МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

Задания для практических занятий по темам «Векторная и линейная алгебра. Аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

1 семестр

для студентов первого курса дневного отделения (бакалавриат) направлений подготовки 190100 – Наземные транспортно-технологические комплексы, 270800 – Строительство

Казань
2013

УДК 512.8,517
ББК 22.151.5
Л24

Л24 Задания для практических занятий по темам «Векторная и линейная алгебра. Аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» для студентов первого курса дневного отделения (бакалавриат) направлений подготовки 190100 – Наземные транспортно-технологические комплексы, 270800 – Строительство / Сост.: Н.В.Лапин, Л.А.Онегов.– Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.- строит. ун-та,2013 – 35 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Задания для практических занятий составлены в соответствии с программой по курсу математики для студентов 1 курса инженерно-строительных специальностей (бакалавриат) и содержит необходимые задания и ответы.

Рецензент

Профессор кафедры высшей математики КГАСУ
И.П.Семенов

УДК 512.8, 517
ББК 22.151.5

Векторная и линейная алгебра. Аналитическая геометрия

Занятие 1. Определители 2-го и 3-го порядка. Комплексные числа. Действия над комплексными числами.

Аудиторное задание:

1.(1204(1,3,5,7)) Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$.

Ответы: 1) 18; 2) 0; 3) 0; 4) 0.

2.(1205(1,3,5)) Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$.

Ответы: 1) x=12; 2) $x_1=-1$, $x_2=-4$; 3) Нет решения.

3.(1211,1213,1215) Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

Ответы: 1) –12; 2) 87; 3) –29.

4. Найти:

1) $Z_1 \pm Z_2$; 2) Z_1Z_2; 3) Z_1^2; 4) $\frac{z_1}{z_2}$, если $Z_1=-3+i$, $Z_2=6-5i$.

Ответы: 1) $3-4i$, $-9+6i$; 2) $-13+21i$; 3) $8-6i$; 4) $-\frac{23}{61}-\frac{9}{61}i$.

1. Построить точки, изображающие комплексные числа ± 1, $-2i$, $-1+i$, $2-3i$.
2. Найти модуль и аргументы комплексных чисел. Изобразить в виде векторов и представить в тригонометрической форме:

1) $-1-i$; 2) $\sqrt{3}-i$.

Ответы: 1) $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$; 2) $2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$.

3. Решить уравнения:

1) $x^2+25=0$; 2) $x^2-2x+5=0$; 3) $x^2-4x+13=0$.

Ответы: 1) $\pm 5i$; 2) $1\pm 2i$; 3) $2\pm 3i$.

Домашнее задание:

1.(1204(2,4,6,8)) Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2.(1205(2,4,6,8) Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$; 3) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$;

4) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$.

3.(1206(2,4)) Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$.

4.(1212,1214,1216) Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$.

5.(1234(2)) Решить уравнение:

$\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

6.(1235(2)) Решить неравенство:

$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

7. Построить точки, изображающие комплексные числа ± 2, $\pm 3i$, $3+2i$, $3-2i$.

8. Найти:

1) $Z_1 \pm Z_2$; 2) Z_1Z_2; 3) Z_1^2; 4) $\frac{z_1}{z_2}$, если $Z_1 = -4+2i$, $Z_2 = 3-i$.

9. Найти модуль и аргументы комплексных чисел. Изобразить в виде векторов и представить в тригонометрической форме:

1) ± 1; 2) $\pm i$; 3) $1+i$; 4) $-1+i$; 5) $\sqrt{3}+i$.

10. Решить уравнения:

1) $x^2+144=0$; 2) $x^2-2x+10=0$.

11. Повторить и записать в тетрадь основные формулы элементарной алгебры. Формулы сокращенного умножения. Действия над дробями.

Свойства степенных и показательных функций, свойства логарифмов. Основные формулы тригонометрии.

Ответы к домашнему заданию:

1. 1) 10; 2) –50; 3) $x_2 - x_1$; 4) 1.
2. 1) $x = 2$; 2) $x_1 = -\frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{3}{2}$; 3) $x = 2$; 4) $x = \frac{\pi(2n+1)}{6}$.
3. 1) $x \in (-10;\infty)$; 2) $x \in (-1;7)$.
4. 1) 29; 2) 0; 3) $2a^3$.
5. $x_1 = -10,\ x_2 = 2$.
6. $x \in (-6;-4)$.
8. 1) $-1+i$, $-7+3i$; 2) $-10+10i$; 3) $12-16i$; 4) $-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$.
9. 1) $\cos 0 + i\sin 0$, $\cos\pi + i\sin\pi$; 2) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$;

   3) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$; 4) $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$; 5) $2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.
10. 1) +_12i , 2) 1+_3i

Занятие 2. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение.

Аудиторное задание:

1. (719) Построить следующие точки по их декартовым координатам: A(3; 4; 6), B(–5; 3; 1), C(1; –3; –5), D(0; –3; 5), E(–3; –5; 0), F(–1, –5; –3).
2. (726) Даны точки: A(1; –2; –3), B(2; –3; 0), C(3; 1; –9), D(–1; 1; 12). Вычислить расстояние между 1) A и C; 2) B и D; 3) C и D.

Ответы: 1) 7; 2) 13; 3) 5.

3. (750) Даны точки A(3; –1; 2) и B(–1; 2; 1). Найти координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

Ответ: $\overline{AB}$ =(–4; 3; –1); $\overline{BA}$ =(4; –3; 1).

4. (760) Определить координаты точки M, если ее радиус-вектор составляет с координатными осями одинаковые углы и его модуль равен 3.

Ответ: ($\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$); ($-\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$).

5. (775) Даны два вектора $\overline{a}$ =(3; –2; 6) и $\overline{b}$ =(–2; 1; 0). Определить проекции на координатные оси следующих векторов: 1) $\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{a}-\overline{b}$; 3) $2\overline{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\overline{b}$; 5) $2\overline{a}+3\overline{b}$; 6) $\frac{1}{3}\overline{a}-\overline{b}$.

Ответы: 1) (1; –1; 6); 2) (5; –3; 6); 3) (6; –4; 12); 4) (1; $\frac{1}{2}$; 0); 5) (0; –2; 12); 6) (3; $-\frac{5}{3}$; 2).

6. (779) Даны точки A(–1; 5; –10), B(5; –7; 8), C(2; 2; –7), D(5; –4; 2). Проверить, что вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны. Установить какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположную стороны.

Ответ: $\overline{AB}$ в 2 раза длиннее $\overline{CD}$, направлены в одну сторону.

7. (795(1,4)) Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; зная, что $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, вычислить:

1) ($\overline{a}$, $\overline{b}$); 2) ($\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}+\overline{b}$).

Ответ 1) –6; 2) 13.

