

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Казанский государственный архитектурно-строительный  
УНИВЕРСИТЕТ**

**Кафедра высшей математики**

**Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.  
Вычисление пределов. Производная и ее приложения.  
Функции многих переменных.**

Варианты контрольных работ № 1, 2  
для студентов I курса заочной формы обучения направления  
подготовки 08.03.01 – Строительство.

Казань - 2016

УДК 517  
ББК 22.1  
Л12

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Вычисление пределов. Производная и ее приложения. Функции многих переменных. Варианты контрольных работ для студентов I курса заочной формы обучения направления подготовки 08.03.01 – Строительство. Казанский государственный архитектурно-строительный университет. Сост: А.Г.Лабуткин.– Казань, 2016 . – 21 с.

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2016 г.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА N 1.

Последняя цифра номера примера совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки. Значение параметра  $m$  определяются соответственно как вторая цифра справа. Если данная цифра равна нулю, то  $m = 1$ . Например, шифр - 1113103, тогда  $m = 1$ . Значение параметра  $n$  определяется как последняя цифра текущего года.

### Задание № 1.1.

- 1 - 10. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Найти:
- 1) длину ребра  $A_1A_2$ , 2) угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$ ,
  - 3) угол между ребром  $A_1A_4$  и гранью  $A_1A_2A_3$ , 4) площадь грани  $A_1A_2A_3$ ,
  - 5) объем пирамиды, 6) уравнение прямой  $A_1A_2$ ,
  - 7) уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$ , 8) уравнение высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ .

1	$A_1(m, 2, 5)$	$A_2(n, 7, 2)$	$A_3(0, 2, 7)$	$A_4(1, 5, 0)$
2	$A_1(4, m, 10)$	$A_2(n, 10, 2)$	$A_3(2, 8, 4)$	$A_4(9, 6, 4)$
3	$A_1(m, 5, 6)$	$A_2(n, 2, -1)$	$A_3(-1, 4, 5)$	$A_4(-2, 3, 5)$
4	$A_1(4, m, 6)$	$A_2(n, 9, 4)$	$A_3(5, 10, 3)$	$A_4(3, 1, 3)$
5	$A_1(10, 6, m)$	$A_2(-2, n, 2)$	$A_3(1, -3, 4)$	$A_4(2, -3, 2)$
6	$A_1(6, -3, m)$	$A_2(7, n, -7)$	$A_3(4, -1, 4)$	$A_4(4, -3, -2)$
7	$A_1(m, 8, 0)$	$A_2(-2, 2, n)$	$A_3(0, 4, -4)$	$A_4(-2, 4, -1)$
8	$A_1(2, m, 2)$	$A_2(-2, 2, 7)$	$A_3(2, -2, 5)$	$A_4(-1, -2, 5)$
9	$A_1(6, m, 6)$	$A_2(-3, n, 7)$	$A_3(3, -1, 6)$	$A_4(0, -1, 2)$
10	$A_1(-1, 0, m)$	$A_2(n, 3, -4)$	$A_3(-2, 1, -3)$	$A_4(-2, 4, -3)$

### Задание № 1.2.

Решить задачу в соответствии с вариантом.

1. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от начала координат и от точки  $A(m+1, n)$  относятся как  $2 : 1$ .
2. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от точки  $A(2, m-4)$  и от прямой  $(n+1)x + m = 0$  относятся как  $1 : \sqrt{m+1}$ .
3. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой до точки  $A(-1, n-5)$  и до прямой  $x = -m-2$  относятся как  $5 : 4$ .
4. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки  $A(m-5, 0)$ , чем от точки  $B(n+5, 0)$ .
5. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки  $A(2, n-5)$  и от прямой  $(m+1)x + n = 0$  относятся как  $4 : 5$ .

6. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой находится от точки  $A(0, n + 5)$  на расстоянии вдвое меньшем, чем от точки  $B(0, m - 5)$ .
7. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноотстоит от точки  $A(m, n - 5)$  и прямой  $y = m + 5$ .
8. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноотстоит от прямой  $y = -m$  и от окружности  $x^2 + y^2 = 2(n + 1)x$ .
9. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой отстоит от точки  $A(-m - 1, n - 5)$  втрое дальше, чем от начала координат.
10. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноотстоит от прямой  $y = -n$  и от окружности  $x^2 + y^2 = 2(m + 1)y$ .

### Задание № 1.3.

Дана система линейных алгебраических уравнений. Доказать ее совместность и решить методом Гаусса .

$$1. \begin{cases} mx_1 + 2x_2 + x_3 = 5 + n \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + (m - 1)x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} mx_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 + n \\ 2x_1 - (m - 6)x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} mx_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 + n \\ 2x_1 + (m - 2)x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} mx_1 + x_2 - x_3 = 1 + n \\ 8x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + (m - 7)x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} mx_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 + n \\ 2x_1 + (m - 3)x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} mx_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3 + n \\ 3x_1 - (m-8)x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} mx_1 + x_2 + 2x_3 = -1 + n \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 - (m-4)x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 7x_1 + (m+9)x_2 = 31 + n \\ 4x_1 + (m+9)x_3 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} mx_1 - x_2 - x_3 = 4 + n \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + (m-5)x_3 = 11 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} (m+1)x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 + n \\ 5x_1 + (m-2)x_2 + 2x_3 = 20 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

#### Задание № 1.4.

Привести к каноническому виду уравнения линий второго порядка. Сделать чертежи.

