Р.Б. Салимов, С.И. Филиппов

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЗАОЧНОГО И ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Часть I

Учебное пособие

КАЗАНЬ 2005

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО–СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р.Б. Салимов, С.И. Филиппов

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЗАОЧНОГО И ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Часть I

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

КАЗАНЬ 2005

УДК 512+517
ББК 22.1
С 16

С 16 Салимов Р.Б., Филиппов С.И. Краткий курс высшей математики для заочного и дистанционного обучения: Учебное пособие. Часть I. – Казань: Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2005. – 68 с.

ISBN 5-7829-0142-X
Печатается по решению РИС КГАСУ

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов первого курса (первый семестр) заочной и дистанционной форм обучения. Часть I содержит необходимый теоретический материал по темам: векторная и линейная алгебра, аналитическая геометрия, теория пределов.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор С.Р. Насыров
доктор техн. наук, профессор В.Ф. Шарафутдинов

ISBN 5-7829-0142-X

I. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Действительные числа, числовая ось, определители второго и третьего порядков

Рациональное – это число, которое можно представить в виде отношения p/q двух целых чисел p и q. *Иррациональным* называется число, которое может быть представлено в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел образует множество *действительных (вещественных)* чисел.

Числовая ось – это прямая, на которой выбраны: точка O – начальная точка отсчёта, положительное направление (на рис. 1 оно указано →), масштаб для измерения длины. На рис. 1 ось проведена горизонтально, положительное направление выбрано вправо.

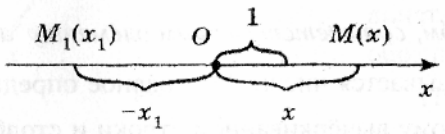

Рис. 1

Действительные числа можно изображать точками числовой оси. Если x положительное, то оно изображается на оси точкой M, расположенной от начала O на расстоянии $OM = x$, для которой направление от O к M совпадает с положительным направлением оси. Если x отрицательное, то оно изображается на оси точкой M_1, лежащей от начала O на расстоянии $OM_1 = x_1$, для которой направление от O к M_1 противоположно положительному направлению оси. Число x называют *координатой точки* M на оси Ox; пишут $M(x)$; x_1 – координата точки M_1, пишут $M_1(x_1)$. Числовую ось обозначают Ox и называют *координатной или осью координат.*

Абсолютной величиной числа x называется число, обозначаемое $|x|$ и равное

$$|x| = \begin{cases} x & при\ x \geq 0; \\ -x & при\ x < 0. \end{cases}$$

Определители второго и третьего порядков. Пусть даны четыре числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. *Определителем второго порядка* называют число $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, где левая часть формулы – обозначение определителя.

Пусть даны девять чисел a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}. Тогда *определителем третьего порядка* называется число, определяемое формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Числа a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца, называются *элементами определителя. Минором, соответствующим элементу* a_{ij} определителя третьего порядка, называется число M_{ij}, равное определителю второго порядка, получаемому вычёркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ij}. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} *элемента* a_{ij} определителя третьего порядка называют число, определяемое формулой $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Из этого определения следует, например,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, формула определителя третьего порядка примет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

2. Декартовы координаты. Полярные координаты

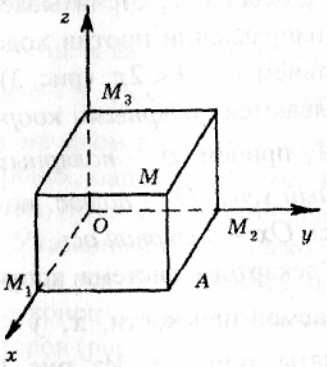

Рис. 2

Декартовы координаты. Пусть в пространстве заданы три взаимно перпендикулярные числовые оси Ox, Oy и Oz с общим началом O и общим масштабом. Будем говорить, что в пространстве введена *система координат Oxyz,* а указанные числовые оси называть *осями координат.* Пространство обозначается R_3. Плоскости, проходящие через оси координат, называются *координатными* и обозначаются Oxy, Oxz и Oyz.

Пусть M – произвольная точка пространства, M_1, M_2, M_3 – проекции точки M на оси Ox, Oy и Oz, т. е. это точки пересечения соответственно с осями Ox, Oy и Oz плоскостей, проведённых через точку M перпендикулярно к этим осям (рис. 2).

Пусть x, y, z – координаты точек M_1, M_2, M_3 на соответствующих осях. Эти числа называются *координатами точки M* в пространстве $Oxyz$. При этом пишут $M(x, y, z)$, где x – абсцисса, y – ордината, z – аппликата. Таким образом, каждой точке пространства $Oxyz$ отвечают три числа – координаты этой точки, верно и обратное.

Оси координат Ox и Oy на плоскости образуют систему координат Oxy. Пусть M_1, M_2 – проекции точки A на оси Ox и Oy (рис. 2). Они являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки A на оси Ox и Oy соответственно. Числа x и y являются *координатами точки A на плоскости.* Этот факт записывают в виде

$A(x, y)$. Плоскость указанной системы координат обозначают R_2. Описанные выше системы координат в пространстве и на плоскости называют *прямоугольными декартовыми*.

Полярные координаты на плоскости. Возьмем на плоскости положительную полуось Ox. Пусть A – произвольная точка плоскости и $\rho = OA$ – расстояние от точки A до начала O, θ – угол, образованный отрезком OA с осью Ox, отсчитываемый от оси Ox в направлении против хода часовой стрелки, причём $0 \le \theta < 2\pi$ (рис. 3). Числа θ и ρ называются *полярными координатами точки* A, причем ρ – *полярный радиус*, θ – *полярный угол*, O – *полюс*, положительная полуось Ox – *полярная ось*.

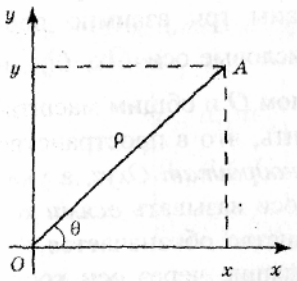

Рис. 3

Пусть Oxy – декартова система координат в рассматриваемой плоскости, x, y – декартовы координаты точки A. Из рис. 3 видно, что $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

3. Векторы, линейные операции над ними

Скалярной называется величина, которая полностью определяется своим численным значением. *Вектором* называется направленный отрезок прямой, соединяющий две точки в пространстве (рис. 4). Если A и B – начало и конец вектора, то он обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

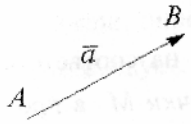

Рис. 4

Длиной (модулем) вектора называется число, равное длине отрезка, соединяющего начало и конец вектора. Длина вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или AB; $|\vec{a}|$ или a. Если начало вектора совпадает с концом, то вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{O}$. Вектор $\overrightarrow{a^0}$, у которого $|\overrightarrow{a^0}| = 1$, называется *единичным*.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на-

зывают *равными* (в этом случае пишут $\vec{a} = \vec{b}$), если:

- равны их длины ($a = b$);
- они коллинеарны;
- одинаково направлены.

Сложение векторов. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ перенесём параллельно самому себе и поместим его начало в конец вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$. Сумму двух векторов можно получить иначе: построить $\vec{a}$, $\vec{b}$ с началом в общей точке, затем достроить на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм. Тогда его диагональ, выходящая из общего начала, будет суммой исходных векторов (см. рис. 5).

Указанный метод легко распространяется на случай трёх и большего числа векторов. Вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец – с концом последнего, и будет суммой рассматриваемых векторов (рис. 6).

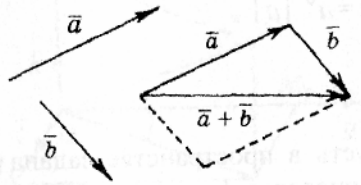

Рис. 5

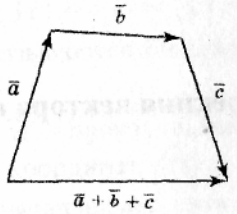

Рис. 6

Свойства сложения векторов:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
- $\vec{a} + \vec{O} = \vec{a}$.

Эти свойства проверяются с помощью построения.

Разность векторов. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построим эти векторы с началом в общей точке. Тогда вектор, начало которого совпадает с концом вектора $\vec{b}$, а конец – с концом вектора $\vec{a}$, называется *разностью векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} - \vec{b}$ (рис. 7).

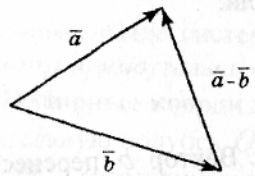

Рис. 7

Умножение вектора на число. Даны вектор $\vec{a}$ и число λ. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор $\vec{c} = \lambda\,\vec{a} = \vec{a}\,\lambda$, который:

- коллинеарен $\vec{a}$;
- имеет длину $|\vec{c}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|$;
- направлен так же, как и $\vec{a}$, при $\lambda > 0$, и противоположно – при $\lambda < 0$.

Свойства умножения вектора на число:

- $(\lambda + \mu)\cdot\vec{a} = \lambda\cdot\vec{a} + \mu\cdot\vec{a}$;
- $\lambda\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\cdot\vec{a} + \lambda\cdot\vec{b}$;
- $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a} = \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a}) = \mu\cdot(\lambda\cdot\vec{a})$.

Эти свойства доказываются с помощью построения.

Легко проверить, что если $\overrightarrow{a^0}$ – единичный вектор направленный как $\vec{a}$, то

$$\vec{a} = \overrightarrow{a^0}\,|\vec{a}|. \qquad (1)$$

4. Проекция вектора на ось

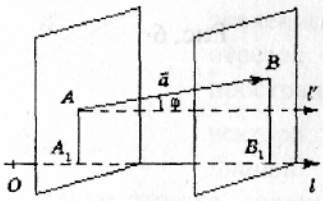

Рис. 8

Пусть в пространстве задана некоторая числовая (координатная) ось l с началом в точке O; $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ есть вектор, произвольно расположенный в пространстве (рис. 8). Пусть A_1 и B_1 – проекции на ось l соответственно начала A и конца B рассматриваемого вектора x_{A_1} и x_{B_1} – соответственно координаты точек A_1 и B_1 на координатной оси l. Разность $x_{B_1} - x_{A_1}$ называется *проекцией этого вектора на ось* l

$$np_l\vec{a} = x_{B_1} - x_{A_1}. \qquad (2)$$

Под углом φ между вектором $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и осью l в пространстве понимается угол между этим вектором и осью l'. Ось l' параллельна оси l, направлена, как l, и проходит через точку A – начало вектора. Этот угол всегда считается положительным и измеряется в пределах $0 \le \varphi \le \pi$. Легко проверить, что

$$np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi. \qquad (3)$$

5. Разложение вектора по базисным векторам

Возьмем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы, лежащие на осях Ox, Oy, Oz и направленные в положительную сторону этих осей, а их начала совпадают с началом координат O (рис. 9), $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Эти векторы называются *базисными (основными)*.

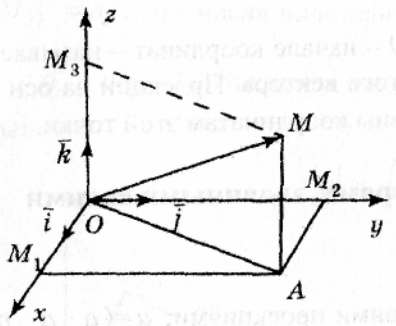

Рис. 9

Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор в системе координат $Oxyz$. Перенесём его параллельно самому себе так, чтобы начало вектора совпало с точкой O. Получим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Пусть M_1, M_2 и M_3 – проекции точки M на оси Ox, Oy и Oz. Из рис. 9 видно, что

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AM}, \quad \overrightarrow{M_1A} = \overrightarrow{OM_2}, \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM_3} \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \qquad (4)$$

Пусть a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ на оси Ox, Oy и Oz. Так как a_x – проекция $\vec{a}$ на ось Ox, то по формуле (2) имеем $a_x = x_{M_1} - x_0$; так как $x_0 = 0$, то

$$a_x = x_{M_1}. \qquad (5)$$

Пусть $a_x = x_{M_1} > 0$, как показано на рис. 9. В этом случае $x_{M_1} = OM_1 = |\overrightarrow{OM_1}|$. По формуле (1) имеем $\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}|\,\vec{i}$, но $x_{M_1} = |\overrightarrow{OM_1}|$ и $a_x = x_{M_1}$, поэтому $\overrightarrow{OM_1} = a_x\,\vec{i}$. Легко проверить, что эта формула остаётся справедливой при $a_x = x_{M_1} < 0$. Аналогично будем иметь $\overrightarrow{OM_2} = a_y\,\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = a_z\,\vec{k}$. Подставим эти выражения в (4):

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}. \qquad (6)$$

Получили формулу, которая называется *разложением вектора по базисным векторам*. Коротко ее записывают в виде $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Числа a_x, a_y, a_z называют также *координатами* $\vec{a}$ *по отношению к базисным векторам* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ с началом в точке O – начале координат – называется *радиус-вектором точки* M, конца этого вектора. Проекции на оси координат радиус-вектора точки M равны координатам этой точки.

