МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ, НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ, КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задания по курсу высшей математики для практических занятий студентам 1 курса дневного отделения (бакалавриат), направлений подготовки 051000 – Профессиональное обучение, 080200 – Менеджмент, 190100 – Наземные транспортно-технологические комплексы, 190700 – Технология транспортных процессов, 230400 – Информационные системы и технологии, 270800 – Строительство, 280700 – Техносферная безопасность

Казань
2014

УДК 517
ББК 22.1
Л12

Л12 Функции многих переменных, неопределенные, определенные, кратные и криволинейные интегралы: Задания по курсу высшей математики для практических занятий студентам 1 курса дневного отделения (бакалавриат), направлений подготовки 051000 – Профессиональное обучение, 080200 – Менеджмент, 190100 – Наземные транспортно-технологические комплексы, 190700 – Технология транспортных процессов, 230400 – Информационные системы и технологии, 270800 – Строительство, 280700 – Техносферная безопасность / Сост.: А.Г. Лабуткин, В.П. Деревенский. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2014. – 28 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Задания для практических занятий по функциям многих переменных, неопределенному, определенному, кратным и криволинейным интегралам для студентов 1 курса дневного отделения (второй семестр, бакалавриат).

Рецензент
Кандидат физико-математических наук. доцент
Ф.Г. Габбасов

УДК 517
ББК 22.1

ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ БАКАЛАВРИАТА (2-й СЕМЕСТР, 16 ЗАНЯТИЙ)

Занятие 1. Область определения и частные производные функций двух переменных

Аудиторное задание

1. Найти области определения функций:
1) (2984) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$, 2) (2986) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$.
Ответы: 1) $y^2 > 4x - 8$; 2) Внутренняя часть правого вертикального угла, образованного биссектрисами координатных углов, включая сами биссектрисы: $x + y \geq 0, \quad x - y \geq 0$.

2. Найти частные производные данных функций по каждой из независимых переменных:
1) (3037) $z = x^3 y - y^3 x$; 2) (3038) $z = axe^{-y} + by$; 3) (3040) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;

4) (3042) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; 5) (3052) $z = \ln(x + \ln y)$;

6) (3054) $z = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$; 7) (3069) $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке (3,4);

8) (3070) $z = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$ в точке (1,2).

Ответы: 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y - y^3, \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2 x$; 2) $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = a\,e^{-t}, \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = -a\,x\,e^{-t} + b$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x^4 + 3x^2 y^2 - 2xy^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y^4 + 3x^2 y^2 - 2x^3 y}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} - \dfrac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 5) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x + \ln y}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{y(x + \ln y)}$;

6) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$;
7) $2/5, 1/5$; 8) $0,\ 1/4$.

3. (3181) $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

4. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ от данных функций:

1) (3188) $z = \sin^2(ax + by)$; 2) (3189) $z = e^{xe^y}$.

Ответы: 1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a^2 \cos(2ax + 2by), \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b^2 \cos(2ax + 2by),$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2ab \cos(2ax + 2by)$; 2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xe^y + 2y}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\left(1 + xe^y\right)e^{xe^y + y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + xe^y\right)e^{xe^y + y}$.

Домашнее задание

1. Найти области определения функций:

1) (2983) $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$, 2) (2985) $z = \dfrac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$.

Ответы: 1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$; 2) Вся плоскость, за исключением точек окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

2. Найти частные производные данных функций по каждой из независимых переменных:

1) (3039) $z = \dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u}$; 2) (3041) $z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3$; 3) (3047) $z = \ln(x^2 + y^2)$;

4) (3051) $z = e^{-\frac{x}{y}}$; 5) (3053) $u = arctg\dfrac{v + w}{v - w}$;

6) (3061) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ответы: 1) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{1}{v} - \dfrac{v}{u^2}, \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{u}{v^2} + \dfrac{1}{u}$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 30xy\left(5x^2 y - y^3 + 7\right)^2$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3\left(5x^2 y - y^3 + 7\right)^2\left(5x^2 - 3y^2\right)$; 3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{y}e^{-x/y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{y^2}e^{-x/y}$; 5) $\dfrac{\partial z}{\partial v}=-\dfrac{w}{v^2+w^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial w}=\dfrac{v}{v^2+w^2}$;

6) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3. (3183) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

4. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ от данной функции:

(3187) $z=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2y}{\left(1+y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$.

