МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задачник для студентов первого года обучения в бакалавриате, обучающихся по программе 08.03.01 «Строительство»

Казань
2016

УДК 517.5

ББК 22.161
К79

К79 Кратные и криволинейные интегралы: Задачник для студентов бакалавров первого года, обучающихся по программе 08.03.01 «Строительство»,/ Сост. В.Л. Крепкогорский. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.- строит. ун-та, 2016. – 35 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Теоретический материал предназначен для самостоятельного изучения студентами первого курса дневного отделения в рамках программы для бакалавров. В конце каждого раздела приведены практические задания для самостоятельной проработки теоретического материала.

Рецензент
Доктор технических наук,
заведующий кафедрой
теплоэнергетики, газоснабжения и вентиляции
Р.А.Садыков

УДК 517.3
ББК 22.161

1.Двойные интегралы

Двойные интегралы применяются при решении многих задач математики, физики и техники. Краткий список приложений приведен в таблице 1.

а) Обозначения. Двойной интеграл имеет вид

$$\iint\limits_G f(x,y)ds = \iint\limits_G f(x,y)dx\,dy.$$

При этом $f(x,y)$ называется подынтегральной функцией, ds и $dx\,dy$ – элементами площади, G – областью интегрирования.

б) Свойства двойного интеграла.

1. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

3. Пусть область G разбита на две области G_1 и G_2. Тогда

$$\iint_G f(x,y)d\sigma = \iint_{G_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{G_2} f(x,y)d\sigma.$$

в) Геометрический смысл двойного интеграла.

Если подынтегральная функция $f(x,y)$ положительна, то двойной интеграл равен объему цилиндрического тела (рис.1), ограниченного сверху графиком функции $z = f(x,y)$, сбоку – цилиндрической поверхностью, а снизу – областью G.

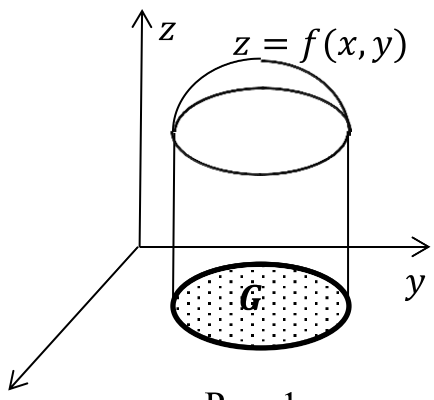

Рис. 1

г) Вычисление двойных интегралов.

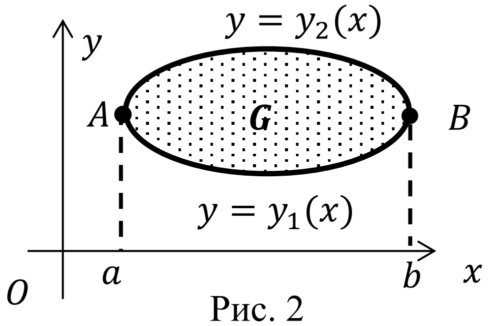

Рис. 2

Двойной интеграл от функции двух переменных обычно вычисляют, интегрируя сначала по одному аргументу, а затем по другому, т.е. заменяя двойной интеграл двукратным. Конкретные формулы для перехода от двойного интеграла к двукратному зависят от вида области интегрирования.

1) Область интегрирования определена неравенствами (рис.2): $G = \{a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$.

Тогда

$$\iint\limits_G f(x,y)dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (1)$$

2) Область интегрирования определена неравенствами (рис.3):

$$G = \{c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}.$$

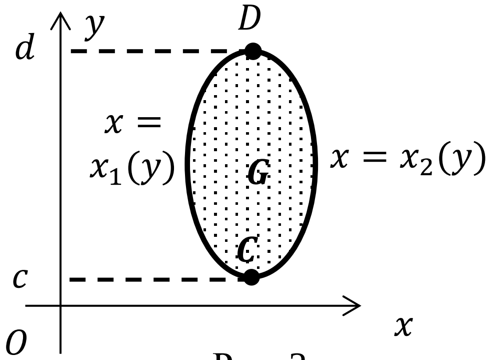

Рис. 3

$$\iint\limits_G f(x,y)dx\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (2)$$

е) двойной интеграл в полярной системе координат.

Полярные координаты точки $(\varphi;\ r)$ (рис. 4)

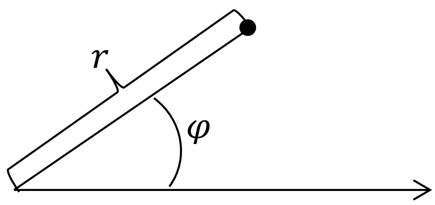

Рис.4

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Область интегрирования G задана неравенствами в полярной системе координат (рис. 5).

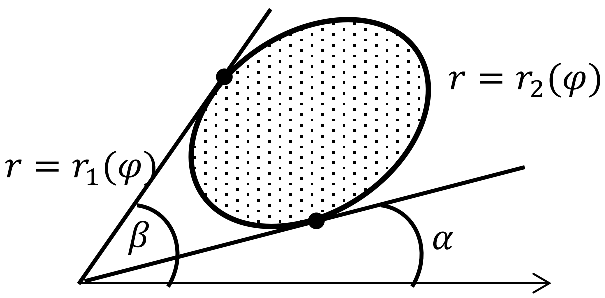

Рис.5

$$G = \begin{Bmatrix} \alpha \le \varphi \le \beta \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \end{Bmatrix}.$$

$$\iint\limits_G f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi = \qquad (3)$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr.$$

Примеры.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G (2x^2y - 8y^3)\, dx\, dy,$$

где область G определена неравенствами

$$G = \{0 \le x \le 4, \qquad 1 \le y \le 2\}.$$

Решение. Область интегрирования – это прямоугольник со сторонами параллельными осям координат. Пределы изменения обоих переменных – постоянные. В этом случае можно применять как формулу (1) так и (2).

Проинтегрируем функцию сначала по y, а затем по x.

$$\iint_G (2x^2y - 6y^3)\, dx\, dy = \int_0^4 dx \int_1^2 (2x^2y - 8y^3)\, dy =$$

$$= \int_0^4 dx\, (x^2y^2 - 2y^4)\Big|_1^2 = \int_0^4 dx\, \big(4x^2 - 32 - (x^2 - 2)\big) =$$

$$\int_0^4 (3x^2 - 30)\, dx = x^3 - 30x|_0^4 = 64 - 120 = -56.$$

Пример 2. Найти двойной интеграл

$\iint_G (x + y) dx\, dy.$

Область G ограничена линиями

$y = x^2$ и $y = 3x + 4$.

Решение. В данном случае границы области заданы не с помощью неравенств, а с помощью уравнений. Поэтому не ясно, какая из этих линий образует верхнюю границу области, а какая – нижнюю. Построим графики данных функций. Чтобы найти крайнюю левую и правую точки области решим систему уравнений

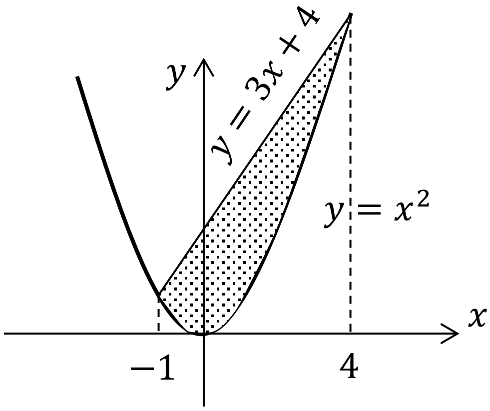

Рис. 6

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x + 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 3x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -1; 4.$$

На рис. 6 видно, что нижняя граница области – это парабола $y = x^2$, а верхняя – это прямая $y = 3x + 4$. Поэтому можно использовать формулу (1) считая, что область

$$G = \begin{Bmatrix} -1 \le x \le 4; \\ x^2 \le y \le 3x + 4 \end{Bmatrix}.$$

Тогда

$$\iint_G (x + y)dx\,dy = \int_{-1}^{4} dx \int_{x^2}^{3x+4} (x + y)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{4} dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{3x+4} = \int_{-1}^{4} dx \left(x(3x + 4) + \frac{(3x + 4)^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) =$$

$$= \int_{-1}^{4} \left(7{,}5x^2 + 16x + 8 - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= 2{,}5x^3 + \frac{16}{2}x^2 + 8x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= 160 + 128 + 32 - 64 - 102{,}4 - (-2{,}5 + 8 - 8 - 0{,}25 + 0{,}1) = 156{,}25.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\iint_G (2x - y)\,dxdy,$$

где область G ограничена линиями: $y = x; y = \frac{x}{2}; y = 4$.

