первой прямой; $m_2,\ n_2,\ p_2$ – проекции на оси координат направляющего вектора $\overrightarrow{a_2}$ второй прямой.

За угол φ между этими прямыми примем угол между их направляющими векторами $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$.

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

По $\cos\varphi$ найдем угол φ, измеряемый от 0 до π.

Если $m_1/m_2=n_1/n_2=p_1/p_2$, то прямые будут параллельны, так как коллинеарны их направляющие векторы. Если $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$, то прямые - перпендикулярны, так как перпендикулярны их направляющие векторы.

Примеры.

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M(4; 1; –5) параллельно:

1) вектору $\bar{a}$=(7; –3; 1); 2) прямой $\frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-6}$.

Решение. 1) воспользуемся каноническим уравнением прямой, взяв $\vec{a}$ за направляющий вектор прямой.

$$\frac{x-4}{7}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+5}{1}.$$

2)Так как заданная прямая параллельна искомой, то направляющие векторы их могут совпадать, поэтому уравнение прямой будет:

$$\frac{x-4}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{-6}.$$

2. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки (3; –1; 2), (2; 1; 1).

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки, получим:

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y+1}{1+1}=\frac{z-2}{1-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

3. Составить канонические уравнения следующей прямой:

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$$

Решение. Для канонического уравнения необходимо знать точку, принадлежащую прямой и направляющий вектор её. Любое решение системы можно взять за точку на прямой, а векторное произведение нормальных векторов двух плоскостей, пересечением которых является прямая, может выступить на направляющий вектор искомой прямой. Итак, зададим для определенности $z=0$, тогда решим систему

$$\begin{cases} x-2y=4 \\ 3x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow 4x=8 \ \Rightarrow x=2, y=\frac{1}{2}(4-3x)=-1.$$

Имеем точку, с координатами $(2,-1{,}0\ )$.

$$\vec{q}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=4\vec{i}+14\vec{j}+12\vec{k}.$$

Таким образом, уравнение прямой будет в записано виде:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{12}.$$

4. Найти угол между прямыми:

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-9}{-7}$$

и

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+5}{8}=\frac{z+3}{1}$$

Решение. Угол между прямыми найдем по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{-20 + 32 - 7}{\sqrt{25 + 16 + 49}\sqrt{16 + 64 + 1}} = \frac{5}{27\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{27\sqrt{2}}.$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{27\sqrt{2}}\right).$$

5. Составить параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x - 2y - 3z + 5 = 0 \\ -2x + 3y - 5z - 6 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Для этого найдем любое решение системы и направляющий вектор прямой, как векторное произведение нормальных векторов пересечённых плоскостей. Предложим $z = 0$, тогда система имеет решение:

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ -y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Точка, лежащая на прямой может быть с координатами: $(3, 4, 0)$.

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\vec{i} + 11\vec{j} - \vec{k}.$$

Тогда параметрическое уравнение прямой запишем в виде:

$$\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 4 + 11t. \\ z = -t \end{cases}$$

Задачи.

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M(2; 0; –3) параллельно:

   1) вектору $\bar{a}$=(2; –3; 5); 2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$; 3) оси OX; 4) оси OY; 5) оси OZ.
2. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки (3; –1; 2), (2; 1; 1).
3. Составить канонические уравнения следующей прямой:

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$$

4. Доказать перпендикулярность прямых:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}, \quad 2x+3y+z-1=0$$

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; -5)$ перпендикулярно плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.
7. Найти проекцию точки $P(2;\ -1;\ 3)$ на прямую $x = 3t, y = 5t - 7, z = 2t + 2$.

Задачи для самостоятельного изучения.

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:
   1) (1; –2; 1), (3; 1; –1); 2) (3; –1; 0), (1; 0; –3); 3) (0; –2 ; 3), (3; –2; 1); 4) (1; 2; –4), (–1; 2; –4).
2. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки (0; 0; 1), (0; 1; –2).
3. Доказать перпендикулярность прямых:

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t-2 \\ z = -6t+1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$$

4. Найти острый угол между прямыми;

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -1; -1)$ перпендикулярно к прямой $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$.
6. Найти проекцию точки $P(5; 2; -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

8.УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ НА ПЛОСКОСТИ. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

Уравнение

$$Ax + By + D = 0$$

в пространстве $Oxyz$ определяет плоскость, параллельную оси Oz, с нормальным вектором $\vec{N} = (A, B, 0)$. Следовательно, на плоскости $z = 0$ имеем прямую линию, а уравнение это будем называть *общим уравнением прямой на плоскости*.

Пусть на плоскости Oxy две прямые заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + D_2 = 0$$

соответственно, при этом $A_1,\ B_1,\ D_1,\ A_2,\ B_2,\ D_2$ – заданные числа; $\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1)$, $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2)$ – нормальные векторы этих прямых. За угол φ между ними примем один из двух смежных углов, равный углу между нормальными векторами $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$ этих прямых.

Пусть в общем уравнении прямой $Ax + By + D = 0$ коэффициент $B \neq 0$. Тогда $y = -(A/B)x - D/B$. Обозначим через $b = -D/B$, $k = -A/B$, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b.$$

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и. $M_2(x_2, y_2)$ Тогда уравнение прямой, проходящей через них, запишется в виде:

$(y - y_1)/(y_2 - y_1) = (x - x_1)/(x_2 - x_1).$

Условие параллельности прямых. Если $A_1 / A_2 = B_1 / B_2$, то прямые параллельны, так как коллинеарны их нормальные векторы. Для прямых, заданных уравнениями через угловой коэффициент, записанное выше условие параллельности прямых можно представить в виде $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности прямых. Если имеет место равенство $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, то прямые перпендикулярны. Аналогично, условие перпендикулярности прямых запишем и так: $k_1 = -1/k_2$.