8. (803) Дано, что $|\overline{a}|$=3, $|\overline{b}|$=5. Определить при каком значении α векторы $\overline{a}+\alpha\overline{b}$ и $\overline{a}-\alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

Ответ: $\alpha=\pm\frac{3}{5}$.

9. (812(1,2,4)) Даны векторы $\overline{a}$=(4; –2; –4), $\overline{b}$=(6; –3; 2). Вычислить:

1) ($\overline{a}$, $\overline{b}$); 2) $\sqrt{(\overline{a},\overline{a})}$; 3) ($2\overline{a}-3\overline{b}$, $\overline{a}+2\overline{b}$).

Ответы: 1) 22; 2) 6; 3) –200.

10. (815) Вычислить, какую работу производит сила $\overline{f}$=(3; –2; –5), когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A(2; –3; 5) в положение B(3; –2; –1).

Ответ: 31.

11. (819) Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$=(2; –4; 4) и $\overline{b}$=(–3; 2; 6).

Ответ: $\cos\varphi=\frac{5}{21}$.

Домашнее задание:

1. (727) Вычислить расстояние от начала координат O до точек: A(4; –2; –4), B(–4; 12; 6), C(12; –4; 3); D(12; 16 –15).
2. (735) Даны вершины M_1(3; 2; –5), M_2(1; –4; 3), M_3(–3; 0; 1) треугольника. Найти середины его сторон.
3. (751) Определить точку N, с которой совпадает конец вектора $\overline{a}$=(3; –1; 4), если его начало совпадает с точкой M(1; 2; –3).

4. (777) Определить при каких значениях α и β векторы $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ и $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ коллинеарны.

5. (795(2,3,5,6)) Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$; зная, что $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, вычислить:

   1) $(\bar{a},\bar{a})$; 2) $(\bar{b},\bar{b})$; 3) $(3\bar{a}-2\bar{b},\bar{a}+2\bar{b})$; 4) $(\bar{a}-\bar{b},\bar{a}-\bar{b})$.
6. (812(3,5,6)) Даны векторы $\bar{a}$=(4; –2; –4), $\bar{b}$=(6; –3; 2). Вычислить: 1) $\sqrt{(\bar{b},\bar{b})}$; 2) $(\bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}+\bar{b})$; 3) $(\bar{a}-\bar{b},\ \bar{a}-\bar{b})$.

7. (820) Даны вершины треугольника A(–1; –2; 4), B(–4; –2; 0) и C(3; –2; 1). Определить его внутренний угол при вершине B.
8. (830) Найти проекцию вектора $\bar{s}$=($\sqrt{2}$; –3; –5) на ось, составляющую с координатными осями OX и OZ углы α=45°, γ=60°, а с осью OY – острый угол β.

Ответы:
1. OA=6; OB=14; OC=13; OD=25.
2. (2; –1; 1); (–1; –2; 2); (0; 1; –2).
3. N(4; 1; 1).
4. α=4; β=–1.
5. 1) 9; 2) 16; 3) –61; 4) 37.
6. 1) 7; 2) 129; 3)41.
7. 45°.
8. –3.

Занятие 3. Векторное и смешанное произведение векторов.

Аудиторное задание:

1. (839) Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$; зная, что $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 5$, вычислить $|[\bar{a},\bar{b}]|$.

Ответ: 15.

2. (843) Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$; зная, что $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, вычислить:

1) $[\bar{a},\bar{b}]^2$, т. е. $([\bar{a},\bar{b}], [\bar{a},\bar{b}])$; 2) $[2\bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}+2\bar{b}]^2$; 3) $[\bar{a}+3\bar{b}, 3\bar{a}-\bar{b}]^2$.

Ответы: 1) 3; 2) 27; 3) 300.

3. (850(1,3)) Даны векторы $\bar{a}$=(3; –1; –2) и $\bar{b}$=(1; 2; –1). Найти координаты векторных произведений:

1) $[\overline{a}, \overline{b}]$; 2) $[2\overline{a}-\overline{b}, 2\overline{a}+\overline{b}]$.

Ответы: 1) (5; 1; 7); 2) (20; 4; 28).

4. (857) Даны точки A(1; 2; 0), B(3; 0; −3), C(5; 2; 6). Вычислить площадь треугольника ABC.

Ответ: 14 кв. ед.

5. (873) Даны три вектора $\overline{a}$=(1; −1; 3), $\overline{b}$=(−2; 2; 1) и $\overline{c}$=(3; −2; 5). Вычислить $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$.

Ответ: −7.

6. (875) Доказать, что четыре точки A(1; 2; −1), B(0; 1; 5), C(−1; 2; 1) и D(2; 1;3) лежат в одной плоскости.
7. (877) Даны вершины тетраэдра: A(2; 3; 1), B(4; 1; −2), C(6; 3; 7) и D(−5; −4; 8). Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Ответ: 11.

Домашнее задание:

1. (842) Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ взаимно перпендикулярны, зная, что $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, вычислить:

1) $|[\overline{a}+\overline{b}, \overline{a}-\overline{b}]|$; 2) $|[3\overline{a}-\overline{b}, \overline{a}-2\overline{b}]|$.

2. (850(2)) Даны векторы $\overline{a}$=(3; −1; −2) и $\overline{b}$=(1; 2; −1). Найти координаты векторного произведения: $[2\overline{a}+\overline{b}, \overline{b}]$.
3. (874(3)) Установить компланарны ли векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, если $\overline{a}$=(2; −1; 2), $\overline{b}$=(1; 2; −3) и $\overline{c}$=(3; −4; 7).
4. (878) Объем тетраэдра v=5, три его вершины находятся в точках A(2; 1; −1), B(3; 0; 1), C(2; −1; 3). Найти координаты четвертой вершины D,если известно, что она лежит на оси OY.
5. Подготовка к КР1.Ч.1 «Векторная алгебра».

Ответы:

1. 1) 24; 2) 60.
2. (10; 2; 14).
3. Компланарны.
4. $D_1(0; 8; 0)$, $D_2(0; -7; 0)$.

Занятие 4. Уравнение плоскости. КР1.Ч.1 «Векторная алгебра».

Аудиторное задание:

1. (913) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $\overline{n}$=(1; −2; 3).

Ответ: x−2y+3z+3=0.

2. (916) Даны две точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей, через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Ответ: $x-y-3z+2=0$.

3. (919) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\bar{a}=(3; -1; 4)$.

Ответ: $x-y-z=0$.

4. (926(1)) Определить при каких значениях l и m следующая пара уравнений $2x+ly+3z-5=0$,
   $mx-6y-6z+2=0$

будет определять параллельные плоскости.

Ответ: $l=3$; $m=-4$.