Решение. Нарисуем область G (рис. 7). Если пользоваться для перехода к двукратному интегралу формулой (1), то придется написать уравнение верхней границы. Но в данном случае верхняя граница состоит из двух отрезков OA и AB. Поэтому область придется разбить на две части по прямой $x = 4$. Чтобы избежать этих трудностей используем формулу (2). В этом случае нам понадобится левая и правая границы области и значение переменной x на них.

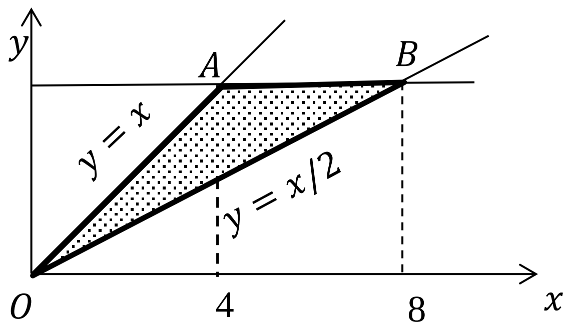

Рис.7

Левая граница – это отрезок OA на ней $y = x \ \Rightarrow x_1(y) = y$.
Правая граница – отрезок OB на ней $y = \frac{x}{2} \Rightarrow x_2(y) = 2y$.
Поэтому

$$\iint_G (2x - y)\,dxdy = \int_0^4 dy \int_y^{2y} (2x - y)dx = \int_0^4 dy\,(x^2 - xy)\Big|_y^{2y} =$$

$$\int_0^4 dy\,[4y^2 - 2y^2 - (y^2 - y^2)] = \int_0^4 2y^2\,dy = \frac{2y^3}{3}\Big|_0^3 = 18.$$

Пример 4. В следующем двукратном интеграле переменить порядок интегрирования.

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

Решение. Приравняем y верхнему и нижнему пределам интегрирования $y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$ и $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

Возведем обе части каждого равенства в квадрат. В обоих случаях мы получим уравнение

$$4y^2 = 4 - x^2. \qquad (4)$$

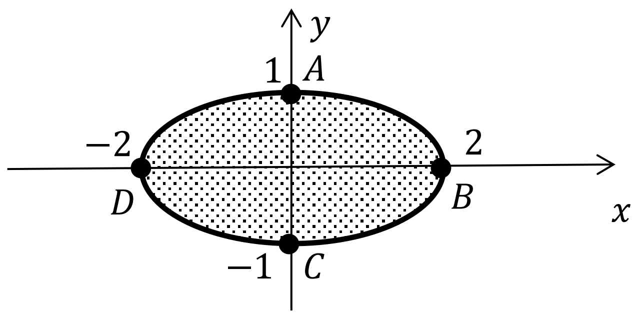

Рис. 8

Перенесем x^2 влево и разделим все на 4: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Мы получили уравнение эллипса.

Выразим x из (4): $x = \pm\sqrt{4 - 4y^2}$. Значение $x = \sqrt{4 - 4y^2}$ соответствует правой границе ABC и верхнему пределу изменения x. Значение $x = -\sqrt{4 - 4y^2}$ – левой границе эллипса FDC и нижнему пределу изменения x. Как видно на рис. 8 переменная y изменяется от -1 до 1. Поэтому

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$$

Примеры для решения на занятии

Вычислить

1.1 $\iint_G xy\,dx\,dy$; $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2)$.

1.2 $\iint_G \frac{x^2}{1+y^2} dx\,dy$; $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$.

1.3 $\iint_G x\sin(x+y)\ dx\,dy$; $(0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi/2)$.

В следующих примерах найти пределы интегрирования для двойного интеграла $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ при заданных областях интегрирования.

1.4. Треугольник со сторонами $x = 0, y = 0, x + y = 2$.
1.5. $x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0$.
1.6. $x + y \le 1, x - y \le 1, x \ge 0$.
1.7. $y \ge x^2,\ y \le 4 - x^2$.
В следующих задачах изменить порядок интегрирования:

1.8. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.

1.9. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

1.10. Переменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного двукратного интеграла:

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

В следующих задачах вычислить данные интегралы:

1.11. $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x}} dy$.

1.12. $\displaystyle\int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx$.

1.13 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} dx \int_0^1 x\sin(xy)\,dy$.

1.14. $\iint_G \dfrac{x^2}{y^2}\, dx\, dy,$

где G – область, ограниченная прямыми $x = 2, y = x$ и гиперболой $xy = 1$.

1.15. $\iint\limits_G (x - y)\; dx\, dy; \qquad G\colon \quad x = 0, y = 0, x + y = 2.$

1.16. $\iint\limits_G x\, dx\, dy; \qquad G\colon 0 \le y \le \pi,\;\; 0 \le x \le \sin y.$

1.17. $\iint\limits_G x\, dx\, dy; \quad G\colon\; y = x^3, \qquad x + y = 2, \qquad x = 0.$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить

1.18 $\iint_G \; e^{x+y} dx\, dy\,;\;\; 0 \le x \le 1,\;\; 0 \le y \le 1\,.$

1.19 $\iint_G \; \sin x \sin y\, dx\, dy\,;\;\; 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\;\; 0 \le y \le \pi/2.$

1.20 $\iint_G \; xy\, dx\, dy\,;\;\; y = 0,\;\; y = x,\;\; x = 1.$

1.21 $\iint_G \; xy\, dx\, dy;\;\; y = x^2,\;\; y^2 = x.$

1.22. $\iint_G \; x\, dx\, dy;\quad xy = 6,\;\; x + y - 7 = 0.$

2. Двойной интеграл в полярной системе координат. Применение двойных интегралов.

Двойной интеграл $\iint_G \; f(x, y) dx\, dy$ выражается через интеграл в полярных координатах

$$\iint_G \; f(x, y) dx\, dy = \iint_{G^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi\,)\; r\; dr\; d\varphi\;.$$

Если область G задана в полярной системе координат неравенствами $\{\alpha \le \varphi \le \beta,\;\; 0 \le r \le r(\varphi)\}$, то

$$\iint_G f(x,y)dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{\varphi(r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi\,)\,r\,dr\ . \qquad (3)$$

Пример 1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G \sin[\pi(x^2+y^2)]\,dx\,dy,$$

где область G ограничена линиями $x^2+y^2=1, y=\sqrt{3}\,x,\ y=x/\sqrt{3}$ при $x\geq 0$.

Решение. Область интегрирования G – это сектор единичного круга, заключенный между лучами, выходящими из начала координат, с углами наклона $\alpha = \operatorname{arctg}\left(1/\sqrt{3}\right)$ и $\beta = \operatorname{arctg}\sqrt{3}$ (рис.9).

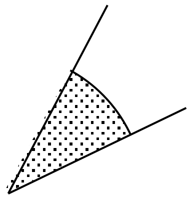

Рис.9

В полярной системе координат область G ограничена неравенствами

$$\begin{Bmatrix} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ 0 \leq r \leq 1 \end{Bmatrix}.$$

Тогда по формуле (3)

$$\iint_G \sin[\pi(x^2+y^2)]\,dx\,dy = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int_0^1 \sin(\pi r^2)\ r\,dr = I.$$

Учитывая, что $d(\pi r^2) = 2\pi r dr \Rightarrow r\,dr = d(\pi r^2)/2\pi$ получаем

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int_0^1 \sin(\pi r^2)\ \frac{d(\pi r^2)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi\ (-\cos(\pi r^2))\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Выражение некоторых физических и геометрических величин через двойные интегралы

Таблица 2.1.

Наименование величины	Общее выражение	В прямоугольных координатах	В полярных координатах
а) Площадь плоской фигуры	$S=\iint\limits_D ds$	$\iint\limits_D dx\,dy$	$\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi$
б) Объем цилиндрического тела, стоящего на плоскости XOY	$V=\iint\limits_D z\,ds$	$\iint\limits_D z\,dx\,dy$	$\iint\limits_D z\,r\,dr\,d\varphi$
в) Момент инерции плоской фигуры относительно центра O	$I_O=\iint\limits_D r^2\,ds$	$\iint\limits_D (x^2+y^2)dx\,dy$	$\iint\limits_D r^3\,dr\,d\varphi$
г) Момент инерции плоской фигуры относительно оси OX	$I_x=\iint\limits_D y^2\,ds$	$\iint\limits_D y^2\,dx\,dy$	$\iint\limits_D r^3\sin^2\varphi\;dr\,d\varphi$
д) Координаты центра масс однородной пластинки	$x_c=\dfrac{\iint_D\ x\,ds}{S}$ $y_c=\dfrac{\iint_D\ y\,ds}{S}$	$\dfrac{\iint_D\ x\,dx\,dy}{S}$ $\dfrac{\iint_D\ y\,dx\,dy}{S}$	$\dfrac{\iint_D\ r^2\cos\varphi\;dr\,d\varphi}{S}$ $\dfrac{\iint_D\ r^2\sin\varphi\;dr\,d\varphi}{S}$

Примеры.

1) Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y=\sin x,\ \ y=\cos x$ и $x=0$ (рис. 10).

Решение. По формуле площади (Табл.2.1. а)

$$S=\iint_D\ dx\,dy=\int_0^{\pi/4}dx\int_{\sin x}^{\cos x}dy=$$

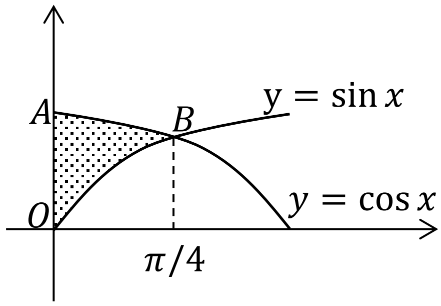

Рис.10

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\,y\Big|_{\sin x}^{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\,(\cos x-\sin x)=$$

$$\sin x+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\sqrt{2}-1.$$

2) Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями

$$r=2(1-\cos\varphi),\qquad r=2$$

и расположенной вне кардиоиды.

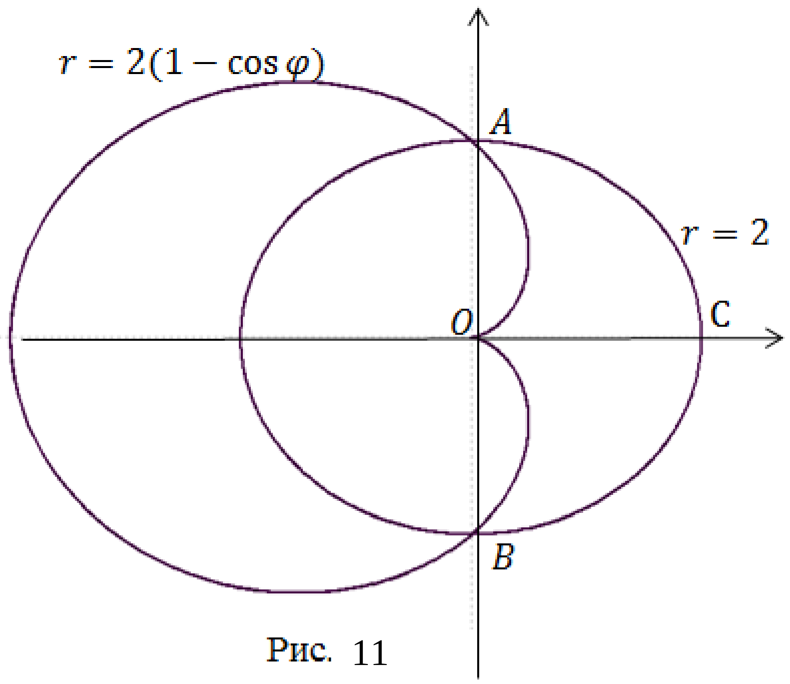

Рис. 11

Решение. Нарисуем обе линии (рис. 11). Надо найти площадь области OACB. При повороте полярного луча крайние значения полярного угла соответствуют точкам A и B и равны $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2(1-\cos\varphi)}^{2} r\,dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left.\frac{r^2}{2}\right|_{2(1-\cos\varphi)}^{2} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{4}{2} - \frac{4(1-\cos\varphi)^2}{2}\right) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,(1 - 1 + 2\cos\varphi - \cos^2\varphi) =$$

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(2\cos\varphi - \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,(4\cos\varphi - 1 - \cos 2\varphi) =$$

$$= 4\sin\varphi - \varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4 - \frac{\pi}{2} - \left(-4 + \frac{\pi}{2}\right) = 8 - \pi.$$

3) Для балки постоянного сечения величина прогиба обратно пропорциональна I – моменту инерции поперечного сечения относительно нейтральной линии, лежащей в ней. Сравнить величину прогиба двух ба-

лок а) сечение которой квадрат 10×10 и б) сечение – прямоугольник 5×20 (рис. 12).

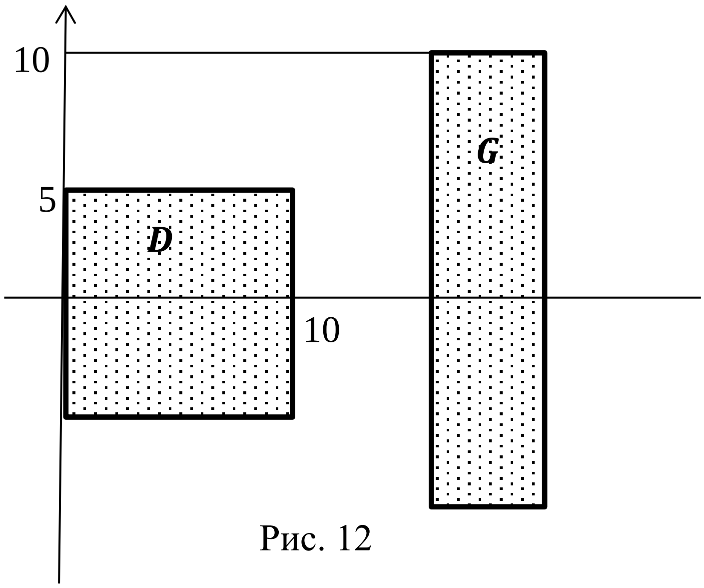

Рис. 12

Решение. Выберем ось OX так, чтобы оба сечения были бы симметричны относительно нее. Тогда по формуле г) из Табл. 4.1.

$$a) I_x(D) = \iint_D y^2 dx\, dy = \\ = \int_0^{10} dx \int_{-5}^{5} y^2 dy = \\ = \int_0^{10} dx\, \frac{y^3}{3}\bigg|_{-5}^{5} = x|_0^{10}\left(2 \cdot \frac{125}{3}\right)$$

$$=10 \cdot \frac{250}{3} = \frac{2500}{3} \approx 833{,}3.$$

б) Найдем момент инерции сечения G.

$$I_x(G) = \iint_D y^2 dx\, dy = \int_0^5 dx \int_{-10}^{10} y^2 dy = \int_0^5 dx\, \frac{y^3}{3}\bigg|_{-10}^{10} = 5 \cdot 2 \cdot \frac{1000}{3} =$$

$$= \frac{10000}{3} \approx 3333{,}3; \quad \frac{I_x(G)}{I_x(D)} = \frac{10000}{3} : \frac{2500}{3} = 4.$$

Следовательно, прогиб балки квадратного сечения будет в четыре раза больше прогиба балки с прямоугольным сечением, хотя площади сечений одинаковы.

4) Найти объем тела, ограниченного поверхностями: цилиндром $z = 9 - 3x^2$, координатными плоскостями и плоскостью $4x + 3y = 12$ $(y \geq 0)$.

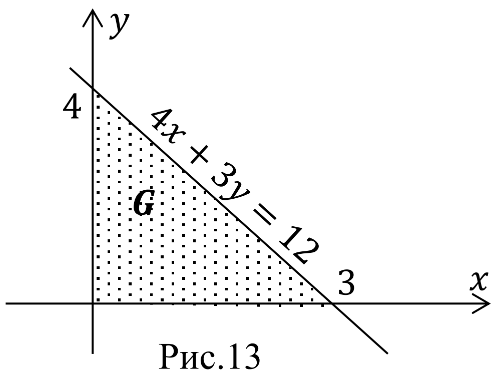

Рис.13

Решение. Используем формулу б) из Табл 2.1.Область интегрирования имеет вид (рис. 13). Чтобы найти точки пересечения прямой $4x + 3y = 12$ с осями координат решим системы.

