МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

Задачник по темам

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

для студентов очной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство» (бакалавриат)

Казань
2017

УДК 517.3
ББК 22.161.1
Т41

Т41 Задачник по темам «Неопределённый интеграл. Определённый интеграл» для студентов очной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство» (бакалавриат) / Сост. С.Н. Тимергалиев. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2017. – 31 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Материал соответствует части программы по дисциплине «Математика» для студентов очной формы обучения направления 08.03.01 « Строительство» (бакалавриат), посвященной неопределённым и определённым интегралам.

Задачник содержит теоретический материал, ряд примеров с решениями, задачи для аудиторного и самостоятельного решения. В конце приведен список литературы, рекомендуемой для более глубокого изучения материала.

Рецензент
Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладной математики КГАСУ
Р.С. Хайруллин

УДК 517.3
ББК 22.161.1

§1. Первообразная. Неопределённый интеграл. Основные методы вычисления неопределённого интеграла

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in X$. Функция $f(x)$ может иметь различные первообразные, но все они отличаются друг от друга только постоянными слагаемыми. Поэтому все первообразные для $f(x)$ содержатся в выражении $F(x)+C$, где $C\in R$ – произвольная постоянная, которое и называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Основные свойства неопределённого интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.

2. $\int f'(x)dx=f(x)+C$.

3. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ ($k=const, k\neq 0$).

4. $\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

5. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$, $a\neq 0$.

Основными методами интегрирования являются: непосредственное интегрирование, интегрирование заменой переменной и по частям.

1.1. Непосредственное интегрирование. ***Непосредственным интегрированием*** функции $f(x)$ называют отыскание неопределённого интеграла $\int f(x)dx$ с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции $f(x)$, свойств **3–4** неопределённого интеграла и таблицы основных интегралов.

Примеры. Найти интегралы:

а) $$\int (x^3-3x^2+4x-5)dx=\int x^3dx-\int 3x^2dx+\int 4xdx-\int 5dx=$$
$$=\int x^3dx-3\int x^2dx+4\int xdx-5\int dx=$$
$$=\frac{x^{3+1}}{3+1}-3\frac{x^{2+1}}{2+1}+4\frac{x^{1+1}}{1+1}-5x+C=\frac{x^4}{4}-x^3+2x^2-5x+C.;$$

б) $$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{x}+3\sqrt{x^3}-\frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}-\int\frac{2dx}{x}+\int 3\sqrt{x^3}dx-\int\frac{4dx}{\sqrt[5]{x^3}}=$$
$$=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}-2\int\frac{dx}{x}+3\int\sqrt{x^3}dx-4\int\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}=\int x^{-\frac{1}{3}}dx-2\int\frac{dx}{x}+3\int x^{\frac{3}{2}}dx-$$

$$-4\int x^{-\frac{3}{5}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}-2\ln|x|+3\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}-4\frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1}+C=$$

$$=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}-2\ln|x|+3\frac{x^{2\frac{1}{2}}}{\frac{5}{2}}-4\frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\ln|x|+\frac{6}{5}x^2\sqrt{x}-10\sqrt[5]{x^2}+C;$$

в) $$\int\frac{dx}{9x^2-1}=\int\frac{1}{9}\cdot\frac{dx}{x^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|+C.$$

Задачи. Найти интегралы **непосредственным интегрированием**, используя свойства и таблицу интегралов:

1.1. а) $\int(6x^2+8x+3)dx$; **б)** $\int\frac{dx}{x^2+7}$; **в)** $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$.

1.2. а) $\int\frac{2x+3}{x^4}dx$; **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$; **в)** $\int\frac{(1-x)^2}{x\cdot\sqrt{x}}dx$.

1.3. а) $\int(2x+3\cos x)dx$; **б)** $\int\frac{dx}{7x^2-8}$; **в)** $\int\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{a\cdot x}}dx$.

1.4. а) $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$; **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$; **в)** $\int\frac{\cos^2x+3\cos x-2}{\cos^2x}dx$.

1.5. а) $\int\left(\frac{x^2-9}{x^2-8}\right)dx$; **б)** $\int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$; **в)** $\int tg^2xdx$.

1.6. а) $\int\frac{(1+2x^2)\cdot dx}{x^2\cdot(1+x^2)}$; **б)** $\int\frac{3\cdot2^x-2\cdot3^x}{2^x}dx$; **в)** $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$.

Ответы

1.1. а) $2x^3+4x^2+3x+C$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{x}{\sqrt{7}}+C$; **в)** $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+x+C$.

1.2. а) $-1/x^2-1/x^3+C$; **б)** $\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)+C$; **в)** $\frac{2x^2-12x-6}{3\cdot\sqrt{x}}+C$.

1.3. а) $x^2+3\sin x+C$; **б)** $\frac{1}{4\sqrt{14}}\cdot\ln\left|\frac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}}\right|+C$; **в)** $2\cdot\sqrt{a\cdot x}-2x+\frac{2}{3}\cdot\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+C$.

1.4. а) $\frac{6}{7}\cdot\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{x^3}+C$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin x\sqrt{\frac{5}{7}}+C$; **в)** $x+3\cdot\ln|tg(x/2+\pi/4)|-2tgx+C$.

1.5. **а)** $x-\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right|+C$ **;** **б)** $\arcsin(x/\sqrt{2})-\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)+C$ **;** **в)** $tgx-x+C$ **.**

1.6. **а)** $arctgx-1/x+C$ **;** **б)** $3x-2\cdot(3/2)^x\ln^{-1}(3/2)+C$ **;** **в)** $x+\cos x+C$ **.**

Задачи для самостоятельного решения. Найти интегралы **непосредственным интегрированием**, используя свойства и таблицу интегралов:

1.7. **а)** $\int\left(3x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$**;** **б)** $\int\frac{dx}{x^2-10}$**;** **в)** $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$**.**

1.8. **а)** $\int\frac{x^3+2}{x}dx$**;** **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$**;** **в)** $\int\frac{(x^2+1)\cdot(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$**.**

1.9. **а)** $\int\frac{2-\sin x}{\sin^2 x}dx$**;** **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$**;** **в)** $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{x+1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$**.**

1.10. **а)** $\int\frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx$**;** **б)** $\int\frac{dx}{3x^2+5}$**;** **в)** $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$**.**

1.11. **а)** $\int\frac{(1+x)^2\cdot dx}{x\cdot(1+x^2)}$**;** **б)** $\int\frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}dx$**;** **в)** $\int\frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$**.**

Ответы

1.7. **а)** $x^3+x^2+\ln|x|+C$**;** **б)** $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|+C$**;** **в)** $x-2\ln|x|-1/x+C$**.**

1.8. **а)** $\frac{x^3}{3}+2\ln|x|+C$**;** **б)** $\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}+C$**;** **в)** $\frac{3x^4\cdot\sqrt[3]{x}}{13}-\frac{3x^2\cdot\sqrt[3]{x}}{7}-6\cdot\sqrt[3]{x}+C$**.**

1.9. **а)** $-2ctgx-\ln|tg\frac{x}{2}|+C$**;** **б)** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(2\sqrt{2}x+\sqrt{7+8x^2}\right)+C$**;** **в)** $3\cdot\sqrt[3]{x}-\frac{4}{5}\cdot x\cdot\sqrt[4]{x}-4\cdot\sqrt[4]{x}+C$**.**

1.10.а) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{16}{3}x^2\sqrt[6]{x}+C$**;** **б)** $\frac{1}{\sqrt{15}}arctgx\sqrt{\frac{3}{5}}+C$**;** **в)** $-ctgx-tgx+C$**.**

1.11. **а)** $\ln|x|+2arctgx+C$**;** **б)** $\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)-\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$**;** **в)** $tgx+C$**.**

1.2. Интегрирование заменой переменной. Очень часто, заменой переменной интегрирования $x\to t$, удаётся свести нахождение интеграла $\int f(x)dx$ к нахождению более простого интеграла $\int g(t)dt$ с последующей обратной заменой $t\to x$.

Существуют два варианта замены переменной интегрирования.