5. (932) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; -1; 1)$ перпендикулярно к двум плоскостям: $2x-z+1=0$, $y=0$.

Ответ: $x+2z-4=0$.

6. (940(1)) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; -3; 3)$ параллельно плоскости OXY.

Ответ: $z-3=0$.

7. (942(1)) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(7; 2; -3)$ и $M_2(5; 6; -4)$ параллельно оси OX;

Ответ: $y+4z+10=0$.

8. (947) Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

Ответ: 8 куб. ед.

Домашнее задание:

1. (914) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\bar{n}=(5; 0; -3)$.
2. (917) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3; 4; -5)$ и параллельно двум векторам $\bar{a}_1=(3; 1; -1)$ и $\bar{a}_2=(1; -2; 1)$.
3. (927(3)) Определить при каком l уравнения $7x-2y-z=0$
   $lx+y-3z-1=0$
   будут определять перпендикулярные плоскости.
4. (928(2)) Определить двугранные углы, образованные пересечением плоскостей: $3y-z=0$, $2y+z=0$.
5. (934) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -1; -2)$ и $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно плоскости $x-2y+3z-5=0$.
6. (940(3)) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(-5; 2; -1)$ параллельно плоскости OYZ.
7. (942(3)) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $Q_1(3; -2; 5)$ и $Q_2(2; 3; 1)$ параллельно оси OZ;
8. (946) Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x-6y+3z+120=0$ от координатного угла OXY.

Ответы:

1. $5x-3z=0$;

2. x+4y+7z+16=0;
3. $-\frac{1}{7}$;
4. $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$;
5. 4x–y–2z–9=0;
6. x+5=0;
7. 5x+y–13=0;
8. 240 кв. ед.

Занятие 5. Уравнение прямой в пространстве.

Аудиторное задание:

1. (1007) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M(2; 0; –3) параллельно:

1) вектору $\bar{a}$=(2; –3; 5); 2) прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$; 3) оси OX; 4) оси OY; 5) оси OZ.

Ответы: 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$;
4) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$.

2. (1010(1)) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки (3; –1; 2), (2; 1; 1).

Ответ: x=t+2; y=–2t+1; z=t+1.

3. (1019(1)) Составить канонические уравнения следующей прямой:

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$ положить z_0=0.

4. (1022(1)) Доказать перпендикулярность прямых:

$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$

5. (1040(1)) Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$

Ответ: (2; –3; 6).

6. (1042)Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0(2; –3; –5) перпендикулярно плоскости 6x–3y–5z+2=0.

Ответ: $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$.

7. (1050) Найти проекцию точки P(2; −1; 3) на прямую x=3t, y=5t−7, z=2t+2.
Ответ: (3; −2; 4).
8. (1054) Найти точку Q, симметричную точке P(1; 3; −4) относительно плоскости 3x+y−2z=0.
Ответ: Q(−5; 1; 0).

Домашнее задание:

1. (1008) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

1) (1; –2; 1), (3; 1; –1); 2) (3; –1; 0), (1; 0; –3); 3) (0; –2 ; 3), (3; –2; 1); 4) (1; 2; –4), (–1; 2; –4).

2. (1010(3)) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки (0; 0; 1), (0; 1; –2).
3. (1022) Доказать перпендикулярность прямых:

$$\begin{matrix} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = -6t + 1 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$$

4. (1023) Найти острый угол между прямыми;

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$$

5. (1043) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -1; -1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$.
6. (1053) Найти проекцию точки P(5; 2; −1) на плоскость 2x−y+3z+23=0.

Ответы:

1. 1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$; 2) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$; 3) $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{-2}$;
   4) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{0}$.
2. x=0; y=t; z=–3t+1.
4. 60^{o}.
5. 2x−3y+4z−1=0.
6. (1; 4; –7).

Занятие 6. Кривые 2-го порядка. Поверхности 2-го порядка.

Аудиторное задание:

1. (385(2,4)) Составить уравнение окружности:

1) центр окружности совпадает с точкой C(2; –3) и ее радиус R=7;
2) окружность проходит через точку A(2; 6) и ее центр совпадает с точкой C(−1; 2).

Ответы: 1) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$; 2) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

2. (397(1,3,5)) Какие из уравнений определяют окружности. Найти центр C и радиус R каждой из них:

1) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$; 3) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

Ответы: 1) C(5; –2), R=5; 2) точка (5; –2); 3) C(1; –2), R=5.

3. (444(1,3,5)) Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его полуоси равны 5 и 2; 2) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами 2c=10; 3) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

Ответы: 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; 3) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

4. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти:

1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет.

Ответы: 1) 5 и 3; 2) $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$; 3) $\varepsilon = \frac{4}{5}$.

5. (515(1,3,5)) Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) ее оси 2a=10 и 2b=8;
2) расстояние между фокусами 2c=6 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
3) уравнение асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами 2c=20.

Ответы: 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 3) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

6. (519(1-4)) Дана гипербола $16x^2-9y^2=144$. Найти:

1) полуоси a и b; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

Ответы: 1) a=3, b=4; 2) $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$; 3) $\varepsilon = \frac{5}{3}$; 4) $y = \pm\frac{4}{3}x$.

7. (583(3,4)) Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная что:

1) парабола находится верхней полуплоскости симметрично относительно оси OY, и ее параметр $p=\frac{1}{4}$;
2) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси OY и ее параметр p=3.

Ответы: 1) $x^2=\frac{1}{2}y$; 2) $x^2=-6y$.

8. (584(1-4)) Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:

1) $y^2=6x$; 2) $x^2=5y$; 3) $y^2=-4x$; 4) $x^2=-y$.

Ответы:
1) p=3; в правой полуплоскости симметрично оси OX;
2) p=2,5; в верхней полуплоскости симметрично оси OY;
3) p=2; в левой полуплоскости симметрично оси OX;
4) p=$\frac{1}{2}$; в нижней полуплоскости симметрично оси OY.

9. (471(1),541(1)) Построить кривые 2-го порядка,найти их параметры.
1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$,
2) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$.

Ответы: 1)эллипс, C(3; −1)-центр эллипса, полуоси 3 и $\sqrt{5}$, $\varepsilon=\frac{2}{3}$,

2)гипербола, C(2;-3)-центр гиперболы, a=3, b=4,

10. (598(1,3)) Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу и найти координаты ее вершины A, величину параметра p:
1) $x=2y^2-12y+14$; 2) $x=-y^2+2y-1$.

Ответы: 1) A(−4; 3), p=$\frac{1}{4}$; 2) A(0; 1), p=$\frac{1}{2}$.

11. Поверхности 2-го порядка (уравнения и чертежи).