С осью Ox: $\begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

С осью Оу : $\begin{cases} 4x+3y=12 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=0 \end{cases}.$

Выразим y из уравнения $4x+3y=12 \Rightarrow y=4-\frac{4}{3}\,x.$ Тогда

$$V=\iint_G z\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^3 dx\int_0^{4-\frac{4x}{3}}(9-3x^2)\;dy=\int_0^3(9-3x^2)y\,dx\Big|_0^{4-\frac{4x}{3}}=$$

$$=\int_0^3(9-3x^2)\left(4-\frac{4x}{3}\right)dx=\int_0^4(36-12x-12x^3+4x^3)dx=$$

$$=36x-\frac{12x^2}{2}-\frac{12x^3}{3}+\frac{4x^4}{4}\Big|_0^3=108-54-108+81=27.$$

Примеры для решения на занятии

В задачах 2.1 - 2.3 с помощью двойных интегралов найти площади областей, ограниченной линиями:

2.1. $y=x, y=5x, x=1.$

2.2. $y=x^2, y=x+2.$

2.3. $r=4(1+\cos\varphi),\ r\cos\varphi$ (справа от прямой).

В задачах 2.4 – 2.6 найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

2.4. Плоскостями координат, плоскостями $x=4$ и $y=4$ и параболоидом вращения $z=x^2+y^2+1.$

2.5. Плоскостью $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ и координатными плоскостями (пирамида).

2.6. Плоскостью $z=4x,$ цилиндром $x^2+y^2=4,$ плоскотью $z=0,$ $(x\geq 0).$

2.7. Перейдя к полярным координатам, вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2=a^2, z=0.$

б) $z=x, x^2+y^2=a^2, z=0.$

2.8. Определить центр масс площади, ограниченной линиями $y=0$ и одной полуволной синусоиды.

2.9. Определить момент инерции относительно оси Ox площади, ограниченной линиями $y=\frac{x}{2}$, $x=a, y=a.$

2.10. Плотина имеет форму треугольника высотой 100м и длиной по верху 400м. Считая, что на глубине h м давление составляет h кН/м^2 определить силу, с которой вода давит на плотину.

2.11. Задача. Стрела прогиба для балки постоянного сечения обратно пропорциональна моменту инерции сечения относительно средней линии сечения. Найти моменты инерции сечений балок (рис. 14).

Площади сечений всех балок одинаковы. Вычислить моменты инерции сечений при $a = 2,\ b = 10$. Для какой балки стрела прогиба будет наименьшей? Во сколько раз прогиб других балок будет больше?

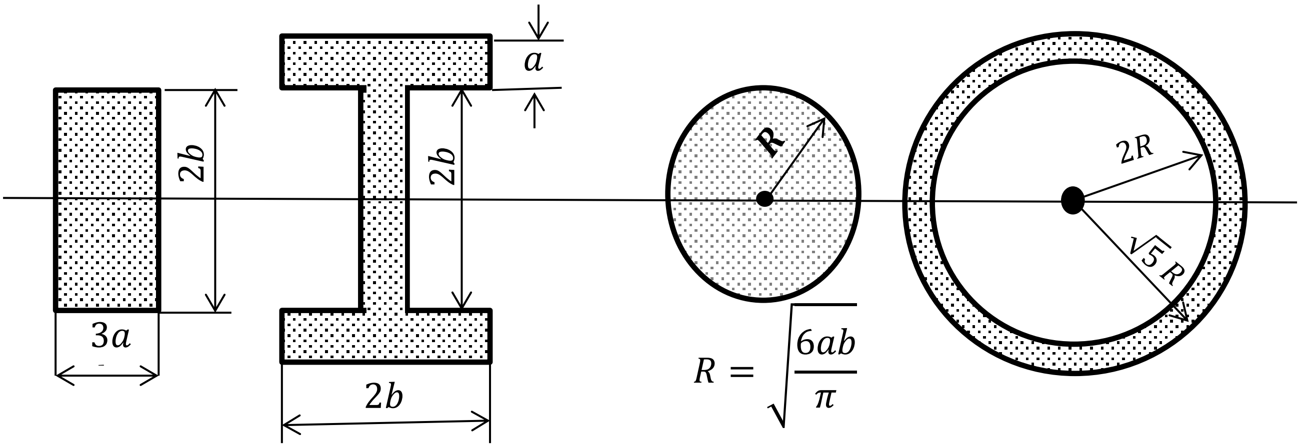

Рис. 14

Примеры для самостоятельного решения

2.12. Найти площади областей, ограниченных линиями

а) $x = 0, y = 0, x + y = 1$;

б) $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x}$ и прямой $x = 4$.

2.13. Найти объем тела ограниченного координатными плоскостями, эллиптическим параболоидом $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6}$ и плоскостями $x = a, y = b$.

2.14. Найти момент инерции относительно оси Ox треугольника ограниченного линиями $x + y = 1, x = 0, y = 0$.

2.15. Найти центр масс площади, ограниченной линиями: $y = x^2, x = 4, y = 0$.

3. Тройной интеграл. Применение тройных интегралов.

Вычисление тройных интегралов. Если область V определена неравенствами (рис.15)

$$a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x), \ \ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),$$

то

$$\iiint_{(V)} F(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_a^b dx\ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} F(x,y,z)dz.$$

Здесь $z_2(x,y)$ – значение переменной z на верхней границе области V, а $z_1(x,y)$ – значение z на нижней границе, V_{xy} – проекция тела V на плоскость xOy. $y_2(x)$ – значение переменной y на правой границе области V_{xy}, а $y_1(x)$ – на левой.

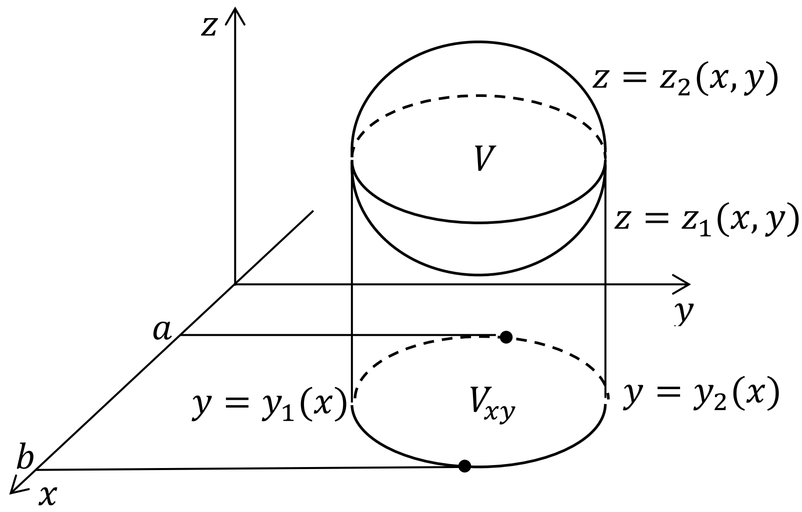

Рис.15

Выражение некоторых физических и геометрических величин через тройные интегралы

Объем тела

$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz.$$

Масса физического тела ($\rho -$ плотность тела)

$$\iiint_D \rho\,dx\,dy\,dz.$$

Координаты центра масс однородного тела

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\iiint_D x\,dx\,dy\,dz}{V(D)}; \\ y_c = \dfrac{\iiint_D y\,dx\,dy\,dz}{V(D)}; \\ z_c = \dfrac{\iiint_D z\,dx\,dy\,dz}{V(D)}. \end{cases}$$

Примеры. 1) Вычислить $\iiint_D xy\,dx\,dy\,dz$, D – область, ограниченная гиперболическим параболоидом $z = xy$ и плоскостями $x + y = 1$ и $z = 0$. Причем $x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0$.

Решение. Нарисуем пространственную область D (Рис. 16): верхняя граница изменения переменой z – это параболоид. Поэтому $0 \leq z \leq xy$. Чтобы расставить пределы по x и y нарисуем проекцию области D на плоскость xOy (рис.17).

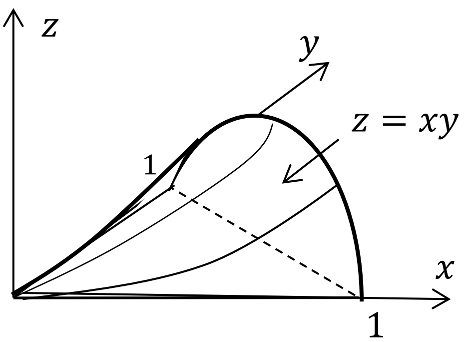

Рис. 16

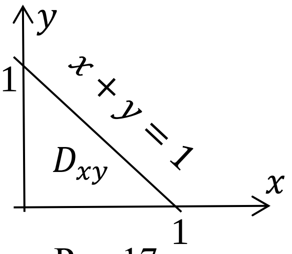

Рис.17

На верхней границе области D_{xy} переменная $y = 1 - x$. Поэтому $\begin{Bmatrix} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{Bmatrix}$.