1	$mx^2 + 2y^2 = 2$	$\frac{x^2}{4} - \frac{my^2}{2} = 3$	$2x^2 - 4mx + 2y + 1 = 0$
2	$\frac{x^2}{3} + \frac{my^2}{2} = 3,$	$y^2 - \frac{mx^2}{4} = 2$	$x^2 + 2mx - 3y - 3 = 0$
3	$2mx^2 + 3y^2 = 1$	$2x^2 - \frac{my^2}{2} = 3$	$3x^2 - 30mx + y + 4 = 0$
4	$4mx^2 + y^2 = 2$	$2my^2 - x^2 = 1$	$2y^2 + 3mx + 4y + 4 = 0$
5	$mx^2 + 3y^2 = 3$	$\frac{x^2}{2} - my^2 = 2$	$y^2 - 2mx - 4y + 5 = 0$
6	$3mx^2 + \frac{y^2}{2} = 4$	$-x^2 + 2my^2 = 2$	$3x^2 - 18mx - y + 14 = 0$

7	$\frac{mx^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 2$	$x^2 - 3my^2 = 3$	$x^2 + 4mx + 3y - 6 = 0$
8	$4mx^2 + 5y^2 = 4$	$\frac{x^2}{4} - \frac{my^2}{3} = 2$	$x^2 + 8mx - 4y - 3 = 0$
9	$\frac{mx^2}{2} + y^2 = 3$	$2my^2 - 3x^2 = 4$	$3y^2 + 18my - 2x + 10 = 0$
10	$\frac{mx^2}{2} + y^2 = 2$	$\frac{x^2}{3} - \frac{my^2}{4} = 2$	$y^2 + 6mx + 6y - 11 = 0$

**Контрольная работа № 2.**  
**Вычисление пределов. Производная и её приложения.**  
**Функции многих переменных.**

Номер варианта соответствует двум последним цифрам номера зачетной книжки.

№	Номера заданий							№	Номера заданий						
00	5	47	66	87	133	157	181	01	26	59	67	96	122	168	201
02	16	45	63	89	130	162	219	03	40	42	73	94	126	160	200
04	6	53	71	105	121	170	175	05	5	52	68	82	115	167	182
06	39	45	73	86	117	143	215	07	3	44	62	99	127	153	238
08	10	55	75	94	134	160	187	09	17	43	65	99	124	148	232
10	22	49	69	107	119	167	173	11	20	57	63	86	114	170	180
12	34	41	76	94	115	148	220	13	34	52	76	110	138	167	226
14	18	55	79	94	137	144	182	15	4	48	80	108	123	141	180
16	15	44	66	102	120	155	213	17	37	41	71	104	137	147	199
18	31	45	61	83	121	165	229	19	18	57	72	85	123	160	188
20	2	43	64	91	131	146	231	21	31	52	71	96	124	145	206
22	18	51	68	90	115	160	199	23	16	48	79	83	116	150	203
24	32	54	65	90	138	156	184	25	28	47	70	93	137	142	179
26	10	57	73	82	115	155	203	27	5	51	66	95	111	145	185
28	4	54	69	84	128	164	197	29	34	56	68	104	118	165	216
30	16	55	64	98	114	166	174	31	38	54	66	102	112	153	229
32	7	58	69	88	117	165	234	33	26	59	63	88	120	164	172
34	37	59	69	92	117	168	187	35	26	41	79	84	126	165	176
36	25	49	79	86	131	162	219	37	8	59	64	88	132	168	177
38	12	52	68	97	120	157	224	39	3	55	78	101	135	144	176
40	7	49	69	90	114	167	222	41	5	50	69	91	134	156	233
42	1	59	73	94	136	168	205	43	35	44	73	105	114	148	223
44	11	42	79	92	135	159	182	45	35	44	70	95	131	142	178

№	Номера заданий							№	Номера заданий						
46	2	45	75	98	127	169	193	47	6	57	65	98	135	170	187
48	28	58	68	89	118	143	191	49	1	42	76	83	118	156	213
50	33	43	66	107	140	160	218	51	29	59	69	86	139	164	192
52	22	48	76	99	120	156	229	53	13	45	64	94	129	170	215
54	24	48	68	89	129	149	209	55	9	52	79	92	139	152	238
56	9	54	73	87	123	152	187	57	30	54	70	86	137	159	185
58	34	58	65	106	129	158	171	59	36	54	77	90	137	160	207
60	25	58	76	104	129	142	223	61	29	51	69	88	129	155	218
62	13	50	78	97	119	165	196	63	40	45	72	91	111	148	202
64	2	45	67	107	128	163	182	65	22	44	64	90	121	161	185
66	36	55	68	100	140	146	214	67	4	42	79	95	119	154	235
68	15	57	66	103	134	151	186	69	33	49	79	100	112	161	233
70	30	43	64	104	112	153	180	71	30	41	63	88	132	146	222
72	35	42	63	87	124	170	190	73	8	43	71	109	137	161	229
74	8	60	65	84	116	160	175	75	15	52	76	100	134	168	183
76	23	47	66	100	134	168	183	77	25	42	79	106	139	152	228
78	13	50	68	83	126	170	230	79	38	55	64	105	116	146	189
80	31	56	67	94	140	143	217	81	19	44	62	87	127	154	198
82	22	57	65	88	120	165	211	83	30	48	76	91	121	157	194
84	4	54	73	103	111	143	236	85	33	49	75	105	112	144	196
86	38	54	61	86	130	162	171	87	8	53	80	96	121	147	234
88	3	50	66	85	140	148	191	89	13	53	79	93	114	167	206
90	14	46	77	90	115	149	210	91	24	44	63	97	126	168	205
92	8	48	74	105	124	166	195	93	4	43	78	91	121	163	204
94	18	50	64	110	133	147	208	95	9	56	79	85	139	152	227
96	39	42	76	92	119	161	225	97	17	59	66	105	125	169	226
98	26	47	72	90	137	169	221	99	26	54	76	97	113	146	237