Занятие 2. Дифференцирование сложной и неявной функций. Полный дифференциал и его применение в приближенных вычислениях

Аудиторное задание

1. Найти производные сложных функций:

1) (3124) $u=e^{x-2y}$, $x=\sin t$, $y=t^3$; $\dfrac{du}{dt}=?$ 2) (3126) $z=\arcsin(x-y)$, $x=3t$, $y=4t^3$; $\dfrac{dz}{dt}=?$ 3) (3128) $z=x^2\ln y$, $x=\dfrac{u}{v}$, $y=3u-2v$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial v}=?$ 4) (3130) $z=arctg(xy)$, найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $y=e^x$;

5) (3132) $z=tg(3t+2x^2-y)$, $x=\dfrac{1}{t}$, $y=\sqrt{t}$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

Ответы: 1) $e^{\sin t-2t^3}\left(\cos t-6t^2\right)$; 2) $\dfrac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$; 3) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=2\dfrac{u}{v^2}\ln\left(3u-2v\right)+$ $+\dfrac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=-\dfrac{2u^2}{v^3}\ln\left(3u-2v\right)-\dfrac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$; 4) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$;

5) $\dfrac{dz}{dt}=\left(3-\dfrac{4}{t^3}-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\right)\Big/\cos^2\left(3t+\dfrac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)$.

2. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно:

1) (3145) $x^3y - y^3x = a^4$; 2) (3148) $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$;

3) (3149) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$; 4) (3153) $yx^2 = e^y$.

Ответы: 1) $\frac{3x^2y-y^3}{3y^2x-x^3}$; 2) $-\frac{x}{y}\cdot\frac{2(x^2+y^2)-a^2}{2(x^2+y^2)+a^2}$;

3) $\frac{y}{x}\cdot\frac{2x+e^{xy}-\cos(xy)}{\cos(xy)-e^{xy}-x}$; 4) $\frac{2y}{x(y-1)}$.

3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функций, заданных неявно:

1) (3162) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$; 2) (3164) $e^z - xyz = 0$.

Ответы: 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2-x}{x+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x+1}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x(z-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y(z-1)}$.

4. Найти полные дифференциалы функций:

1) (3104) $z = \arcsin\frac{x}{y}$; 2) (3108) $z = arctg(xy)$; 3) (3109) $u = x^{yz}$.

Ответы: 1) $\frac{y\,dx - x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$; 2) $\frac{x\,dy + y\,dx}{1+x^2y^2}$;

3) $x^{zy-1}\left(yz\,dx + zx\ln x\,dy + xy\ln x\,dz\right)$.

5. (3114) Вычислить приближенно $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$.
Ответ: ≈ 0.005.

Домашнее задание

1. Найти производные сложных функций:

1) (3125) $u = z^2 + y^2 + zy, \quad z = \sin t, \quad y = e^t; \quad \frac{du}{dt} = ?$

2) (3127) $z = x^2y - y^2x, \quad x = u\cos v, \quad y = u\sin v; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = ?\ \frac{\partial z}{\partial v} = ?$

3) (3129) $u = \ln(e^x + e^y)$; найти $\frac{du}{dx}$ если $y = x^3$;

4) (3131) $u = \arcsin\dfrac{x}{z}$; найти $\dfrac{du}{dx}$, если $z = \sqrt{x^2+1}$;

5) (3133) $u = \dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y = a\sin x$, $z = \cos x$; $\dfrac{du}{dx} = ?$

Ответы: 1) $\dfrac{du}{dt} = \sin(2t) + 2e^{2t} + e^t(\sin t + \cos t)$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 3u^3 \sin v \cos v(\cos v - \sin v)$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = u^3(\sin v + \cos v)(1 - 3\sin v \cos v)$;

3) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{e^x}{e^x + e^y}$, $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{e^x + 3e^{x^3}x^2}{e^x + e^{x^3}}$; 4) $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$; 5) $\dfrac{du}{dx} = e^{ax}\sin x$.

2. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно:

1) (3146) $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$; 2) (3151) $xy - \ln y = a$;

3) (3152) $arctg\dfrac{x+y}{a} - \dfrac{y}{a} = 0$.

Ответы: 1) $\dfrac{x(y^2-2x^2)}{y(2y^2-x^2)}$; 2) $\dfrac{y^2}{1-xy}$; 3) $\dfrac{a^2}{(x+y)^2}$.

3. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ от функций, заданных неявно:

1) (3161) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; 2) (3163) $z^3 + 3xyz = a^3$.

Ответы: 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{c^2x}{a^2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{c^2y}{b^2z}$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{yz}{xy+z^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{xz}{xy+z^2}$.

4. Найти полные дифференциалы функций:

1) (3102) $z = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$; 2) (3105) $z = \sin(xy)$;

3) (3107) $z = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

Ответы: 1) $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$; 2) $(x\,dy + y\,dx)\cos(xy)$; 3) $\dfrac{4xy(x\,dy - y\,dx)}{(x^2-y^2)^2}$.

5. (3115) Вычислить приближенно $1.04^{2.02}$. Ответ: ≈ 1.08 .

Занятие 3. Экстремум функции двух переменных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент

Аудиторное задание

1. Найти стационарные точки функции:
(3259) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.
Ответы: $(0,0),\ (-5/3,0),\ (-1,2),\ (-1,-2)$.

2. Найти точки экстремума функций:
1) (3273) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$; 2) (3278) $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
Ответы: 1) $(-1,1)$; 2) В точке $(0,0)$ нет экстремума. В точке $(1,1)$ – минимум.