Теперь можно перейти от тройного интеграла к трехкратному:

$$\iiint_D xy\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} xy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, xy\Big|_0^{xy} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2y^2 dy = \int_0^1 x^2 \frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5)\ \ dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{180}.$$

Для вычисления тройных интегралов можно использовать цилиндрическую систему координат. Это полярная система координат к которой добавлена еще координата z. Формулы перехода от цилиндической системы к декартовой: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,\ z = z, dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$.

2) Пример. Найти массу конического предмета высотой h, радиусом основания R, изготовленный из материала плотностью $\rho = const$.

Решение. Эту задачу легко решить по школьным формулам: $m = \rho V == \rho\frac{\pi R^2 h}{3}$. Но мы хотим на этом простом примере показать как такие задачи решаются с помощью тройных интегралов. Поместим начало координат в центр основания, а ось Oz направим по оси симметрии конуса. Определим значение z на верхней границе области (рис. 18). Из подобия треугольников OHC и ABC следует пропорция

$$\frac{h}{R} = \frac{z}{R-r} \Rightarrow z = \frac{h}{R}(R-r).$$

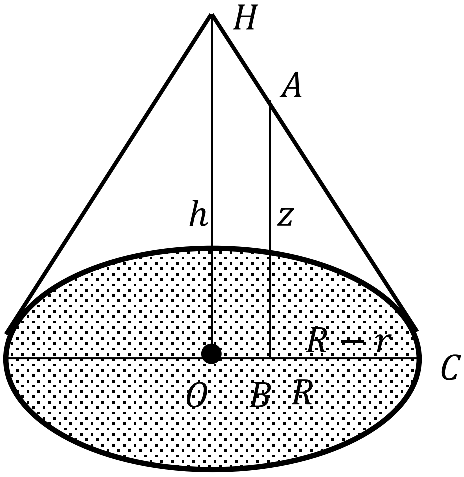

Рис. 18

Тогда $m = \iiint_D \rho\, dx\, dy\, dz =$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_0^{\frac{h}{R}(R-r)} \rho\, dz =$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\, dr\ z\Big|_0^{\frac{h}{R}(R-r)} =$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\, dr \cdot \frac{h}{R}(R-r) =$$

$$= \rho \frac{h}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (Rr - r^2)\, dr =$$

$$= \rho \frac{h}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(R\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right)\Bigg|_0^R = \rho \frac{h}{R} \cdot 2\pi R^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\rho\pi R^2 h}{3}.$$

Примеры для решения на занятии

3.1. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^1 dz$. 3.2. $\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x + y + z)\, dz$.

3.3. Самое высокое здание в мире «Бурдж Халиф» имеет конусовидную форму и высоту 830м. Определить на какой высоте находится центр масс однородного конуса высотой h и радиусом основания R. Найти высоту центра масс при $h = 830$м.

3.4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $2x + 3y + 4z = 12,\ x = 0, y = 0, z = 0$.

Вычислить тройные интегралы по областям V, ограниченным указанными поверхностями:

3.5. $\iiint\limits_V xy\, dx\, dy\, dz;\ \ x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1\ (x \geq 0, y \geq 0)$.

3.6. $\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,; x = 0, y = 0, z = 0, y = 1, x + z = 1.$

3.7. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz\,; x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 1, z \geq 0.$

Примеры для самостоятельного решения

3.8. $\int_0^a dx \int_0^x dy\ \int_0^y xyz\,dz.$

3.9. $\int_0^a dx\ \int_0^x dy\ \int_0^{xy} x^3y^3z\,dz.$

3.10. $\iiint_V\ (x + y - z)\,dx\,dy\,dz\,; x = -1, x = +1, y = 0, y = 1, z = 0, z == 2.$

3.11. $\iiint_V\ (x + 2y + 3z + 4)\,dx\,dy\,dz; x = 0, x = 3, y = 0, y = 2, z = 0, z = 1.$

Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

3.12. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

4.Криволиненые интегралы по длине дуги и по координатам. Криволиненые интегралы по длине

Криволиненые интегралы по длине дуги (первого рода) применяются при вычислении массы материальной линии по известной плотности, площади цилиндрической поверхности, силы взаимодействия тока, текущего по заданному контуру и точечной магнитной массы.

Обозначенается $\int_{AB} f(x,y)d\ell$. Формулы для вычисления:

а) Линия AB задана как график функции $y = y(x),\ a \leq x \leq b$.

$$\int_{AB} f(x,y)d\ell = \int_a^b f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1 + (y')^2}\ dx. \qquad (5)$$

б) Линия AB задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t_0 \leq t \leq t_1$.

$$\int_{AB} f(x,y)d\ell = \int_{t_0}^{t_1} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\ dt.$$

Свойства. Криволинейный интеграл первого рода обладает такими свойствами определенного интеграла как линейность и аддитивность. Но в отличии от определенного интеграла при изменении направления движения знак интеграла не изменяется.

а) линейность

$$\int_{AB} (f(x,y) + g(x,y))d\ell = \int_{AB} f(x,y)d\ell + \int_{AB} g(x,y)d\ell$$

и

$$\int_{AB} k\, f(x,y)d\ell = k\int_{AB} f(x,y)d\ell.$$

б) аддитивность

$$\int_{AC} f(x,y)d\ell = \int_{AB} f(x,y)d\ell + \int_{BC} f(x,y)d\ell.$$

В то же время

$$\int_{AB} f(x,y)d\ell = \int_{BA} f(x,y)d\ell.$$

Пример 1. Найти массу участка цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ между точками с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = a$, если плотность линии обратно пропорциональна ординате точки, причем плотность в точке $(0, a)$ равна δ.

Решение. По условию плотность $\rho = k/y \Rightarrow \delta = \frac{k}{a} \Rightarrow k = a\delta$.

Найдем $y' = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{x/a} - \frac{1}{a}e^{-x/a}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right)$. Тогда $1 + (y')^2 =$

$$1 + \frac{1}{4}\left(e^{2x/a} - 2 + e^{-2x/a}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}\right) = \left(\frac{1}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)\right)^2.$$

Тогда

$$m = \int_0^a \rho\big(x, y(x)\big)\sqrt{1 + (y')^2}\; dx = \int_0^a \frac{a\delta}{y}\frac{1}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)dx =$$

$$= \int_0^a \frac{a\delta}{\frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)dx = \delta\int_0^a dx = a\delta.$$

Пример 2. Вычислить $\int_L \; y\, d\ell$, где L – отрезок прямой $y = 2x$ от точки $A(4, 8)$ до $B(1, 2)$.

Решение. $y = 2x \Rightarrow d\ell = \sqrt{1 + 2^2}dx = \sqrt{5}dx$. Для перехода к определенному интегралу нам надо найти пределы изменения x – числа a и b. Если взять первые координаты точек A и B, то получим $a = 4$ и $b = 1$, но тогда будет нарушено условие $a \leq x \leq b$ из формулы (5). Но криволинейный интеграл по длине не изменяется если сменить на противоположное направление движения. Будем считать, что мы движемся от точки B до A. В этом случае $a = 1$ и $b = 4$. Условие $a \leq x \leq b$ выполняется.

$$\int_L y\, d\ell = \int_1^4 y\ \sqrt{5} dx = \int_1^4 2x\ \sqrt{5} dx = \sqrt{5}\, 2\frac{x^2}{2}\bigg|_1^4 = \sqrt{5}(16-1) = 15\sqrt{5}.$$

Криволинейные интегралы по координатам.

Криволинейные интегралы по координатам (криволинейные интегралы второго рода) применяются для вычисления работы совершенной векторным силовым полем, площади фигур, ограниченных замкнутыми линиями, потенциалов физических полей.

Пусть $P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$ – векторная функция.Тогда криволинейный интеграл второго рода имеет вид

$$\int_\ell P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Вычисление криволинейных интегралов по координатам.

а) Путь интегрирования – это дуга графика функции

$$y = y(x), \qquad a \leq x \leq b.$$

$$\int_\ell P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P(x,y(x))dx + Q(x,y(x))y'(x)dx.$$

б) Путь интегрирования – линия заданная параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

$$\int_\ell P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} P(x(t),y(t))x'(t)dt + Q(x(t),y(t))y'(t)dt.$$

в) Для кривой в пространстве

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

$$\int_\ell P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt +$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))z'^{(t)}dt.$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода аналогичны свойствам криволинейного интеграла первого рода, но также как определенный интеграл меняет свой знак при изменении направления движения.