### Задание № 2.1

Вычислить пределы:

1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 2}{3x^3 - x^4}$	2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - 2x)^3}{2x(x^2 + 1) + 3x}$
3	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/3}(2x - 1)}{2\sqrt{x + 2} + 3x}$	4	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x^3}{(x^2 - 1)(x + 2)}$

5	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^3}{x^4 + 2x + 1}$	6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x(x+3)}{(x-1)(x+2)^2}$
7	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+5)}$	8	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x^2}{2 - 3x + x^2}$
9	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 1}{(x-1)x^2 + (3x+1)^3}$	10	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)^2}{4x^6 + x - 1}$
11	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x - x^2 + 1}$	12	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(x^2+3) - 1}{(x+1)^3 - 2x}$
13	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)(x^2+2)}{4x^3 + 2x^2 + 1}$	14	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^3}{x^2 + 2x^4 - 1}$
15	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^3}{3(x-2)(x+3)^2 - 1}$	16	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-3x^2)(x+1)}{2+3x^3}$
17	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2x^2}{5x^2 - 2x + 3}$	18	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2(3x-1)}{1 + x + (x-2)^3}$
19	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^2(2-x^2)}{3x^4 + 2}$	20	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x^4 - 1}{2x^4 - 3x^3}$
21	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$	22	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{17-x} - 4}$
23	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$	24	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - x - 20}$
25	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{10+x} - 3}{x + 1}$	26	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2}$
27	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{5-2x} - 3}$	28	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2}$
29	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{5-x} - 3}{4 + x}$	30	$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{7 - x}{2\sqrt{x-3} - 4}$
31	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$	32	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x - 1 - \sqrt{x+1}}$
33	$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 1}$	34	$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{3(\sqrt{x-4} - \sqrt{2})}$
35	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$	36	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{\sqrt{x+7} - 2}$
37	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{5-2x} - 3}{x^2 - 4}$	38	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{x^2 - 3x + 2}$



39	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{4+x}{x^2+5x+4}$	40	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1-3x}{x^2+2x}$
41	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{tgx} \cdot x}{\sqrt[3]{x^2} \sin 2x}$	42	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{tg(x^2)}$
43	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot \sin^3 x}{3x^2 tg 3x}$	44	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - \cos 2x}{x^2 \cdot \sin 3x}$
45	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot tg x}{\sqrt{\sin^3 3x}}$	46	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \sin^2 2x}{3x \cdot tg \frac{x}{3}}$
47	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos^2 5x}{\sin^3 x}$	48	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg^3 \frac{x}{2}}{\sin^2 x}$
49	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{(1 - \cos 4x)^{3/2}}$	50	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{2x \cdot \sin \frac{x}{2}}$
51	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot tg \frac{x}{2}}{\sin^2 2x \cdot \cos^2 3x}$	52	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot \sin 2x}{\cos 4x - 1}$
53	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin^2 x}{\sqrt[3]{(1 - \cos 3x)^2}}$	54	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sqrt[3]{x} \sin 4x}$
55	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sqrt{tg x - \sin x}}$	56	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot tg^2 3x}{\sin^3 5x}$
57	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg^2 x}{2x \cdot \sin 3x}$	58	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot tg 3x}{1 - \cos 3x}$
59	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$	60	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^3}{tg^3 x - \sin^3 x}$
61	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{5+x} \right)^{2-x}$	62	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{3x-1} \right)^{3x}$
63	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3+x}{4+x} \right)^{-\frac{x}{3}}$	64	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x+1} \right)^{2x}$
65	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x-1} \right)^{\frac{3x}{2}}$	66	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+5x}{3+5x} \right)^{1-x}$
67	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x^2}{3+4x^2} \right)^{-x^2}$	68	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5+2x}{2x-3} \right)^{1-2x}$

69	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{2+3x} \right)^{\frac{x+1}{2}}$	70	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5+x}{x-3} \right)^{2+x}$
71	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2+2}{3x^2} \right)^{-x}$	72	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+3} \right)^{2-x}$
73	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+7}{5x+1} \right)^{\frac{3x}{2}}$	74	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3-x}{5-x} \right)^{\frac{x-1}{2}}$
75	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+4x}{4x-3} \right)^{-3x}$	76	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5-x^2}{x^2+8} \right)^{\frac{3x^2}{2}}$
77	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3-2x}{2-2x} \right)^{2x-1}$	78	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+3x^2}{3x^2-4} \right)^{\frac{x^2}{2}}$
79	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{4x} \right)^{\frac{x+1}{2}}$	80	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2+3x^3}{1+3x^3} \right)^{\frac{x^3}{3}}$

### Задание 2.2

Найти производные данных функций.