3. Найти уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках данных поверхностей:
1) (3410) $z = 2x^2 - 4y^2$ в точке $(2,1,4)$;
2) (3413) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ в точке $(3,4,\text{-}7)$.
Ответы: 1) $8x - 8y - z = 4$, $\dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y-1}{-8} = \dfrac{z-4}{-1}$;
2) $17x + 11y + 5z = 60$, $\dfrac{x-3}{17} = \dfrac{y-4}{11} = \dfrac{z+7}{5}$.

4. (3439(1)) $\psi(x, y) = x^2 - 2xy + 3y - 1$. Найти проекции градиента в точке $(1,2)$ на оси координат.
Ответ: $(-2,1)$.

5. Найти производную функции:
1) (3451(1)) $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ в точке $M(3,1)$ по направлению к точке $N(6,5)$;
2) (3456) $u = x^2 y^2 z^2$ в точке $A(1,-1,3)$ по направлению к точке $B(0,1,1)$.
Ответы: 1) 0 ; 2) -22 .

Домашнее задание

1. Найти точки экстремума функции:
(3272) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

Ответ: $(2,-2)$.

2. (3275) Убедиться, что при $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ и при $x=-\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ функция $z=x^4+y^4-2x^2-4xy-2y^2$ имеет минимум.

3. (3279) Найти наибольшее и наименьшее значения функции:
$z=x^2-y^2$ в круге $x^2+y^2\le 4$.
Ответ: Наибольшее и наименьшее значения лежат на границе области; наибольшее значение $z=4$ в точках $(2,0)$ и $(-2,0)$; наименьшее значение $z=-4$ в точках $(0,2)$ и $(0,-2)$. Стационарная точка $(0,0)$ не является экстремальной.

4. Для данных поверхностей найти уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках:

1) (3411) $z=xy$ в точке $(1,1,1)$; 2) (3414) $z=arctg\dfrac{y}{x}$ в точке $(1,1,\dfrac{\pi}{4})$.

Ответы: 1) $x+y-z-1=0$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$;

2) $x-y+2z-\dfrac{\pi}{2}=0$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-\pi/2}{2}$.

5. 1) (3439(2)) $u=5x^2y-3xy^3+y^4$. Найти проекции градиента в произвольной точке;
2) (3440(1)) $z=x^2+y^2$. Найти $grad\, z$ в точке (3,2);
3) (3443(2)) Даны функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и $z=x-3y+\sqrt{3xy}$. Найти угол между градиентами этих функций в точке (3,4).
Ответы: 1) $\{10xy-3y^3, 5x^2-9xy^2+4y^3\}$; 2) $6i+4j$; 3) $\cos\alpha=-0.199$.

6. Найти производную функции:
1) (3451(2)) $z=arctg\,(xy)$ в точке $M(1,1)$ по направлению биссектрисы первого координатного угла;
2) (3451(3)) $z=x^2y^2-xy^3-3y-1$ в точке $A(2,1)$ по направлению к точке $O(0,0)$;
3) (3455(2)) $w=xyz$ в точке $A(5,1,2)$ по направлению к точке $B(9,4,14)$.

Ответы: 1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\sqrt{5}$; 3) $98/13$.

Занятие 4. Коллоквиум по теме «Функции многих переменных»

Занятие 5. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование

Аудиторное задание

Пользуясь основной таблицей интегралов и простейшими правилами интегрирования, найти интегралы.

1) (1678) $\int \frac{dx}{x^2}$; 2) (1685) $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$;

3) (1686) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$; 4) (1698) $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$;

5) (1700) $\int \frac{(1+x)^2\,dx}{x(1+x^2)}$; 6) (1707) $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$; 7) (1709) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx$;

8) (1713) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$; 9) (1717) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; 10) (1721) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$;

11) (1723) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; 12) (1731) $\int \sin(2x-3)\,dx$; 13) (1738) $\int \frac{dx}{2x-1}$;

14) (1745) $\int ctg\,x\,dx$; 15) (1749) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; 16) (1755) $\int e^{-3x+1}\,dx$;

17) (1759) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$; 18) (1762) $\int \frac{dx}{2x^2+9}$; 19) (1773) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

20) (1786) $\int \frac{x+2}{2x-1}dx$; 21) (1803) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$; 22) (1808) $\int \cos^2 x\,dx$.

Ответы: 1) $C-\frac{1}{x}$; 2) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$; 3) $C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|$;

4) $x-\sin x+C$; 5) $\ln|x|+2\,arctg\,x+C$; 6) $C-\frac{1}{8(2x-3)^4}$;

7) $C-\frac{5}{33}(8-3x)^{11/5}$; 8) $C-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}$; 9) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(x^4+1\right)^2}+C$;

10) $3\sqrt[3]{\sin x}+C$; 11) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+C$; 12) $C-\frac{1}{2}\cos(2x-3)$;

13) $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$; 14) $\ln|\sin x|+C$; 15) $\ln|\ln x|+C$; 16) $C-\frac{e^{1-3x}}{3}$;

17) $\frac{1}{5}\arcsin 5x+C$; 18) $\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}}{3}x+C$; 19) $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$;

20) $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\ln|2x-1|+C$; 21) $\frac{1}{4}arctg\frac{2x+1}{2}+C$; 22) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$.