Примеры.

1. Написать уравнение прямой, пересекающую ось Oy в точке $B(0,-2)$ и образующую с положительным направлением оси Ox угол $\frac{\pi}{6}$.

Решение. Имеем $b = -2$, $k = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, поэтому уравнение прямой будет записано в виде: $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 2$.

2. Найти угловой коэффициент прямой $2x + 3y - 6 = 0$.

Решение. Для этого запишем уравнение прямой через угловой коэффициент, выразив их общего уравнения прямой y:

$$3y = 6 - 2x \implies y = \frac{-2}{3}x + 2.$$

Таким образом, угловой коэффициент уравнения прямой $k = \frac{-2}{3}$.

3. Найти угол между прямыми $2x - 3y + 5 = 0$ и $x + 2y - 3 = 0$.

Решение. Запишем их нормальные векторы. $\overrightarrow{N_1} = (2,-3), \overrightarrow{N_2} = (1,2)$. Так как угол между прямыми можно определить как угол между их нормальными векторами, то

$$\cos\varphi = \frac{2-6}{\sqrt{4+9}\sqrt{1+4}} = \frac{-4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} \implies \varphi = \pi - \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}}\right).$$

4. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $M(5,-1)$, а) параллельно, б) перпендикулярно прямой $6x - 2y + 3 = 0$.

Решение. а)если прямые параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны, тогда для второй прямой нормальным вектором может случить нормальный вектор параллельной ей прямой. Используя уравнение прямой, проходящей через точку, перпендикулярно вектору, имеем:

$$6(x-5) - 2(y+1) = 0 \implies 6x - 2y - 32 = 0.$$

б)когда прямые перпендикулярны, то в качестве направляющего вектора одной прямой можно взять нормальный вектор другой. Поэтому запишем каноническое уравнение искомой прямой:

$$\frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-2} \implies -2x + 10 = 6y + 6 \implies -2x - 6y + 4 = 0.$$

5. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки $A(-3,-1)$ и $B(1,7)$.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданные точки, имеем:

$$\frac{x+3}{1+3}=\frac{y+1}{7+1} \quad \Longrightarrow \quad 8(x+3)=4(y+1) \quad \Longrightarrow \quad 2x-y+2=0.$$

Задачи.

1. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки $A(3,-4)$ и $B(4,6)$.
2. Определить угловые коэффициенты прямых:
   а) $2x-8y+5=0$,
   б) $-x+4y-8=0$,
   в) $5x+4y-7=0$.
3. Найти угол между прямыми:
   а) $2x-8y+5=0, \quad 3x-y+8=0$.
   б) $-x+4y-8=0, \quad 2x+y-7=0$.
   в) $5x+4y-7=0, 2x-5y+9=0$.
4. Определить при каких значениях m прямые $mx-2y+7=0$ и $5x+3y-4=0$ будут параллельны, а при каких перпендикулярны.
5. Дан треугольник, вершины которого в точках $A(1,4), D(4,-3), C(7,9)$. Написать уравнение ее высоты CD.
6. Через пункты $A(3,1)$ и $B(9,7)$ проходит шоссейная дорога. Завод, находящийся в пункте $C(8,2)$ необходимо соединить дорогой, имеющей кротчайшее расстояние до шоссе. Написать уравнение этой дороги.
7. Перевозка 1 тонны груза на расстояние 200 км. стоит 5000 руб., а на расстояние 400 км – 9500 руб. написать уравнение линейной зависимости стоимости перевозки от расстояния.

Задачи для самостоятельного изучения.

1. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки $A(6,-8)$ и $B(1,5)$.
2. Определить угловые коэффициенты прямых:
   а) $-5x-4y+4=0$,

б) $3x + 7y - 2 = 0$,

в) $3x + 6y - 9 = 0$.

3. Найти угол между прямыми:

а) $7x - y + 5 = 0, \quad 3x - y + 8 = 0$.

б) $-2x + y - 8 = 0, \quad 2x + y - 4 = 0$.

в) $-2x + 3y - 1 = 0, \quad x - 5y + 6 = 0$.

4. Определить при каких значениях m прямые $4x - my + 7 = 0$ и $2x + 3y - 4 = 0$ будут параллельны, а при каких перпендикулярны.
5. Дан треугольник, вершины которого в точках $A(-1,4), D(5,-2), C(0,3)$. Написать уравнение ее высоты CD.
6. Через пункты $A(2,-1)$ и $B(5,8)$ проходит шоссейная дорога. Завод, находящийся в пункте $C(4,-2)$ необходимо соединить дорогой, имеющей кротчайшее расстояние до шоссе. Написать уравнение этой дороги.
7. Перевозка 1 тонны груза на расстояние 300 км. стоит 7000 руб., а на расстояние 500 км – 11500 руб. написать уравнение линейной зависимости стоимости перевозки от расстояния.

Литература

1. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 – 484с.

2. Бугров Я.Ф., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. 8-ое издание. Дрофа, 2006. – 914с.

3. Задания для практических занятий по темам «Векторная и линейная алгебра. Аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»/ Сост.: Н.В.Лапин, Л.А.Онегов. Казань: КГАСУ,2013 –35 с.

Горская Татьяна Юрьевна

Задачник по темам

«ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»
для студентов очной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство»
(бакалавриат)