6. Линейные операции над векторами, заданными своими проекциями

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Разложим векторы по формуле (6): $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$. Эти соотношения почленно сложим и учтём, что согласно свойствам умножения вектора на число $a_x\,\vec{i} + b_x\,\vec{i} = (a_x + b_x)\,\vec{i}$. Получим $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\,\vec{i} + (a_y + b_y)\,\vec{j} + (a_z + b_z)\,\vec{k}$ или

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x;\, a_y + b_y;\, a_z + b_z). \qquad (7)$$

Аналогично для разности

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x;a_y-b_y;a_z-b_z). \qquad (8)$$

Точно так же для произведения λ и $\vec{a}$

$$\lambda\,\vec{a}=(\lambda\,a_x,\lambda\,a_y,\lambda\,a_z). \qquad (9)$$

7. Длина вектора. Расстояние между двумя точками

Пусть вектор $\vec{a}$ задан своими проекциями: $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$. Перенесём его параллельно себе так, чтобы его начало совпало с началом координат. Получим $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$. Из рис. 9 видно, что

$$|\vec{a}|^2=|\overrightarrow{OM}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{AM}|^2=|\overrightarrow{OM_1}|^2+|\overrightarrow{OM_2}|^2+|\overrightarrow{OM_3}|^2.$$

Согласно (5) $|\overrightarrow{OM_1}|^2=x_{M_1}^2=a_x^2$, аналогично $|\overrightarrow{OM_2}|^2=a_y^2$ и $|\overrightarrow{OM_3}|^2=a_z^2$. Эти числа подставим в предыдущую формулу и получим $|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$. Извлечём квадратный корень и найдем длину вектора:

$$|a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (10)$$

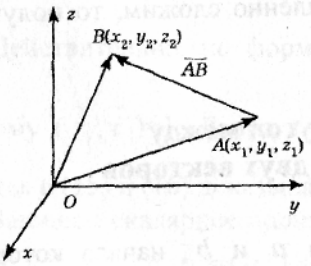

Рис. 10

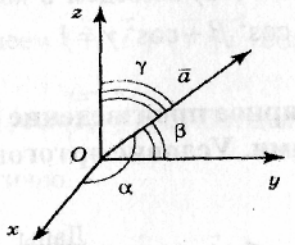

Рис. 11

Задача. Пусть в пространстве $Oxyz$ точки A и B заданы координатами $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ (рис. 10). Нужно найти расстояние между ними. Так как координаты точки A равны проекциям на оси координат радиус-вектора этой точки, то $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$ и

$\overrightarrow{OB}=(x_2;y_2;z_2)$. Согласно (8) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, но $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$. Значит, $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$. По формуле (10) найдём длину вектора $\overrightarrow{AB}$, следовательно, и расстояние между точками A и B: $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

8. Направляющие косинусы вектора

Пусть в пространстве $Oxyz$ задан вектор $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$. Поместим его начало в начало координат. Пусть α, β, γ – углы, образованные вектором $\vec{a}$ с осями координат Ox, Oy, Oz (рис. 11). По формуле (3) для проекций этого вектора на оси координат имеем

$$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha,\ a_y=|\vec{a}|\cos\beta,\ a_z=|\vec{a}|\cos\gamma. \qquad (11)$$

В правые части вместо $|\vec{a}|$ подставим (10) и выразим косинусы углов:

$$\cos\alpha=a_x/\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2};\qquad \cos\beta=a_y/\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2};$$

$$\cos\gamma=a_z/\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (12)$$

Они называются *направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$. Если все равенства в (12) возведём в квадрат и почленно сложим, то получим $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

9. Скалярное произведение векторов, угол между векторами. Условие ортогональности двух векторов

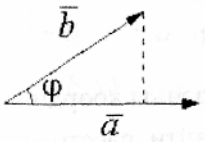

Рис. 12

Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых расположены в одной точке, а угол между векторами равен φ (рис. 12).

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ обозначается $(\vec{a},\vec{b})$ (либо $\vec{a}\,\vec{b}$) и определяется как число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е.

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (13)$$

Из рис. 12 видно, что $|\vec{b}|\cos\varphi = np_{\vec{a}}\vec{b}$ (проекция $\vec{b}$ на $\vec{a}$). С учётом этого соотношения формулу (13) запишем так:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b} \text{ или } (\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}. \qquad (14)$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

- $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$;
- $(\lambda\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$, где λ – скалярный множитель;
- $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$.

Первые два свойства проверяются на основании определения скалярного произведения векторов (13). Докажем третье свойство.

С учётом (14) запишем

$$(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{c}=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c}).$$

Пусть векторы заданы своими проекциями: $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, поэтому $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Сначала для произведений базисных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ докажем справедливость соотношений

$$(\vec{i},\vec{i})=1; \qquad (\vec{j},\vec{j})=1; \qquad (\vec{k},\vec{k})=1; \qquad (15)$$

$$(\vec{i},\vec{j})=0; \qquad (\vec{j},\vec{k})=0; \qquad (\vec{i},\vec{k})=0; \qquad (16)$$

Действительно, по формуле (13) имеем $(\vec{i},\vec{i})=|\vec{i}||\vec{i}|\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{i}}\right)$, поэтому $(\vec{i},\vec{i})=1$. Далее, $(\vec{i},\vec{j})=|\vec{i}||\vec{j}|\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}}\right)=0$. Остальные равенства в (15) и (16) доказываются аналогично.

Запишем скалярное произведение

$$(\vec{a},\vec{b})=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}).$$

Использовав второе и третье свойства скалярного произведения, будем иметь

$$(\vec{a},\vec{b})=a_x b_x(\vec{i},\vec{i})+a_x b_y(\vec{i},\vec{j})+a_x b_z(\vec{i},\vec{k})+a_y b_x(\vec{j},\vec{i})+$$
$$+a_y b_y(\vec{j},\vec{j})+a_y b_z(\vec{j},\vec{k})+a_z b_x(\vec{k},\vec{i})+(a_z b_y(\vec{k},\vec{j})+a_z b_z(\vec{k},\vec{k}).$$

Отсюда с учётом (15) и (16) получим

$$(\vec{a},\vec{b})=a_x\,b_x+a_y\,b_y+a_z\,b_z\,. \qquad (17)$$

Вычисление угла между векторами. Запишем $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через проекции с использованием формулы (10). Из (13) следует, что $\cos\varphi=\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)/(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|)$. Следовательно, согласно (17)

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\,. \qquad (18)$$

Зная $\cos\varphi$, найдем угол φ, $0\le\varphi\le\pi$.

Условие ортогональности (перпендикулярности) двух векторов. Если для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b})$=0, то вектор $\vec{a}$ ортогонален вектору $\vec{b}$.

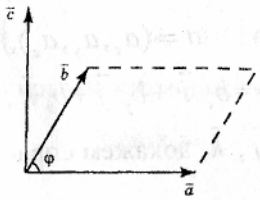

Рис. 13

В самом деле, пусть $(\vec{a},\vec{b})$=0, тогда согласно (13) имеем $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$=0. Так как $\left|\vec{a}\right|\ne 0$, $\left|\vec{b}\right|\ne 0$, то $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$=0. Значит, $\widehat{\vec{a},\vec{b}}=\pi/2$, т. е. векторы ортогональны. Условие ортогональности двух векторов с учётом (17) можно записать следующим образом: $a_x\,b_x+a_y\,b_y+a_z\,b_z$=0.

10. Векторное произведение векторов, условие коллинеарности двух векторов, площадь треугольника

Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построим их, поместив начала в общей точке (см. рис. 13). *Векторным произведением двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор (обозначаемый $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$), который обладает свойствами:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, т. е. длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на $\vec{a}$, $\vec{b}$ как на сторонах;
- $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, т. е. $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости указанного параллелограмма;
- вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ совершается против хода часовой стрелки.

Для векторного произведения $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ применяют и другие обозначения: $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$, $\vec{a}\times\vec{b}$.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:
$[\vec{a},\vec{b}] = (-1)[\vec{b},\vec{a}]$; $[\lambda\vec{a},\vec{b}] = [\vec{a},\lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$; $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{a},\vec{c}]$.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$. Тогда $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}$. Сначала рассмотрим векторные произведения базисных векторов.

С помощью определения векторного произведения покажем справедливость равенств

$$[\vec{i},\ \vec{j}] = \vec{k}; \qquad [\vec{j},\vec{k}] = \vec{i}; \qquad [\vec{k},\vec{i}] = \vec{j}; \qquad [\vec{j},\vec{i}] = -\vec{k};$$

$$[\vec{k},\vec{j}] = -\vec{i}; \qquad [\vec{i},\vec{k}] = -\vec{j}; \tag{19}$$

$$[\vec{i},\vec{i}] = 0; \qquad [\vec{j},\vec{j}] = 0; \qquad [\vec{k},\vec{k}] = 0. \tag{20}$$

Итак, пусть $[\vec{i},\vec{j}] = \vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ обладает свойствами:

- $|\vec{c}| = |\vec{i}||\vec{j}|\sin\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}}\right) = 1\cdot1\cdot1 = 1$;
- $\vec{c} \perp \vec{i}$, $\vec{c} \perp \vec{j}$, т. е. $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$;
- $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от первого вектора $\vec{i}$ ко второму вектору $\vec{j}$ совершается про-

тив хода часовой стрелки, т. е. $\vec{c}$ совпадает с $\vec{k}$, следовательно, $[\vec{i}, \vec{j}]=\vec{k}$.

Покажем, что $[\vec{i}, \vec{i}]=0$. Пусть $[\vec{i}, \vec{i}]=\vec{c}$. Тогда $|\vec{c}|=|\vec{i}||\vec{i}|\sin(\widehat{\vec{i},\vec{i}})=0$, $\vec{c}=0$, т. е. $[\vec{i}, \vec{i}]=0$. Аналогично доказываются остальные равенства (19) – (20). Рассмотрим векторное произведение $[\vec{a},\vec{b}] = [a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}, b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}]$. Использовав последние два свойства, запишем

$$[\vec{a},\vec{b}]=a_x b_x[\vec{i},\vec{i}]+a_x b_y[\vec{i},\vec{j}]+a_x b_z[\vec{i},\vec{k}]+a_y b_x[\vec{j},\vec{i}]+$$

$$+a_y b_y[\vec{j},\vec{j}]+a_y b_z[\vec{j},\vec{k}]+a_z b_x[\vec{k},\vec{i}]+a_z b_y[\vec{k},\vec{j}]+a_z b_z[\vec{k},\vec{k}]$$

Отсюда с учётом (19) – (20) имеем

$$[\vec{a},\vec{b}]=a_x b_y\vec{k}-a_x b_z\vec{j}-a_y b_x\vec{k}+a_y b_z\vec{i}+a_z b_x\vec{j}-a_z b_y\vec{i}.$$

Итак,

$$[\vec{a},\vec{b}]=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}-(a_x b_z-a_z b_x)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}. \qquad (21)$$

Следовательно (см. п.1),

$$[\vec{a},\vec{b}]=\vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \qquad (22)$$

Эту формулу можно записать так:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (23)$$

Условие коллинеарности двух векторов. Если для ненулевых векторов выполняется условие $[\vec{a},\vec{b}]=0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

В самом деле, если $[\vec{a},\vec{b}]=0$, то $|[\vec{a},\vec{b}]|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=0$ и $\sin\varphi=0$, т. е. $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$. Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ коллинеарны.

В этом случае из (21) имеем $a_y b_z - a_z b_y = 0$, $a_x b_z - a_z b_x = 0$, $a_x b_y - a_y b_x = 0$. Значит, $a_x / b_x = a_y / b_y = a_z / b_z$. Это и есть *условие коллинеарности двух векторов*, заданных своими проекциями.