Формула Грина. Пусть D – плоская область, ограниченная контуром ℓ , и пусть всюду в этой области функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе с их частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда

$$\oint_{\ell} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Знак $\oint$ означает криволиненый интеграл второго рода по замкнутому контуру. При этом мы считаем, что обход контура ℓ происходит против часовой стрелки.

Применения криволинейных интегралов по координатам

а) **Механическая работа**. Пусть физическое поле воздействует на материальную точку M с силой $\overline{F(x,y)} = F_x(x,y)\bar{i} + F_y(x,y)\bar{j}$. Тогда механическая работа A, совершанная силой $\overline{F(x,y)}$ при перемещении из точки B в точку C по траектории ℓ можно вычислить с помощью интеграла

$$A = \int_{\ell} F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy. \qquad (6)$$

Отрицательный результат означает, что перемещение по этой траектории потребует затрат энергии.

б) **Площадь области**. Площадь, ограниченная контуром ℓ:

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\ell} (x\, dy - y\, dx).$$

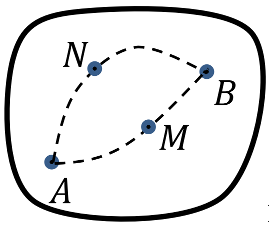

Рис.19

в) **Условия независимости криволинейного интеграла по координатам от выбора пути**. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, а также их частные производные непрерывны в области D, ограниченной некоторой непрерывной и замкнутой линией. Возьмем в области D две фиксированные точки A и B и будем рассматривать всевозможные пути интегрирования, ведущие из A в B и расположенные целиком в области D (рис.19). Следующие утверждения эквивалентны:

1) в любой точке области выполняется равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$;

2) криволинейный интеграл $\int_\ell \; P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от выбора пути;

3) криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области D, равен нулю.

Примеры. 1) Вычислить $\int_L \; y^2dx - x^2dy$ от точки $O(0,0)$ до $A(1,1)$ вдоль линии а) $y = x$; б)$y = x^2$; в) ломанной OBA, где $B(1,0)$.

Решение.

а) $y = x \Rightarrow dy = dx \;\Rightarrow \int_L \; y^2dx - x^2dy = \int_0^1 x^2dx - x^2dy = 0.$

б) $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx \;\Rightarrow \int_L \; y^2dx - x^2dy = \int_0^1 x^4dx - 2x^3dy =$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = -0{,}3\,.$$

в) на отрезке

$OB: y = 0 \;\Rightarrow dy = 0,\;\; \int_{OB} y^2dx - x^2dy = \int_0^1 0\,dx - x^2\,0 = 0.$

На отрезке

$BA: x = 1, dx = 0 \;\Rightarrow \int_{BA} y^2dx - x^2dy = \int_0^1 y^2\,0 - 1^2dy = -y|_0^1 = -1.$

г) На ломанной

$$\int_{OBA} y^2dx - x^2dy = 0 - 1 = -1.$$

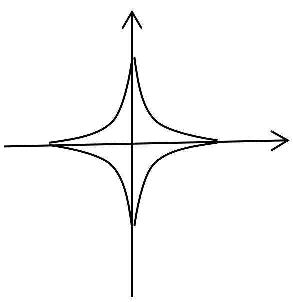

Рис.20

2) Вычислить площадь фигуры ограниченой астроидой (рис. 20). Астроиду можно задать параметрически

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой площади фигуры. Для этого нужно найти дифференциалы

$dx = 3a\cos^2 t\,(-\sin t)\,dt\,;\;\; dy = 3a\sin^2 t\cos t\;\, dt.$

Тогда по формуле площади

$$S=\frac{1}{2}\oint_{\ell}\ (x\,dy-y\,dx)=$$

$$=\int_0^{2\pi} a\cos^3 t\ \ 3a\sin^2 t\cos t\ \ dt+a\sin^3 t\,3a\cos^2 t\ \ \sin t\ \ dt=$$

$$=3a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\ \ \sin^2 t\,(\cos^2 t+\sin^2 t\ \ )\,dt=\ 3a^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\,t\,dt=$$

$$=\frac{3}{4}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\ dt=\frac{3}{8}a^2\left(t-\frac{1}{4}\sin 4\,t\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}a^2\left(2\pi-\frac{1}{4}\sin 8\,\pi\right)=$$

$$=\frac{3}{8}a^2 2\pi=\frac{3}{4}\pi a^2.$$

3) На материальную точку M действует сила $\overline{F}=(x,y,z)$. Найти работу, которую совершит сила при перемещении точки M из $O(0{,}0{,}0)$ в $P(a,2a,3a)$.

<u>Решение</u>. Чтобы вычислить работу зададим параметрически прямую OP. Параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$L:\begin{cases}x=mt+x_{0,}\\ y=nt+y_0,\\ z=pt+z_0.\end{cases}$$

Здесь $\overline{s}=(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой, а (x_0,y_0,z_0) – точка, лежащая на прямой. В данном случае в качестве направляющего можно выбрать вектор $\overline{OA}=(a,2a,3a)$ и $(x_0,y_0,z_0)=O(0{,}0{,}0)$. Тогда

$$OP:\begin{cases}x=at\\ y=2at\quad 0\le t\le 1.\\ z=3at\end{cases}$$

Дифференциалы $dx=a\,dt,\ dy=2a\,dt, dz=3a\,dt.$ Используем трехмерный вариант формулы (6)

$$A=\int_{\ell}\ F_x(x,y,z)dx+F_y(x,y,z)dy+F_z(x,y,z)dz.$$

В данном случае $F_x(x,y,z)=x,\ \ F_y(x,y,z)=y, F_z(x,y,z)=z.$ Поэтому

$$A=\int_{\ell} xdx+ydy+zdz=\int_0^1 at\,a\,dt+2at\,2a\,dt+3at\,3a\,dt=$$

$$=14a^2\int_0^1 t\,dt=14a^2\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1=7a^2.$$

4) С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\ell}(yx^3+e^y)dx+(xy^3+xe^y-2y)\,dy.$$

Контур интегрирования ℓ – это прямоугольник $OABCO,$ где $O(0,0), A(1,0), B(1,2), C(0,2)$.

Решение. Здесь $P(x,y)=(yx^3+e^y)$ и $Q(x,y)=(xy^3+xe^y-2y)$. Тогда $\frac{\partial Q}{\partial x}=y^3+e^y$ и $\frac{\partial P}{\partial y}=x^3+e^y$. По формуле Грина

$$\oint_{\ell}(yx^3+e^y)dx+(xy^3+xe^y-2y)\,dy=$$

$$=\iint_D((y^3+e^y)-(x^3+e^y))dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^2(y^3-x^3)\,dy=$$

$$=\int_0^1 dx\left.\left(\frac{y^4}{4}-yx^3\right)\right|_0^2=\int_0^1 dx\left(\frac{16}{4}-2x^3\right)=4x-\left.\frac{2x^4}{4}\right|_0^1=4-\frac{1}{2}=3{,}5.$$

5) Убедится, что криволинейный интеграл

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)}2xy\,dx+x^2dy$$

не зависит от выбора пути, соединящего точки $(0,0)$ и $(2,1)$. Вычислить интерал выбрав в качестве пути а) отрезок , соединяющий эти точки; б) ломанную составленную из отрезков от $(0,0)$ до $(0,2)$ и от $(0,2)$ до $(2,1)$.

Решение. Проверим условие $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$; $\frac{\partial P}{\partial y}=2x$. Следовательно, интеграл не зависит от выбора пути. а) Вычислим по отрезку прямой: $y=0{,}5x, dy=0{,}5\,dx$.

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)}2xy\,dx+x^2dy=\int_0^2 2x\cdot 0{,}5xdx+x^2\cdot 0{,}5\,dx=$$

$$=\int_0^2 x^2dx+x^2\cdot 0{,}5\,dx=1{,}5\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=4.$$

б) по ломанной: от $(0,0)$ до $(0,2)$ $y=0, dy=0,$

$$\int_{(0,0)}^{(2,0)} 2xy\,dx + x^2dy = 0,$$

от $(0,2)$ до $(2,1)$ $x = 2, dx = 0,$

$$\int_{(2,0)}^{(2,1)} 2xy\,dx + x^2dy = 4.$$

По всей ломанной интеграл равен $0 + 4 = 4$.