Домашнее задание

Пользуясь основной таблицей интегралов и простейшими правилами интегрирования, найти интегралы:

1) (1676) $\int\sqrt{x}\,dx$; 2) (1689) $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$; 3) (1695) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

4) (1699) $\int\frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}dx$; 5) (1706) $\int(x+1)^{15}\,dx$;

6) (1710) $\int\sqrt{8-2x}\,dx$; 7) (1712) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$; 8) (1716) $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{4+x^5}}$;

9) (1732) $\int\cos(1-2x)\,dx$; 10) (1740) $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$; 11) (1747) $\int ctg(2x+1)\,dx$;

12) (1761) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 13) (1775) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$; 14) (1784) $\int\frac{3+x}{3-x}dx$;

15) (1801) $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$; 16) (1809) $\int\sin^2 x\,dx$.

Ответы: 1) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$; 2) $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C$; 3) $C-ctg\,x-tg\,x$;

4) $arctg\,x-\frac{1}{x}+C$; 5) $\frac{(x+1)^{16}}{16}+C$; 6) $C-\frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$;

7) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$; 8) $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5}+C$; 9) $C-\frac{1}{2}\sin(1-2x)$;

10) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; 11) $\frac{1}{2}\ln|\sin(2x+1)|+C$; 12) $\arcsin\frac{x}{2}+C$;

13) $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 14) $C-x-6\ln|3-x|$;

15) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$; 16) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$.

Занятие 6. Интегрирование по частям. Замена переменной

Аудиторное задание

1. Интегрирование по частям:

1) (1832) $\int x\sin 2x\,dx$; 2) (1839) $\int arctg\sqrt{x}\,dx$; 3) (1846) $\int \ln(x^2+1)\,dx$;

4) (1850) $\int x^2e^{-x}dx$; 5) (1860) $\int e^x\sin x\,dx$; 6) (1866) $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

Ответы: 1) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C$; 2) $x\,arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}+C$;

3) $x\ln(x^2+1)-2x+2arctg\,x+C$; 4) $C-e^{-x}(2+2x+x^2)$;

5) $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$; 6) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$,

(Положить $u=\sqrt{a^2+x^2}$) .

2. Замена переменной:

1) (1869) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ (подстановка $x+1=z^2$); 2) (1884) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

3) (1890) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ (подстановка $x=\frac{1}{z}$ или $x=a\,tg\,z$);

4) (1905) $\int e^{\sqrt{x}}dx$; 5) (1937) $\int x\sqrt{a+x}\,dx$.

Ответы: 1) $2\left[\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right]+C$; 2) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$;

3) $C-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$; 4) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$; 5) $\frac{2}{15}(3x-2a)\sqrt{(a+x)^3}+C$.

Домашнее задание

1. Интегрирование по частям:

1) (1835) $\int x3^x\,dx$; 2) (1837) $\int x\,arctg\,x\,dx$;

3) (1842) $\int x\cos^2 x\,dx$; 4) (1855) $\int\ln^2 x\,dx$.

Ответы: 1) $\dfrac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$; 2) $\dfrac{x^2+1}{2} arctg\, x-\dfrac{x}{2}+C$;

3) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{4}x\sin 2x+\dfrac{1}{8}\cos 2x+C$; 4) $x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C$.

2. Замена переменной:

1) (1872) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (подстановка $x+1=z^2$);

2) (1892) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ (подстановка $x=\dfrac{1}{z}$ или $x=\dfrac{a}{\cos z}$) ;

3) (1906) $\displaystyle\int\sin\sqrt[3]{x}\,dx$; 4) (1936) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}}$.

Ответы: 1) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$; 2) $C-\dfrac{1}{a}\arcsin\dfrac{a}{|x|}$;

3) $3\left[\left(2-\sqrt[3]{x^2}\right)\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}\right]+C$;

4) $x\sqrt{1+2x}-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C$.

Занятие 7. Интегрирование дробно-рациональных функций

Аудиторное задание

1. Знаменатель имеет только действительные различные корни:

1) (2014) $\displaystyle\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$; 2) (2016) $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

Ответы: 1) $\ln\left|\dfrac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$; 2) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\dfrac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

2. Знаменатель имеет только действительные корни; некоторые корни – кратные:

(2022) $\displaystyle\int\frac{(x^2-3x+2)\,dx}{x(x^2+2x+1)}$.

Ответ: $\ln\left|\dfrac{x^2}{x+1}\right|+\dfrac{6}{x+1}+C$.

3. Знаменатель имеет комплексные различные корни:

1) (2038) $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$; 2) (2040) $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$.

Ответы: 1) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

2) $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-arctg\,x+C$.

Домашнее задание

1. Знаменатель имеет только действительные различные корни:

(2017) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$.

Ответ: $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$.