Решим следующую **задачу**: определить площадь треугольника, заданного своими вершинами.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ – вершины треугольника в пространстве $Oxyz$, а их координаты – заданные числа. Найдем векторы (см. п.7) $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, векторное произведение которых обозначим $\overline{d} = d_x \overline{i} + d_y \overline{j} + d_z \overline{k} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$. Тогда согласно (22)

$$d_x = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \quad d_y = -\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \quad d_z = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

и $|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, равна найденному числу $|\vec{d}|$, поэтому искомая площадь треугольника определяется по формуле $S_\Delta = |\vec{d}| / 2$.

11. Смешанное произведение векторов и его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов

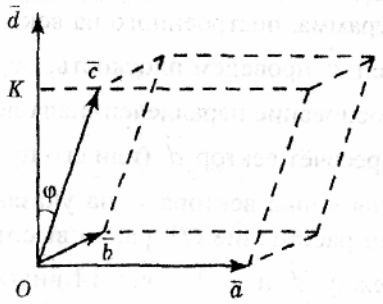

Рис. 14

Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ перемножим векторно и получим $\vec{d} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$. Этот вектор умножим скалярно на $\vec{c}$ и получим число $\left(\vec{d}, \vec{c}\right)$, которое называется *смешанным (векторно-скалярным) произведением трёх исходных векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и обозначается

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left(\vec{d}, \vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right). \qquad (24)$$

Рассмотрим это смешанное произведение, когда векторы заданы своими проекциями $\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$, $\vec{c} = (c_x,\ c_y,\ c_z)$. Проекции вектора $\vec{d}$ на оси координат определяются по формуле (22).

Скалярное произведение векторов $\vec{d}$ и $\vec{c}$ равно сумме произведений одноимённых проекций:

$$(\vec{d}, \vec{c}) = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Или

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (25)$$

Геометрический смысл смешанного произведения. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построим эти векторы, поместив их начала в общей точке, а затем на них как на рёбрах построим параллелепипед (рис. 14). Построим вектор $\vec{d} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, перпендикулярный к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. перпендикулярный к нижнему основанию параллелепипеда. Длина $|\vec{d}|$ равна площади S нижнего основания параллелепипеда (т. е. площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах). Через конец $\vec{c}$ проведём плоскость, перпендикулярную к $\vec{d}$ (ясно, что верхнее основание параллелепипеда лежит в этой плоскости). Эта плоскость пересечёт вектор $\vec{d}$ (или его продолжение) в точке K (точка K – проекция конца вектора $\vec{c}$ на указанную линию). Из построения следует, что расстояние OK равно высоте h параллелепипеда. Пусть φ – угол между $\vec{d}$ и $\vec{c}$. Из рис. 14 видно, что $OK = h = |\vec{c}|\cos\varphi$. Смешанное произведение

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{d},\vec{c}) = |\vec{d}||\vec{c}|\cos\varphi$. Но $|\vec{d}| = S$ и $h = |\vec{c}|\cos\varphi$. Поэтому $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = Sh = V$, где V – объём параллелепипеда. Этот результат мы получили для случая, когда $\varphi < \pi/2$. Если $\varphi > \pi/2$, то вектор $\vec{c}$ лежит ниже плоскости векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, при этом $OK = h = -|\vec{c}|\cos\varphi$ и $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -Sh = -V$. Итак, справедлива формула

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \pm V, \qquad (26)$$

где V – объем параллелепипеда.

Определение. Три вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости.

Условие компланарности трех векторов. Если для трёх ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется условие

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0,$$

то эти векторы компланарны, т.к. согласно (26) $V = Sh = 0$. Отсюда следует, что три вектора лежат в одной плоскости, так как или $S = 0$, или $h = 0$.

II. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве

В аналитической геометрии любую поверхность в пространстве рассматривают как геометрическое место точек, обладающих определённым свойством. Расположим указанную поверхность в системе координат $Oxyz$. Свойство, общее для всех точек поверхности, запишем аналитически, т. е. в виде соотношения, связывающего координаты x, y, z произвольной точки M поверхности:

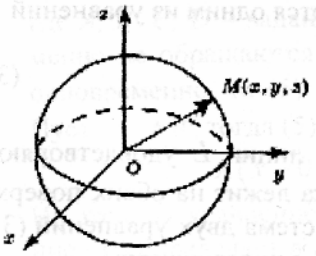

Рис. 15

$$F(x,\ y,\ z) = 0, \qquad (1)$$

где левая часть $F(x,\ y,\ z)$ – известное выражение, содержащее $x,\ y,\ z$. Формула (1) называется *уравнением поверхности в пространстве Oxyz*, а величины $x,\ y,\ z$ – *текущими координатами.* Например, сфера радиуса R с центром (0, 0, 0) (см. рис. 15) определяется уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \qquad (2)$$

В самом деле, для любой точки $M(x,\ y,\ z)$ сферы расстояние $OM=R$. Заметив, что $OM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$, подставим это выражение в предыдущую формулу и перенесем R^2 влево, при этом получим (2). Поэтому (2) является уравнением сферы.

По построению уравнению (1) удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на поверхности. Можно сформулировать и обратное утверждение: каждому уравнению вида (1) в пространстве *Oxyz* отвечает некоторая поверхность – геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют (1), если не имеет место случай, когда это уравнение не определяет никакого множества точек, например, $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, или когда уравнение определяет одну точку, например, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Итак, каждой поверхности в пространстве *Oxyz* отвечает уравнение вида (1). Это обстоятельство позволяет свести изучение геометрических свойств поверхностей к изучению их уравнений аналитическими методами. Этим и занимается аналитическая геометрия.

Уравнения линии в пространстве. Линию L в пространстве *Oxyz* будем рассматривать как линию пересечения двух поверхностей. Пусть каждая из этих поверхностей определяется одним из уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Тогда координаты $x,\ y,\ z$ любой точки M линии L удовлетворяют каждому из этих уравнений, так как эта точка лежит на обеих поверхностях. Таким образом, линии L отвечает система двух уравнений (3). Эта система называется *уравнениями линии L в пространстве*.

2. Плоскость, общее уравнение плоскости

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана плоскость, т. е. заданы:

- координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0, лежащей на этой плоскости;
- A, B, C – проекции на оси координат ненулевого вектора $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$, перпендикулярного плоскости, который называется *нормальным вектором плоскости*.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Рассмотрим $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ (см. рис. 16). Вектор лежит на рассматриваемой плоскости и поэтому перпендикулярен нормальному вектору $\overrightarrow{N}$ этой плоскости, следовательно, скалярное произведение этих векторов $(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{N}) = 0$. Выразим скалярное произведение через проекции векторов. Получим

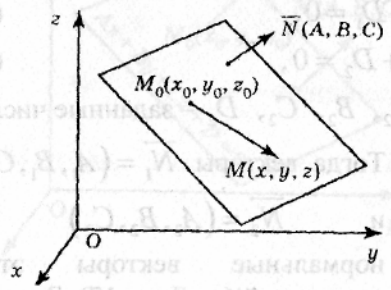

Рис. 16

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (4)$$

Это есть уравнение рассматриваемой плоскости, Здесь x, y, z – текущие координаты, т. е. координаты произвольной точки плоскости.

Общее уравнение плоскости. Возьмём уравнение первой степени относительно x, y, z:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (5)$$

где A, B, C, D – заданные числа. Будем считать, что A, B, C одновременно не обращаются в нуль. Если же эти числа обращаются в нуль одновременно, то (5) примет вид $D = 0$ и уже не будет уравнением. Пусть $C \neq 0$, тогда (5) можно записать в виде

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C(z - (-D/C)) = 0. \qquad (6)$$

Но это есть уравнение вида (4), поэтому оно (следовательно, и уравнение (5)) определяет в пространстве $Oxyz$ плоскость, проходящую через точку $M_0(0, 0, -D/C)$ и перпендикулярную к вектору $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$.

Итак, уравнение (5) в пространстве всегда определяет плоскость с нормальным вектором $\overrightarrow{N}=(A,B,C)$. Оно называется *общим уравнением плоскости.*

3. Угол между двумя плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть в пространстве $Oxyz$ заданы две плоскости соответственно уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{7}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \tag{8}$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 – заданные числа.

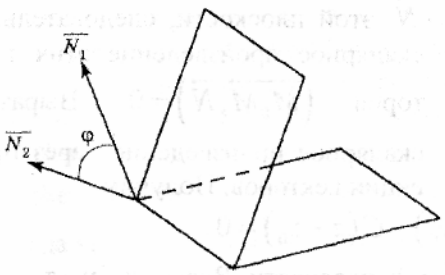

Рис. 17

Тогда векторы $\overrightarrow{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$ и $\overrightarrow{N_2}=(A_2,B_2,C_2)$ – нормальные векторы этих плоскостей (см. рис. 17). За угол φ между плоскостями (7) и (8) примем один из двухгранных углов (образованных ими), равный углу между их нормальными векторами. Использовав формулу (18) раздела I, определим

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{9}$$

Вычислив по формуле (9) $\cos\varphi$, найдём угол φ.

Если $A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2$, то плоскости (7), (8) параллельны между собой, так как коллинеарны их нормальные векторы.

Если $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$, то плоскости (7), (8) перпендикулярны между собой, так как перпендикулярны их нормальные векторы.

4. Расстояние от точки до плоскости в пространстве

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость задана уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (10)$$

где A, B, C, D – известные числа. Дана точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, ее координаты x_1, y_1, z_1 – заданные числа. Нужно найти d – расстояние от точки M_1 до плоскости с уравнением (10). Нормальный вектор этой плоскости равен $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$.

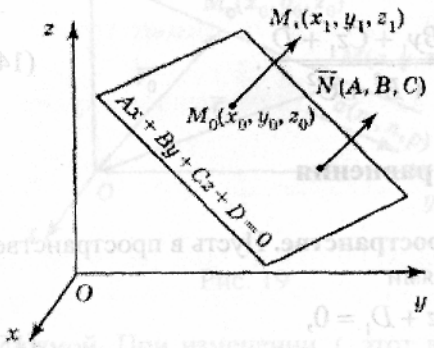

Рис. 18

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на заданную плоскость (рис. 18). Ясно, что длина вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ равна искомому расстоянию d. Ясно также, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. коллинеарен $\overrightarrow{N}$. Скалярное произведение этого вектора и вектора $\overrightarrow{N}$ определим по формуле (17) раздела I:

$$\left(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{N}\right) = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0). \qquad (11)$$

С другой стороны, скалярное произведение в левой части (11) равно

$$\left(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{N}\right) = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|\left|\overrightarrow{N}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{N}}\right) = d\left|\overrightarrow{N}\right|(\pm 1). \qquad (12)$$

Здесь $+1$ берётся, когда угол $\left(\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{N}}\right) = 0$, и -1, когда этот угол равен π. Выражение (12) подставим в левую часть формулы (11), а в правой части раскроем скобки. Получим

$$d\left|\overrightarrow{N}\right|(\pm 1) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0. \qquad (13)$$

Точка M_0 лежит на плоскости с уравнением (10), поэтому её координаты x_0, y_0, z_0 удовлетворяют (10), т. е. имеет место соотношение $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Значит, $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Теперь формулу (13) можно записать так: $d\left|\vec{N}\right|(\pm 1) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$. Найдем теперь d, учитывая, что $\left|\vec{N}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$:

$$(\pm 1)d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (14)$$

5. Прямая в пространстве и ее уравнения

Общие уравнения прямой в пространстве. Пусть в пространстве $Oxyz$ две плоскости заданы уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (15)$$

где A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 – известные числа. Пусть эти плоскости не параллельны, тогда они пересекаются по прямой. Уравнения в системе (15) являются уравнениями этой прямой. Их называют *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой. Пусть в системе $Oxyz$ прямая определена следующим образом:

- заданы координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0, лежащей на прямой (M_0 называется *начальной точкой*);
- заданы проекции m, n, p ненулевого вектора $\vec{a}$, параллельного прямой ($\vec{a}$ называется *направляющим вектором прямой*).