6) На материальную точку действует сила $\overline{F} = \frac{-y}{x^2+y^2}\bar{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\bar{\jmath}$. Найти работу, которая будет совершенна силой $\overline{F}$ при движении материальной точки по замкнутой траектории.

Решение. По формуле (6) работа

$$A = \int_\ell F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy.$$

Проверим выполние условия независимости криволинейного интеграла от выбора пути.

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) + y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Равенство этих производных показывает, что криволинейный интеграл не зависит от выбора пути. По формуле Грина работа силы $\overline{\boldsymbol{F}}$ при движении по любому замкнутому контуру равна нулю.

Проверим последнее утверждение вычислив работу при движении по единичной окружности с центром в начале координат. Такую окружность можно задать параметрически

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Тогда $dx = -\sin\varphi\, d\varphi,\ \ dy = \cos\varphi$ и

$$\oint_\ell \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin\varphi}{1}(-\sin\varphi)d\varphi + \frac{\cos\varphi}{1}\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi = \varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi \ne 0.$$

Получилось противоречие. Чтобы ответить на вопрос почему оно получилось проверим выполняются ли условия теоремы Грина в начале координат. Если функции F_x и F_y непрерывны в точке $O(0,0)$, то должен существовать конечный предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} F_x$$

при приближении к $O(0,0)$ по любой кривой. Будем приближаться по прямой $y=x$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} F_x = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{-y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2x} = \frac{-1}{0} = -\infty.$$

Итак, условия теоремы Грина не выполняются.

Примеры для решения на занятии

4.1. $\int_L \frac{d\ell}{x-y}$, где L – отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$, заключенный между точками $A(0,-2)$ и $B(4,0)$.

4.2. $\int_L \sqrt{2y}\ d\ell$, где L – первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

4.3. Найти массу участка линии $y=\ln x$ между точками с абциссами $x_1=\sqrt{3}$ и $x_2=\sqrt{8}$, если плотность линии в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

Вычислить криволинейные интегралы по координатам:

4.4. $\int_L (x^2-y^2)\ dx$, где L – дуга парабола $y=x^2$ от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$.

4.5. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy\,dx+(y-x)dy$ вдоль линии 1) $y=x$, 2) $y=x^2$, 3) $y^2=x$, 4) $y=x^3$.

4.6. $\int_L y\,dx-x\,dy$, где L – эллипс $x=a\cos t, y=b\sin t, a>0, b>0$.

4.7. $\int_{AB} y\,dx+x\,dy$, где: 1) AB – прямая, соединяющая точки $(0,0)$ и (4, 2); 2) AB – ломанная, проходящая чере точки $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,2)$. Почему здесь величина интеграла не зависит от пути интегрирования?

4.8. Вычислить двумя способами интеграл

$$\oint_L (1-x^2)y\,dx+x(1+y^2)dy,$$

если контуром интегрирования L служит окружность $x^2+y^2=R^2$
1) непосредственно; 2) с помощью формулы Грина.

4.9. Вычислить при помощи криволинейного интеграла площадь, ограниченную эллипсом $x=a\sin t,\ \ y=b\cos t$.

4.10. Проекция силы на оси координат задаются формулами $X=2xy$ и $Y=x^2$. Показать, что работа силы при перемещении точки зависит только от начального и конечного ее положения и не зависит от от формы пути. Вычислить величину работы при перемещении из точки (1, 0) в точку (0, 3).

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить криволинейные интегралы:

4.11. $\int_L \cos x\ d\ell$ по отрезку прямой от $A\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ до $B\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

4.12. $\int_L (x^2+y^2)^n\ d\ell$, где L – окружность $x=a\cos t, y=a\sin t$.

4.13. $\int_L x\ d\ \ell$ по параболе $y=x^2$ от $(2;4)$ до $(1;1)$.

4.14. $\int_L (x^2-y^2)\,dx$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от точки $(0;0)$ до точки (2;4).

4.15. $\int_{(0,0)}^{(\pi,2\pi)} -x\cos y\,dx+y\sin x\,dy$ вдоль отрезка, соединяющего точки $(0,0)$ и $(\pi,\ 2\pi)$.

4.16. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L y^2dx+(x+y)^2dy$$

по контуру треугольника ABC с вершинами $A(a;0), B(a;a)$ и $C(0;a)$.

5. Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы первого рода

Пусть S – участок поверхности, $f(M), M\in S$ – функция заданная на S. Поверхностный интеграл первого рода имеет вид:

$$\iint_S f(M)d\sigma.$$

Геометрический смысл. Если $f(M)=1$, то $\iint_S d\sigma$ равен площади S.

Механический смысл. Если $f(M)$ – плотность поверхности (пластинки) в точке M, то поверхностный интеграл $\iint_S f(M)d\sigma$ равен массе пластинки.

Вычисление поверхностного интеграла первого рода. Предположим, что поверхность S такова, что она с любой прямой, параллельной оси Oz, пересекается не более чем в одной точке; тогда ее уравнение можно записать в виде $z = z(x,y)$ и поверхностный интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = \iint_{S_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dx\,dy,$$

где S_{xy}– проекция площадки S на плоскость xOy.

В случае, если поверхность S удается задать как график функции $y = y(x,z)$, можно записать аналогичную формулу

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = \iint_{S_{xz}} f(x,y(y,z),z)\sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}dx\,dz,$$

где S_{xz} – проекция площадки S на плоскость xOz, и

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = \iint_{S_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+{x'_y}^2+{x'_z}^2}dy\,dz,$$

где S_{yz} – проекция площадки S на плоскость yOz.

Пример. Вычислить интеграл $\iint_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma$, где S – часть параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью $z = 0$ (рис.21).

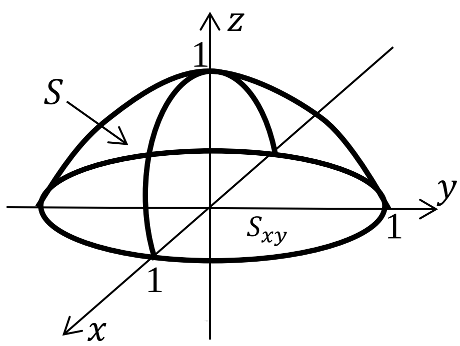

Рис.21

Решение. Поверхность S, заданная уравнением $z = 1 - x^2 - y^2 \geq 0$ проецируется на плоскость xOz в единичный круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Находим $z'_x(x,y) = -2x$, $z'_y = -2y$. Тогда

$$I = \iint_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma =$$

$$= \iint_{S_{xy}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy = \iint_{S_{xy}} (1+4x^2+4y^2)\,dx\,dy.$$

Переходя в полученном двойном интеграле к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$ находим

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1+4r^2)r\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^2}{2}+r^4\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = 3\pi.$$

Поверхностные интегралы по координатам (второго рода).

Гладкая поверхность S в трехмерном пространстве называется *двусторонней*, если нормаль к поверхности при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не имеющему общих точек с ее границей, возвращается в первоначальному положению.

За немногими исключениями, встречающиеся на практике поверхности, являются двусторонними. Например, сфера имеет внешнюю и внутренюю сторону, график функции $z = z(x, y)$ имеет верхнюю и нижнюю сторону.

Поверхность на которой выбрана одна из сторон будет называться ориентированной. Пусть $\overline{a} = a_x(x, y, z)\overline{i} + a_y(x, y, z)\overline{j} + a_z(x, y, z)\overline{k}$ – векторная функция определенная в каждой точке поверхности S, $\overline{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности направленный в выбранную сторону ориентированной поверхности. *Поверхностным интегралом по коодинатам (второго рода)* назовем поверхностный интеграл первого рода от скалярного произведения вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{n}$, т.е. $\iint_S (\overline{a}, \overline{n}) d\sigma$.

Поверхностный интеграл по коодинатам называют еще потоком векторного поля (функции) $\overline{a}(P)$ через поверхность S. Его можно интерпретировать как количество жидкости или газа, протекающего за единицу времени в заданном направлении через поверхность S. Переход к другой стороне поверхности меняет направление нормали, а потому и знак поверхностного интерала.

Обозначения. Поверхностный интеграл по координатам принято записовать в виде

$$\iint\limits_S (\overline{a}, \overline{d\sigma}) = \iint\limits_S a_x\, dy\, dz + a_y dx\, dz + a_z\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_S P(x, y, z) dy\, dz + Q(x, y, z) dx\, dz + R(x, y, z) dx\, dy.$$

Вычисление поверхностного интеграла по координатам.