1. ***Метод подведения функции под знак дифференциала***

Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ может быть записано в виде $f(x)dx=g(\varphi(x))\varphi'(x)dx=g(\varphi(x))d\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – дифференцируемая функция, то осуществляется замена $\varphi(x)=t$. Тогда

$$\int f(x)dx=\int g(\varphi(x))d\varphi(x)=[\varphi(x)=t]=\int g(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)}.$$

При подведении функций под знак дифференциала широко используются свойства дифференциалов и таблица дифференциалов основных элементарных функций, в частности, преобразования:

$$dx = d(x+b) = \frac{1}{a}d(ax+b); \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x};$$

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+b) = \frac{1}{2a}d(ax^2+b), \ a \neq 0.$$

2. ***Метод подстановки***

Если функция $x = \psi(t)$ дифференцируема и имеет обратную $t = \psi^{-1}(x)$ на соответствующем промежутке, то справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \psi(t) \\ dx = \psi'(t)dt \end{bmatrix} = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt = \int g(t)dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}.$$

Функция $x = \psi(t)$ подбирается таким образом, чтобы подынтегральное выражение приняло более удобный для интегрирования вид. Выбор её определяется конкретным видом подынтегрального выражения.

Примеры. Найти интегралы:

$$1) \int \cos(3x+2)\,dx = \begin{bmatrix} 3x+2 = t \\ (3x+2)'dx = dt \Rightarrow 3dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{3}\cos t dt = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C;$$

$$2) \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx = \begin{bmatrix} 1+\ln x = t \\ (1+\ln x)'dx = dt \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt \end{bmatrix} = \int \sqrt[3]{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{3}}dt =$$

$$= \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{t^{1\frac{1}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}t\sqrt[3]{t} + C = \frac{3}{4}(1+\ln x)\sqrt[3]{1+\ln x} + C.$$

Задачи. При помощи замены переменной найти следующие интегралы.

1.1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$**;** **б)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$**;** **в)** $\int x^2 \cdot e^{x^3}dx$**.**

1.2. а) $\int 4^{2-3x}dx$**;** **б)** $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$**;** **в)** $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$**.**

1.3. а) $\int \frac{dx}{3\cos(5x-\pi/4)}$**;** **б)** $\int x \cdot e^{-(x^2+1)}dx$**;** **в)** $\int 5^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$**.**

1.4. **а)** $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tg^2 x-2}}$ **;** **б)** $\int \frac{xdx}{\cos^2(x^2)}$**;** **в)** $\int \frac{arctg(x/2)}{4+x^2}dx$**.**

1.5. **а)** $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx$**;** **б)** $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$**;** **в)** $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$ **.**

Ответы

1.1. **а)** $\frac{2}{5}\cdot\sqrt{5x-2}+C$**;** **б)** $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)+C$**;** **в)** $e^{x^3}/3+C$**.**

1.2. **а)** $-\frac{4^{2-3x}}{3\ln 4}+C$**;** **б)** $\frac{1}{4}\ln(2x^2+3)+C$**;** **в)** $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$**.**

1.3. **а)** $\frac{1}{15}\ln\left|tg\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$**;** **б)** $\frac{-1}{2e^{x^2+1}}+C$**;** **в)** $\frac{2\cdot 5^{\sqrt{x}}}{\ln 5}+C$**.**

1.4. **а)** $\ln\left|tgx+\sqrt{tg^2x-2}\right|+C$**;** **б)** $\frac{tg(x^2)}{2}+C$**;** **в)** $\frac{1}{4}\left(arctg\frac{x}{2}\right)^2+C$**.**

1.5. **а)** $-\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x)+C$ **;** **б)** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|+C$**;** **в)** $\ln|x+\cos x|+C$**.**

Задачи для самостоятельного решения. При помощи замены переменной найти следующие интегралы.

1.6. **а)** $\int\sqrt{a-bx}dx$**;** **б)** $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$**;** **в)** $\int\frac{x^2}{1+x^6}dx$**.**

1.7. **а)** $\int\cos\frac{x}{\sqrt{2}}dx$**;** **б)** $\int x\cdot 7^{x^2}dx$**;** **в)** $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$**.**

1.8. **а)** $\int ctg\left(\frac{x}{5}\right)dx$**;** **б)** $\int x\sqrt[5]{5-x^2}dx$**;** **в)** $\int\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$**.**

1.9. **а)** $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-2}}$**;** **б)** $\int\sin(\ln x)\frac{dx}{x}$**;** **в)** $\int\frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$**.**

1.10. **а)** $\int sh(5x+3)dx$**;** **б)** $\int x^2ch(x^3+3)dx$**;** **в)** $\int\frac{3^{thx}}{ch^2x}dx$**.**

Ответы

1.6. **а)** $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-bx)^3}+C$**;** **б)** $\sqrt{x^2+1}+C$**;** **в)** $\frac{arctgx^3}{3}+C$**.**

1.7. **а)** $\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$ **;** **б)** $\frac{1}{2\ln 7}\cdot 7^{x^2}+C$ **;** **в)** $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-1}\right|+C$**.**

1.8. **а)** $5\ln\left|\sin\frac{x}{5}\right|+C$ **;** **б)** $-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(5-x^2)^6}+C$**;** **в)** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}+C$**.**

1.9. **а)** $\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-2}\right)+C$**;** **б)** $-\cos(\ln x)+C$**;** **в)** $\frac{2}{3}\sqrt{tg^3x}+C$**.**

1.10. **а)** $\frac{1}{5}ch(5x+3)+C$**;** **б)** $\frac{1}{3}sh(x^3+3)+C$**;** **в)** $\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{thx}+C$**.**

1.3. Интегрирование по частям. Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то справедлива ***формула интегрирования по частям***:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

или кратко: $\int udv = uv - \int vdu$.

Этим методом вычисляются: **1)** интегралы вида $\int P(x)\cos(\alpha x+\beta)dx$, $\int P(x)\sin(\alpha x+\beta)dx$, $\int P(x)e^{\alpha x+\beta}dx$, $\int P(x)a^{\alpha x+\beta}dx$, где $P(x)$ – многочлен, при этом в качестве $u(x)$ выбирается $P(x)$; **2)** интегралы, подынтегральная функция которых содержит в качестве множителя одну из следующих функций: $\ln x$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, при этом в качестве $u(x)$ выбирается одна из указанных выше функций; **3)** интегралы вида $\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx$, $\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx$, $\int \sin(\ln x)dx$, $\int \cos(\ln x)dx$, посредством двукратного интегрирования по частям.

Указанные три группы интегралов не исчерпывают всех без исключения интегралов, берущихся методом интегрирования по частям.

Примеры. Найти интегралы:

1) $$\int (x+1)\cos xdx = \left[\begin{array}{l} u = x+1,\ du = (x+1)'dx = dx, \\ dv = \cos xdx \Rightarrow v = \int \cos xdx = \sin x \end{array}\right] = (x+1)\sin x - \int \sin xdx =$$
$$= (x+1)\sin x + \cos x + C;$$

2) $$\int (x^3+1)\ln xdx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x,\ du = (\ln x)'dx = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = (x^3+1)dx \Rightarrow v = \int (x^3+1)dx = \dfrac{x^4}{4} + x \end{array}\right] =$$
$$= \ln x\cdot\left(\frac{x^4}{4}+x\right) - \int\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\cdot\frac{1}{x}dx = \ln x\cdot\left(\frac{x^4}{4}+x\right) - \int\left(\frac{x^3}{4}+1\right)dx =$$
$$= \ln x\cdot\left(\frac{x^4}{4}+x\right) - \frac{x^4}{16} - x + C.$$

Задачи. Методом **интегрирования по частям** найти следующие интегралы:

1.1. а) $\int (x-7)\cdot\sin xdx$**;** **б)** $\int x^2\cdot\ln xdx$**.**

1.2. а) $\int (4-x)\cdot e^{-3x}dx$**;** **б)** $\int arctgxdx$**.**

1.3. а) $\int (x+2)\cdot 3^x dx$**;** **б)** $\int \ln(1+x^2)dx$**.**

1.4. а) $\int x^2\cdot\cos xdx$ **;** **б)** $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$**.**

1.5. $\int \frac{x}{\sin^2 3x}dx$**.** **1.6.** $\int e^{ax}\cdot\sin bxdx$**.** **1.7.** $\int 3^x\cdot\cos xdx$**.**

Ответы

1.1. а) $(7-x)\cos x+\sin x+C$; **б)** $\frac{1}{9}x^3\cdot(3\ln x-1)+C$.