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка рассматриваемой прямой и $\vec{r_0}$, $\vec{r}$ – радиусы-векторы точек M_0, M. Из рис. 19 видно, что

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \overrightarrow{M_0M}. \qquad (16)$$

Так как вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен $\vec{a}$, то ясно, что $\overrightarrow{M_0M}$ можно получить умножением $\vec{a}$ на некоторый скалярный множитель t. Тогда

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}. \qquad (17)$$

Отсюда $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = |t|\left|\vec{a}\right|$, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ направлен, как $\vec{a}$, при $t > 0$, и в противоположную сторону при $t < 0$. Запишем (16) с учётом (17) в виде

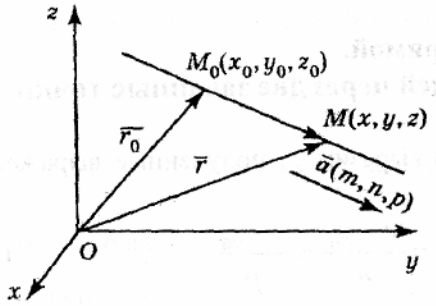

Рис. 19

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a}. \qquad (18)$$

Это соотношение называется *векторным уравнением рассматриваемой прямой,* а скалярная величина t – *параметром.* Каждому значению t согласно (18) отвечает вектор $\vec{r}$, конец M которого лежит на прямой. При изменении t этот вектор изменяется, его конец – точка M – движется по прямой. Мы учли, что $\vec{r_0}$, $\vec{a}$ –заданные постоянные векторы, причём проекции вектора $\vec{r_0}$ на оси координат равны координатам точки M_0, так как $\vec{r_0}$ есть радиус-вектор этой точки, т. е. в (18) $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$. Поскольку $\vec{r}$ есть радиус-вектор точки M, его проекции равны координатам точки M, т. е. $\vec{r} = (x, y, z)$.

Как известно, при умножении вектора на число умножаются на это число все проекции вектора на оси координат, поэтому $t\vec{a} = (tm, tn, tp)$. При сложении векторов их проекции складываются, поэтому $\left(\vec{r_0} + t\vec{a}\right) = (x_0 + tm, y_0 + tn, z_0 + tp)$, но согласно (18) этот вектор равен $\vec{r}$, следовательно, равны соответствующие проекции:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases} \qquad (19)$$

Эти соотношения называют *параметрическими уравнениями рассматриваемой прямой.*

6. Канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки

Из каждого уравнения в (19) выразим t, полученные выражения приравняем и тогда будем иметь

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (20)$$

Эти соотношения называют *каноническими уравнениями* рассматриваемой прямой; здесь x_0, y_0, z_0 – заданные координаты точки M_0 прямой; x, y, z – текущие координаты, т. е. координаты произвольной точки M прямой; m, n, p – заданные числа, равные проекциям на оси координат направляющего вектора $\vec{a}$ прямой. Из формулы (20) можно получить уравнения

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (21)$$

Ясно, что каждое из них, как уравнение первой степени относительно текущих координат в пространстве $Oxyz$, определяет плоскость. Пересекаясь, эти плоскости определяют рассматриваемую прямую.

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащие на прямой. Координаты этих точек суть заданные числа. Нужно записать уравнения прямой, проходящей через эти две точки.

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ лежит на рассматриваемой прямой, поэтому его можно взять в качестве ее направляющего вектора. В качестве начальной точки прямой можно взять любую из указанных точек, например, M_1. Тогда уравнения (20) запишутся так:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

7. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности

Пусть в пространстве $Oxyz$ две прямые заданы уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \tag{22}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}, \tag{23}$$

соответственно. Здесь m_1, n_1, p_1 – проекции на оси координат направляющего вектора $\overrightarrow{a_1}$ прямой (22); m_2, n_2, p_2 – проекции на оси координат направляющего вектора $\overrightarrow{a_2}$ прямой (23).

За угол φ между этими прямыми примем угол между их направляющими векторами $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$. Согласно формуле (18) раздела I имеем

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Если $m_1/m_2=n_1/n_2=p_1/p_2$, то прямые (22), (23) параллельны, так как коллинеарны их направляющие векторы. Если $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$, то прямые (22), (23) перпендикулярны, так как перпендикулярны их направляющие векторы.

8. Уравнение линии на плоскости

Поступив так же, как в случае уравнения поверхности в пространстве, можно показать, что каждой линии на плоскости Oxy отвечает соотношение вида

$$F(x,y)=0, \tag{24}$$

которому удовлетворяют координаты x, y любой точки линии. Здесь F – известное выражение, содержащее x, y. Соотношение (24) назы-

вают *уравнением линии на плоскости* Oxy, где x, y – текущие координаты. И, наоборот, уравнению вида (24) на плоскости Oxy отвечает некоторая линия – геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют (24).

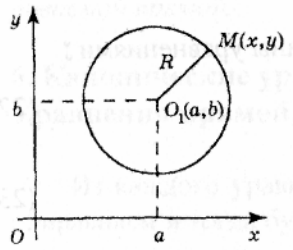

Рис. 20

Например, окружности радиуса R с центром $O_1(a,b)$ (рис. 20) отвечает уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0. \qquad (25)$$

В самом деле, для любой точки $M(x,y)$ окружности расстояние $O_1M=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$. Возведя в квадрат это выражение, получим (25).

9. Общее уравнение прямой на плоскости, угол между прямыми

Уравнение первой степени

$$Ax+By+D=0 \qquad (26)$$

в пространстве $Oxyz$ определяет плоскость, параллельную оси Oz, причём её нормальный вектор $\overrightarrow{N}=(A,B,0)$. Пусть эта плоскость пересекается с плоскостью Oxy по прямой PQ (рис. 21) и $M(x,y,0)$ – произвольная точка этой прямой. Так как точка M лежит на плоскости с уравнением (26), то координаты этой точки в пространстве удовлетворяют этому уравнению. Таким образом, координаты x, y произвольной точки M прямой PQ удовлетворяют (26). Следовательно, это и есть уравнение указанной прямой PQ.

Итак, уравнение (26) в пространстве $Oxyz$ определяет плоскость, параллельную оси Oz. Это же уравнение на плоскости Oxy определяет прямую, являющуюся линией пересечения указанной плоскости с

плоскостью Oxy. Уравнение (26) называется *общим уравнением прямой на плоскости.*

В дальнейшем у точки M этой прямой и у нормального вектора $\overline{N}$ этой прямой третьи нулевые координаты записывать не будем. Прямую будем изображать в плоскости Oxy (рис. 22).

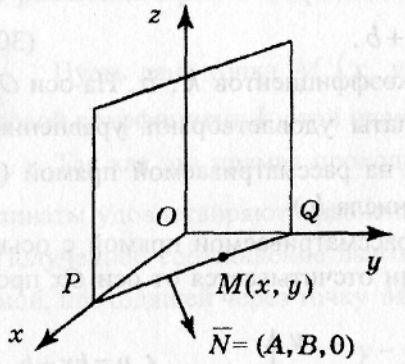

Рис. 21

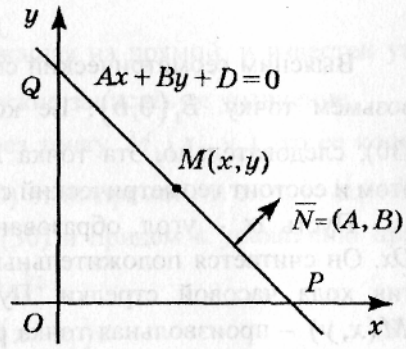

Рис. 22

Из изложенного видно, что в общем уравнении прямой коэффициенты A и B при текущих координатах x, y являются проекциями нормального вектора $\overline{N}$ прямой на оси координат.

Пусть на плоскости Oxy две прямые заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0, \qquad (27)$$

$$A_2x + B_2y + D_2 = 0. \qquad (28)$$

$\overline{N_1} = (A_1, B_1)$, $\overline{N_2} = (A_2, B_2)$ – нормальные векторы этих прямых. За угол φ между ними примем один из двух смежных углов, равный углу между нормальными векторами $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ этих прямых. Но последний определяется через косинус угла φ, который найдем по формуле (18) раздела I :

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

10. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть в общем уравнении прямой $Ax + By + D = 0$ коэффициент $B \neq 0$. Тогда $y = -(A/B)x - D/B$. Обозначим $b = -D/B$,

$$k = -A/B, \tag{29}$$

Получим

$$y = kx + b. \tag{30}$$

Выясним геометрический смысл коэффициентов k, b. На оси Oy возьмём точку $B_1(0,b)$. Ее координаты удовлетворяют уравнению (30), следовательно, эта точка лежит на рассматриваемой прямой (в этом и состоит геометрический смысл числа b).

Пусть α – угол, образованный рассматриваемой прямой с осью Ox. Он считается положительным, если отсчитывается от оси Ox против хода часовой стрелки. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка рассматриваемой прямой. Из рис. 23 видно, что $(y-b)/x = \operatorname{tg}\alpha$. С другой стороны, из (30) следует, что $(y-b)/x = k$. Сравнив два последних соотношения, получим $k = \operatorname{tg}\alpha$. Это соотношение определяет геометрический смысл коэффициента k, который называют *угловым коэффициентом прямой на плоскости.*

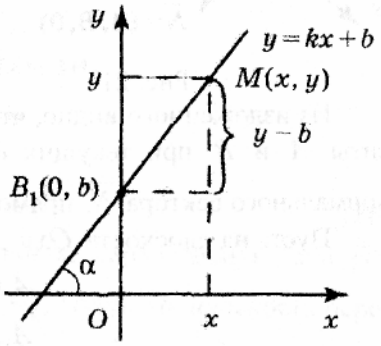

Рис. 23

Условие параллельности прямых. Если $A_1/A_2 = B_1/B_2$, то прямые (27), (28) параллельны, так как коллинеарны их нормальные векторы. С учётом формулы (29) записанное выше условие параллельности прямых можно представить в виде $k_1 = k_2$, где k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых (27), (28).

Условие перпендикулярности прямых. Если имеет место равенство $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, то прямые (27) и (28) перпендикулярны. С учё-

том формулы (29) условие перпендикулярности прямых запишем так: $k_1 = -1/k_2$.

11. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть дана точка $M_1(x_1, y_1)$, лежащая на прямой, и известен угловой коэффициент k этой прямой. Нужно записать ее уравнение.

Так как эта прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, то ее координаты удовлетворяют уравнению (30) этой прямой, т. е. $y_1 = kx_1 + b$. Полученное соотношение вычтем из (30) и придем к уравнению прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (31)$$

Пусть теперь даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Нужно записать уравнение прямой, проходящей через них. Здесь можем воспользоваться уравнением (31). Величина k пока не известна. Учтём, что прямая проходит также через точку M_2, поэтому координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (31), т. е. $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Исключим k из последних двух уравнений. Получим искомое уравнение $(y - y_1)/(y_2 - y_1) = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$.

12. Преобразование координат на плоскости

Параллельный перенос осей координат. Пусть Oxy – исходная система координат, $O'x'y'$ – новая система координат, полученная параллельным переносом исходной системы, как показано на рис. 24. Положение новой системы по отношению к старой определим, задав координаты $O'(x_{o'}, y_{o'})$ нового начала O' в старой системе координат, где $x_{o'}, y_{o'}$ – заданные числа. Пусть x', y' – координаты точки M

в новой системе, x, y – координаты точки M в исходной системе. Как видно из рис. 24, $x = x' + x_{o'}$, $y = y' + y_{o'}$. Итак,

$$\begin{cases} x = x' + x_{o'} \\ y = y' + y_{o'} \end{cases} \qquad (32)$$

Эти формулы выражают старые координаты x, y точки M через её новые координаты.