Домашнее задание:

1. (385(1,5)) Составить уравнение окружности:
1) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус R=3;
2) точки A(3; 2) и B(−1; 6) являются концами одного из диаметров окружности.
2. (397(2,4,6)) Какие из уравнений определяют окружности. Найти центр C и радиус R каждой из них:
1) $(x+2)^2+y^2=64$; 2) $x^2+(y-5)^2=5$; 3) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$.
3. (444(2,4,6)) Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
1) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 2c=8;
2) расстояние между фокусами 2c=6 и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$;
3) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{12}{13}$.
4. (446(5)) Определить полуоси эллипса $4x^2+9y^2=25$.
5. (515(2,4) Составить уравнение гиперболы, если:
1) расстояние между фокусами 2c=10 и ось 2b=8;
2) ось 2a=16 и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{4}$.
6. (583(1,2)) Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная что:

1) парабола находится правой полуплоскости симметрично относительно оси OX, и ее параметр p=3;
2) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси OX и ее параметр p=0,5.

7. (471(2)) Установить, что уравнение $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$ определяет эллипс, и найти координаты его центра C, полуоси, эксцентриситет .
8. (472(2)) Установить какая линия определяется уравнением:
$y=1-\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$. Изобразить линию на чертеже.
9. (541(2)) Установить, что уравнение $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$ определяет гиперболу и найти координаты ее центра C, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот .
10. 588(чет) Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y=\sqrt{-x}$; 2) $y=-2\sqrt{x}$; 3) $x=-5\sqrt{-y}$; 4) $x=4\sqrt{-y}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

11. (598(2)) Установить, что уравнение $x=-\frac{1}{4}y^2+y$ определяет параболу и найти координаты ее вершины A, величину параметра p.
12. (542(2)) Установить линию определяющуюся уравнением
$y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$.
13. (673(4)) Определить тип уравнения $4x^2-y^2+8x-2y+3=0$. И сделать чертеж.

Ответы:

1. 1) $x^2+y^2=9$; 2) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$;
2. 1) C(–2; 0), R=8; 2) C(0; 5), R=$\sqrt{5}$; 3) уравнение не определяет никакого геометрического образа на плоскости;
3. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$;
4. $\frac{5}{2}$ и $\frac{5}{3}$;
5. 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, 2) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.
6. 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-x$;
7. C(−1; 2), полуоси 5 и4, $\varepsilon=\frac{3}{5}$.
8. Половина эллипса $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$, расположенная над прямой y−1=0;
9. C(−5; 1), a=8, b=6, $\varepsilon=1{,}25$, уравнения асимптот: 3x+4y+11=0, 3x−4y+19=0.

10. 1) часть параболы $y^2=-x$, расположенная во втором координатном углу; 2) часть параболы $y^2=4x$, расположенная в четвертом координатном углу; 3) часть параболы $x^2=-25y$, расположенная в третьем координатном углу; 4) часть параболы $x^2=-16y$, расположенная в четвертом координатном углу;
11. A(1; 2), p=2;
12. Часть гиперболы $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-7)^2}{9}=-1$, расположенная над прямой $y-7=0$;
13. Гиперболическое уравнение; определяет вырожденную гиперболу – пару пересекающихся прямых: $2x-y+1=0$ и $2x+y+3=0$.

Занятие 7. Матрицы, действия над ними. Обратная матрица. Решение систем уравнений с помощью матриц, по формулам Крамера.

Аудиторное задание:

1. Найти матрицу A+B, если A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: A+B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу 5A–2B, если A=$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Найти AB и BA, если A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: AB=$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, BA=$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -2 & 5 & -4 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$.

4. Найти AB, если A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: AB=$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

5. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему уравнений матричным методом (используя результаты примера 6) и по формулам Крамера :

1) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -2x + y + z = -1 \\ 2x - y + 4z = -4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ -2x + y + z = -5 \\ 2x - y + 4z = 10 \end{cases}$

Ответы: 1) x=1, y=2, z=–1; 2) x=2, y=–2, z=1.

Домашнее задание:

1. Найти матрицу A+2B, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу $2A^2+AB$, если $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему уравнений матричным методом (используя результаты примера 3) и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x + 3y = -2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

Ответы:

1. $\begin{pmatrix} 7 & 11 & 3 \\ 12 & -6 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$; 3) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 6/13 & -5/13 & 3/13 \\ -2/13 & 6/13 & -1/13 \\ 1/13 & -3/13 & 7/13 \end{pmatrix}$; 4) x=1, y=–1, z=2.

Занятие 8. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. КР1.Ч.2 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Аудиторное задание:

Решить системы уравнений.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

Ответ: (1; 2; 3).

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$

Ответ: система имеет бесконечное множество решений, связанных формулами: $x_1 = -\frac{11}{4} + 13x_4 - \frac{31}{8}x_5$; $x_2 = -\frac{3}{8} - \frac{27}{16}x_5$; $x_3 = -1 + 5x_4 - \frac{3}{2}x_5$; x_4 и x_5 – любые действительные числа.

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

Ответ: система несовместна.

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$

Ответ: (1; 2; 3).

Домашнее задание:

Решить системы уравнений.

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_1+3x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-2x_2-x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+2x_4=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ -x_1-x_2+2x_3=-1 \\ x_1+3x_2=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2-3x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3=7 \\ 3x_1+x_2-2x_3=5 \end{cases}$

Ответы: 1. (1; 2; 3); 2. система имеет бесконечное множество решений, связанных формулами: $x_1=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}x_3$; $x_2=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}x_3$; $x_4=-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}x_3$; x_3 – любое действительное число; 3. система несовместна; 4. (2; 1; 1).

Литература

1. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. – М.:Физматлит,2009.– 484 с.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 176 с.
3. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975. – 240 с.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Занятие 9. Понятие функции, область определения. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, (∞-∞).

Аудиторное задание:

1. (9(а)). Дана функция $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$. Найти: f(0); f(1);f(2);

   f(-2); f($-\frac{1}{2}$); f($\sqrt{2}$); $\left|f(\frac{1}{2})\right|$. Существует ли f(-1)?

Ответ: f(0)=-2; f(1)=-0,5; f(2)=0; f(-2)=4; f($-\frac{1}{2}$)=-5; f($\sqrt{2}$)=-0,242…; $\left|f(\frac{1}{2})\right|$=1.

f(-1) не существует.

2. (31). Дано: y=$\sqrt{z \div 1}$, $z = tg^2 x$. Выразить y как функцию x.

Ответ: y=$\left|\dfrac{1}{\cos x}\right|$.

3. (38(1,5,8)). Написать в явном виде функцию y, неявно заданную следующим уравнением:

1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $2^{xy} = 5$; 3) (1+x)cosy - x^2 = 0.