81	$y = 2\sqrt{4x+5} - \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+1}}$	$y = (e^{-\sin x} + 1)^2$	$y = \ln \cos(2x-3)$
	$y = x^{x^2}$	$\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 3x$	
82	$y = x^2\sqrt{1+x^2}$	$y = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$y = \operatorname{arctg} e^{3x}$
	$y = x^{\frac{1}{x}}$	$y - x + \arcsin y = 0$	
83	$y = x\sqrt{1-x^3}$	$y = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \arcsin \sqrt{1-3x}$
	$y = x^{\ln x}$	$y \cos x = \sin(x+y)$	
84	$y = (1-x)\sqrt{1-2x+5x^2}$	$y = \frac{\sin x}{x \cos x}$	$y = \ln \operatorname{tg}(2x)$
	$y = x^{\sqrt{x}}$	$\frac{x}{y} = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$	

85	$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$	$y = \ln^2 \sin(3x)$
	$y = x^{\operatorname{arctg}(3x)}$	$e^{x+y} - 2xy = 0$	
86	$y = \frac{5}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}}$	$y = x \operatorname{tg}^3(x^2 - 1)$	$y = 3^{\operatorname{arctg}(2x)}$
	$y = x^{\sin^2 x}$	$y^2 x = \ln \frac{x}{y}$	
87	$y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$	$y = x \ln \cos(3x)$	$y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$
	$y = (x+x^2)^x$	$x^3 + y^3 = 4xy$	
88	$y = 2\sqrt{x^5 + 2x - \frac{3}{x}}$	$y = \ln^2 \frac{x}{\sin x}$	$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$
	$y = x^{\sin 4x}$	$x - y + \sin(2xy) = 0$	
89	$y = x\sqrt{x^2 - x + 1}$	$y = 2^x e^{-x}$	$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y = x^{-\cos x}$	$\ln(xy) = \operatorname{arctg} y$	
90	$y = (1-x)\sqrt[3]{x^3 + 1}$	$y = \operatorname{tg}^3 x + e^{x \sin x}$	$y = \frac{2x^2}{x+1}$
	$y = (\sin x)^{x^2}$	$x - y + e^y \operatorname{arctg} x = 0$	
91	$y = x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$	$y = e^{\sqrt{x \sin x}}$
	$y = (x+1)^{\cos^2 x}$	$x^3 + y^3 - \arcsin(2xy) = 0$	
92	$y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$y = x 3^{\operatorname{arctg} e^x}$	$y = \sin^4 \cos(3x)$
	$y = (\cos x)^{x^2}$	$\cos(xy) + e^{xy} = 1$	
93	$y = \frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = x \arcsin^2(3x)$	$y = 3^{x/\operatorname{tg} x}$
	$y = (\operatorname{ctg} 2x)^x$	$x - y = \sin^2(x - y)$	
94	$y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$	$y = \frac{\cos 3x}{\sin^2 3x}$	$y = x \ln(\sqrt{x} - \operatorname{tg} x)$
	$y = x^{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}$	$y = \operatorname{arctg}(3xy)$	
95	$y = \frac{x}{\sqrt{x^4 - 1}}$	$y = \operatorname{tg}^3 x - \frac{\sin 2x}{2\cos^2 x}$	$y = \ln^2 \cos(4x - 1)$
	$y = x^{e^{2x}}$	$x^2 - 2xy + 3y^2 = 0$	

96	$y = (x^2 + 1)\sqrt{1 - x^2}$	$y = \cos^2(\ln x) + \operatorname{ctg}^3(3x)$	$y = 2^{x \operatorname{arctg} x}$
	$y = x^{\operatorname{tg} x^2}$	$y^2 = x^2 + \ln \frac{y}{x}$	
97	$y = \sqrt[3]{2x - 1} \sin \sqrt{x}$	$y = \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}$	$y = 2^{x \operatorname{ctg} \frac{1}{x}}$
	$y = x^{2\sqrt{x}}$	$y = \ln^2(x - y)$	
98	$y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$	$y = \sqrt{x} 5^{\arcsin 2x}$	$y = x + \sqrt{1 + \sin^2 x}$
	$y = (\sqrt{x})^x$	$y = x^2 y - xy^2$	
99	$y = \sqrt{3x} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}$	$y = e^{\operatorname{tg}^2 x} 2^{1/x}$	$y = \ln^2 \cos \sqrt{x}$
	$y = (\arcsin 2x)^{\sqrt{x}}$	$y = \sin^2(xy)$	
100	$y = \sqrt{1 + x} e^{2x}$	$y = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$	$y = \sin^3 x \cdot (\sin x^3)$
	$y = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$	$e^{xy} = y^2$	
101	$y = \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{x}$	$y = (\sin^2 \sqrt{x}) \arcsin \sqrt{x}$	$y = (x^3 + 1)^{\operatorname{ctg} x}$
	$y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1 - e^{2x}}$	$y = x^{2^{xy}}$	
102	$y = x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x^2$	$y = \sqrt{x} \ln^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}$	$y = \sqrt[3]{1 + \cos 6x}$
	$y = \frac{1}{x^x}$	$y = e^{x+y}$	
103	$y = \frac{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}{x}$	$y = -\frac{2 \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{2}}$	$y = x \ln \arcsin x$
	$y = (x^2 + 1)^{2x}$	$x^y - y^x = 0$	
104	$y = (1 + 2x^5)\sqrt{1 + 3x}$	$y = \ln^2 \sqrt{\cos x}$	$y = 2^{x/\operatorname{arctg} x}$
	$y = x^{\arccos \sqrt{x}}$	$\ln y + x^3 = x^2 e^y$	
105	$y = \frac{1}{1 + x + x^2} + \sqrt{x^2 + x + 1}$	$y = \operatorname{arctg}^2(5x^2) + x$	$y = x 4^{\operatorname{ctg}^3 \frac{1}{x}}$
	$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	$x - y = \operatorname{tg}(xy)$	
106	$y = \sin^2(\cos x) + \cos(\sin^2 x)$	$y = x^4 \sqrt[3]{x^5 - 8}$	$y = e^{\arcsin \sqrt{x^2 - 1}}$
	$y = x^{\ln x}$	$xy^2 = \sin(x + y)$	