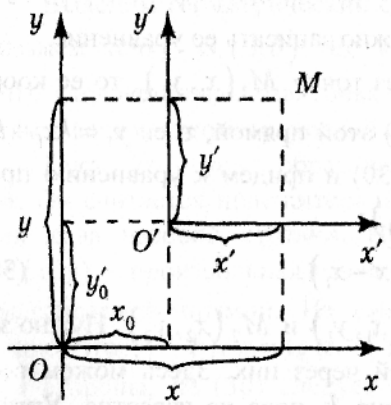

Рис. 24

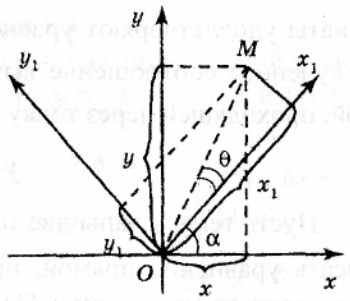

Рис. 25

Поворот осей координат. Пусть Oxy – исходная система координат, а новая система координат получена поворотом исходной вокруг начала координат на угол α, где α – заданное число (см. рис. 25). Угол α берётся со знаком «+», если отсчёт ведётся против хода часовой стрелки от оси Ox. Пусть x, y – координаты точки M в системе Oxy, x_1, y_1 – координаты точки M в системе Ox_1y_1. Пусть $\rho = OM$ и θ – угол, образованный отрезком OM с осью Ox_1, причём, как и α, этот угол берётся со знаком «+», если отсчёт ведётся от оси Ox_1 против хода часовой стрелки. Из рис. 25 видно, что

$$x_1 = \rho\cos\theta, \;\; y_1 = \rho\sin\theta. \qquad (33)$$

С другой стороны,

$$x_1 = \rho\cos(\theta+\alpha),\ \ y_1 = \rho\sin(\theta+\alpha). \qquad (34)$$

Формулы (34) перепишем, использовав известные формулы тригонометрии для косинуса и синуса суммы: $x = \rho\cos\theta\cos\alpha - \rho\sin\theta\sin\alpha$, $y = \rho\sin\theta\cos\alpha + \rho\cos\theta\sin\alpha$. С учётом (33) имеем

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, \\ y = y_1\cos\alpha + x_1\sin\alpha. \end{cases} \qquad (35)$$

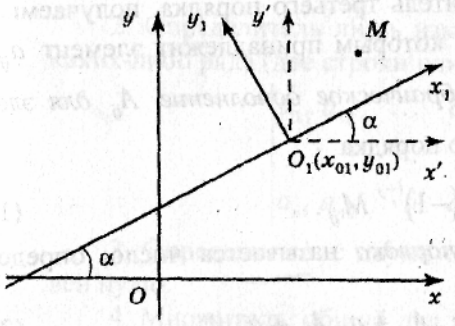

Рис. 26

Общий случай. Пусть Oxy – исходная система координат, $O_1x_1y_1$ – новая система координат (рис. 26). Положение новой системы по отношению к старой определим, задав:

- координаты x_{o_1}, y_{o_1} нового начала O_1 в старой системе координат;
- угол α, который образует ось O_1x_1 с Ox.

Пусть x, y – координаты точки M в старой системе, а x_1, y_1 – координаты точки M в новой системе. С учетом использования системы координат $O_1x'y'$ (рис. 26) из (32), (35) можно записать

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha + x_{O_1}, \\ y = y_1\cos\alpha + x_1\sin\alpha + y_{O_1}. \end{cases}$$

III. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Определители высших порядков

Определитель *четвёртого порядка* обозначается

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Как и раньше, элементы этого определителя обозначаются a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца. *Минором* M_{ij} для элемента a_{ij} определителя Δ называется определитель третьего порядка, получаемый вычёркиванием строки и столбца, которым принадлежит элемент a_{ij}. Зная этот минор, определим *алгебраическое дополнение* A_{ij} *для элемента* a_{ij} определителя четвёртого порядка

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1)$$

Определителем четвёртого порядка называется число, определяемое формулой

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \qquad (2)$$

Таким образом, определитель четвёртого порядка выражается через определители третьего порядка. Введём понятие определителя n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}. \qquad (3)$$

Здесь A_{1j} определяется формулой (1). Соотношение (3) – разложение определителя n-го порядка по элементам первой строки. Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} определителя образуют его *главную диагональ*. Можно показать, что определитель раскладывается по элементам любой строки или любого столбца. Например, разложение определителя по элементам i-й строки имеет вид

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}. \qquad (4)$$

Разложение по элементам j-го столбца имеет вид

$$\Delta = a_{1j}A_{j1} + a_{2j}A_{j2} + \ldots + a_{nj}A_{jn}. \qquad (5)$$

2. Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если его столбцы сделать строками с теми же номерами (эта операция называется *транспонированием*):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. Определитель лишь изменит знак, если поменять местами два каких-либо ряда (две строки или два столбца). Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

4. Множитель, общий для элементов некоторого ряда определителя, можно вынести за знак определителя. Например, пусть λ – определённое число, тогда

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то и определитель равен нулю.

6. Если к элементам некоторого ряда (строки или столбца) прибавить соответствующие элементы другого ряда, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+\lambda a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого ряда равна нулю. Например, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \ldots + a_{1n}A_{2n} = 0$.

Эти свойства для определителей третьего порядка устанавливаются непосредственной проверкой.

3. Матрицы и действия над ними. Обратная матрица

Матрицей называется прямоугольная таблица, содержащая mn чисел, имеющая m строк и n столбцов. Она обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{11}, a_{12}, … называются *элементами матрицы*. Коротко эту матрицу обозначают так: $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Здесь i – номер строки, j – номер столбца элемента a_{ij}. Матрицу иногда обозначают и так:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Если столбцы матрицы сделать строками с теми же номерами, то полученная матрица называется *транспонированной* и обозначается

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Если в матрице число строк и число столбцов совпадают, то матрица называется *квадратной*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} образуют *главную диагональ матрицы*. Число n называется *порядком матрицы*. Квадратной матрице можно поставить в соответствие число, называемое *определителем матрицы*, обозначаемое $\Delta(A)$ и равное

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется *единичной* и обозначается

$$E=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, состоящая из одной строки, называется *строчной* и обозначается $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Матрица, состоящая из одного столбца, называется *столбцевой*, например,

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пусть даны две матрицы с одинаковым числом строк и столбцов: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$. Эти матрицы называются *равными друг другу* (при этом пишут $A=B$ или $(a_{ij})=(b_{ij})$), если все их соответствующие элементы равны друг другу, т. е. $a_{ij}=b_{ij}$ для всех $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Суммой матриц A и B называется матрица, обозначаемая $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для всех значений i, j. Это правило можно записать так: $(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$. Аналогично вводится понятие *разности* двух матриц.

Произведением матрицы A *на число* λ называется матрица, обозначаемая λA, элементы которой равны произведениям числа λ на соответствующие элементы матрицы A, т. е. $\lambda\left(a_{ij}\right)=\left(\lambda a_{ij}\right)$.

Умножение матриц. Даны матрица $A=\left(a_{ij}\right)$, имеющая m строк и k столбцов, и матрица $B=\left(b_{ij}\right)$, имеющая k строк и n столбцов. *Произведением* этих матриц называется матрица, обозначаемая $C=AB$ (A – первая матрица, матрицы здесь не равноправны), элементы c_{ij} которой определяются формулой

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj},\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n. \qquad (6)$$

Формула (6) показывает, что элемент c_{ij} i-й строки и j-го столбца матрицы $C=AB$ равен сумме произведений элементов i-й строки первой матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца второй матрицы B.

Аналогично найдём $C_1=BA$, если число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A. Если это не так, то произведения BA не существует. Если даже AB и BA существуют, то легко проверить на примерах, что, вообще говоря, $AB\neq BA$.

Свойства умножения матриц. Пусть даны три матрицы A, B и C. Тогда:

- $A(BC)=(AB)C$;
- $A(B+C)=AB+AC$.

Пусть A – квадратная матрица, а E – единичная матрица того же порядка, что и A. Нетрудно проверить, что $AE=EA=A$.

Обратная матрица. Пусть дана квадратная матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы есть число

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пусть этот определитель не равен нулю и A_{ij} – алгебраическое дополнение для элемента a_{ij}.

Обратной к данной матрице A называется матрица, обозначаемая A^{-1} и определяемая формулой

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\Delta(A)} & \dots & \dfrac{A_{n1}}{\Delta(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{A_{1n}}{\Delta(A)} & \dots & \dfrac{A_{nn}}{\Delta(A)} \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что для построения обратной матрицы A^{-1} для матрицы A нужно:

- элементы матрицы A заменить на их алгебраические дополнения;
- все эти дополнения поделить на $\Delta(A)$ – определитель матрицы A;
- полученную матрицу транспонировать.

A^{-1} существует лишь тогда, когда $\Delta(A)\neq 0$. Нетрудно проверить, что $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

4. Системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Матричный метод решения

Дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (7)$$

где x_1, x_2, …, x_n – искомые неизвестные, a_{11}, a_{12}, …, a_{nn} – заданные числа, называемые *коэффициентами уравнений системы*, b_1, b_2, …, b_n – заданные числа, называемые *свободными членами системы уравнений*. Нужно найти x_1, x_2, …, x_n.

Введём три матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

A называется *матрицей коэффициентов* системы (7), X – *матрицей неизвестных*, B – *матрицей свободных членов*. Определитель матрицы A называется *определителем системы* и обозначается Δ. Итак, определитель системы (7) равен

$$\Delta = \Delta(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

Возьмём произведение AX матриц (8) и (9). Так как X – столбцевая матрица, то это произведение также представляет собой столбцевую матрицу

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Элементы этого произведения равны согласно системе (7) свободным членам соответствующих уравнений этой системы, т. е. соответствующим элементам матрицы B. Следовательно, эти две матрицы равны друг другу. Таким образом,

$$AX = B. \tag{12}$$

Это есть матричная запись системы (7).

Пусть определитель системы (7), т. е. определитель (11), отличен от нуля. Тогда по известной матрице (8) коэффициентов системы (7) найдём для неё обратную матрицу A^{-1}. На эту матрицу (все элементы которой известны) умножим обе части (12), считая матрицу A^{-1} первой матрицей в произведениях, и получим

$$A^{-1}\left(AX\right) = A^{-1}B. \tag{13}$$

Согласно первому свойству умножения матриц, левая часть формулы (13) равна $\left(AA^{-1}\right)X$, но так как $A^{-1}A = E$, $EX = X$, то левая часть формулы (13) равна X. Таким образом,

$$X = A^{-1}B. \tag{14}$$

Правая часть формулы содержит известные матрицы. Найдём произведение $A^{-1}B$. Это будет столбцевая матрица с известными элементами, но эта матрица по формуле (14) равна матрице неизвестных X. Поэтому их соответствующие элементы равны друг другу. Приравняв эти элементы, найдём неизвестные x_1, x_2, …, x_n.

5. Формулы Крамера

Решение системы (7) можно найти по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \cdots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (15)$$

Здесь Δ – определитель (11) системы (7) (считается, что $\Delta \neq 0$). $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_n$ – определители, получаемые из определителя Δ заменой соответственно первого, второго, … n-го его столбца на столбец свободных членов системы (7), т. е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\ldots\ldots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Теорема. *Если определитель системы (7) не равен нулю, то эта система имеет единственное решение (которое можно найти, например, по формулам Крамера).*

6. Общая система линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса

Дана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (16)$$

Здесь коэффициенты $a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{mn}$ и свободные члены $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – заданные числа. Будем считать, что число m уравнений не больше числа n неизвестных (случай $m > n$ требует особого рассмотрения).

Система (16) называется *совместной*, если она имеет решение, т. е. существуют числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, удовлетворяющие всем уравнениям системы. Система называется *несовместной*, если она не имеет реше-

ния. Две системы называются *равносильными (эквивалентными)*, если любое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Следующие преобразования, называемые *элементарными*, переводят заданную систему в равносильную (эквивалентную) ей:

- перестановка любых двух уравнений системы;
- умножение любого уравнения системы на ненулевое число;
- прибавление к обеим частям данного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое ненулевое число.

Если в процессе элементарных преобразований системы (16) появится уравнение вида $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$, то это соотношение отбрасывается, так как ему удовлетворяют любые значения неизвестных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Если в процессе элементарных преобразований системы (16) появится соотношение $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b,\ b \neq 0$, т. е. противоречивое соотношение, которое не может быть выполнено, то система (16) является несовместной.

Метод Гаусса заключается в следующем. Пусть $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то перенумеруем неизвестные $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ так, чтобы в первом уравнении коэффициент при первом неизвестном не равнялся нулю, при этом столбцы коэффициентов соответствующих неизвестных в системе (16) поменяются местами). Из всех уравнений, кроме первого, в системе (16) исключим неизвестную x_1, для этого ко второму уравнению прибавим первое, умноженное на $-a_{21}/a_{11}$, к третьему уравнению прибавим первое, умноженное на $-a_{31}/a_{11}$, и т. д. Тогда придём к системе вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots \\ \qquad a'_{m2}x_1 + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Пусть $a'_{22} \neq 0$ (если $a'_{22} = 0$, то снова перенумеруем неизвестные $x_2,\ \ldots,\ x_n$). Теперь аналогично предыдущему из всех уравнений, кроме первого и второго, исключим x_2. Если система (16) совместна, процесс продолжим. В конечном счёте путём вышеуказанных преобразований придём к одному из следующих случаев:

- к ступенчатой системе

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1r}x_r + \ldots + b_{1n}x_n = B_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2r}x_r + \ldots + b_{2n}x_n = B_2, \\ \qquad \ldots \\ \qquad\qquad b_{rr}x_r + \ldots + b_{rn}x_n = B_r, \end{cases} \tag{17}$$

здесь число уравнений $r < n$, так как система содержит неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n (если x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n не входят в систему (17), то их не будет и в исходной системе (16));

- к треугольной системе

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = B_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = B_2, \\ \qquad \ldots \\ \qquad\qquad b_{nn}x_n = B_r. \end{cases} \tag{18}$$

В системах (17), (18) по построению все коэффициенты b_{11}, b_{22}, …b_{rr}, …, b_{nn} отличны от нуля. В случае системы (16), приведённой к системе (18), далее поступим так: из последнего уравнения (18) найдем x_n; из предпоследнего найдем x_{n-1}, затем x_{n-2}, и, наконец, x_1, т. е. найдём все искомые неизвестные.