Ответ: 1) $y = \pm\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = \dfrac{\log_2 5}{x}$; 3) $y = \arccos\dfrac{x^2}{1+x}$.

4. (47(2,3,7,9,15,19,21)). Найти область определения данных функций:

1) $y = \lg(x+3)$; 2) $y = \sqrt{5-2x}$; 3) $y = \dfrac{1}{x^3 - x}$; 4) $y = 1-\sqrt{1-x^2}$;

5) $y = \arccos(1-2x)$; 6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$; 7) $y = \sqrt{\lg(\dfrac{5x-x^2}{4})}$.

Ответ: 1) $x \succ -3$; 2) $x \le \frac{5}{2}$; 3) не определена только при x=0, x=-1, x=1;

4) $-1 \le x \le 1$; 5) $0 \le x \le 1$; 6) $-\infty \prec x \prec 0$; 7) $1 \le x \le 4$.

5. Найти пределы:

1) (281) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$. Ответ: 0.

2) (282) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$. Ответ: ∞.

3) (283) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

4) (284) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$. Ответ: -1.

5) (268) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$. Ответ: 9.

6) (270) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$. Ответ: ∞.

7) (272) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ Ответ: 0.

8) (295). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$. Ответ: 4.

9) (297). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. Ответ: 3.

10) (311). $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$. Ответ: $\pm\dfrac{5}{2}$.

Домашнее задание:

1. (22). Дано: $f(x)=x^2-2x+3$. Найти все корни уравнения:

   а) $f(x)=f(0)$, б) $f(x)=f(-1)$.

2. (32). Дано: $y=z^2$, $z=\sqrt[3]{x+1}$, $x=a^t$. Выразить y как функцию t.
3. (38(2,4)). Написать в явном виде функцию у, неявно заданную

   следующими уравнениями: 1) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 2) $xy=c$.

4. (47(8,12,16,18,22). Найти области определения данных функций:

   1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$; 2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; 3)

   $y=\arccos\dfrac{1-2x}{4}$ 4) $y=\sqrt{1-|x|}$; 5) $y=\lg\sin x$.

5. Найти пределы:

1) (285). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$; 2) (286). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$;

3) (273). $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; 4) (274). $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$;

5) (276) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x-2}{x^3-x^2-x+1}$; 6) (294). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

7) (296). $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. 8) (307). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

9) (309). $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Ответы: 1. а) $x_1=0$, $x_2=2$; б) $x_1=-1$, $x_2=3$. 2. $y=\sqrt[3]{(a^t+1)^2}$.

3.1) $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$; 2) $y=\frac{c}{x}$. 4. 1) $x\neq 1$, $x\neq 2$; 2) $-\infty\prec x\prec 1$, $2\prec x\prec +\infty$; 3) $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2}$; 4) $-1\le x\le 1$; 5) $2k\pi\prec x\prec(2k+1)\pi$, где к – целое число. 5. 1) 0; 2) $\frac{1}{4}$; 3) -$\frac{2}{5}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) ∞ ; 6) ∞ : 7) $\frac{1}{4}$; 8) 0 ; 9) $\frac{1}{2}$, если $x\to+\infty$, $-\infty$,если $x\to-\infty$;

Занятие 10. Вычисление пределов. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. К.Р.2. Ч1 «Пределы»

Аудиторное задание.
Найти пределы:

∞, если $x\to-\infty$.

1. (314). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$. Ответ: 3.

2. (315). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgkx}{x}$. Ответ: k .

3. (316). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$. Ответ: $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

4. (318). $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin(\alpha^n)}{(\sin\alpha)^m}$ (n и m – целые положительные числа).

Ответ: 0, если $n\succ m$; 1, если n=m; ∞, если $n\prec m$.

5. (321). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

6. (330). $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$. Ответ: $-\dfrac{3}{2}$.

7. (339). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$. Ответ: $-2\sin a$.

8. (345). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$. Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

9. (351). $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. Ответ: $\dfrac{1}{e}$.

10. (355). $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$. Ответ: e^6.

11. (363). $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/\sin x}$. Ответ:е.

12. (365). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$. Ответ: k.

13. (367). $\lim\limits_{x\to \infty}\{x(\ln(x+a)-\ln x)\}$. Ответ: a.

К.Р.2.Ч1 «Пределы» можно провести в неаудиторное время.

Домашнее задание.

Найти пределы:

1. (317). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{\sin 5x}$. 2. (322). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$.

3. (324). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$. 4. (327). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$.

5. (275). $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; 6. (298). $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$;

7. (313). $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$; 8.(325) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{tg\alpha-\sin\alpha}{\alpha^2}$;

9. (340). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$; 10. (346) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{tgx}$;

11. (352). $\lim\limits_{t\to\infty}(1-\dfrac{1}{t})^t$; 12. (354). $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{k}{x})^{mx}$;

13. (356) . $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$; 14. (360). $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x^2})^x$;

15. (364). $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2\sqrt{x})^{1/2x}$; 16. (366). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

Ответы:

1. $\frac{2}{5}$; 2. $\frac{3}{4}$; 3. -1 ; 4. 0; 5. 6; 6. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 7. 1; 8. $\dfrac{1}{2}$; 9. $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}$; 10. 1; 11. $\dfrac{1}{e}$; 12. e^{mk} ; 13. $e^{-2/3}$; 14. 1; 15. $\sqrt{e}$; 16. $\dfrac{1}{a}$.

Занятие 11. Примеры на определение производной. Производная суммы, произведения, частного.

Аудиторное задание.

1. Вычислить $f'(x)$ по определению производной: 1) x^2 ; 2) $\dfrac{1}{x}$; 3) $\dfrac{1}{x^2}$; 4) x^3.

2. (466(5,7,12)). Найти производные функции: 1) $2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$;

2) $\frac{x}{n}+\frac{n}{x}+\frac{x^2}{m^2}+\frac{m^2}{x^2}$; 3) $\sqrt{x}\,(x^3-\sqrt{x}+1)$.

Ответ: 1) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$; 2) $\frac{1}{n}-\frac{n}{x^2}+\frac{2x}{m^2}-\frac{2m^2}{x^2}$; 3) $3{,}5x^2\sqrt{x}-1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. (469). $f(z)=\frac{2z^3-3z+\sqrt{z}-1}{z}$. Найти $f'(\frac{1}{4})$. Ответ: 13.

4. (471(2,4,6)). Продифференцировать указанные функции:

1) $y=(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$; 2) $y=(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3})(4x\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x})$;

3) $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$.

Ответ: 1) $7x^6-10x^4+8x^3-12x^2+4x+3$;

2) $\frac{1}{9}(\frac{60}{\sqrt[6]{x}}-\frac{5}{x\sqrt[6]{x^5}}+\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt[3]{x}}-48\sqrt[6]{27x^2})$; 3)

$2x(3x^4-28x^2+49)$.