2. Знаменатель имеет только действительные корни; некоторые корни – кратные:

(2025) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.

Ответ: $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$.

3. Знаменатель имеет комплексные различные корни:

1) (2036) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; 2) (2037) $\int \frac{dx}{1+x^3}$; 3) (2043) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

Ответы: 1) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$; 2) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

3) $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2(x+1)}+C$.

Занятие 8. Интегрирование тригонометрических функций

Аудиторное задание

1. Найти интегралы, используя формулы тригонометрии для преобразования подынтегрального выражения.

1) (1817) $\int \cos(2x)\cos(3x)\,dx$; 2) (1829) $\int \sin^4 x\,dx$.

Ответы: 1) $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C$; 2) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$.

2. Найти интегралы.

1) (2090) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$; 2) (2094) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sin^3 x}$;

3) (2095) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$; 4) (2100) $\int tg^5 x\,dx$; 5) (2116) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$;

6) (2117) $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$; 7) (2121) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+tg^2 x}$.

Ответы: 1) $\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x-5)+C$; 2) $\frac{1}{2}(tg^2 x-ctg^2 x)+2\ln|tg\,x|+C$;

3) $\frac{(tg^2 x-1)(tg^4 x+10tg^2 x+1)}{3tg^3 x}+C$; 4) $\frac{1}{4}tg^4 x-\frac{1}{2}tg^2 x-\ln|\cos x|+C$;

5) $\frac{1}{2-tg\frac{x}{2}}+C$; 6) $\frac{1}{3}arctg(3tg\,x)+C$; 7) $C-\frac{1}{2}\left[ctg\,x+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tg\,x}{\sqrt{2}}\right)\right]$.

Домашнее задание

1. Найти интегралы, используя формулы тригонометрии для преобразования подынтегрального выражения:

1) (1818) $\int \sin(2x)\sin(5x)\,dx$; 2) (1826) $\int \cos^3 x\,dx$.

Ответы: 1) $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C$; 2) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

2. Найти интегралы:

1) (2091) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$; 2) (2092) $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$;

3) (2093) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$; 4) (2098) $\int \cos^6 x\,dx$;

5) (2110) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$; 6) (2118) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Ответы: 1) $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$; 2) $\ln|tg\,x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$;

3) $tg\,x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{3}{2}x+C$; 4) $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\sin 2x(\cos^4 x+\frac{5}{4}\cos^2 x+\frac{15}{8})+C$;

5) $\frac{1}{2}arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right)+C$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}tg\,x\right)+C$.

Занятие 9. Интегрирование иррациональных функций

Аудиторное задание

Найти интегралы:

1) (1882) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx$; 2) (2068) $\int\frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$;

3) (2070) $\int\frac{x\,dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}$; 4) (1893) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$;

5) (1894) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$; 6) (1897) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$;

7) (1900) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$; 8) (1902) $\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x^2}$

Ответы: 1) $\frac{6}{5}\left[\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right]+C$;

2) $\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C$;

3) $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{3/2}-\frac{1}{8}(x+1)^{4/3}+\frac{1}{7}(x+1)^{7/6}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{5/6}-\frac{1}{4}(x+1)^{2/3}\right]$+C;

4) $C-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$; 5) $C-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x$; 6) $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C$;

7) $\frac{x}{4}\left(x^2-2\right)\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C$; 8) $\arccos\frac{1}{|x|}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$.

Домашнее задание

Найти интегралы:

1) (1879) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$ (подстановка $x=z^6$);

2) (1881) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 3) (1898) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

4) (2073) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

Ответы:

1) $x+\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$;

2) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$; 3) $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+C$;

4) $6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left[\frac{(1+x)^2}{16}-\frac{1+x}{5}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}+\frac{1}{4}\right]+C$.

Контрольная работа «Неопределенный интеграл» и коллоквиум «Неопределенный интеграл» во внеаудиторное время.

Занятие 10. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной. Вычисление площади

Аудиторное задание

1. Вычислить интегралы:

1) (2233) $\int_{2}^{-13}\frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$; 2) (2237) $\int_{0}^{1}\left(e^x-1\right)^4 e^x dx$;

3) (2240) $\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$; 4) (2242) $\int_{1}^{2}\frac{e^{1/x}dx}{x^2}$; 5) (2249) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x+x^2}$;

6) (2250) $\int_{-0.5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$; 7) (2255) $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4}\frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$;

8) (2261) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; 9) (2275) $\int_{4}^{9}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$; 10) (2277) $\int_{3}^{8}\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$;

Ответы: 1) $-5(\sqrt[5]{16}-1)$; 2) $0.2(e-1)^5$; 3) $\pi/2$; 4) $e-\sqrt{e}$; 5) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$;

6) $\frac{\pi}{6}$; 7) $-0.083...$; 8) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; 9) $7+2\ln 2$; 10) $\frac{32}{3}$.

2. Площадь плоской фигуры:

1) (2461) Окружность $x^2+y^2=8$ разделена параболой $y=\frac{x^2}{2}$ на две части. Найти площади обеих частей.