Пусть система (16) приводится к ступенчатой системе (17). Перенесем в ее правую часть все слагаемые, содержащие неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n,

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1r}x_r = B_1 - b_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - b_{1n}x_n \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2r}x_r = B_2 - b_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - b_{2n}x_n \\ \qquad \ldots \\ \qquad\qquad b_{2r}x_r = B_r - b_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - b_{rn}x_n \end{cases}. \tag{19}$$

В этой системе всем неизвестным x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n придадим произвольные (по нашему выбору) значения. Тогда в правой части (19) будут известные числа, и из последнего уравнения найдём x_r, из предыдущего – x_{r-1} и т. д., найдём x_1. Так как значения x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n выбраны нами произвольно, то система (19), следовательно, и (16), имеет бесконечное множество решений.

7. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли

Поставим в соответствие системе (16) две матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *основной матрицей системы*, $\overline{A}$ называется *расширенной матрицей системы* (16). Элементарным преобразованиям над (16) отвечают соответствующие преобразования над строками матриц A и $\overline{A}$. Матрица, получаемая из данной путём элементарных преобразований над строками, а также перестановкой столбцов, называется *матрицей, эквивалентной данной.* Основные матрицы систем (17) и (18) называются соответственно *ступенчатой* и *треугольной.*

Строка матрицы называется *нулевой*, если все её элементы равны нулю, и *ненулевой*, если она содержит хотя бы один отличный от нуля элемент. Например, если $a_{11}=0$, $a_{12}=0$, ..., $a_{1n}=0$, $b_1 \neq 0$, то первая строка матрицы A будет нулевой, а первая строка матрицы $\overline{A}$ будет ненулевой.

Рангом матрицы (когда число строк не больше числа столбцов) называется число ненулевых строк в эквивалентной треугольной или ступенчатой матрице. Ясно, что для определения ранга матрицы сначала её нужно преобразовать методом Гаусса и привести к треугольной или ступенчатой матрице, эквивалентной исходной.

Пусть система уравнений (16) преобразована методом Гаусса и приведена либо к системе (17), либо к системе (18). При этих преобразованиях происходят соответствующие преобразования основной и расширенной матриц системы (16). Совместность системы (16) равносильна отсутствию в преобразованной системе (17) или (18) противоречивого соотношения $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=b,\ b\neq 0$. Это в свою очередь равносильно совпадению числа ненулевых строк основной и расширенной матриц преобразованной системы (17) или (18). А это последнее, в свою очередь, равносильно совпадению рангов основной и расширенной матриц исходной системы. Итак, справедлива

Теорема Кронекера-Капелли. *Если система уравнений совместна, то ранги её основной и расширенной матриц равны, и наоборот, если ранги основной и расширенной матриц равны, то система совместна.*

Нередко используют другое определение ранга матрицы, равносильное указанному выше: рангом матрицы называется наивысший по-

рядок минора, отличного от нуля и составленного без перестановок из оставшихся элементов матрицы после вычёркивания ряда столбцов и строк.

8. Однородные системы

Система уравнений (16) называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю: $b_1 = 0,\ b_2 = 0, \ldots,\ b_m = 0$. Ясно, что однородная система всегда совместна, так как имеет очевидное тривиальное нулевое решение $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots,\ x_n = 0$. Если среди чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ имеется хотя бы одно, отличное от нуля, то такое решение системы называется *ненулевым.*

Пусть в однородной системе (16) число уравнений меньше числа неизвестных ($m < n$). Такая система методом Гаусса приведётся к ступенчатой системе, так как к треугольной системе мы можем прийти, лишь когда $m = n$. Но ступенчатая система имеет бесконечное множество решений, среди которых обязательно найдётся ненулевое. Например, в системе (17) ненулевое решение получим, взяв $x_{r+1} \neq 0$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Однородная система, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, всегда имеет ненулевые решения.*

Рассмотрим случай, когда в однородной системе (16) $m = n$. Для такой системы может быть доказана

Теорема 2. *Если однородная система из n уравнений с n неизвестными имеет ненулевые решения, то её определитель равен нулю, и наоборот, если определитель указанной однородной системы равен нулю, то эта система имеет ненулевые решения.*

IV. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

1. Обозначения. Функция

Символ $\forall$ называется *квантором общности.* Запись $\forall x$ читается так: «для любого x …», «для всех x …». *Квантор существования* – это символ $\exists$. Запись $\exists\, x$ читается так: «существует такое x, что …». Символ $\Rightarrow$ обозначает *логическое следствие.* Запись $A \Rightarrow B$ означает, что из утверждения A следует утверждение B. Символ $\Leftrightarrow$ обозначает *логическую равносильность.* Запись $\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$ означает, что из утверждения A следует утверждение B, и наоборот.

Например, запись

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall x > N \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon$$

читается так: для любого положительного числа ε существует такое число N, что для всех $x > N$ имеет место неравенство $| f(x) - b | < \varepsilon$.

Функцией называется правило, по которому каждому значению x из множества M ставится в соответствие определённое значение y из множества N при условии, что каждое значение y из множества N отвечает хотя бы одному x из M. Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а зависимая переменная y – *функцией*. Множество M называется *областью определения функции*, а N – *областью значений* функции. Введённая функция обозначается $y = f(x)$.

Основные элементарные функции:

- постоянная функция $y = C = \text{const}$;
- степенная функция $y = x^n$, n – любое действительное число;
- показательная функция $y = a^x$ $\left(a > 0,\ a \neq 1\right)$;
- логарифмическая функция $y = \log_a x$ $\left(a > 0,\ a \neq 1\right)$;
- тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Определение сложной функции. Дана функция $y = f(U)$, причём аргумент U является функцией от x, т. е. $U = \varphi(x)$. Область значений функции $U = \varphi(x)$ является частью области определения функции $y = f(U)$. Следовательно, каждому x из области определения $\varphi(x)$ отвечает определённое значение $U = \varphi(x)$, а этому значению U отвечает определённое значение $y = f(U)$. Таким образом, каждому указанному x отвечает определённое значение y. Это означает, что y есть функция от x. Она называется *сложной функцией от* x и записывается в виде $y = f\left[\varphi(x)\right]$, где φ – внутренняя функция, f – внешняя функция, $U = \varphi(x)$ – промежуточный аргумент.

Элементарной называется функция, определяемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций, с помощью

конечного числа четырёх арифметических действий $(+,-,/,\times)$ и с помощью конечного числа операций взятия функции от функции.

2. Предел функции при $x \to +\infty$ и его геометрический смысл

Пусть x – переменная величина, которая принимает положительные значения и неограниченно увеличивается. В этом случае будем говорить, что x *стремится к плюс бесконечности* и писать $x \to +\infty$. Пусть при этом заданная функция $y = f(x)$ принимает значения, всё более и более близкие к некоторому числу b, в том смысле, что величина $|f(x) - b|$ уменьшается и приближается к нулю. В этом случае будем говорить, что число b *есть предел функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$.

Определение. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого положительного числа ε, каким бы малым оно ни было, найдётся такое положительное число N, что для всех $x > N$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, т. е. символически $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае будем писать $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

Подчеркнём, что ε – любое положительное число, сколь угодно малое. Другими словами, если число b есть предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$, то для всех сколь угодно больших x значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от b. Ясно, что число N зависит от выбора числа ε: чем меньше ε, тем больше N. Иначе говоря, $N = N(\varepsilon)$, т. е. N есть функция от ε.

Покажем, что функция $f(x) = 5 + 1/x$ имеет предел при $x \to +\infty$, равный 5. В самом деле, $f(x) - 5 = 1/x$. Так как x – величина положительная, то условие $|f(x) - 5| < \varepsilon$ примет вид $1/x < \varepsilon$ или $x > 1/\varepsilon$. Таким образом, для всех $x > 1/\varepsilon$ имеем $|f(x) - 5| < \varepsilon$, каким бы малым число ε ни было. В качестве числа N, фигурирующего в определении предела, можем взять $N = 1/\varepsilon$. В этом примере $f(x) = 5 + 1/x > 5$ всегда, так как $x > 0$. Поэтому функция стремится к пределу 5, оставаясь больше своего предела, когда $x \to +\infty$.

Выясним **геометрический смысл предела** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. Неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon \qquad (1)$$

равносильно неравенствам $-\varepsilon < f(x)-b < \varepsilon$ или

$$b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon.. \qquad (2)$$

Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что для всех $x > N$ имеет место (1), следовательно, и (2), то геометрически это означает, что для всех точек графика $y = f(x)$, абсциссы x которых удовлетворяют неравенству $x > N$, ординаты $f(x)$ лежат в интервале (2). Это означает, что указанные точки, образующие соответствующий участок графика, лежат между прямыми с уравнениями $y = b-\varepsilon$ и $y = b+\varepsilon$ (см. рис. 27).

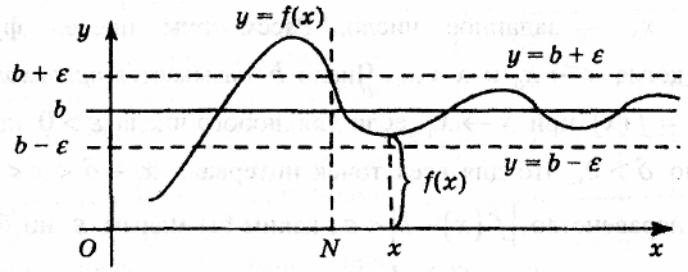

Рис. 27

Пусть переменная x принимает отрицательные значения, и абсолютная величина $|x|$ возрастает. В этом случае говорят, что $x \to -\infty$. Дадим определение предела функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ символически. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to -\infty$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists M < 0\ \forall x < M \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

Пусть x изменяется, принимая как положительные, так и отрицательные значения, абсолютная величина $|x|$ неограниченно увеличивается. Тогда говорят, что x *стремится к бесконечности*, и пишут $x \to \infty$. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого положительного ε найдётся такое число $N > 0$, что

для всех x, абсолютная величина которых $|x|>N$, имеет место неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$, т. е.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall|x|>N\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$.

Можно показать, что если существует последний предел, то существуют предыдущие два предела и все три равны между собой. И наоборот, если существуют предыдущие два предела и они равны, то существует третий, равный двум предыдущим.

3. Предел функции при $x\to x_0$ и его геометрический смысл. Односторонние пределы

Пусть x_0 – заданное число. Рассмотрим предел функции $y=f(x)$, когда $x\to x_0$ и $x<x_0$. Число b называется *пределом слева функции* $y=f(x)$ при $x\to x_0$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдётся такое число $\delta>0$, что для всех точек интервала $x_0-\delta<x<x_0$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$, каким бы малым ε ни было. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=b$. Ясно, что фигурирующая в определении величина δ зависит от ε, т. е. является функцией от ε (($\delta=\delta(\varepsilon)$), и чем меньше ε, тем меньше δ.

По аналогии дадим определение предела функции $y=f(x)$ справа при $x\to x_0$. Число b называется *пределом функции* $y=f(x)$ *при* $x\to x_0$ *справа*, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=b$.

Эти два предела называются *односторонними пределами* функции $y=f(x)$. Теперь дадим определение двустороннего (обычного) пре-

дела функции при $x \to x_0$ (далее всегда под пределом функции при $x \to x_0$ будем иметь ввиду именно этот двусторонний предел).

Число b называется *(двусторонним) пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, каким бы малым оно ни было, найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех точек интервала $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, отличных от x_0, выполняется неравенство $\left|f(x) - b\right| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

Можно проверить, что если существует последний предел, то существуют оба предыдущих односторонних предела и все три предела равны между собой. И наоборот, если существуют оба односторонних предела и они равны друг другу, то существует двусторонний предел функции при $x \to x_0$, равный односторонним.