107	$y = \sqrt{2x - \sin 2x}$	$y = x \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$	$y = \frac{2}{x} \cdot e^{\cos x}$
	$y = (\ln x)^{\ln x}$	$e^x + e^y - 2^{xy} = 1$	
108	$y = x \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$	$y = \cos^3(2^x)$	$y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x}$
	$y = (x^2 - 1)^{x^2 - 1}$	$\operatorname{arctg}(xy) - e^{xy} + x = 0$	
109	$y = x \sqrt[3]{x^2 - 2x}$	$y = 2^{\cos x} \sqrt{\sin \frac{x}{2}}$	$y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+2x}}$
	$y = (2x)^{\cos x}$	$e^{x+2y} = y^2$	
110	$y = (1 - \sqrt{x}) \sqrt{1+x^2}$	$y = 2^{\sin^2 x} \left( x - \frac{1}{\cos x} \right)$	$y = 2 \ln^3 \operatorname{arctg} x$
	$y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$	$\sin(y - x^2) = y - x^2$	

### Задание 2.3

Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = f(x)$  на интервале  $[a; b]$ .

111.  $y = x^3 - 12x + 7$ ,  $[0; 3]$ ,      112.  $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$ ,  $[0; 2]$ ,
113.  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$ ,  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,      114.  $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$ ,  $[-3; 1]$ ,
115.  $y = x^3 - 3x + 1$ ,  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ ,      116.  $y = x^4 + 4x$ ,  $[-2; 2]$ ,
117.  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x$ ,  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,      118.  $y = 81x - x^4$ ,  $[-1; 4]$ ,
119.  $y = 3 - 2x^2$ ,  $[-1; 3]$ ,      120.  $y = x - \sin x$ ,  $[-\pi; \pi]$ ,
121.  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ ,  $[0; 2]$ ,      122.  $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ ,  $[-2; 1]$ ,
123.  $y = x^2 - \frac{x^4}{4}$ ,  $[-1; 1]$ ,      124.  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ ,  $[0; 2]$ ,
125.  $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ ,  $[0; 2]$ ,      126.  $y = x^4 - 2x^2 + 5$ ,  $[-2; 2]$ ,
127.  $y = x + 2\sqrt{x}$ ,  $[0; 4]$ ,      128.  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ ,  $[-1; 2]$ ,
129.  $y = x^3 - 3x^2 + 6x$ ,  $[-1; 1]$ ,      130.  $y = \sqrt{70 - x^2}$ ,  $[-6; 8]$ ,
131.  $y = (x-1)(x+1)$ ,  $[0; 4]$ ,      132.  $y = \sin 2x - x$ ,  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$$133. y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2, \quad [-2; 0],$$

$$134. y = \frac{1}{4}(1 - x^2)^2, \quad [-2; 0],$$

$$135. y = \frac{x^2}{1 + x^2}, \quad [-1; 1],$$

$$136. y = 2x^3 - 3x^2, \quad [0; 2],$$

$$137. y = 2x^3 - 6x^2 - 18x, \quad [-2; 0],$$

$$138. y = 2x^3 - 6x + 5, \quad \left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right],$$

$$139. y = x - \ln(x + 1), \quad \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right],$$

$$140. y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}, \quad [0; 1].$$

#### Задание 2.4

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию  $y = f(x)$  и, используя результаты исследования, построить её график.