1.2. а) $\frac{1}{9}(3x-11)e^{-3x}+C$; **б)** $xarctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

1.3. а) $\frac{3^x\left[(x+2)\ln 3-1\right]}{\ln^2 3}+C$; **б)** $x\ln(1+x^2)-2x+2arctgx+C$.

1.4. а) $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$; **б)** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

1.5. $-\frac{1}{3}xctg3x+\frac{1}{9}\ln\left|\sin 3x\right|+C$. **1.6.** $\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$.

1.7. $\frac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}+C$.

Задачи для самостоятельного решения. Методом **интегрирования по частям** найти следующие интегралы:

1.8. а) $\int(1-3x)\cos 2xdx$; **б)** $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

1.9. а) $\int(2x+3)\cdot e^{5x}dx$; **б)** $\int x\arcsin xdx$.

1.10. а) $\int x^2\cdot e^{4x}dx$; **б)** $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

1.11. $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$. **1.12.** $\int\frac{x\cdot\cos x}{\sin^2 x}dx$. **1.13.** $\int\sin(\ln x)dx$.

Ответы

1.8. а) $\frac{1}{2}(1-3x)\sin 2x-\frac{3}{4}\cos 2x+C$; **б)** $2\sqrt{x}\cdot(\ln x-2)+C$.

1.9. а) $\left(\frac{10x+13}{25}\right)e^{5x}+C$; **б)** $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$.

1.10. а) $\frac{1}{4}e^{4x}\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)+C$; **б)** $-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C$.

1.11. $xtgx+\ln\left|\cos x\right|+C$. **1.12.** $\frac{-x}{\sin x}+\ln|tg(x/2)|+C$. **1.13.** $\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+C$.

§2. Интегрирование дробно-рациональных функций

2.1. Вычисление интегралов вида $\int\frac{(Ax+B)dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ и $\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$, выделяя в квадратном трёхчлене $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ полный квадрат $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\gamma-\frac{\beta^2}{4\alpha}$ и делая замену переменной интегрирования

$x+\dfrac{\beta}{2\alpha}=t$, сводят к вычислению табличных интегралов и интегралов вида $\int\dfrac{tdt}{t^2\pm a^2}$ и $\int\dfrac{tdt}{\sqrt{t^2\pm a^2}}$, которые вычисляются заменой переменной $t^2\pm a^2=z$.

Вычисление интегралов вида $\int\dfrac{dx}{(px+q)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ при помощи замены переменной интегрирования $\dfrac{1}{px+q}=t$ сводят к вычислению интегралов, рассмотренных выше.

Пример. Найти интеграл $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{8+8x-4x^2}}$.

В квадратном трехчлене выделим полный квадрат:

$$8+8x-4x^2=-4(x^2-2x)+8=-4\left(x^2-2x+1^2-1^2\right)+8=-4\left(x^2-2x+1^2\right)-(-4)\cdot1^2+8=$$

$=-4\left(x-1\right)^2+12$ и сделаем замену $x-1=t$. Получим:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{8+8x-4x^2}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{-4\left(x-1\right)^2+12}}=\begin{bmatrix}x-1=t\Rightarrow x=t+1\\ dt=d(x-1)=dx\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{\left(t+1\right)dt}{\sqrt{12-4t^2}}=\int\frac{tdt}{\sqrt{12-4t^2}}+\int\frac{dt}{\sqrt{12-4t^2}}.$$

Каждый интеграл найдем по отдельности. Первый интеграл находим заменой переменной $12-4t^2=z$:

$$\int\frac{tdt}{\sqrt{12-4t^2}}=\begin{bmatrix}z=12-4t^2\Rightarrow dz=d(12-4t^2)=\\ =-8tdt\Rightarrow tdt=\dfrac{dz}{-8}\end{bmatrix}=-\frac{1}{8}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=$$

$$=-\frac{1}{8}\cdot2\sqrt{z}+C=-\frac{1}{4}\sqrt{12-4t^2}+C.$$

Второй интеграл находим, используя табличный интеграл:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{12-4t^2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}\int\frac{dt}{\sqrt{\dfrac{12}{4}-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-t^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Теперь выполним обратную замену $t=(x+1)$. Тогда окончательно получим:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{8+8x-4x^2}}=-\frac{1}{4}\sqrt{12-4(x+1)^2}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{8+8x-4x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Задачи. Найти **интегралы от функций, содержащих квадратный трёхчлен**:

2.1. $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$. **2.2.** $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx$. **2.3.** $\int \frac{(x-4)dx}{x^2+x-12}$.

2.4. $\int \frac{(6x-1)dx}{x^2-4x+13}$. **2.5.** $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-2}}$. **2.6.** $\int \frac{dx}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2-3x+2}}$.

Ответы

2.1. $\frac{2}{\sqrt{31}} arctg \frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C$. **2.2.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$.

2.3. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x-12\right|+\frac{9}{14}\ln\left|\frac{x+4}{x-3}\right|+C$. **2.4.** $\ln(x^2-4x+13)+\frac{1}{9} arctg\frac{x-2}{3}+C$.

2.5. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)+C$. **2.6.** $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C$.

Задачи для самостоятельного решения. Найти **интегралы от функций, содержащих квадратный трёхчлен**:

2.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. **2.8.** $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. **2.9.** $\int \frac{(3-5x)dx}{4x^2+16x-9}$.

2.10. $\int \frac{(7-x)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. **2.11.** $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}$.

Ответы

2.7. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right)+C$. **2.8.** $\sqrt{x^2+2x+2}+2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$.

2.9. $-\frac{5}{8}\cdot\ln\left|4x^2+16x-9\right|+\frac{7}{5}\cdot\ln\left|\frac{2x-1}{2x+9}\right|+C$.

2.10. $\sqrt{3+2x-x^2}+6\arcsin\frac{x-1}{2}+C$. **2.11.** $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C$.

2.2. ***Рациональной дробью*** называется рациональная функция $R(x)$ вида $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{b_0x^m+\ldots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n}$. Если $m\geq n$, то дробь не*правильная,* в противном случае – *правильная*. Всякую неправильную дробь всегда можно представить в виде $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=T_{m-n}(x)+\frac{S_l(x)}{Q_n(x)}$, где $T_{m-n}(x)$, $S_l(x)$ – многочлены от x, причём $l<n$. Выделение целой части (многочлена $T_{m-n}(x)$) в неправильной дроби производят делением числителя на знаменатель, выполняемое «уголком». Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Интегрирование правильной рациональной дроби основано на её представлении в виде конечной суммы простейших дробей вида $\frac{A_1}{\alpha x+\beta}$, $\frac{A_k}{(\alpha x+\beta)^k}$ $(k\geq 2)$, $\frac{B_1x+C_1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, $\frac{B_kx+C_k}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}$ $(k\geq 2)$, причём трёхчлен $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ не имеет действительных корней. Вид этого разложения определяется разложением знаменателя $Q_n(x)$ дроби на линейные и квадратичные множители (не имеющие действительных корней).

Каждому линейному множителю вида $(\alpha x+\beta)^k$, где $k\geq 1$, в разложении соответствует сумма из k простейших дробей вида $\frac{A_1}{\alpha x+\beta}+\frac{A_2}{(\alpha x+\beta)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(\alpha x+\beta)^k}$. Каждому квадратичному множителю вида $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k$, где $k\geq 1$, в разложении соответствует сумма из k простейших дробей вида $\frac{B_1x+C_1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+\frac{B_2x+C_2}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2}+\ldots+\frac{B_kx+C_k}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}$.

Неизвестные постоянные A_i, B_i, C_i в разложении правильной рациональной дроби $\frac{S_l(x)}{Q_n(x)}$ в сумму простейших дробей определяют *методом неопределённых коэффициентов*. Для этого правую часть искомого разложения приводят к общему знаменателю (им будет многочлен $Q_n(x)$), после чего у получившегося в числителе многочлена с неизвестными постоянными и у многочлена $S_l(x)$ приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x. В результате получают систему линейных уравнений, решая которую, находят неизвестные постоянные. Можно также определять A_i, B_i, C_i, подставляя в равенство, полученное приравниванием числителя $S_l(x)$ к числителю дроби с неизвестными постоянными, полученной после приведения простейших дробей к общему знаменателю $Q_n(x)$, вместо x некоторые специально подобранные числа (обычно действительные корни знаменателя $Q_n(x)$) (*метод частных значений*). Обычно, при нахождении неизвестных постоянных комбинируют оба способа.