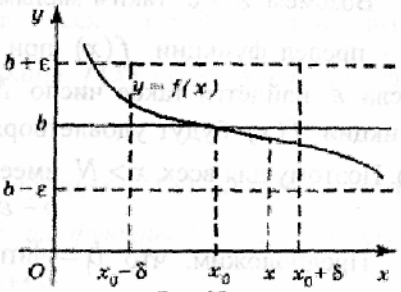

Рис. 28

Выясним геометрический смысл двустороннего предела функции. Согласно определению, для всех точек интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, отличных от x_0, выполняется соотношение (2). Геометрически это означает, что если абсцисса x точки графика $y = f(x)$ лежит в указанном интервале, то ордината $f(x)$ этой точки лежит в интервале (2) (см. рис. 28). Следовательно, указанная точка лежит между прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$. Это относится к любой точке кривой $y = f(x)$, абсцисса которой лежит в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и $x \neq x_0$. Поэтому соответствующий участок графика лежит между вышеуказанными прямыми.

4. Теоремы о пределах. Ограниченные функции

Теоремы о пределах функции $y = f(x)$ будем рассматривать для случая, когда $x \to +\infty$. В остальных случаях стремления x доказательства аналогичны.

Теорема 1. *Если функция имеет предел при $x \to +\infty$, то этот предел будет единственным.*

Доказательство. Дано, что функция $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ имеет предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. Докажем, что никакое другое число, например, $b_1 < b$, не может быть пределом этой функции при $x \to +\infty$.

Возьмём $\varepsilon > 0$ таким малым, чтобы было $b_1 + \varepsilon < b - \varepsilon$. Так как b – предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, то для выбранного нами числа ε найдётся такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ значения функции $f(x)$ будут удовлетворять неравенству (1), следовательно, и (2). Поэтому для всех $x > N$ имеем

$$b - \varepsilon < f(x). \qquad (3)$$

Предположим, что $b_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Тогда для выбранного выше числа ε найдётся такое число N_1, что для всех $x > N_1$ будет выполняться неравенство $b_1 - \varepsilon < f(x) < b_1 + \varepsilon$. Следовательно, для всех $x > N_1$ будем иметь

$$f(x) < b_1 + \varepsilon. \qquad (4)$$

Пусть $\tilde{N}$ – наибольшее из чисел N, N_1. Тогда для всех $x > \tilde{N}$ выполняются оба неравенства (3), (4). Из них получим, что $b_1 + \varepsilon > b - \varepsilon$. Но это противоречит условию, что $b_1 + \varepsilon < b - \varepsilon$, поэтому сделанное предположение должно быть отброшено.

Функция называется *ограниченной* на некотором множестве M значений x, если существует такое положительное число c, что для всех x из множества M выполняется неравенство $|f(x)| \le c$.

Например, функция $\sin x$ является ограниченной на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$, так как для всех x имеем $|\sin x| \le 1$.

Теорема 2. *Если функция* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ *имеет предел, то эта функция является ограниченной на некотором бесконечном интервале* $(N, +\infty)$.

Доказательство. Дано, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. Для числа $\varepsilon = 1$ (как и для любого $\varepsilon > 0$) найдётся такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < 1$. Согласно свойству абсолютной величины $|f(x)| - |b| \le |f(x) - b|$. Поэтому для всех $x > N$ имеет место $|f(x)| - |b| \le |f(x) - b| < 1$. Итак, для $x > N$ имеем $|f(x)| - |b| < 1$, следовательно, для всех $x > N$ будем иметь $|f(x)| < |b| + 1$. Это означает, что функция $f(x)$ ограничена в интервале $(N, +\infty)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если при* $x \to +\infty$ *функция* $f(x)$ *имеет отличный от нуля предел* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, $b \ne 0$, *то функция* $1/f(x)$ *ограничена на некотором бесконечном интервале* $(N, +\infty)$.

Теорема доказывается аналогично предыдущей.

5. Бесконечно малые функции и их свойства

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to +\infty$, если её предел равен нулю, т. е. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Здесь предел $b = 0$, поэтому $|f(x) - b| = |f(x)|$. С учётом определения предела функции можно дать следующее определение бесконечно малой функции: функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|f(x)| < \varepsilon$ или символически

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \forall x > N \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Например, функция $1/x$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$.

При других способах изменения x определение бесконечно малой функции будет аналогичным (с учётом определения предела). Например, функция $y = f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$ (x_0 – конечное число), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Свойства бесконечно малой функции

Теорема 4. *Если $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to +\infty$, то их сумма $\varphi(x) + \psi(x)$ также является бесконечно малой функцией, при $x \to +\infty$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число, которое может быть задано сколь угодно малым. Нужно доказать, что для этого числа найдётся такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|\varphi(x) + \psi(x)| < \varepsilon$.

Для указанного числа ε возьмём число $\varepsilon/2$. Так как $\varphi(x)$ является бесконечно малой функцией, то для числа $\varepsilon/2$ найдётся такое число $N_1 > 0$, что для всех $x > N_1$ будет выполняться неравенство

$$|\varphi(x)| < \varepsilon/2. \tag{5}$$

Так как $\psi(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, то найдётся такое число $N_2 > 0$, что для всех $x > N_2$ будет выполняться неравенство

$$|\psi(x)| < \varepsilon/2. \tag{6}$$

Пусть N – наибольшее из чисел N_1, N_2. Тогда для $x > N$ имеют место оба неравенства (5), (6). Поэтому с учётом свойства абсолютной величины суммы имеем для всех $x > N$

$$|\varphi(x) + \psi(x)| \le |\varphi(x)| + |\psi(x)| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Если $\psi(x)$ – бесконечно малая функция, то $-\psi(x)$ тоже является бесконечно малой функцией. Это ясно из определения, так как $|-\psi(x)| = |\psi(x)|$. Ясно также, что разность двух бесконечно малых

функций есть снова бесконечно малая функция, т. к. разность можно записать в виде суммы $\varphi(x)-\psi(x)=\varphi(x)+(-\psi(x))$.

Доказанная теорема сразу распространяется на любое конечное число слагаемых бесконечно малых функций. Можно сказать, что алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций – бесконечно малая функция.

Теорема 5. *Если $\varphi(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to+\infty$, а $f(x)$ – ограниченная функция на некотором бесконечном интервале $(N_1,+\infty)$, то произведение $\varphi(x)f(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to+\infty$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число, которое может быть задано сколь угодно малым. Нужно доказать, что для этого числа найдётся такое число $N>0$, что для всех $x>N$ будет выполняться неравенство $|\varphi(x)\psi(x)|<\varepsilon$. Это будет означать, что рассматриваемое произведение есть бесконечно малая функция при $x\to+\infty$. Так как $f(x)$ – ограниченная функция в интервале $(N_1,+\infty)$, то существует такое число $c>0$, что для всех точек интервала $(N_1,+\infty)$, т. е. для всех $x>N_1$, имеет место неравенство

$$|f(x)|\le c. \tag{7}$$

Так как $\varphi(x)$ является бесконечно малой функцией при $x\to+\infty$, то для числа ε/c найдётся такое число $N_2>0$, что для всех $x>N_2$ будет выполняться неравенство

$$|\varphi(x)|<\varepsilon/c. \tag{8}$$

Пусть N – наибольшее из чисел N_1, N_2. Тогда для всех $x>N$ неравенства (7) и (8) выполняются одновременно, поэтому с учётом свойства абсолютной величины произведения для всех $x>N$ имеем

$$|\varphi(x)\psi(x)|=|\varphi(x)||\psi(x)|<\frac{\varepsilon}{c}c=\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствия из теорем 2 – 5

Следствие 1. *Функция, бесконечно малая при* $x \to +\infty$, *является функцией, ограниченной в некотором бесконечном интервале* $(N, +\infty)$ (согласно теореме 2, поскольку указанная бесконечно малая функция имеет предел, равный нулю, при $x \to +\infty$).

Следствие 2. *Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция* (согласно теореме 5, так как любая из этих бесконечно малых функций – функция ограниченная).

Следствие 3. *Произведение постоянной на бесконечно малую функцию – функция бесконечно малая* (согласно теореме 5, т. к. постоянная есть ограниченная функция).

6. Бесконечно большая функция, ее связь с бесконечно малой

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to +\infty$, если для любого числа $L > 0$, каким бы большим это число ни было, найдётся такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|f(x)| > L$. Например, функция $y = x^2$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$. В самом деле, здесь $|f(x)| > L$ запишется как $|x^2| > L$ или, так как $x^2 > 0$, в виде $x^2 > L$, а для положительных x в виде $x > \sqrt{L}$. Поэтому для всех $x > \sqrt{L}$ имеет место неравенство $|x^2| > L$, каким бы большим число $L > 0$ ни было. Ясно, что x^2 – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$, и в качестве числа N, указанного в определении, можно взять $\sqrt{L}$.

Если $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$, то пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ и говорят, что *функция* $f(x)$ *стремится к бесконечности.*

Если функция $f(x)$ принимает только положительные значения, пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Если функция $f(x)$ принимает только отрицательные значения, то пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

В последних двух случаях говорят, что функция $f(x)$ стремится к плюс бесконечности, минус бесконечности соответственно, но знаки ∞, $+\infty$, $-\infty$ не есть числа и над ними нельзя проводить операции, нельзя писать $\infty - \infty = 0$ или $\infty / \infty = 1$. Эти символы лишь обозначения бесконечно большой функции.

Теорема 6. *Если $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$, то $1/f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число, которое может быть задано сколь угодно малым. Докажем, что для него найдётся такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|1/f(x)| < \varepsilon$. Это и будет означать, что $1/f(x)$ – бесконечно малая функция. Для указанного числа $\varepsilon > 0$ возьмём $1/\varepsilon$. Так как $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$, то для числа $1/\varepsilon$ найдётся такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ будет выполняться неравенство $|f(x)| > 1/\varepsilon$, а отсюда для всех $x > N$ имеем

$$1/|f(x)| < \varepsilon. \qquad (9)$$

Согласно свойству абсолютной величины дроби $|1/f(x)| = 1/|f(x)|$. Теперь неравенство (9) для всех $x > N$ можно записать так: $|1/f(x)| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема 7 (обратная предыдущей). *Если $\varphi(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, не обращающаяся в нуль, то $1/\varphi(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to +\infty$.*

Доказательство аналогично предыдущему.

Теоремы 6 и 7 условно записывают так: $1/\infty = 0$ *и* $1/0 = \infty$.

7. Свойства пределов

Теорема 8. *Если $f(x)$ – функция, имеющая при $x \to +\infty$ предел, равный числу b, то эту функцию можно представить в виде суммы*

числа b и некоторой бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to +\infty$, т. е. $f(x) = b + \alpha(x)$.

Теорема 9 (обратная теореме 8). *Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа b и некоторой бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to +\infty$, то число b есть предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.*

Теорема 10. *Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов слагаемых функций, если последние пределы существуют.*

Например, для двух функций

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) + \varphi(x)\right] = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} \varphi(x).$$

Теорема 11. *Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, если последние пределы существуют.*

Например, для двух функций

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) \cdot \varphi(x)\right] = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} \varphi(x). \qquad (11)$$

Теорема 12. *Предел дроби (частного) равен отношению предела числителя к пределу знаменателя, если оба последних предела существуют и предел знаменателя не равен нулю.*

Докажем теорему 11. Нам дано, что

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = c \qquad (12)$$

(b, c – некоторые числа). Тогда по теореме 8 $f(x) = b + \alpha(x)$, $\varphi(x) = c + \beta(x)$, где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to +\infty$. Запишем произведение $f(x)\varphi(x) = bc + [b\beta(x) + c\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)]$. Слагаемые в правой части в квадратных скобках суть бесконечно малые функции, согласно следствиям из теорем 2 – 5. Тогда сумма в этих скобках, согласно теореме 4, тоже бесконечно малая функция, поэтому число bc, согласно теореме 9, есть предел функции $f(x) \cdot \varphi(x)$. Итак, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) \cdot \varphi(x)\right] = b \cdot c$. Подставив в правую часть вместо b и c пределы (12), придем к формуле (11). Теорема доказана.

Следствие из теоремы 11. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:* $\lim\limits_{x \to +\infty} [A\varphi(x)] = A \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$, A – const.