2) (2467) Вычислить площадь фигуры, заключенной между линией $y=\frac{1}{1+x^2}$ и параболой $y=\frac{x^2}{2}$.

3) (2496) Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=a\sin 2\varphi$, $a>0$ (двухлепестковая роза).

Ответы: 1) $2\pi+\frac{4}{3}$ и $6\pi-\frac{4}{3}$; 2) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{\pi a^2}{4}$.

Домашнее задание

1. Вычислить интегралы:

1) (2232) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$; 2) (2239) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$;

3) (2244) $\int\limits_{1}^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 4) (2260) $\int\limits_{0}^{\pi/2}x\cos x\,dx$; 5) (2264) $\int\limits_{0}^{e-1}\ln(x+1)\,dx$;

6) (2278) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$; 7) (2285) $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$.

Ответы: 1) $\frac{7}{72}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 2; 4) $\frac{\pi}{2}-1$; 5) 1; 6) $\frac{5}{3}-2\ln 2$; 7) $\frac{8}{15}$.

2. Площадь фигуры:

1) (2455) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x+1$ и $x-y-1=0$.

2) (2458) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

3) (2491) Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t\ \ (a > 0)$.

Ответы: 1) $\dfrac{16}{3}$; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{3\pi a^2}{8}$.

Занятие 11. Длина дуги кривой. Объем и площадь поверхности тела вращения

Аудиторное задание

1. Длина линии:

1) (2522) Найти длину дуги линии $y = \ln(1 - x^2)$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

2) (2546) Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$.

Ответы: 1) $\ln 3 - \dfrac{1}{2}$; 2) $8a$.

2. Объем тела вращения:

1) (2555) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением параболы $y^2 = 4x$ вокруг своей оси (параболоид вращения), и плоскостью, перпендикулярной к его оси и отстоящей от вершины параболы на расстояние, равное единице.

2) (2561) Фигура, ограниченная дугами парабол $y = x^2$ и $y^2 = x$, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем тела, которое при этом получается.

3) (2564) Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс, вокруг оси ординат.

4) (2568) Одна арка циклоиды $x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, вращается вокруг своего основания. Вычислить объем тела, ограниченного полученной поверхностью.

Ответы: 1) 2π ; 2) $\dfrac{3\pi}{10}$; 3) $\dfrac{8\pi}{3}$; 4) $5\pi^2 a^3$.

3. Площадь поверхности вращения:

1) (2594) Найти площадь поверхности, образованной вращением параболы $y^2 = 4ax$ вокруг оси абсцисс от вершины до точки с абсциссой $x = 3a$, $a > 0$.

2) (2603) Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t$, $a > 0$, вокруг оси абсцисс.

Ответы: 1) $\frac{56}{3}\pi a^2$; 2) $\frac{12}{5}\pi a^2$.

Домашнее задание

1. Длина линии:
1) (2521) Найти длину дуги линии $y = \ln x$ (от $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$).
2) (2543) Найти длину дуги архимедовой спирали $\rho = a\varphi$ от начала до конца первого витка.
Ответы: 1) $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; 2) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

2. Объем тела вращения:
1) (2558) Фигура, ограниченная гиперболой $x^2 - y^2 = a^2$ и прямой $x = a + h$ $(a > 0, h > 0)$, вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела вращения.
2) (2560) Цепная линия $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ вращается вокруг оси абсцисс. При этом получается поверхность, называемая катеноидом. Найти объем тела, ограниченного катеноидом и двумя плоскостями, отстоящими от начала на a и b $(b > a > 0)$ единиц и перпендикулярными к оси абсцисс.
3) (2570) Найти объем тела, полученного при вращении астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, вокруг своей оси симметрии.
Ответы: 1) $\frac{\pi h^2}{3}(3a + h)$; 2) $\frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2b} - e^{-2b}}{2} - \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{2} + 2(b - a)\right]$;
3) $\frac{32}{105}\pi a^3$.

3. Площадь поверхности вращения:
1) (2595) Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кубической параболы $3y - x^3 = 0$ вокруг оси абсцисс (от $x_1 = 0$ до $x_2 = a$, $a > 0$).
2) (2604) Арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ вращается вокруг своей оси симметрии. Найти площадь, получающейся при этом поверхности.
Ответы: 1) $\frac{\pi}{9}\left(\sqrt{1 + a^4} - 1\right)$; 2) $8\pi a^2\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

Занятие 12. Двойной интеграл. Перемена порядка интегрирования

Аудиторное задание

1. Вычислить двойной интеграл:

(3478) $\iint\limits_D e^{x+y} dx\,dy$, $D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

Ответ: $(e-1)^2$.

2. Найти пределы двукратного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ при данных (конечных) областях интегрирования D:

1) (3486) Треугольник со сторонами $x=0, y=0, x+y=2$;

2) (3488) $x+y \le 1, x-y \le 1, \quad x \ge 0$;

3) (3491) $(x-2)^2 + (y-3)^2 \le 4$;

4) (3495) $y-2x \le 0, 2y-x \ge 0, xy \le 2$.