5. Найти производные указанных функций:

1) (473). $y=\frac{x}{x^2+1}$; 2) (477). $z=\frac{x^2+1}{3(x^2-1)}+(x^2-1)(1-x)$;

3) (481). $u=\frac{v^2-v+1}{a^2-3}$; 4) (479). $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$.

Ответ: 1) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; 2) $-\frac{4x}{3(x^2-1)^2}+1+2x-3x^2$; 3) $\frac{2v-1}{a^2-3}$;

4) $-\frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$.

6. (490). $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Найти $f'(0)$ и $f'(1)$.

Ответ: $f'(0)=0$; $f'(1)=6$.

Домашнее задание.

1. (466(1,2,3,4,6,8,10,11)). Найти производные функции:

1) $3x^2-5x+1$; 2) $x^4-\frac{1}{3}x^3+2{,}5x^2-0{,}3x+0{,}1$; 3) ax^2+bx+c

4) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}$; 5) $0{,}8\sqrt[4]{y}-\frac{y^3}{0{,}3}+\frac{1}{5y^2}$; 6) $\frac{mx^2}{\sqrt{x}}+\frac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{p\sqrt{x}}{x}$;

7) $0{,}1t^{-2/3}-\frac{5{,}2}{t^{1{,}4}}+\frac{2{,}5}{\sqrt[5]{t}}$; 8) $(x-0{,}5)^2$.

2. (467). $f(x)=3x-2\sqrt{x}$. Найти: f(1), $f'(1)$; $f(4)$, $f'(4)$; $f(a^2)$, $f'(a^2)$.

3. (471(1,3,5)). Продифференцировать указанные функции:

1) $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$; 2) $y=(\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)$;

3) $y=(\sqrt[3]{x}+2x)(1+\sqrt[3]{x^2}+3x)$.

4. Найти производные указанных функций:1) (474). $s=\frac{3t^2+1}{t-1}$;

2) (478). $u=\frac{v^5}{v^3-2}$; 3) (480). $y=\frac{2}{x^3-1}$;

4) (482). $y=\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$; 5) (484). $s=\frac{1}{t^2-3t+6}$; 6) (492).

$F(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x^2+1}$.

Найти $F'(0)$ и $F'(1)$.

Ответы:

1\. 1) $6x-5$; 2) $4x^3-x^2+5x-0{,}3$; 3) $2ax+b$; 4) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

5) $\dfrac{0{,}2}{\sqrt[4]{y^3}}-10y^2-\dfrac{0{,}4}{y^3}$; 6) $\dfrac{3}{2}m\sqrt{x}+\dfrac{7}{6}n\sqrt[6]{x}+\dfrac{p}{2\sqrt{x^3}}$;

7) $-\dfrac{1}{15}t^{-\frac{5}{3}}+7{,}28t^{-2{,}4}-\dfrac{0{,}5}{t\sqrt[5]{t}}$; 8) $2x-1$.

2\. $f(1)=1$, $f'(1)=2$; $f(4)=8$, $f'(4)=2{,}5$;

$f(a^2)=3a^2-2|a|$,

$f'(a^2)=3-\dfrac{1}{|a|}$.

3\. 1) $4x^3-3x^2-8x+9$; 2) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+\dfrac{1}{x})$;

3) $\dfrac{1+12x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{9\sqrt[3]{x^2}+10x\sqrt[3]{x}+36x\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

4\. 1) $\dfrac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$; 2) $\dfrac{2v^4(v^3-5)}{(v^3-2)^2}$; 3) $-\dfrac{6x^2}{(x^3-1)^2}$; 4) $-\dfrac{3x^2}{\sqrt{\pi}}$;

5) $\dfrac{3-2t}{(t^2-3t+6)^2}$.

5\. $F'(0)=-\dfrac{1}{4}$; $F'(-1)=\dfrac{1}{2}$.

Занятие 12. Производная сложной функции. Дифференцирование тригонометрических функций.

***Аудиторное задание*.**

Найти производные функций:

1.(498(2)) y=$(x^2+1)^4$;

2.(498(3)) y=(1-x)^{20};

3.(498(7)) y=(x^3-x)^6;

4. y=(7x^2 - $\frac{4}{x}$ +6)^6;

5. y=$\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$;

6.(503) y=$\sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-x^2}$;

7.(509) y=$\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$;

8.(515) y(x)=$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, найти y$'$(2);

9.(517) y=$\sin x+\cos x$;

10.(519) y=$\frac{tgx}{x}$;

11.(520) $\rho=\phi\sin\phi+\cos\phi$;

12.(525) y=$\cos^2 x$;

13.(533) y=a$\cos\frac{x}{3}$;

14.(539) y=$\cos^3 4x$;

15. y=$\frac{1}{2}tg^2\sqrt{x}$.

Ответы: 1. y y$'=8x(x^2+1)^3$; 2. $y'=-20(1-x)^{19}$; 3. $y'=6(3x^2-1)(x^3-x)^5$;

4. $y'=6(14x+\frac{4}{x^2})(7x^2-\frac{4}{x}+6)^5$; 5. $y'=\frac{5(x^2+2x-1)(1+x^2)^4}{(1+x)^6}$; 6. $y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

7. $y'=\frac{2x^3+4x^7}{\sqrt{(1-x^4-x^8)^3}}$; 8. $y'(2)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 9. $y'=\cos x-\sin x$; 10. y$'=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$;

11. $\rho'=\phi\cos\phi$; 12. $y'=-\sin 2x$; 13. $y'=-\frac{a}{3}\sin\frac{x}{3}$;

14. $y'=-12\cos^2 4x\sin 4x$; 15. $y'=\frac{tg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$.

Домашнее задание.

Найти производные функций:

1. (498(4)) $y=(1+2x)^{30}$;

2. (498(5)) $y=(1-x^2)^{20}$;

3. (504) y=$(1-2\sqrt{x})^4$;

4. (516) $y(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$, найти $y'(0)$;

5. (518) $y=\frac{x}{1-\cos x}$;

6. (526) $y=\frac{1}{4}tg^4 x$;

7. (528) $y=3\sin^2 x-\sin^3 x$;

8. (532) y=$\sin 3x$;

9.(540) y=$\sqrt{tg\frac{x}{2}}$;

10. (546) $y=\sin^2(\cos 3x)$.