Интегрирование простейшей дроби $\frac{B_kx+C_k}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}$ $(k\geq 2)$, выделением полного квадрата $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\beta/(2\alpha)\right)^2+\gamma-\beta^2/(4\alpha)$ и заменой $x+\beta/(2\alpha)=t$, сводят к вычислению интеграла вида $\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$. Для вычисления такого интеграла используют подстановку $t=a\,tgz$.

Примеры. Найти интегралы:

1) $\int \frac{x-3}{x^3-x}dx$**;** **2)** $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$**.**

Решение

1. Подынтегральная дробь правильная, так как степень многочлена числителя ниже степени многочлена знаменателя. Разложим знаменатель на простые множители. Получим $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$.

Представим правильную дробь в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами: $\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$, где A,B,C – неизвестные постоянные. Находим значения A,B,C методом неопределённых коэффициентов. Для этого правую часть полученного тождественного разложения приводим к общему знаменателю и приравниваем числители исходной дроби и дроби с неизвестными коэффициентами. Получим следующее равенство:

$$x-3=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1).$$

Полученное равенство рассматриваем как тождественное равенство двух многочленов одного порядка (в данном случае – второго порядка):

$$0\cdot x^2+1\cdot x-3\cdot x^0=(A+B+C)\cdot x^2+(B-C)\cdot x-A\cdot x^0.$$

Приравниваем в правой и левой частях полученного тождественного равенства коэффициенты при одинаковых степенях x:

при x^2: $A+B+C=0$; при x: $B-C=1$; при x^0: $-A=-3$.

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения значений A,B,C: $\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=1 \\ A=3 \end{cases}$. Решая систему любым известным методом, находим $A=3,\ B=-1,\ C=-2$. Таким образом, подынтегральную функцию представим в виде $\frac{x-3}{x^3-x}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}$. Теперь, непосредственно интегрируя полученное разложение, находим

$$\int \frac{x-3}{x^3-x}dx=3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}-2\int\frac{dx}{x+1}=3\ln|x|-\ln|x-1|-2\ln|x+1|+C.$$

2. Подынтегральная дробь неправильная, так как степень многочлена числителя выше степени многочлена знаменателя. Поэтому сначала разделим числитель на знаменатель «уголком»: $\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}$.

Затем разложим знаменатель на простые множители: $x^4+3x^2=x^2(x^2+3)$ и представим правильную дробь в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами:

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3},$$

где A,B,C,D – неизвестные постоянные. Находим значения A,B,C,D методом неопределённых коэффициентов. Для этого правую часть полученного тождественного разложения приводим к общему знаменателю и приравниваем числители исходной дроби и дроби с неизвестными коэффициентами. Получим следующее равенство:

$$1=Ax(x^2+3)+B(x^2+3)+(Cx+D)x^2.$$

Полученное равенство рассматриваем как тождественное равенство двух многочленов одного порядка (в данном случае – третьего порядка): $0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+1\cdot x^0=(A+C)\cdot x^3+(B+D)\cdot x^2+3Ax+3B\cdot x^0$. Приравниваем в правой и левой частях этого тождества коэффициенты при одинаковых степенях x: при x^3: $A+C=0$; при x^2: $B+D=0$; при x: $3A=0$; при x^0: $3B=1$. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения значений A,B,C,D: $\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 3A=0 \\ 3B=1 \end{cases}$. Решая систему любым известным методом, находим $A=0,\ B=\frac{1}{3},\ C=0,\ D=-\frac{1}{3}$. Таким образом, подынтегральную функцию представим в виде $\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}$. Теперь, непосредственно интегрируя полученное разложение, находим

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=2\int xdx+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Задачи. Найти **интегралы от рациональных функций:**

2.1. **а)** $\int\frac{2x+3}{2x+1}dx$; **б)** $\int\frac{xdx}{(x+1)\cdot(2x+1)}$; **в)** $\int\frac{x}{x^3+1}dx$.

2.2. **а)** $\int\frac{x^2+1}{x-1}dx$; **б)** $\int\frac{(15x^2-4x-81)dx}{(x-3)(x+4)(x-1)}$; **в)** $\int\frac{dx}{x^3-2x^2+x}$.

2.3. **а)** $\int\frac{x^4+x^2+1}{x-1}dx$; **б)** $\int\frac{dx}{x^5-x^2}$; **в)** $\int\frac{(x^2-6x-18)dx}{(x-2)(x^2+2x+5)}$.

2.4. **а)** $\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2\cdot(x+1)^2}dx$; **б)** $\int\frac{dx}{x^3-8}$; **в)** $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

2.5. $\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$.

Ответы

2.1. а) $x+\ln\left|2x+1\right|+C$; **б)** $\ln\dfrac{\left|x+1\right|}{\sqrt{2x+1}}+C$; **в)** $-\dfrac{1}{3}\ln\left|x+1\right|+\dfrac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\dfrac{\sqrt{3}}{3}arctg\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

2.2. а) $\dfrac{x^2}{2}+x+2\ln\left|x-1\right|+C$; **б)** $3\ln\left|x-3\right|+5\ln\left|x+4\right|+7\ln\left|x-1\right|+C$; **в)** $\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|-\dfrac{1}{x-1}+C$.

2.3. а) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{3}+x^2+2x+3\ln\left|x-1\right|+C$; **б)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

в) $-2\ln\left|x-2\right|+\dfrac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\dfrac{1}{2}arctg\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+C$.

2.4. а) $\dfrac{-9}{2(x-3)}-\dfrac{1}{2(x+1)}+C$; **б)** $\dfrac{1}{12}\ln\left|x-2\right|-\dfrac{1}{24}\ln(x^2+2x+4)-\dfrac{1}{4\sqrt{3}}arctg\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}+C$;

в) $\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{arctgx}{2}+C$.

2.5. $\dfrac{x^2}{2}+x+\ln\left|\dfrac{x}{(x-2)^{2/3}\cdot(x+1)^{1/3}}\right|+C$.

Задачи для самостоятельного решения. Найти **интегралы от рациональных функций:**

2.6. а) $\int\dfrac{1-3x}{3+2x}dx$; **б)** $\int\dfrac{dx}{x\cdot(x+1)^2}$; **в)** $\int\dfrac{(5x^3+2)dx}{x^3-5x^2+4x}$.

2.7. а) $\int\dfrac{x^2+5x+7}{x+3}dx$; **б)** $\int\dfrac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; **в)** $\int\dfrac{(x^3+1)dx}{x\cdot(x-1)^3}$.

2.8. а) $\int\dfrac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$; **б)** $\int\dfrac{dx}{x^3+1}$; **в)** $\int\dfrac{(x+1)dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

2.9. а) $\int\dfrac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$; **б)** $\int\dfrac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$; **в)** $\int\dfrac{dx}{x^4+x^2+1}$.

2.10. $\int\dfrac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx$.

Ответы

2.6. а) $-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{11}{4}\ln\left|3+2x\right|+C$; **б)** $\dfrac{1}{1+x}+\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+C$; **в)** $5x+\ln\left|\dfrac{x^{1/2}\cdot(x-4)^{161/6}}{(x-1)^{7/3}}\right|+C$.

2.7. а) $\dfrac{x^2}{2}+2x+\ln\left|x+3\right|+C$; **б)** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{(x+1)\cdot(x+3)}{(x+2)^2}\right|+C$; **в)** $\ln\left|\dfrac{(x-1)^2}{x}\right|-\dfrac{x}{(x-1)^2}+C$.

2.8. а) $\dfrac{1}{2}x^2+3x+\dfrac{3}{2}\ln(x^2+2)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$; **б)** $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

в) $\dfrac{1}{16}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+9}+\dfrac{arctgx}{8}-\dfrac{1}{24}arctg\dfrac{x}{3}+C$.

2.9. а) $x+3\ln\left|x-3\right|-3\ln\left|x-2\right|+C$; **б)** $-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x+1)}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$; **в)** $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}arctg\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C$.

2.10. $\dfrac{3}{2(x^2+1)}+\dfrac{\ln(x^2+1)}{2}+C$.