$$141. y = 3 + 3x - x^3,$$

$$142. y = x^3 - 3x + 1,$$

$$143. y = \frac{x^3}{6} - x^2,$$

$$144. y = x^2(1 - x) - 2,$$

$$145. y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1,$$

$$146. y = x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1,$$

$$147. y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9,$$

$$148. y = x^4 - 5x^2 + 4,$$

$$149. y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x,$$

$$150. y = (2x - 1)^2 x,$$

$$151. y = x^3 - x^2,$$

$$152. y = 36x - 3x^2 - 2x^3,$$

$$153. y = (x + 1)(x + 2)^2$$

$$154. y = x^4 - 2x^2 + 3,$$

$$155. y = x^2 - x^3,$$

$$156. y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 3,$$

$$157. y = x^3 - 3x + 1,$$

$$158. y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,$$

$$159. y = x^3 - 3x^2 - 9x,$$

$$160. y = 3x^4 - 4x^3 + 2,$$

$$161. y = 4x - \frac{x^3}{3},$$

$$162. y = x(1 - x)^2,$$

$$163. y = x^3 + 3x^2 - 1,$$

$$164. y = x^3 - 12x - 3,$$

$$165. y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2,$$

$$166. y = x^3 - 3x - 3,$$

$$167. y = 3x^2 - x^3,$$

$$168. y = x(x + 1)(x + 2),$$

$$169. y = 9x + 3x^2 - x^3,$$

$$170. y = 2 + (x - 1)^3,$$

$$171. y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x},$$

$$172. y = \frac{x^2}{x + 1},$$

173.  $y = \frac{x^2}{x-1}$ ,
175.  $y = \frac{1}{x^2-1}$ ,
177.  $y = \frac{x-3}{7-x}$ ,
179.  $y = \frac{x}{x^2+1}$ ,
181.  $y = \frac{x^2+1}{x+3}$ ,
183.  $y = \frac{x^2}{x+4}$ ,
185.  $y = x + \frac{4}{x+2}$ ,
187.  $y = x + \frac{1}{x}$ ,
189.  $y = \frac{x^2-3}{x+2}$ ,
191.  $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ ,
193.  $y = \frac{x^2}{x-3}$ ,
195.  $y = \frac{x^2-3}{x-1}$ ,
197.  $y = \frac{x^2+8}{x+1}$ ,
199.  $y = \frac{x^2+5}{x+2}$ ,
201.  $y = x - \ln x$ ,
203.  $y = \ln(2x-1)$ ,
205.  $y = e^{-x}$ ,
207.  $y = x^2 \sqrt{x}$ ,
209.  $y = x e^x$ ,
211.  $y = e^{x^2}$ ,
213.  $y = \sqrt[3]{x^2}$ ,
174.  $y = \frac{3-x^2}{x+2}$ ,
176.  $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{x^2}$ ,
178.  $y = \frac{1}{2x} + 4x$ ,
180.  $y = \frac{x}{x^2-1}$ ,
182.  $y = \frac{x^2}{1-x}$ ,
184.  $y = \frac{x-1}{x+5}$ ,
186.  $y = 2x + \frac{1}{x^2}$ ,
188.  $y = x + \frac{9}{x}$ ,
190.  $y = \frac{x^2+4}{x}$ ,
192.  $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ ,
194.  $y = \frac{x^2-2}{x+1}$ ,
196.  $y = \frac{x^2+9}{x}$ ,
198.  $y = \frac{x+8}{x-1}$ ,
200.  $y = \frac{x^2+5}{x-2}$ ,
202.  $y = x \ln x$ ,
204.  $y = e^{2x-2}$ ,
206.  $y = x \sqrt{x}$ ,
208.  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,
210.  $y = x - 2 \ln x$ ,
212.  $y = 2x - \ln x$ ,
214.  $y = \sqrt[3]{x}$ ,

215.  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$

216.  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$

217.  $y = (x+3)^{3/2},$

218.  $y = \frac{x}{2} - \sqrt{x},$

219.  $y = 3\sqrt[3]{x} - x,$

220.  $y = x + e^{-x},$

221.  $y = x\sqrt[3]{x},$

222.  $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x},$

223.  $y = \operatorname{ctg} 2x,$

224.  $y = \operatorname{tg} 2x,$

225.  $y = \frac{x^2 - 1}{x},$

226.  $y = \frac{5-x}{x-1},$

227.  $y = \frac{x+1}{x+5},$

228.  $y = \frac{x^2}{x-5},$

229.  $y = \cos 3x,$

230.  $y = \sin 2x,$

231.  $y = x + \frac{5}{x},$

232.  $y = x^2 - \frac{1}{x},$

233.  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}},$

234.  $y = \frac{x^2 - 2}{x},$

235.  $y = \frac{x+3}{x-2},$

236.  $y = \frac{e^x}{x^2},$

237.  $y = \frac{e^x}{x-1},$

238.  $y = (x+1)e^x.$

### Задание 2.5

Последняя цифра номера примера совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки. Значение параметра  $m$  определяются соответственно как вторая цифра справа. Если данная цифра равна нулю, то  $m = 1$ . Например, шифр - 1113103, тогда  $m = 1$ .

1. Бревно длиной  $5 \times m$  метров имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны соответственно 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна и объем которой был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

2. Из углов квадратного листа картона размером  $m \times m$  дм<sup>2</sup> нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы согнув края листа, получить коробку наибольшей вместимости. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов?



3. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен  $t$  дм<sup>3</sup>, причем стороны оснований относились бы, как 1 : 2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была бы наименьшей?
4. Открытый чан имеет форму цилиндра. При данном объеме  $t$  каковы должны быть радиус основания и высота цилиндра, чтобы его поверхность была бы наименьшей?
5. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной  $t$  дм. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?
6. Полоса железа шириной  $t$  дм должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (сечение желоба имеет форму дуги кругового сегмента). Найти значение центрального угла, опирающегося на эту дугу, при котором вместимость желоба будет наибольшей.
7. Прямо над центром круговой площадки радиуса  $t \times 10$  метров нужно повесить фонарь. На какой высоте нужно это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которой обведена площадка. (Степень освещения некоторой площадки прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)
8. Груз весом  $t$ , лежащий на горизонтальной плоскости, должен быть сдвинут приложенной к нему силой  $F$ . Сила трения пропорциональна силе, прижимающей тело к плоскости, и направлена против сдвигающей силы. Коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен  $k$ . Под каким углом  $\varphi$  к горизонту надо приложить силу  $F$ , чтобы величина ее оказалась наименьшей? Определить наименьшую величину сдвигающей силы.
9. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом  $t$  м<sup>3</sup> так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.
10. Решеткой длиной  $t \times 20$  метров нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки.

## Задание 2.6

### Функции многих переменных.

Номер варианта совпадает с двумя последними цифрами номера зачетной книжки.