Ответы: 1. $y' = 60(1+2x)^{29}$; 2. $y' = -20x(1-x^2)^9$; 3. $y' = -\dfrac{4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$;

4. $y'(0) = 0$; 5. $y' = \dfrac{1-\cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2}$; 6. $y' = \dfrac{tg^3 x}{\cos^2 x}$; 7. $y' = \dfrac{3}{2}(2-\sin x)\sin 2x$;

8. $y' = 3\cos 3x$; 9. $y' = \dfrac{1}{4\sqrt{tg\dfrac{x}{2}}\cos^2\dfrac{x}{3}}$; 10. $y' = -3\sin 3x \cdot \sin(2\cos 3x)$.

Занятие 13. Производные обратных тригонометрических функций. Производные логарифмических и показательных функций.

Аудиторное задание.

Найти производные функций:

1. (548) $y = xarc\sin x$;
2. (550) $y = (\arcsin x)^2$;
3. (555) $y = \sqrt{x}arctgx$;
4. (554) $y = \dfrac{\arccos x}{x}$;
5. (563) $y = arctgx^2$;
6. $y = \arcsin\sqrt{x}$;
7. (573) $y = x^2 \log_3 x$;
8. (576) $y = \sqrt{\ln x}$;
9. (585) $y = \ln(1-2x)$;
10. (591) $y = \ln^4 \sin x$;
11. (598) $y = 2^x$;
12. (601) y=$\dfrac{x}{4^x}$;
13. (605) y=$\dfrac{x^3+2^x}{e^x}$;
14. (617) $y = e^{-x}$.

Ответы: 1. $y' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 2. $y' = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; 3. $y' = \dfrac{arctgx}{2\sqrt{x}} +$ $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$; 4. $y' = -\dfrac{x + \arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$; 5. $y' = \dfrac{2x}{1+x^4}$; 6. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$;

7. $y' = 2x\log_3 x + \dfrac{x}{\ln 3}$; 8. $y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; 9. $y' = -\dfrac{2}{1-2x}$;

10. $y' = 4\ln^3 \sin x \cdot ctgx$; 11. $y' = 2^x \ln 2$; 12. $y' = 4^{-x}(1 - x\ln 4)$;

13. $y' = \dfrac{2^x(\ln 2 - 1) + 3x^2 - x^3}{e^x}$; 14. $y' = -e^{-x}$.

Домашнее задание.

Найти производные функций:

1. (549) $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;
2. (551) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

3. (552) $y=\dfrac{1}{\arcsin\dfrac{x}{2}}$;

4. (558) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ - $arctgx$;

5. (564) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$;

6. $y=arctg\sqrt{6x-1}$;

7. (574) $y=\ln^2 x$;

8. (575) $y=x\cdot\lg x$;

9. (579) $y=\dfrac{1}{\ln x}$;

10. (586) $y=\ln(x^2-4x)$;

11. (599) $y=10^x$;

12. (602) $y=x\cdot 10^x$;

13. (604) $y=\dfrac{x}{e^x}$;

14. (619) $y=e^{\sqrt{x+1}}$.

Ответы: 1. $y'=\dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$; 2. $y'=\arcsin x$; 3. $y'=$ - $\dfrac{1}{(\arcsin x)^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$; 4. $y'=-\dfrac{2x^2}{(1-x^2)^2}$; 5. $y'=-\dfrac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$;
6. $y'=\dfrac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$; 7. $y'=\dfrac{2\ln x}{x}$; 8. $y'=\dfrac{\ln x+1}{\ln 10}$; 9. $y'=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$;
10. $y'\dfrac{2x-4}{x^2-4x}$; 11. $y'=10^x\ln 10$; 12. $y'=10^x(1+x\ln 10)$;
13. $y'=\dfrac{1-x}{e^x}$; 14. $y'=\dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$.

Занятие 14. Логарифмическое дифференцирование. Параметрически заданные функции. Неявная функция. КР.2.Ч2 «Дифференцирование функций».

Аудиторное задание.

Используя правило логарифмического дифференцирования, найти производные функций:

1. (650) $y=x^{x^2}$;

2. (653) $y=(\ln x)^x$;

Найти производные от функций, заданных неявно:

3. (796) $y^3-3y-2ax=0$;

4. (798) $x^4+y^4=x^2y^2$;

5. (802) $2y\ln y=x$.

Найти производные от y по x:

6. (940) $x=\dfrac{t+1}{t}, y=\dfrac{t-1}{t}$;

7. (941) $x=\ln(1+t^2), y=t-arctgt$;

Найти производные высших порядков:

8. (1007) $y = 1 - x^2 - x^4$, $y''' = ?$ 9. (1010) $y = (x^2+1)^3$, $y'' = ?$

Ответы: 1. $y' = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$; 2. $y' = (\ln x)^x(\frac{1}{\ln x} + \ln\ln x)$;

3. $y' = \frac{2a}{3(1-y^2)}$; 4. $y' = \frac{x}{y} \cdot \frac{y^2 - 2x^2}{2y^2 - x^2}$;

5. $y' = \frac{1}{2(1+\ln y)}$; 6. $y' = -1$; 7. $y' = \frac{t}{2}$; 8.-24x;

9. $6(5x^4 + 6x^2 + 1)$.

Домашнее задание.

Найти производные функций:

1.(652) $y = (\sin x)^{\cos x}$; 2. (654) $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$;

Найти производные от y по x:

3.(937) $x = a\cos^3\phi, y = b\sin^3\phi$;

4. (938) $x = a(\phi - \sin\phi), y = a(1-\cos\phi)$;

5. (939) $x = 1 - t^2, y = t - t^3$.

6. Найти угловой коэффициент касательной к линии $x = 1 - t^4, y = t^2 - t^3$ в точке (0,0).

Найти производные от функций, заданных неявно:

7. (794) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; 8. (795) $y^2\cos x = a^2\sin 3x$;

9. (801) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

10.(789) Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к эллипсу $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $(1, \sqrt{2})$.

Ответы: 1. $y' = (\sin x)^{\cos x}(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln\sin x)$; 2.

$y' = 2(x+1)^2\left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$;

3. $y' = -\frac{b}{a} tg\phi$; 4. $y' = ctg\frac{\phi}{2}$; 5. $y' = \frac{3t^2 - 1}{2t}$;

6. 0 и $\frac{1}{3}$; 7. $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$; 8. $y' = \frac{3a^2 \cos 3x + y^2 \sin x}{2y \cos x}$;9. $y' = 2^{x-y} \cdot \frac{2^y - 1}{1 - 2^x}$; 10. $-\sqrt{2}$.

Занятие 15. Исследование функции на монотонность и экстремум (1 и 2 способ).

Аудиторное задание.

1. (1143) Показать, что функция $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ убывает в интервале (-2,1) .

2. (1145) Показать, что функция $y = x^3 + x$ везде возрастает.

Найти интервалы монотонности функции:

3. (1150) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$; 4. (1152) $y = (x-2)^5 (2x+1)^4$.