§3. Интегралы от тригонометрических выражений

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция относительно аргументов $\sin x$ и $\cos x$, приводятся к интегралам вида $\int R_1(t)dt$, где $R_1(t)$ – рациональная функция относительно аргумента t, с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $tg(x/2) = t$. При этом используются формулы: $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Применение универсальной подстановки иногда приводит к громоздким вычислениям. В частных случаях используют подстановки:

1) $\cos x = t$, если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, при этом: $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = -dt\big/\sqrt{1-t^2}$;

2) $\sin x = t$, если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, при этом: $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = dt\big/\sqrt{1-t^2}$;

3) $tgx = t$, если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ или $R(\sin x, \cos x) = R_1(tgx)$, при этом: $\sin x = t\big/\sqrt{1+t^2}$, $\cos x = 1\big/\sqrt{1+t^2}$, $dx = dt\big/(1+t^2)$;

4) $ctgx = t$, если $R(\sin x, \cos x) = R_1(ctgx)$, при этом $dx = -dt\big/(1+t^2)$.

Здесь R_1 – рациональная функция относительно аргументов tgx, $ctgx$.

Интегралы вида $\int \sin^{2m}\alpha x \cdot \cos^{2n}\alpha x dx$, где m, n – целые неотрицательные числа, вычисляют, преобразуя подынтегральную функцию с помощью формул: $\sin^2 \alpha x = (1-\cos 2\alpha x)/2$, $\cos^2 \alpha x = (1+\cos 2\alpha x)/2$.

Интегралы вида $\int \sin\alpha x \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x dx$ $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx$, вычисляют, преобразуя подынтегральную функцию по формулам:

$$\sin a \cdot \cos b = [\sin(a-b)+\sin(a+b)]\big/2; \quad \sin a \cdot \sin b = [\cos(a-b)-\cos(a+b)]\big/2;$$

$$\cos a \cdot \cos b = [\cos(a-b)+\cos(a+b)]\big/2.$$

Примеры. Найти интегралы:

1) $$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \left[\begin{gathered} tg(x/2) = t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{gathered}\right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+2t-1} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2-2} = [z = t+1, dz = dt] = 2\int \frac{dz}{z^2-2} = 2\int \frac{dz}{z^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tg(x/2)+1-\sqrt{2}}{tg(x/2)+1+\sqrt{2}}\right|+C;$$

2) $$\int\frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}=\left[\begin{array}{c} tgx=t \\ \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2},\quad \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2} \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2}+\dfrac{4}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{t}{2}\right)+C=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{tgx}{2}\right)+C;$$

3) $\int\cos^3 xdx=\int(1-\sin^2 x)\cos xdx=\left[t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx\right]=$

$=\int(1-t^2)dt=t-\dfrac{t^3}{3}+C=\sin x-\dfrac{\sin^3 x}{3}+C;$

4) $\int\sin^4\left(\dfrac{x}{2}\right)dx$**.**

Преобразуем подынтегральную функцию, используя формулы понижения чётной степени: $\sin^4\left(\dfrac{x}{2}\right)=\left(\dfrac{1-\cos x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(1-2\cos x+\cos^2 x)=$

$=\dfrac{1}{4}\left(1-2\cos x+\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{8}\cos 2x$. Тогда

$$\int\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)dx=\int\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{8}\cos 2x\right)dx=\frac{3}{8}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos xdx+\frac{1}{8}\int\cos 2xdx=$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)+C=\frac{3x}{8}-\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin(2x)}{16}+C.;$$

5) $\int\sin 2x\cdot\cos 3xdx$. Так как

$$\sin 2x\cdot\cos 3x=\frac{\sin(2x-3x)+\sin(2x+3x)}{2}=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin 5x,$$

то

$$\int\sin 2x\cdot\cos 3xdx=\int\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin 5x\right)dx=-\frac{1}{2}\int\sin xdx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\sin 5xdx=-\frac{1}{2}(-\cos x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(-\cos 5x)+C=\frac{\cos x}{2}-\frac{\cos 5x}{10}+C.$$

Задачи. Найти следующие **интегралы от тригонометрических функций:**

3.1. $\int\dfrac{dx}{3+5\cos x}$**.** **3.2.** $\int\dfrac{dx}{4-5\sin x}$**.** **3.3.** $\int\dfrac{\cos x}{1+\cos x}dx$**.** **3.4.** $\int\sin^5 xdx$**.**

3.5. $\int\frac{\sin xdx}{\sin^2 x+6\cos^2 x}$. **3.6.** $\int\frac{1+tgx}{1-tgx}dx$. **3.7.** $\int\frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$ **3.8.** $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dx$.

3.9. $\int\frac{dx}{\sin^8 x}$. **3.10.** $\int tg^2(5x)dx$. **3.11.** $\int\frac{dx}{\sin^5 x\cos^3 x}$. **3.12.** $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$.

3.13. $\int\frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}dx$. **3.14.** $\int\cos 3x\cos 5x\cos 8xdx$.

Ответы

3.1. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg(x/2)+2}{tg(x/2)-2}\right|+C$. **3.2.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg(x/2)-2}{2tg(x/2)-1}\right|+C$. **3.3.** $x-tg(x/2)+C$.

3.4. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$. **3.5.** $\frac{arctg(\sqrt{5}\cos x)}{\sqrt{5}}+C$. **3.6.** $-\ln|\cos x-\sin x|+C$.

3.7. $\frac{-1}{2(1-\cos x)^2}+C$. **3.8.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{5-\sin x}{1-\sin x}\right|+C$. **3.9.** $-\frac{ctg^7 x}{7}-\frac{3ctg^5 x}{5}-ctg^3 x-ctgx+C$.

3.10. $(tg5x)/5-x+C$. **3.11.** $\frac{1}{2}tg^2 x+3\ln|tgx|-\frac{3}{2tg^2 x}-\frac{1}{4tg^4 x}+C$. **3.12.** $-\frac{ctg^3 x}{3}+C$.

3.13. $\frac{1}{\cos x}+2\cos x-\frac{\cos^3 x}{3}+C$. **3.14.** $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{16}\sin 16x+\frac{1}{10}\sin 10x+\frac{1}{6}\sin 6x+x\right]+C$.

Задачи для самостоятельного решения. Найти следующие **интегралы от тригонометрических функций:**

3.15. $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$. **3.16.** $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$. **3.17.** $\int\frac{\sin x}{1-\sin x}dx$.

3.18. $\int\sin^3 x\cos^2 xdx$. **3.19.** $\int\frac{dx}{\sin^2 x-9\cos^2 x}$. **3.20** $\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

3.21. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$. **3.22.** $\int\sin^6 xdx$. **3.23.** $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$ **3.24.** $\int ctg^5 xdx$.

3.25. $\int\frac{dx}{tg^2 x}$. **3.26.** $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}dx$. **3.27.** $\int\sin 3x\cos 7xdx$. **3.28.** $\int\sin 4x\sin 5x\sin 7xdx$.

Ответы

3.15. $\frac{-1}{tg(x/2)+2}+C$. **3.16.** $\ln\left|\frac{tg(x/2)-5}{tg(x/2)-3}\right|+C$. **3.17.** $-x+tgx+1/\cos x+C$.

3.18. $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$. **3.19.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{tgx-3}{tgx+3}\right|+C$. **3.20.** $\frac{1}{2}arctg\frac{tgx}{2}+C$.

3.21. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+C$. **3.22.** $\frac{5x}{16}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$.

3.23. $(tg^3 x)/3+2tgx-1/tgx+C$. **3.24.** $\frac{1}{2}ctg^2 x-\frac{1}{4}ctg^4 x+\ln|\sin x|+C$. **3.25.** $-ctgx-x+C$.

3.26. $\frac{1}{6}tg^6 x+\frac{1}{4}tg^4 x+C$. **3.27.** $\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{20}\cos 10x+C$.

3.28. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{16}\cos 16x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{8}\cos 8x\right]+C$.

§4. Интегралы от иррациональных выражений

Интегралы вида $\int R\left[x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right]dx$, где R – рациональная функция своих аргументов; $m_1,n_1,m_2,n_2,\ldots$ – целые числа, вычисляются с помощью подстановки $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^k$, где k – наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2},\ldots$.