Интеграл можно вычислить с помощью поверхностного интеграла первого рода

$$\iint\limits_S (\overline{a}, \overline{d\sigma}) = \iint\limits_S (\overline{a}, \overline{n}) d\sigma = \iint\limits_S \left(a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma\right)\, d\sigma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – координаты вектора $\overline{n}$; или через двойные интегралы

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dy\,dz + Q(x,y,z)dx\,dz + R(x,y,z)dx\,dy =$$

$$= \pm \iint\limits_{S_{yz}} P(x(y,z),y,z)dy\,dz \pm \iint\limits_{S_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\,dx\,dz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{S_{xy}} R\big(x,y,z(x,y)\big)\,dx\,dy.$$

Здесь S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} – проекции поверхности S на соответствующие координатные плоскости. Перед первым слагаемым следует выбрать +, если угол α между нормалью $\overline{n}$ и положительным направлением оси Ox – острый; перед вторым слагаемым выбрать +, если угол β между нормалью $\overline{n}$ и осью Oy – острый; перед третьим слагаемым выбрать +, если угол γ между нормалью $\overline{n}$ и осью Oz – острый.

Пример. Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,\,dx\,dz + z\,dx\,dy$$

по части единичной сферы, лежащей в первом октанте, в направлении внешней нормали (Рис.22).

Решение. Запишем поверхностный интеграл как сумму двойных интегралов. Так как внешняя нормаль в первом октанте образует со всеми осями координат острые углы, то все слагаемые берем со знаками +. Тогда

$I = \iint_{S_{yz}} x\,dy\,dz + \iint_{S_{xz}} y\,\,dx\,dz + \iint_{S_{xy}} z\,\,dx\,dy.$

Вычислим например последнее слагаемое. Пространственную область $OABC$ можно рассматривать как цилиндрическую область. Тогда интеграл $\iint_{S_{xy}} z\,\,dx\,dy$ равен объему цилиндрической области, который совпадает с одной восьмой объема единичного шара, т.е. $\frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\pi = \frac{\pi}{6}$. Аналогично можно найти первые лва слагаемых. Тогда

$I = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$

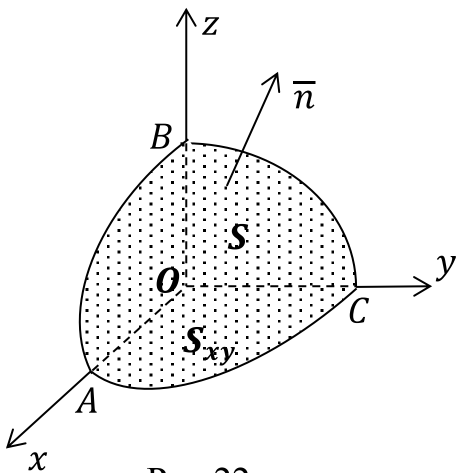

Рис.22

Примеры для решения на занятии

5.1. $\iint_S xy\,d\sigma$, где S – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

5.2. $\iint_S z(x+y)\,d\sigma$; S – часть поверхности $z=\sqrt{9-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0, y=2$.

5.3. $\iint_S x\,d\sigma$, где S – часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, лежащая в первом октанте.

Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

5.4. $\iint_S (x^2+4y^2+2z)\,dx\,dy$, где S – внутреняя (верхняя) сторона параболоида $z=x^2+y^2$, отсеченная плоскостями $x=0, x=2, y=1, y=3$.

5.5. $\iint_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, где внешняя сторона, куба составленного плоскостями $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$.

5.6. $\iint_S (x^2-2y^2+6z)\,dx\,dy$; S – нижняя сторона поверхности $y^2=6z$, отсеченная плоскостями $z=0$, $z=6, x=0, x=3$.

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

5.7. $\iint_S (x+y)\,d\sigma$, где S – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

5.8. $\iint_S y(z+x)\,d\sigma$; S – часть поверхности $y=\sqrt{4-z^2}$, отсеченная плоскостями $x=0, x=5$.

Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

5.9. $\iint_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dx\,dz+z^2\,dx\,dy$ по левой стороне участка плоскости $y=a$, $0\le x\le a, 0\le z\le a$.

5.10. $\iint_S (x^2+y^2+3z^2)\,dx\,dy$; S – внешняя сторолна поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченная плоскостями $z=0, z=1$.

5.11. $\iint_S (x^2+z^2)\,dy\,dz$; S– внешняя сторона поверхности $x=\sqrt{9-y^2}$, отсеченная плоскостями $z=0, z=2$.

6.Ответы

Глава 1.

1.1. 1. **1.2.** $\pi/12$. **1.3.** $\pi - 2$. **1.4.** $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$. **1.11.** $\frac{2a^{1,5}}{3}$. **1.12**. 0. **1.13**. $\frac{\pi}{2} - 1$. **1.14**.-0,25. **1.15**. 0. **1.16**. 2. **1.17**. 13/15. **1.18**. $e^2 + 1$. **1.19**. 4. **1.20**. $\frac{1}{8}$. **1.21**. $\frac{1}{12}$. **1.22**. 20,83.

Глава 2.

2.1. 2. **2.2.** 4,5. **2.3.** $8\pi + 9\sqrt{3}$. **2.4.** $186\frac{2}{3}$. **2.5.** 1/6. **2.6**. $21\frac{1}{3}$. **2.7.а)** $\frac{\pi a^3}{3}$. **2.7.б).** $\frac{2a^3}{3}$. **2.8.** Координаты центра масс $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$. **2.9.** $\frac{a^4}{96}$. **2.10**. $\frac{2}{3} \cdot 10^6$кН ≈666700кН≈ 66670тс. **2.11**. Моменты инерции сечений относительно оси симметрии (Ox) равны: $I_а = 2ab^3 = 4000$; $I_б = \frac{2ab^3}{3} + +2\left(b^3 a + b^2 a + \frac{ba^3}{2}\right) = 10187$; $I_в = \frac{9a^2b^2}{\pi} = 1146$; $I_г = \frac{81a^2b^2}{\pi} = 10313$. Наименьшая стрела прогиба у балки г) (труба), наибольшая – у круглого стержня (в 9 раз больше). **2.12. а)** ½; **б)** 16/3. **2.13**. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3}\right)$. **2.14**. 1/12 . **2.15**. Координаты центра масс $x_c = 3$; $y_c = 4{,}8$.

Глава 3

3.1. 2. **3.2**. $\frac{abc}{2}(a + b + c)$. **3.3**. $z_c = \frac{h}{4} = 207{,}5$м. **3.4.** $V = 12$. **3.5**. $\frac{1}{8}$. **3.6**. $\frac{1}{2}$. **3.7**. $\frac{2\pi}{3}$. **3.8**. $\frac{a^6}{48}$. **3.9**. $\frac{a^{11}}{110}$. **3.10**. 30 . **3.11**. $\frac{abc}{6}$.

Глава 4

4.1. $\sqrt{5}\ln 2$. **4.2**. $4\pi a\sqrt{a}$. **4.3**. $\frac{19}{3}$. **4.4**. $-\frac{56}{15}$. **4.5**. 1) 1/3; 2) 1/12; 3) 17/30; 4) -1/20. **4.6**. $-2\pi ab$. **4.7**. $\int_{AB} y\,dx + x\,dy = 8$ в обоих случаях. Это потому, что здесь $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. **4.8**. $\frac{\pi R^4}{2}$. **4.9**. πab. **4.10**. 0 . **4.11**. $1/\sqrt{2}$. **4.12**. $2\pi a^{2n+1}$. **4.13**. $\frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$. **4.14**. -56/15 . **4.15**. 4π . **4.16**. $\frac{2a^3}{3}$.

Глава 5

5.1. $\frac{\sqrt{3}}{24}$. **5.2**. 36 . **5.3**. $\frac{\pi R^3}{4}$. **5.4**. 120 . **5.5**. 3 . **5.6**. 162 . **5.7**. $1/\sqrt{3}$. **5.8**.100. **5.9**. a^4. **5.10.** $2\sqrt{2}\,\pi$ **.** **5.11.** 88 .

Литература

1. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 – 484 с.
2. Болгов В.А., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа: учеб. пособ. – М.: Наука, 1986 – 336 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособ. — М.: Наука, 1985 – 448 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. II. – М.: Наука, 1976 – 672 с.
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – 14-е изд.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 – 336 с.
6. Горская Т.Ю. Математическая теория поля: Курс лекций. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2013 – 31с.

СОДЕРЖАНИЕ