Найти экстремумы функций:

5. (1166) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 4$; 6. (1176) $y = x - \ln(1 + x^2)$.

Найти экстремумы функций, пользуясь второй производной:

7. (1274) $y = \frac{x}{\ln x}$; 8. (1268) $y = x^2 (a - x)^2$.

Ответы: 3. $(-\infty, -1)$, $(3, \infty)$ – возрастает, (-1,3) – убывает;
4. $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(\frac{11}{18}, \infty)$ – возрастает, $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{18})$ – убывает; 5. $y_{\max} = 17$ при x=-1, $y_{\min} = -47$ при x=3; 6. всюду возрастает; 7. $y_{\min} = e$ при x=e;
8. $y_{\max} = \frac{a^2}{16}$ при $x = \frac{a}{2}$, $y_{\min} = 0$ при x=0 и при x=a;

Домашнее задание.

1. (1144) Показать, что функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ возрастает в интервале (0,1) и убывает в интервале (1,2).

Найти интервалы монотонности функций:

2. (1151) $y = x^4 - 2x^2 - 5$;   3. (1156) $y = x - e^x$.

4. (1165) Найти экстремумы функции: $y = 2x^3 - 3x^2$.

5. (1187) Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ в интервале: [-1,2] .

Найти экстремумы функций:

6. (1270) $y = x + \sqrt{1-x}$;   7. (1269) $y = x + \dfrac{a^2}{x}, (a \succ 0)$.

Ответы: 2. (-1,0), $(1,\infty)$ – возрастает, $(-\infty,-1)$, $(0,1)$ – убывает; 3.$(-\infty,0)$ - возрастает, $(0,\infty)$ – убывает; 4. $y_{\max} = 0$ при x=0, $y_{\min} = -1$ при x=1;5. 2 и -10; 6. $y_{\max} = \dfrac{5}{4}$ при $x = \dfrac{3}{4}$; 7. $y_{\max} = -2a$ при x=-a, $y_{\min} = 2a$ при x=a.

Занятие 16. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба. Правило Лопиталя. Асимптоты кривой.

Аудиторное задание.

Исследовать функции на экстремум и точки перегиба:

1. $y = x^3 - 3x$;   2. $y = \ln(1 + x^2)$.

3. $y = \dfrac{x^3}{6} - x^2$;   4. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

5. Найти предел по правилу Лопиталя.

1) (1326). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$; ответ:1.

2) (1328). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - arctgx}{x^3}$; ответ: 1/3.

3)(1330). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x + tgx}$; ответ:0.

4)(1334). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; ответ: -2.

5)(1338). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; ответ: 2.

Ответы: 1. $y_{\max}=2$ при x=-1, $y_{\min}=-2$ при x=1, (0,0) – точка перегиба (т.п.); 2. $y_{\min}=0$ при x=0, $(\pm 1, \ln 2)$ – т.п.; 3. $y_{\max}=0$ при x=0, $y_{\min}=-\dfrac{16}{3}$ при x=4, $(2,-\dfrac{8}{3})$ – т.п.; 4. $y_{\max}=1$ при x=1, $y_{\min}=-1$ при x=-1, $(\pm\sqrt{3},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, (0,0) – т.п.;

Домашнее задание.

Исследовать функции на экстремум и точки перегиба:

1. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+2x$;

2. $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$;

3. $y=e^x$;

4. $y=e^{-x^2}$.

5. Найти предел по правилу Лопиталя.

1)(1325). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$; 2)(1327) . $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$;

3)(1329). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$; 4)(1335). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$;

5)(1337). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(x-a)}$; 6)(1351). $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x})$;

7)(1352). $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx-\dfrac{1}{x})$; 8)(1355). $\lim\limits_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)]$.

6. Найти асимптоты линий

1)(1375). $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 2)(1378). $y=c+\dfrac{a^3}{(x-b)^2}$.

3)(1388). $y=xe^x+1$.

Ответы: 1. $y_{\max}=\frac{5}{6}$ при x=1, $y_{\min}=-\frac{2}{3}$ при x=2, $(\frac{3}{2},\frac{3}{4})$ - т.п.; 2. $y_{\min}=0$ при x=0, $(\pm 1,1)$ – т.п.; 4. $y_{\max}=1$ при x=0, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{e})$ – т. п.; **5**. 0; $\frac{\alpha}{\beta}$; $\frac{a}{\sqrt{b}}$; 2; cos a; -1; 0; 1. **6**. $y=\pm\frac{b}{a}x$; x=b, y=e; x=0, y=x+3.

Занятие 17. Общая схема исследования функции. График функции. К.Р.2.Ч3. «Исследование функций»

Аудиторное задание.

1. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2x$.

Ответ. Определена везде. $y_{\max}=\dfrac{5}{6}$ при $x=1$, $y_{\min}=\dfrac{2}{3}$ при $x=2$. Точка перегиба (1.5;0.75). Асимптот нет.

2(1408). $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.

Ответ. Определена везде, кроме $x=\pm\sqrt{3}$. График симметричен относительно начала координат. $y_{\max}=-4.5$ при $x=3$, $y_{\min}=4.5$ при $x=-3$. Точка перегиба графика (0;0). Асимптоты $x=\pm\sqrt{3}$ и $x+y=0$.

Домашнее задание.

1. $y = x^3 - x^2$. 2 (1409) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$. 3 (1419) $y = x - \ln(x+1)$.

4 (1421) $y = x^2 e^{-x}$.

Ответы.

1. Определена везде. $y_{\max} = 0$ при $x = 0$, $y_{\min} = -\dfrac{4}{27}$ при $x = \dfrac{2}{3}$.
Точка перегиба графика (1/3;-2/27). Асимптот нет.

2. Определена везде, кроме $x = -1$. Минимумов нет. $y_{\max} = -3\dfrac{3}{8}$ при $x = -3$. Точка перегиба графика (0;0). Асимптоты $x = -1$ и $y = \dfrac{1}{2}x - 1$.

3. Определена при $x \succ -1$. $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. Максимумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптота $x = -1$.

4. Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. $y_{\max} = \dfrac{1}{e}$ при $x = \pm 1$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. Абсциссы точек перегиба графика $\pm\sqrt{5 \pm \dfrac{\sqrt{17}}{2}}$. Асимптота $y = 0$.

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.– М.; Наука. Главная редакция физико-математической литературы,1977.–416 с.
2. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов.- М.;Физматлит,2009.– 484 с.

Задания для практических занятий по темам «Векторная и линейная алгебра. Аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

1 семестр

для студентов первого курса дневного отделения (бакалавриат) направлений подготовки 190100 – Наземные транспортно-технологические комплексы, 270800 – Строительство

Составители : Лапин Н.В., Онегов Л.А.