Вычисление интегралов вида $\int R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$, где R – рациональная функция своих аргументов; выделением полного квадрата в квадратном трёхчлене $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\beta/(2\alpha)\right)^2+\gamma-\beta^2/(4\alpha)$ и заменой $x+\beta/(2\alpha)=t$, сводится к вычислению интегралов вида:

1) $\int R_1(t,\sqrt{a^2-t^2})\,dt$**;** **2)** $\int R_1(t,\sqrt{a^2+t^2})\,dt$**;** **3)** $\int R_1(t,\sqrt{t^2-a^2})\,dt$**,** где R_1 – рациональная функция своих аргументов.

Последние интегралы, соответственно, с помощью тригонометрических подстановок:

$$\textbf{1)}\ t=a\sin z;\quad \textbf{2)}\ t=a\,tgz;\quad \textbf{3)}\ t=\frac{a}{\cos z}$$

приводятся к интегралам вида $\int R_2(\sin z,\cos z)dz$, где R_2 – рациональная функция своих аргументов.

Примеры. Найти интегралы:

1) $$\int\frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\sqrt{x}}=\left[\begin{array}{c}x^{\frac{1}{4}}=t\Rightarrow x=t^4\\ dx=(t^4)'dt=4t^3dt\end{array}\right]=\int\frac{4t^3dt}{(1+t)t^2}=4\int\frac{tdt}{t+1}=$$

$$=4\int\frac{(t+1-1)dt}{t+1}=4\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=4t-4\ln|t+1|+C=4\sqrt[4]{x}-4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right|+C;$$

2) $$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx=\left[\begin{array}{c}x=tgt\\ dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\end{array}\right]=\int\frac{\sqrt{tg^2t+1}}{tg^4t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin^4 t}{\cos^4 t}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{\cos t}{\sin^4 t}dt=$$

$$=\left[z=\sin t\right]=\int\frac{dz}{z^4}=\frac{z^{-3}}{-3}+C=-\frac{1}{3\sin^3(arctgx)}+C.$$

Задачи. Найти следующие **интегралы от иррациональных функций:**

4.1. а) $\int\sqrt{4x-x^2}\,dx$ **;** **б)** $\int\frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$ **;** **в)** $\int\frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$ **.**

4.2. а) $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,dx$ **;** **б)** $\int\frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$ **;** **в)** $\int\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx$ **.**

4.3. а) $\int\sqrt{x^2-2x+10}\,dx$ **;** **б)** $\int\frac{1}{x^2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$ **;** **в)** $\int\frac{dx}{\sqrt{(36-x^2)^3}}$ **.**

4.4. $\int(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ **.** **4.5.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$ **.**

Ответы

4.1.а) $\frac{x-2}{2}\cdot\sqrt{4x-x^2}+2\arcsin\frac{x-2}{2}+C$; **б)** $2\sqrt{x+9}+3\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right|+C$**;** **в)** $\sqrt{x^2+16}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+16}+4}\right|+C$**.**

4.2. а) $\frac{x-3}{2}\cdot\sqrt{x^2-6x-7}-8\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}\right|+C$ **;** **б)** $\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)+C$ **;**

в) $\frac{-\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}+C=\frac{-1}{20}ctg^5\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+C$ **.**

4.3. а) $\frac{x-1}{2}\cdot\sqrt{x^2-2x+10}+\frac{9}{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+10}\right|+C$ **;** **б)** $-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}+C$ **;**

в) $\frac{-x}{36\sqrt{36-x^2}}+C$ **.**

4.4. $\left(1-\frac{x}{2}\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x+C$ **.** **4.5.** $\sqrt{2x-1}+2\cdot\sqrt[4]{2x-1}+2\cdot\ln\left|\sqrt[4]{2x-1}-1\right|+C$ **.**

Задачи для самостоятельного решения. Найти следующие **интегралы от иррациональных функций:**

4.6. а) $\int\sqrt{x^2+x}\,dx$ **;** **б)** $\int\frac{x^2dx}{(4x-3)\sqrt{4x-3}}$ **;** **в)** $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$ **.**

4.7. а) $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$; **б)** $\int\frac{dx}{(2x+1)^{3/2}-(2x+1)^{1/2}}$; **в)** $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$ **.**

4.8. $\int x^3\sqrt{x^2-25}dx$ **.** **4.9.** $\int\frac{\sqrt{(x^2+9)^3}}{x^6}dx$ **.**

Ответы

4.6.а) $\frac{2x+1}{4}\cdot\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{8}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right|+C$ **;** **б)** $\frac{1}{96}(4x-3)\sqrt{4x-3}+\frac{3}{16}\sqrt{4x-3}-\frac{9}{32\sqrt{4x-3}}+C$ **;**

в) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C=\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin t+C$, где $t=\arccos(1/x)$ **.**

4.7. а) $\frac{x+1}{2}\cdot\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}+C$ **;** **б)** $\frac{3}{2}(2x+1)^{1/3}+3(2x+1)^{1/6}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C$ **;**

в) $\ln\left|\sqrt{x^2+4}+x\right|-\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}+C$ **.** **4.8.** $(3x^2+50)\frac{\sqrt{(x^2-25)^3}}{15}+C$ **.** **4.9.** $\frac{-\sqrt{(x^2+9)^5}}{45x^5}+C$ **.**

§5. Определённый интеграл и методы его вычисления

К понятию определённого интеграла можно прийти, решая задачу о вычислении площади криволинейной трапеции, т.е. фигуры, заключённой между прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и кривой $y=f(x)$. Число, равное площади криволинейной трапеции, причём площадь той части, которая лежит выше оси Ox берётся со знаком «+», и ниже её – со знаком « – » и называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Определённый интеграл обозначается $\int_a^b f(x)dx$, где числа a, b называются *нижним* и *верхним пределами интегрирования*. Функция $y=f(x)$, для которой на отрезке $[a,b]$ существует определённый интеграл, называется *интегрируемой* на этом отрезке. *Достаточным условием* интегрируемости функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ является её непрерывность на данном отрезке.

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то

$$\int_a^a f(x)dx=0,\ \int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx.$$

Основные свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ $(k=const)$.

2. $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

4. Если $f(x)\le g(x)$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

5. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, m – наименьшее, M – наибольшее значения $f(x)$ на $[a,b]$, то $m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ (*теорема об оценке определённого интеграла*).

6. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует точка $c\in[a,b]$ такая, что справедливо равенство $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ (*теорема о среднем* *значении*). Число $f(c)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется при этом *средним значением* функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$.

Понятие определённого интеграла тесно связано с понятием неопределённого интеграла (первообразной).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$- одна из её первообразных, то справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \text{ (\textit{формула Ньютона-Лейбница})}.$$

Следствиями формулы Ньютона-Лейбница являются формулы замены переменной и интегрирования по частям в определённом интеграле.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b udv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$ (*формула интегрирования по частям*).

Если функция $x=\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, где $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \text{ (\textit{формула замены переменной})}.$$

Задачи. Вычислить следующие интегралы:

5.1. а) $\int\limits_3^8 \sqrt{x+1}dx$; **б)** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cdot\cos^2 xdx.$; **в)** $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

5.2. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; **б)** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\cdot\sqrt{1+x^2}dx.$; **в)** $\int\limits_2^3 x\ln(x-1)dx..$

5.3. а) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx.$; **б)** $\int\limits_0^\pi (x+2)\cos\frac{x}{2}dx$; **в)** $\int\limits_0^1 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$.

5.4. а) $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$; **б)** $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx.$; **в)** $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

5.5. а) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; **б)** $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$; **в)** $\int\limits_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx$.

Ответы

5.1. а) $38/3$; **б)** $1/3$; **в)** $2-\ln 2$. **5.2. а)** $2/3$; **б)** $7/3$; **в)** $4\ln 2-7/4$.
5.3. а) $3/2$; **б)** 2π; **в)** $1+\pi/4$. **5.4. а)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; **б)** $2-5/e$; **в)** $3\ln 2-3/2$.
5.5. а) 2; **б)** $2-\pi/2$; **в)** $29/3$.

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить следующие интегралы:

5.6. **а)** $\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^2+1}$; **б)** $\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+4}}$; **в)** $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}dx.$.

5.7. **а)** $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$; **б)** $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; **в)** $\int_0^1 3(x^2+x\cdot e^{x^2})dx$.