В самом деле, если $f(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} A = A$ (поскольку предел постоянной равен этой же постоянной, что ясно из определения предела). По формуле (11) получим

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = A \cdot \lim_{x \to +\infty} \varphi(x).$$

Переход к пределу в неравенствах

Теорема 13. *Пусть* $\varphi(x) < f(x) < g(x)$ *для всех* x *и функции* $g(x)$ *и* $\varphi(x)$ *при* $x \to +\infty$ *имеют один и тот же предел, равный* b. *Тогда тот же предел* b *при* $x \to +\infty$ *имеет функция* $f(x)$, *заключённая между* $g(x)$ *и* $\varphi(x)$.

Теорема 14. *Если для всех* x *функция* $f(x) > 0$ *и существует предел этой функции при* $x \to +\infty$, *то этот предел неотрицателен:* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \geq 0$.

8. Первый замечательный предел

Докажем равенство $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x / x) = 1$. Возьмем круг единичного радиуса. Пусть x есть угол между векторами $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OA}$, измеренный в радианах (см. рис. 29). Будем считать угол x положительным, если он отсчитывается против хода часовой стрелки от вектора $\overrightarrow{OC}$, и отрицательным, если отсчёт ведётся в противоположном направлении. Будем считать пока $0 < x < \pi/2$. Из рис. 29 видно, что $OB = \cos x$, $BA = \sin x$, $CD = \operatorname{tg} x$, а также что $OB = \cos x \to 1$ и $BA = \sin x \to 0$ при $x \to 0$. Это верно и при $x < 0$. Площади треугольников и кругового сектора, указанных на рис. 29, связаны соотношением $S_{\triangle OBA} < S_{\text{сектора } OCA} < S_{\triangle OCD}$, которое принимает вид $(\sin x \cos x)/2 < x/2 < (\operatorname{tg} x)/2$ или (после умножения на положительное число $2/\sin x$) $\cos x < x/\sin x < 1/\cos x$. В последнем нера-

венстве перейдём к обратным величинам, при этом знаки неравенства изменятся на обратные:

$$1/\cos x > (\sin x)/x > \cos x\,. \qquad (13)$$

Последнее неравенство получено для $x > 0$. Пусть теперь $x < 0$. Тогда $-x > 0$ и справедлива формула (13), т. е. $1/\cos(-x) < < (\sin(-x))/(-x) < \cos(-x)$. Учитывая, что $\sin(-x) = -\sin x$ и $\cos(-x) = \cos x$, опять придём к неравенству (13), но уже для $x < 0$.

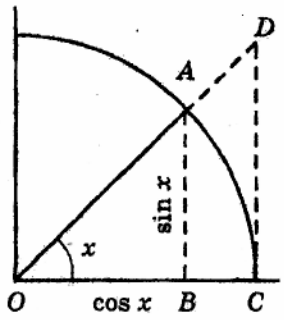

Рис. 29

Итак, неравенство (13) справедливо как для $x > 0$, так и для $x < 0$. Перейдем в нем при $x \to 0$ к пределу (к обычному пределу, когда $x \to 0$, принимая как положительные, так и отрицательные значения). Однако крайние части (13) имеют один и тот же предел, равный 1. Поэтому по теореме 13 получим предел $\lim\limits_{x \to 0}(\sin x / x) = 1$, который называют *«первым замечательным пределом»*.

9. Предел последовательности. Второй замечательный предел. Натуральные логарифмы

Дана функция $y_n = f(n)$, где n принимает целые положительные значения. Она называется *функцией натурального аргумента* n и принимает значения $y_1 = f(1)$, $y_2 = f(2)$,..., $y_n = f(n)$,... Последние образуют последовательность чисел y_1, y_2,..., y_n,... Эту последовательность коротко записывают $\{y_n\}$. Таким образом, задание функции натурального аргумента равносильно заданию последовательности. По аналогии с определением предела функции $f(x)$ при $x \to \infty$ дадим определение предела функции натурального аргумента (последовательности).

Число b называется *пределом функции натурального аргумента* $y_n = f(n)$ *при* $n \to \infty$ *или последовательности* $\{y_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, каким бы малым оно ни было, найдётся такое натуральное число N, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|f(n) - b| < \varepsilon$ или $|y_n - b| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = b$ или $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Функция натурального аргумента $y_n = f(n)$ (последовательность $\{y_n\}$) называется *возрастающей*, если $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots$ или *убывающей*, если $y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_n > y_{n+1} > \ldots$ Рассматриваемая функция (последовательность) будет ограниченной, если существует такое положительное число c, что для всех n выполняется неравенство $|y_n| \le c$. Например, функция $y_n = f(n) = 1/n$ или последовательность $\{1/n\}$ являются убывающими. В самом деле, каждое последующее значение меньше предыдущего, т. е. $1 > 1/2 > 1/3 > \ldots$ Кроме того, последовательность является ограниченной, т. к. для всех n выполняется неравенство $1/n \le 1$.

Без доказательства запишем несколько теорем.

Теорема 15. *Всякая возрастающая ограниченная последовательность (функция натурального аргумента) имеет конечный предел.*

Эта теорема утверждает только лишь существование предела, но не указывает, как его найти.

Теорема 16. *Функция натурального аргумента* $y_n = (1 + 1/n)^n$ *имеет при* $n \to \infty$ *предел, заключённый между числами 2 и 3.*

При доказательстве этой теоремы сначала устанавливают, что эта функция является возрастающей и ограниченной. Поэтому согласно теореме 15 предел функции существует. Его обозначают через e и пишут

$$\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = e. \qquad (14)$$

Можно показать (принимается без доказательства), что число e является иррациональным. Его приближённое значение $e \cong 2.718282$. Предел (14) называют *«вторым замечательным пределом»*.

Теорема 17. *Функция* $y=(1+x)^x$ *при* $x\to\infty$ *имеет предел, равный* e: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$.

Логарифм $\log_a x$ называется *натуральным*, если его основание равно e, т. е. $a=e$. Этот логарифм обозначают $\ln x$.

Пусть $y=\ln x$. Тогда по определению логарифма $e^y=x$. От последнего соотношения возьмём десятичный логарифм и получим $\lg e^y=\lg x$. По свойству логарифма будем иметь $y\lg e=\lg x$. Но $y=\ln x$, следовательно,

$$(\ln x)\lg e=\lg x. \qquad (15)$$

В этой формуле $\lg e$ – известное число (т. к. e – число известное, то и его десятичный логарифм известен: $\lg e\cong 0.4343$), поэтому формула (15) выражает десятичный логарифм x через его натуральный логарифм. Ясно, что и, наоборот, по $\lg x$ можно найти $\ln x=(\lg x)/(\lg e)$.

10. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to+\infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$. Бесконечно малая функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой функцией одного порядка с бесконечно малой функцией* $\psi(x)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)/\psi(x)]\neq 0$.

Бесконечно малая функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем* $\psi(x)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)/\psi(x)]=0$. Значит, проще говоря, $\varphi(x)$ стремится к нулю быстрее, чем $\psi(x)$.

Бесконечно малая функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой функцией более низкого порядка, чем* $\psi(x)$, если

$\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)/\psi(x)]=\infty$, т. е., упрощенно, $\varphi(x)$ стремится к нулю медленнее, чем $\psi(x)$.

Если не существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)/\psi(x)]$, то говорят, что *бесконечно малые функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *не сравнимы.*

Бесконечно малая функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой функцией порядка* k (k – определённое число) по отношению к бесконечно малой функции $\psi(x)$, если существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{[\psi(x)]^k}\neq 0.$$

Например, функция $\varphi(x)=1/x^2$ есть бесконечно малая функция второго порядка по отношению к бесконечно малой функции $\psi(x)=1/x$ при $x\to+\infty$. В самом деле, здесь имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{[\psi(x)]^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x^2}{[1/x]^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1.$$

Отметим, что две бесконечно малые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ одного и того же порядка называются *эквивалентными* при $x\to+\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)/\psi(x)]=1$.

11. Непрерывность функции в точке и на интервале

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x=c$, если

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c). \qquad (16)$$

Это означает, что:

- существует $f(c)$, т. е. функция $f(x)$ определена в точке $x=c$;
- существует предел $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ (существуют равные друг другу односторонние пределы $\lim\limits_{x\to c-0}f(x)=\lim\limits_{x\to c+0}f(x)$);

- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ ($\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \lim\limits_{x\to c+0} f(x) = f(c)$).

Как видно из (16), предел непрерывной функции можно вычислить подстановкой в функцию предельного значения $x = c$ ее аргумента. Кроме того, $x \to c$ можно записать так: $\lim\limits_{x\to c} x = c$. Этот предел подставим в правую часть формулы (16) и получим $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(\lim\limits_{x\to c} x)$. Это равенство показывает, что знак предела и знак непрерывной функции можно переставить.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке открытого интервала $(a,\ b)$ или замкнутого интервала $\left[a,\ b\right]$, то её называют *непрерывной в соответствующем интервале*.

Ясно, что для замкнутого интервала соотношение (16) считаем выполненным во всех точках этого интервала, включая концы, т. е. в частности $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$. Здесь предел в точке a представляет собой предел справа, так как слева от этой точки функция не определена. Аналогично в точке b имеем предел слева, так как справа от точки b функция не определена.

Геометрический смысл непрерывности функции заключается в том, что её график представляет собой сплошную, без разрывов, линию.

12. Свойства непрерывных функций

Теоремы 18 (и 19). *Алгебраическая сумма (и произведение) конечного числа функций, непрерывных в точке, есть функция, непрерывная в этой точке.*

Теорема 20. *Частное от деления двух функций, непрерывных в точке, есть функция, непрерывная в этой точке, если знаменатель в ней не обращается в нуль.*

Теорема 21. *Сложная функция, состоящая из непрерывных функций, есть функция непрерывная.*

Теорема 22. *Всякая основная элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.*

Из теорем 18 – 22 и определения элементарной функции вытекает, что элементарные функции непрерывны в каждой точке, в которой они определены.

13. Точки разрыва функции

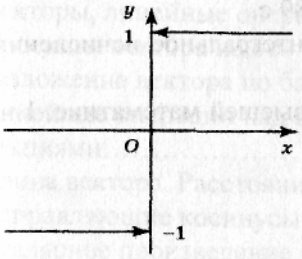

Рис. 30

Точка $x = c$ называется *точкой разрыва функции* $y = f(x)$, если в ней нарушается хотя бы одно из трёх условий непрерывности функции в точке, указанных в п.11.

В качестве примера возьмём функцию, определённую формулой

$$f(x) = |x| / x. \qquad (17)$$

Ясно, что эта функция определена везде, кроме точки $x = 0$. График этой функции изображен на рис. 30.

Точка $x = c$ называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to c-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to c+0} f(x)$. Например, для функции (17) точка $x = 0$ – точка разрыва первого рода. Все остальные точки разрыва называются *точками разрыва второго рода*. Для функции $f(x) = 1/x$ (рис. 31) точкой разрыва второго рода будет $x = 0$, так как в этой точке функция не определена и односторонние пределы бесконечны:

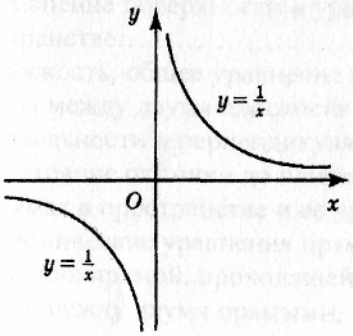

Рис. 31

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = -\infty.$$

Более подробное изложение материала и доказательства теорем можно найти, к примеру, в следующих литературных источниках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салимов Р.Б., Славутин М.Л. Математика для инженеров и технологов. – Казань: Изд-во КМО, 2005. – 589 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. –М.: Наука, 1985. – Т. 1. – 432 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Айрис-пресс, 2004.– 288 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Расих Бахтигареевич САЛИМОВ,
Сергей Иванович ФИЛИППОВ

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЗАОЧНОГО И ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ. ЧАСТЬ I

Учебное пособие
для студентов заочного и дистанционного обучения

Редактор Н.Х. Михайлова
Корректор М.А. Рожавина

Редакционно-издательский отдел
Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Подписано в печать 27.06.05. Формат 60x84/ 16
Заказ 414. Бумага тип N 1 Усл.-печ. л. 4,0
Тираж 300 экз. Печать RISO Усл.-изд. л. 4,0

Печатно-множительный отдел КГАСУ
420043, Казань, Зеленая, 1.