Таблица вариантов

№	Номера Заданий			№	Номера Заданий			№	Номера заданий			№	Номера Заданий		
00	1	43	73	25	16	30	62	50	10	43	76	75	12	39	68
01	9	30	82	26	10	48	84	51	5	50	80	76	2	32	75
02	18	52	59	27	4	41	72	52	7	44	67	77	8	46	80
03	2	48	67	28	23	36	61	53	15	50	67	78	9	28	58
04	14	43	57	29	12	39	79	54	9	28	58	79	16	53	59
05	19	31	65	30	20	37	55	55	12	53	82	80	15	49	64
06	21	50	69	31	22	32	54	56	6	46	66	81	21	43	57
07	11	34	60	32	14	42	67	57	25	47	61	82	15	26	72
08	12	29	63	33	15	42	78	58	19	40	78	83	19	28	67
09	21	27	62	34	21	33	71	59	23	34	84	84	4	46	72
10	16	27	84	35	16	29	71	60	3	47	83	85	13	53	60
11	5	35	85	36	17	39	55	61	23	28	76	86	20	36	84
12	8	32	60	37	4	42	69	62	7	53	70	87	5	28	83
13	14	46	75	38	11	36	74	63	12	53	69	88	2	39	84
14	25	28	79	39	22	30	63	64	13	51	66	89	17	49	71
15	19	29	81	40	16	51	65	65	4	46	61	90	21	39	81
16	14	45	68	41	5	45	56	66	14	41	68	91	23	37	76
17	15	42	84	42	18	48	57	67	11	31	66	92	6	53	68
18	3	32	59	43	3	35	55	68	4	50	75	93	6	51	63
19	18	33	84	44	5	48	83	69	1	33	65	94	1	28	59
20	15	34	65	45	19	37	56	70	16	49	58	95	13	49	69
21	11	48	60	46	3	49	78	71	7	28	78	96	7	44	72
22	7	27	59	47	7	36	57	72	5	53	79	97	22	35	65
23	14	45	76	48	21	31	75	73	17	27	59	98	12	52	81
24	11	27	67	49	10	51	61	74	14	46	69	99	7	41	79

Дана функция  $z = f(x, y)$ . Показать, что

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

1.  $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}; \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

2.  $z = ye^{\frac{x^2}{2y^2}}; \quad F = (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} - xyz.$

3.  $z = 2 \cos^2 \left( x - \frac{y}{2} \right); F = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$
4.  $z = e^{\frac{x}{y}}; F = y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}.$
5.  $z = \frac{x^2 y^2}{x+y}; F = x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial x}.$
6.  $z = \sin(x - 2y) + \cos(x + 2y); F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
7.  $z = e^{xy}; F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xy.$
8.  $z = \ln(x^2 + y^2); F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
9.  $z = \sin(x - 3y) + \ln(x + 3y); F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$
10.  $z = x(x + y) + y(\cos(x + y)); F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
11.  $z = \ln(x + e^{-y}); F = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
12.  $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}; F = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - zy^2.$
13.  $z = \sin(x + ay); F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
14.  $z = \frac{y^2}{3x} + xy; F = x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2.$
15.  $z = \frac{x}{y}; F = y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}.$
16.  $z = \frac{xy}{x-y}; F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{2}{x-y}.$
17.  $z = x - 3y + tg(x + 3y); F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
18.  $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy); F = x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2.$
19.  $z = \frac{x}{y}; F = x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}.$
20.  $z = x \ln(x + y) + xy + y^2; F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
21.  $z = x e^{\frac{y}{x}}; F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
22.  $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1); F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
23.  $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
24.  $z = \cos y + (y - x) \sin y; F = (x - y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}.$
25.  $z = x^y; F = y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x}.$

Дана функция  $z = f(x, y)$  и точка  $A(x_0; y_0)$ . Найти  $grad z$  в точке  $A$ .

- |  |   |
|--|---|
| 26. $z = 4x^2 + 3xy$ ; $A(2; 3)$ .                         | 27. $z = 2x^4 + x^2y^3$ ; $A(2; -1)$ .                    |
| 28. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$ ; $A(1; 3)$ .                   | 29. $z = \ln(5x^2 + 3y^2)$ ; $A(1; 1)$ .                  |
| 30. $z = x^3 + xy^2$ ; $A(1; 2)$ .                         | 31. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2$ ; $A(1; 1)$ .                   |
| 32. $z = 2x^2 + 4xy$ ; $A(3; 2)$ .                         | 33. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$ ; $A(1; 1)$ .                  |
| 34. $z = e^{x^2+y^2} + 2x$ ; $A(1; 2)$ .                   | 35. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$ ; $A(-1; 2)$ .                   |
| 36. $z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$ ; $A(-1; 2)$ . | 37. $z = \ln(3x^2 + 2y^2)$ ; $A(1; 2)$ .                  |
| 38. $z = \ln(2x^2 + 3y^2)$ ; $A(2; 1)$ .                   | 39. $z = 2x^2y^2 + 4xy^2$ ; $A(2; 2)$ .                   |
| 40. $z = 3x^2 + 5xy$ ; $A(2; 1)$ .                         | 41. $z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$ ; $A(1; 2)$ . |
| 42. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$ ; $A(2; 1)$ .                   | 43. $z = \ln(x^2 + 2y^2)$ ; $A(-2; 1)$ .                  |
| 44. $z = \ln(3x^2 + y^2)$ ; $A(1; 2)$ .                    | 45. $z = 3xy^2 + 2x^2y$ ; $A(2; 1)$ .                     |
| 46. $z = \arctg(xy^2)$ ; $A(2; 3)$ .                       | 47. $z = 2x^2 + xy + y^2$ ; $A(2; 2)$ .                   |
| 48. $z = x^2 + 2xy + 2y^2$ ; $A(3; 2)$ .                   | 49. $z = 3x^3 + x^2y^3$ ; $A(2; 3)$ .                     |
| 50. $z = \arctg(x^2y)$ ; $A(1; 2)$ .                       | 51. $z = e^{x+5y^2} + 2x$ ; $A(1; 0)$ .                   |
| 52. $z = x^2 + xy + y^2$ ; $A(1; 1)$ .                     | 53. $z = 5x^2 + 6xy$ ; $A(2; 1)$ .                        |

Дана функция  $z = f(x, y)$  и вектор  $\bar{a} = (a_1; a_2)$ . Найти производную в точке  $A$  по направлению вектора  $\bar{a}$ .