5.8. **а)** $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx.$; **б)** $\int_0^1 arctg\sqrt{x}dx$; **в)** $\int_2^3 \frac{x+2}{x^2(x-1)}dx$.

5.9. **а)** $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{12x^5dx}{\sqrt{x^6+1}}$; **б)** $\int_{-1}^0 (x+1)\cdot e^{-2x}dx.$; **в)** $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

5.10. **а)** $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+1}$; **б)** $\int_4^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$; **в)** $\int_{-2}^0 x^2\cdot e^{-x/2}dx.$.

Ответы

5.6. **а)** $1-\pi/4$; **б)** $\sqrt{5}-1$; **в)** $\pi/2-1$. **5.7.** **а)** $-\ln 5/12$; **б)** $\pi/6$; **в)** $(3e-1)/2$.
5.8. **а)** $e-\sqrt{e}$; **б)** $\pi/2-1$; **в)** $\ln(4/3)-1/6$. **5.9.** **а)** $8\sqrt{7}-4$; **б)** $(e^2-3)/4$; **в)** $4/3$.
5.10. **а)** $\pi/4$; **б)** $(1/3)\ln(8/7)$; **в)** $8e-16$.

§6. Некоторые приложения определенного интеграла

6.1. Геометрические приложения определённого интеграла

1. Вычисление площади. *Площадь фигуры* $a\le x\le b$, $f_1(x)\le y\le f_2(x)$ равна $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$.

Площадь фигуры $g_1(y)\le x\le g_2(y)$, $c\le y\le d$ равна $S=\int_c^d (g_2(y)-g_1(y))dy$.

Если фигура ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t), y=y(t)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox, то её площадь равна $S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt$, где t_1 и t_2 определяются из уравнений $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$ ($y(t)\ge 0$ на отрезке $[t_1,t_2]$).

Площадь криволинейного сектора $\alpha\le\varphi\le\beta$, $r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi)$, где r,φ – полярные координаты, равна $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_2^2(\varphi)-r_1^2(\varphi))\,d\varphi$.

Задачи

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

6.1.а) $y = x^2/4$, $y = 2\sqrt{x}$; **б)** $y = 6 - x - 2x^2$, $y = x + 2$; **в)** $y = 3/x$, $x + y = 4$.

6.2.а) $y = \sin x \cdot \cos^2 x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi/2$; **б)** $x^2 = 4y$, $y = \dfrac{8}{x^2+4}$; **в)** $xy = 4$, $x = 4$, $y = 4$, $x = 0$, $y = 0$.

6.3. а) $x = 3\cos t,\ y = 8\sin t$ *(эллипс)* и $y = 4$ $(y \ge 4)$; **б)** $r = 2\sin 3\varphi$ *(трилистник).*

6.4. а) $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t$ *(кардиоида)*; **б)** $r^2 = 4\sin 2\varphi$ *(лемниската).*

6.5. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $r = \sqrt{3}\sin\varphi$ и кардиоидой $r = 1 - \cos\varphi$ (вне кардиоиды).

Ответы

6.1. **а)** $16/3$; **б)** 9; **в)** $4 - 3\ln 3$. **6.2.** **а)** $1/3$; **б)** $2\pi - 4/3$; **в)** $4\ln 4 + 4$.

6.3. **а)** $8\pi - 12\sqrt{3}$; **б)** 2π. **6.4. а)** 6π; **б)** 4 . **6.5.** $3\sqrt{3}/4$.

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

6.6. а) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$; **б)** $y = x\sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$; $0 \le x \le 3$ **в)** $y = \sin 2x$, $y = 1$, $x = \pi/2$, $\pi/4 \le x \le \pi/2$.

6.7. а) $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y$; **б)** $y = (x+2)^2$, $y = 4 - x$; **в)** $y = tgx$, $y = (2\cos x)/3$, $x = 0$.

6.8. а) $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$ *(астроида)*; **б)** $r = 3\sin\varphi$, $r = 5\sin\varphi$ *(окружности).*

6.9. а) $x = 4(t - \sin t),\ y = 4(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ *(циклоида)* и $y = 0$; **б)** $r = 3(1 + \cos\varphi)$ *(кардиоида)* .

6.10. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $r^2 = 2\cos 2\varphi$ и окружностью $r = 1$ $(r \ge 1)$.

Ответы

6.6. **а)** 9; **б)** 9; **в)** $(\pi - 2)/4$. **6.7.** **а)** 5; **б)** $125/6$; **в)** $1/3 + \ln(\sqrt{3}/2)$.

6.8. **а)** $3\pi/2$; **б)** 4π. **6.9. а)** 48π; **б)** $27\pi/2$. **6.10.** $\sqrt{3} - \pi/3$.

2. Вычисление длины дуги. *Длина дуги* плоской кривой $y = f(x), a \le x \le b$ равна $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$.

Длина дуги плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, равна $L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$.

Длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, равна:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt .$$

Длина дуги плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, равна $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r_\varphi')^2}\, d\varphi$.

Задачи. Найти длины дуг следующих кривых:

6.1. **а)** $y = \ln\sin x$, $\pi/3 \le x \le 2\pi/3$;

б) $x = 8\cos^3 t, y = 8\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/6$ *(астроида)*;

в) $r = 3(1 - \cos\varphi)$ *(кардиоида)*.

6.2. **а)** $y = \sqrt{2x - x^2} - 1$, $1/4 \le x \le 1$;

б) $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le \pi/2)$ *(циклоида);*

в) $r = 3\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ *(спираль Архимеда)*.

Ответы

6.1. а) $\ln 3$; **б)** 3; **в)** 24. **6.2.а)** $\arcsin(3/4)$; **б)** $4(2 - \sqrt{2})$; **в)** $3\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{3}{2} \cdot \ln\left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения. Найти длины дуг следующих кривых:

6.3. **а)** $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $0 \le x \le 9/16$;

б) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$, $0 \le t \le 1$;

в) $r = 4\cos\varphi$ *(окружность)*.

6.4. **а)** $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x}$, $1/9 \le x \le 1$;

б) $x = 2(\cos t + t\sin t), y = 2(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

в) $r = 1/\varphi$, $1 \le \varphi \le 2$ *(гиперболическая спираль)*.

Ответы

6.3. а) $1/\sqrt{2}$; **б)** $\sqrt{2}(e - 1)$; **в)** 4π. **6.4. а)** $4/3$; **б)** $4\pi^2$; **в)** $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\left(\frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}\right)$.

3. Вычисление площади поверхности. *Площадь поверхности*, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$, равна $S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (y_x')^2}\, dx$.

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги кривой $x = g(y)$, $c \le y \le d$, равна $S_y = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + (x_y')^2}\, dy$.

При параметрическом задании дуги кривой $x = x(t), y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, площадь поверхности вычисляется по формулам:

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt,\quad S_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt.$$

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси (оси Ox) дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, равна $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r\sin\varphi\sqrt{r^2 + (r_\varphi')^2}\,d\varphi$.

Задачи. Найти площади поверхностей, образованных вращением кривых L вокруг указанной оси.

6.1. **а)** $L: y = x^3/3$, $-1 \le x \le 1$ вокруг оси Ox;

б) $L: \begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ *(циклоида)* вокруг оси Ox;

в) $L: r = 2(1 + \cos\varphi)$ *(кардиоида)* вокруг полярной оси.

6.2. **а)** $L: x^2 = y + 2$, $y = 1$ вокруг оси Oy;

б) $L: \begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t) \\ y = a(3\sin t - \sin 3t) \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$ вокруг оси Oy;

в) $L: r = 2\cos\varphi$ *(окружность)* вокруг полярной оси.

Ответы

6.1. **а)** $S_x = 2\pi(2\sqrt{2} - 1)/9$; **б)** $S_x = 192\pi$; **в)** $S = 128\pi/5$.

6.2. **а)** $S_y = \pi(13\sqrt{13} - 1)/6$; **б)** $S_y = 24\pi a^2$; **в)** $S = 4\pi$.

Задачи для самостоятельного решения. Найти площади поверхностей, образованных вращением кривых L вокруг указанной оси.

6.3. **а)** $L: y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ вокруг оси Ox;

б) $L: \begin{cases} x = t\sin t + \cos t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$ *(эвольвента окружности)* вокруг оси Ox;

в) $L: r = 4\sin\varphi$ *(окружность)* вокруг полярной оси.