3. Изменить порядок интегрирования.

1) (3500) $\int\limits_0^r dx \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)\,dy$; 2) (3503) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy$;

3) (3504(2)) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{(3-x)/2} f(x,y)\,dy$.

Домашнее задание

1. Вычислить двойной интеграл:

(3479) $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{1+y^2} dx\,dy$, $D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

Ответ: $\pi/12$.

2. Найти пределы двукратного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ при данных (конечных) областях интегрирования D:

1) (3487) $x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0$;

2) (3492) D ограничена параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$;

3) (3493) Треугольник со сторонами $y=x, \quad y=2x, \quad x+y=6$.

3. Изменить порядок интегрирования.

1) (3498) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$; 2) (3502) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)\,dy$;

3) (3504(1)) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy$.

Занятие 13. Вычисление двойных интегралов. Двойной интеграл в полярной системе координат

Аудиторное задание

1. Вычислить двойной интеграл:

(3509) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, $D-$ область, ограниченная прямыми $x=2$, $y=x$ и гиперболой $xy=1$.

Ответ: $9/4$.

2. Перейти в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ к полярным координатам ρ и φ $(x=\rho\cos\varphi, \ y=\rho\sin\varphi)$, и расставить пределы интегрирования.

1) (3525(3)) $D-$ круг: $x^2+y^2 \le by, b>0$;

2) (3529) $D-$ меньший из двух сегментов, на которые прямая $x+y=2$ рассекает круг $x^2+y^2 \le 4$;

3) (3530) $D-$ внутренняя часть правой петли лемнискаты Бернулли $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$, $a>0$.

3. Преобразовать двойные интегралы к полярным координатам:

1) (3533) $\int\limits_{R/2}^{2R} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)dx$; 2) (3534) $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)dy$.

4. Вычислить двойной интеграл с помощью перехода к полярным координатам:

(3537) $\iint\limits_{D} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy$, где область D определяется неравенствами $x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

Ответ: $\pi(\pi-2)/8$.

Домашнее задание

1. Вычислить двойной интеграл:

(3510) $\iint\limits_{D} \cos(x+y)\, dx\, dy$, $D-$ область, ограниченная прямыми $x=0,\ y=\pi$ и $y=x$.

Ответ: -2 .

2. Перейти в двойном интеграле $\iint\limits_{D} f(x,y)dx\, dy$ к полярным координатам ρ и φ $(x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi)$, и расставить пределы интегрирования:

1) (3525(2)) $D-$ круг: $x^2+y^2 \le ax \quad ,a>0$.

2) (3527) $D-$ область, являющаяся общей частью двух кругов $x^2+y^2 \le ax$ и $x^2+y^2 \le by \quad ,a>0, b>0$.

3) (3528) $D-$ область, ограниченная прямыми $y=x,\ y=0$ и $x=1$.

3. Преобразовать двойной интеграл к полярным координатам:

(3532) $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$.

4. Вычислить двойной интеграл с помощью перехода к полярным координатам:

(3539) $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$, где $D-$ круг $x^2 + y^2 \le Rx$.

Ответ: $\frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

Занятие 14. Применение двойных интегралов. Тройной интеграл

Аудиторное задание

1. Найти двойным интегрированием площади указанных областей:
1) (3598) Области, ограниченной прямыми $y = x,\ y = 5x,\ x = 1$.
2) (3601) Области, ограниченной параболами $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x}$ и прямой $x = 4$.
Ответы: 1) 2 ; 2) $16/3$.

2. Найти двойным интегрированием объемы тел, ограниченных данными поверхностями:
1) (3559) Плоскостями координат, плоскостями $x = 4$, $y = 4$ и параболоидом вращения $z = x^2 + y^2 + 1$.
2) (3565) Цилиндрами $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x}$ и плоскостями $z = 0$, $x + z = 6$.
Ответы: 1) $186\frac{2}{3}$; 2) $\frac{48}{5}\sqrt{6}$.
3. Площадь поверхности.
(3626) Вычислить площадь той части плоскости $6x + 3y + 2z = 12$, которая заключена в первом октанте.
Ответ: 14 .

4. Вычислить тройные интегралы:
1) (3520) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3 y^3 z\,dz$; 2) (3522) $\iiint\limits_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{(x + y + z + 1)^3}$, $\Omega -$ область, ограниченная плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0,\ x + y + z = 1$.
Ответы: 1) $a^{12}/144$; 2) $\frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)$.

Домашнее задание

1. Найти двойным интегрированием площади указанных областей:
1) (3597) Области, ограниченной прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y=1$.

2) (3600) Области, заключенной между параболой $y^2=\frac{b^2}{a}x$ и прямой $y=\frac{b}{a}x$ $,a>0, b>0$.

Ответы: 1) $1/2$; 2) $ab/6$.

2. Найти двойным интегрированием объемы тел, ограниченных данными поверхностями:
1) (3564) Параболоидом вращения $z=x^2+y^2$ и плоскостями $z=0$, $y=1,\ y=2x,\ y=6-x$.