54.  $z = \ln(x^2 + 2y^2) + e^x$ ;  $A(0; 1)$ ;  $\bar{a} = (0; 2)$ .
55.  $z = x^4 + x^2y^3 - \ln x$ ;  $A(1; -1)$ ;  $\bar{a} = (3; 2)$ .
56.  $z = x^4 + 2x^2y^3 - \ln y$ ;  $A(1; 2)$ ;  $\bar{a} = (4; -3)$ .
57.  $z = x^2y^2 + 4xy^2 + \ln x$ ;  $A(3; 1)$ ;  $\bar{a} = (3; 2)$ .
58.  $z = x^2 + xy + y^2 - 21$ ;  $A(4; 1)$ ;  $\bar{a} = (2; 1)$ .
59.  $z = x^2y^2 + 5xy^2 - \ln x$ ;  $A(2; 2)$ ;  $\bar{a} = (2; 1)$ .
60.  $z = x^2 + 4xy + 2x - \ln x$ ;  $A(4; -1)$ ;  $\bar{a} = (1; 3)$ .
61.  $z = x^3 + x^2y^3 + 5 \ln x$ ;  $A(3; -1)$ ;  $\bar{a} = (1; 2)$ .
62.  $z = \arcsin(x^2) + 2y$ ;  $A(0; 1)$ ;  $\bar{a} = (3; -8)$ .
63.  $z = \ln(x^2 + 4y^2) - 2x$ ;  $A(-1; 2)$ ;  $\bar{a} = (2; -1)$ .
64.  $z = \frac{x^2}{y} + 6y$ ;  $A(1; -3)$ ;  $\bar{a} = (5; 2)$ .
65.  $z = \ln(x^2 + 3y^2) + x$ ;  $A(1; 1)$ ;  $\bar{a} = (-1; 2)$ .
66.  $z = \ln(x^2 + 3y^2) - 4x$ ;  $A(1; 2)$ ;  $\bar{a} = (3; 2)$ .
67.  $z = x^2 + 3xy - \ln x$ ;  $A(1; 3)$ ;  $\bar{a} = (4; 2)$ .
68.  $z = \ln(x^2 + y^2) + 5x$ ;  $A(1; 0)$ ;  $\bar{a} = (3; 1)$ .
69.  $z = \arcsin(y) + x^2 + y^2$ ;  $A(2; 0)$ ;  $\bar{a} = (5; -1)$ .
70.  $z = x^2 + 3xy + y^2 + \ln y$ ;  $A(3; 1)$ ;  $\bar{a} = (3; -4)$ .
71.  $z = \ln(x^2 + 4y^2) + 8y - 1$ ;  $A(-1; 2)$ ;  $\bar{a} = (2; -1)$ .
72.  $z = x^2 + 2xy + \ln y + 1$ ;  $A(1; 1)$ ;  $\bar{a} = (3; -2)$ .
73.  $z = \arctg x - 8x + 3y$ ;  $A(1; 0)$ ;  $\bar{a} = (4; -3)$ .

74.  $z = 1 + 2x^2y - 3 \ln y$ ;  $A(1; 2)$ ;  $\bar{a} = (3; 2)$ .
75.  $z = \frac{x^2}{y} + 2^x - 1$ ;  $A(1; 1)$ ;  $\bar{a} = (0; 3)$ .
76.  $z = x^2 + xy + 3y - 1$ ;  $A(-3; -1)$ ;  $\bar{a} = (1; -2)$ .
77.  $z = x^3 + xy - \ln y - 4$ ;  $A(-1; 1)$ ;  $\bar{a} = (1; 2)$ .
78.  $z = e^y + \frac{5y}{x^2} + 1$ ;  $A(1; 2)$ ;  $\bar{a} = (-3; 0)$ .
79.  $z = \ln(x^2 + y^2) + y - 2$ ;  $A(0; 1)$ ;  $\bar{a} = (3; -1)$ .
80.  $z = x + 3xy + y \ln x + 3$ ;  $A(2; 1)$ ;  $\bar{a} = (1; -4)$ .
81.  $z = x \arcsin y + x^2 - 1$ ;  $A(4; 0)$ ;  $\bar{a} = (3; 0)$ .
82.  $z = \ln x - xy - 4y^2 + 2$ ;  $A(1; -1)$ ;  $\bar{a} = (1; 0)$ .
83.  $z = x \operatorname{arctg}(y^2) - 8^x$ ;  $A(5; 1)$ ;  $\bar{a} = (0; -3)$ .
84.  $z = \arcsin(x^2) + 2x + y^2 + 1$ ;  $A(0; 0)$ ;  $\bar{a} = (0; -2)$ .
85.  $z = \operatorname{arcctg}(x^2) + 3xy$ ;  $A(1; 1)$ ;  $\bar{a} = (4; -3)$ .