Ответы

6.3. **а)** $S_x = 2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$; **б)** $S_x = 6\pi^2$; **в)** $S = 16\pi^2$.

4. Вычисление объема. Если $S = S(z)$ – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Oz, в точке с аппликатой z, то *объём этого тела* равен $V = \int_a^b S(z)dz$, где a и b - аппликаты крайних сечений тела.

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры $a \le x \le b$, $0 \le f_1(x) \le y \le f_2(x)$ равен $V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]dx$.

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры $0 \le g_1(y) \le x \le g_2(y)$, $c \le y \le d$, равен $V_y = \pi \int_c^d [g_2^2(y) - g_1^2(y)]dy$.

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры $0 \le a \le x \le b$, $f_1(x) \le y \le f_2(x)$, равен $V_y = 2\pi \int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx$.

Задачи. 1. Вычислить объёмы тел, ограниченных поверхностями:

6.1. а) $z = 2x^2 + 18y^2$, $z = 4$; **б)** $x^2 + y^2/4 - z^2 = 1$, $z = 1$, $z = 0$.

2. Вычислить объемы тел, полученных вращением плоской фигуры *Ф*, ограниченной указанными линиями вокруг: **а)** оси Ox; **б)** оси Oy.

6.2. *Ф:* $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ $(x \ge 0)$. **6.3.** *Ф:* $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

6.4. *Ф:* $x = 2\sin^3 t$, $y = 3\cos^3 t$ $(0 \le t \le \pi/2)$.

6.5. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$.

Ответы

6.1. а) $V = 4\pi/3$; **б)** $V = 8\pi/3$. **6.2.** $V_x = 256\pi/15$, $V_y = 8\pi$.

6.3. $V_x = 16\pi/15$, $V_y = 8\pi/3$. **6.4.** $V_x = 288\pi/105$, $V_y = 192\pi/105$.

6.5. $V_y = 5\pi/6$.

Задачи для самостоятельного решения

1) Вычислить объёмы тел, ограниченных поверхностями:

6.6. а) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1$, $z = 2$, $z = 0$; **б)** $x^2 + 4y^2 = 1$, $z = x$ $(x \ge 0)$, $z = 0$.

2) Вычислить объемы тел, полученных вращением плоской фигуры $Ф$, ограниченной указанными линиями вокруг: **а)** оси Ox; **б)** оси Oy.

6.7. *Ф:* $y = e^x$, $y = 0, x = 0, x = 1$. **6.8.** *Ф:* $y = \sin x$, $y = 0$ $(0 \le x \le \pi/2)$.

6.9. *Ф:* $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$, $y = 0$ $(0 \le t \le \pi)$ *(циклоида)*.

6.10. Найти объём тела, образованного вращением параболического сегмента с основанием $2a$ и высотой h вокруг высоты.

Ответы

6.6. а) $V = 592\pi/25$; **б)** $V = 1/3$. **6.7.** $V_x = \pi(e^2 - 1)/2$, $V_y = 2\pi$.

6.8. $V_x = \pi^2/4$, $V_y = 2\pi$. **6.9.** $V_x = 5\pi^2/2$, $V_y = 3\pi^3$. **6.10.** $V = \pi a^2 h/2$.

6.2. Приложения определенного интеграла к решению некоторых задач механики, физики

Статические моменты M_x и M_y, *моменты инерции* I_x и I_y, *масса* M, *координаты* x_C *и* y_C *центра масс* C дуги кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$ относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам:

$$M_x = \int_a^b y\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx,\ M_y = \int_a^b x\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx,$$

$$I_x = \int_a^b y^2\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx,\ I_y = \int_a^b x^2\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx,$$

$$M = \int_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx,\ x_C = M_y/M,\ y_C = M_x/M.$$

При параметрическом задании дуги кривой $x = x(t), y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$:

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt,\quad M_y = \int_{t_1}^{t_2} x\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt,\quad M = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} y^2\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt,\quad I_y = \int_{t_1}^{t_2} x^2\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt.$$

Путь S, *пройденный телом* со скоростью $v(t)$ за отрезок времени $[t_1,t_2]$, равен $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

Работа A *переменной силы* $f(x)$, действующей вдоль оси Ox на отрезке $[a,b]$, равна $A = \int_a^b f(x)dx$.

Задачи

6.1. Найти статический момент синусоиды $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$ относительно оси Ox.

6.2. Найти статический момент и момент инерции полуокружности радиуса a относительно ее диаметра.

6.3. Найти координаты центра масс дуги окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, расположенной в первой четверти.

6.4. Найти массу стержня длины $l = 5$*м*, если линейная плотность стержня меняется по закону $\rho = 1 + 0.1x^3$ *(кг/м*^{3}*)* , где x – расстояние от одного из концов стержня.

6.5. Вычислить путь, пройденный свободно падающим в пустоте телом за T *сек*, если известно, что скорость v свободного падения в пустоте определяется формулой $v(t)=v_0+gt$, где v_0 – начальная скорость тела; g – ускорение свободного падения.

6.6. Какую работу надо затратить (в $Дж = н\cdot м$), чтобы растянуть пружину на *5 см*, если сила в $1\,н$ растягивает её на $1\,см$ ***(указание**: по закону Гука сила прямо пропорциональна растяжению пружины).*

6.7. Найти количество тепла Q, выделяемое переменным током $I(t)=I_0\cos(\omega t)$ за время $T=2\pi/\omega$ в проводнике с сопротивлением R ***(указание**: по закону Джоуля-Ленца количество тепла, выделяемой постоянным током за время t, равно $Q=0.24I^2Rt$).*

Ответы

6.1. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. **6.2.** $M_x=2a^2$; $I_x=\pi a^3/2$. **6.3.** $x_c=\dfrac{2a}{\pi}$; $y_c=\dfrac{2a}{\pi}$.

6.4. $M=20.625кг$. **6.5.** $S=v_0+\dfrac{gt^2}{2}$. **6.6.** $A=0.125Дж$. **6.7.** $Q=\dfrac{0.24I_0{}^2R\pi}{\omega}$.

Задачи для самостоятельного решения

6.8. Найти статический момент и момент инерции относительно оси *Ox* дуги кривой $y=e^x \quad (0\le x\le 1)$.

6.9. Найти статический момент и момент инерции относительно оси *Ox* одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t), \qquad y=a(1-\cos t)$.

6.10. Найти координаты центра масс дуги астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, расположенной выше оси *Ox*.

6.11. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v(t)=2t+3t^2$ *(м/сек).* Найти путь S, пройденный телом за *5 сек.* от начала движения.

6.12. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха равна $v=v_0-gt$, где t – протекшее время; g – ускорение свободного падения. На какую максимальную высоту поднимется тело?

6.13. Сила тока, измеряемая в амперах, определяется формулой $I(t)=2t^2-3t+2$. Найти количество электричества (в кулонах), протекшее через поперечное сечение проводника за *10 сек.,* считая время от начала опыта.

6.14. Сила переменного тока меняется по закону $I(t)=I_0\sin(2\pi t/T+\varphi)$, где T – период. Найти среднее значение силы тока за полупериод $T/2$.

Ответы

6.8. $M_x = \frac{1}{2}\left(e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(e+\sqrt{1+e^2}\right)\right)$; $I_x = \frac{1}{3}\left((1+e^2)^{3/2} - \sqrt{8}\right)$.

6.9. $M_x = 32a^2/3$, $I_x = 256a^3/15$. **6.10.** $x_c = 0$, $y_c = \frac{2a}{5}$. **6.11.** $S = 150\text{м}$.

6.12. $h_{\max} = \frac{{v_0}^2}{2g}$. **6.13.** $536\frac{2}{3}$ *кулон*. **6.14.** $\frac{2I_0 \cos\varphi}{\pi}$.

Литература

1. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. – М.: Физматлит, 2009. – 484 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс: учебник для вузов. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
3. Шипачев В.С. Высшая математика: учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 2005. – 479 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов: в 2-х ч. Ч. I. – М.: ОНИКС: Мир и образование, 2008. – 368 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов: в 2-х ч. Ч. II. – М.: ОНИКС: Мир и образование, 2008. – 448 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Задачник по темам

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

для студентов очной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство» (бакалавриат)

Составитель Тимергалиев С.Н