2) (3567) Цилиндром $z=9-y^2$, координатными плоскостями и плоскостью $3x+4y=12$ $(y\ge 0)$.

Ответы: 1) $78\frac{15}{32}$; 2) 45 .

3. Площадь поверхности.
(3634) Части $2z=x^2+y^2$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=1$.
Ответ: $\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$.

4. Вычислить тройные интегралы:
1) (3518) $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^b dy\int\limits_0^c (x+y+z)dz$; 2) (3524) $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz$,
$\Omega-$ область, ограниченная цилиндром $y=\sqrt{x}$ и плоскостями $y=0,\ z=0,\ x+z=\frac{\pi}{2}$.
Ответы: 1) $abc(a+b+c)/2$; 2) $\pi^2/16-1/2$.

Занятие 15. Криволинейные интегралы по координатам и длине

Аудиторное задание

1. Вычислить криволинейные интегралы:

1) (3770) $\int\limits_L \frac{ds}{x-y}$, где $L-$ отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$, заключенный между точками $A(0,-2)$ и $B(4,0)$.

2) (3775) $\int\limits_L \sqrt{2y}\,ds$, где $L-$ первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $a>0$.

3) (3780) $\int\limits_L \frac{z^2ds}{x^2+y^2}$, где $L-$ первый виток винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t,\quad z=at$, $a>0$.

4) (3806) $\int\limits_L x\,dy$, где $L-$ контур треугольника, образованного осями координат и прямой $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, в положительном направлении (т.е. против движения часовой стрелки).

5) (3809) $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dy$, где $L-$ контур четырехугольника с вершинами (указанными в порядке обхода) в точках $A(0,0), B(2,0), C(4,4)$ и $D(0,4)$.

6) (3814) $\int\limits_L y\,dx-x\,dy$, где $L-$ эллипс $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$, $a>0, b>0$, пробегаемый в положительном направлении.

Ответы: 1) $\sqrt{5}\ln 2$; 2) $4\pi a\sqrt{a}$; 3) $8\pi a^3\sqrt{2}/3$; 4) 3 ; 5) $37\frac{1}{3}$; 6) $-2\pi ab$.

2. (3824) Вычислить двумя способами интеграл $\int\limits_L (1-x^2)y\,dx+x(1+y^2)dy$, если контуром интегрирования L служит окружность $x^2+y^2=R^2$:
1) непосредственно; 2) с помощью формулы Грина.
Ответ: $\pi R^4/2$.

3. Проверить, что интеграл, взятый по замкнутому контуру, равен нулю

независимо от вида функции, входящей в подынтегральное выражение.

(3832) $\int\limits_L f(x,y)(y\,dx + x\,dy)$.

Домашнее задание

1. Вычислить криволинейные интегралы:

1) (3771) $\int\limits_L xy\,ds$, где $L-$ контур прямоугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$, $D(0,2)$.

2) (3773) $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^n ds$, где $L-$ окружность $x = a\cos t,\quad y = a\sin t$.

3) (3782) $\int\limits_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)ds$, где $L-$ первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t,\quad y = t\sin t,\quad z = t$.

4) (3808) $\int\limits_L \left(x^2-y^2\right)dx$, где $L-$ дуга параболы $y = x^2$ от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$.

5) (3813) $\int\limits_L y\,dx + x\,dy$, где $L-$ четверть окружности $x = R\cos t,\quad y = R\sin t$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

6) (3815) $\int\limits_L \dfrac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2}$, где $L-$ полуокружность $x = a\cos t, y = a\sin t$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

Ответы: 1) 24 ; 2) $2\pi a^{2n+1}$; 3) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left[\left(1+2\pi^2\right)^{3/2}-1\right]$; 4) $-56/15$; 5) 0 ; 6) $-4a/3$.

2. (3825(2)) Вычислить $\int\limits_L (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy$, где $L-$ окружность $x^2+y^2 = ax$. Интегрирование ведется в положительном направлении. Вычислить двумя способами: 1) непосредственно; 2) с помощью формулы Грина.

Ответ: $-\pi a^3/8$.

3. Проверить, что интеграл, взятый по замкнутому контуру, равен нулю независимо от вида функции, входящей в подынтегральное выражение.

(3833) $\int\limits_L f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$.

Занятие 16. Защита РГР «Определенный интеграл и его приложения. Двойные интегралы. Криволинейные интегралы».

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебн. пособ. – 22-е изд., перераб. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2001. – 432 с.

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ, НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ, КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задания по курсу высшей математики для практических занятий студентам 1 курса дневного отделения (бакалавриат), направлений подготовки 051000 – Профессиональное обучение, 080200 – Менеджмент, 190100 – Наземные транспортно-технологические комплексы, 190700 – Технология транспортных процессов, 230400 – Информационные системы и технологии, 270800 – Строительство, 280700 – Техносферная безопасность

Составители: Лабуткин А.Г., Деревенский В.П.