Ш.Ф. Арасланов, С.И. Филиппов

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЗАОЧНОГО И ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Часть II

Учебное пособие

КАЗАНЬ 2005

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО–СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ш.Ф. Арасланов, С.И. Филиппов

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЗАОЧНОГО И ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Часть II

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

КАЗАНЬ 2005

УДК 517
ББК 22.1
А 79

А 79 Арасланов Ш.Ф.,Филиппов С.И. Краткий курс высшей математики для заочного и дистанционного обучения: Учебное пособие. Часть II. – Казань: Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2005. – 68 с.

ISBN 5-7829-0143-8
Печатается по решению РИС КГАСУ

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов первого курса (второй семестр) заочной и дистанционной форм обучения. Оно содержит необходимый теоретический материал по дифференциальному и интегральному исчислениям.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор С.Р. Насыров
доктор техн. наук, профессор В.Ф. Шарафутдинов

ISBN 5-7829-0143-8

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2005
© Арасланов Ш.Ф., Филиппов С.И., 2005

I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Производная функции, ее геометрический и механический смысл

Определение производной. Дана функция $y = f(x)$. Пусть аргумент x получил приращение Δx ($\Delta x > 0$ или $\Delta x < 0$), т.е. принял значение $x+\Delta x$. Тогда функция примет значение $f(x+\Delta x)$, т.е. она получит приращение $\Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$, откуда $f(x+\Delta x) = y + \Delta y$ (рис. 1).

Определение. Если предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ существует (и не равен ∞), то он называется производной данной функции $f(x)$ по аргументу x и обозначается $f'(x)$ или $\frac{df}{dx}$, или y', или $\frac{dy}{dx}$, или y'_x, т.е.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Нахождение производной $f'(x)$ называется дифференцированием функции $f(x)$.

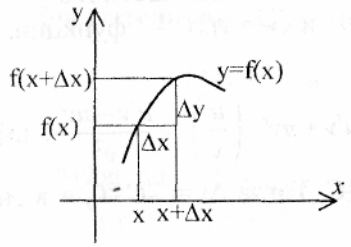

Рис. 1

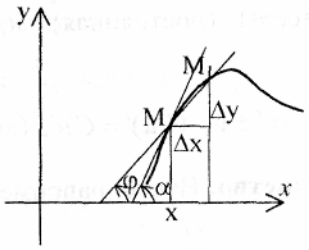

Рис. 2

Рис. 3

Геометрический смысл производной.

Теорема. Значение производной $f'(x)$ равно тангенсу угла между осью Ox и касательной к кривой $y = f(x)$ в т. M(x,y), т.е. $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 2).

Доказательство. Проведем через точки M и M_1 графика секущую. При $\Delta x \to 0$ (т.е. при $M_1 \to M$) она поворачивается вокруг т. M и стремится совпасть с касательной, т.е. $\varphi \to \alpha$. Поэтому

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha \,. \qquad (2)$$

Механический смысл производной. Пусть точка M движется по прямой (рис. 3) с *переменной* скоростью V. Расстояние S от ее начального положения M_0 есть функция времени, т.е. $S = f(t)$. Пусть t и $t+\Delta t$ – два близких момента времени. Средняя скорость точки за время Δt есть $V_{ср.} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Она тем точнее характеризует истинную скорость V в момент t, чем меньше Δt. Поэтому

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{ср.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f'(t) \,.$$

Таким образом, скорость есть производная пройденного расстояния по времени.

2. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций.

Производная постоянной, суммы, произведения, частного.

Пусть C=const (постоянная), $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции. Тогда

$$C' = 0,\ (u \pm v)' = u' \pm v',\ (Cu)' = Cu',\ (uv)' = u'v + uv',\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть, например, y=C. Тогда Δy=C-C=0, и в силу (1) $C' = 0$.

Пусть теперь $y=u \cdot v$. Тогда $\Delta y=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)-u\cdot v=v\cdot\Delta u+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v \cdot u' + u \cdot v' \,.$$

Аналогично доказываются остальные формулы (3).

Производные тригонометрических функций. Верны формулы

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x,\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть $y=\sin x$. Тогда

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin(x)=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x\,.$$

(использована формула $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$).

Аналогично доказываем $(\cos x)'=-\sin x$. Далее, в силу (3)

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-(\cos x)'\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Аналогично доказывается $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Производная логарифмической функции. Верны формулы

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\cdot\ln a},\quad\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x},\tag{5}$$

где $\ln x=\log_e x$, причем

$$e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\approx 2.718...$$

Доказательство. С учетом формул

$$\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y},\quad m\log_a x=\log_a\left(x^m\right)$$

имеем:

$$\frac{\Delta\left(\log_a x\right)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left[\log_a\left(x+\Delta x\right)-\log_a x\right]=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right],$$

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\frac{1}{x}\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=$$

$$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\cdot\log_e a} = \frac{1}{x\cdot\ln a}.$$

Доказана первая формула в (5). Вторая вытекает из нее при $a = e$, т.к. $\ln e = 1$.

Производная сложной функции. Пусть $y=y(u)$, $u=u(x)$, т.е. $y=y[u(x)]$ – сложная функция. Докажем, что

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \qquad (6)$$

Имеем: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $y'_x = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u\cdot u'_x$.

Пример.

$y=\ln(3\cos x + 1)$, т.е. $y=\ln u$, $u = 3\cos x + 1$. Из (6), (5), (3), (4) получим

$$y'_x = (\ln u)'_u \cdot (3\cos x+1)'_x = \frac{1}{u}(-3\sin x) = -\frac{3\sin x}{3\cos x+1}.$$

Производные степенной, показательной, показательно-степенной функций. Докажем формулы:

$$(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1},\ (a^x)' = a^x\cdot\ln a,\ (e^x)' = e^x. \qquad (7)$$

Пусть $y=x^\alpha$. Логарифмируем: $\ln y=\alpha\cdot\ln x$. Дифференцируем обе части по x с учетом (6), (5):

$$(\ln y)'_x = (\alpha\ln x)'_x,\ (\ln y)'_y\, y'_x = \frac{\alpha}{x},\ \frac{1}{y}y' = \frac{\alpha}{x},\ y' = \alpha\cdot\frac{y}{x} = \alpha\frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Первая формула (7) доказана. В частности, при α=1 имеем $x' = 1$.

Пусть $y=a^x$. Логарифмируем и дифференцируем:

$$\ln y = x\cdot\ln a,\ \frac{1}{y}\cdot y' = \ln a,\ \ y' = y\cdot\ln a = a^x\cdot\ln a.$$

Доказана вторая формула в (7). Третья вытекает из нее при $a = e$.

Примененным выше методом "*логарифмического дифференцирования*" найдем производную "показательно-степенной" функции $y=u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Имеем $\ln y=v\cdot\ln u$,

$$\frac{1}{y}\cdot y' = v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u',\ \ y' = y\left(v'\cdot\ln u + \frac{v\,u'}{u}\right) = u^v\cdot\left(v'\cdot\ln u + \frac{v\,u'}{u}\right).$$

Обратные функции и их дифференцирование. Если функция $y = f(x)$ возрастает или убывает, то легко видеть из ее графика, что каждому значению y соответствует одно значение x такое, что $y = f(x)$.

Таким образом, можно рассматривать x как функцию от y, т.е. $x = \varphi(y)$. Функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ взаимно обратные. Если $y = f(x)$ задана аналитическим выражением, и из этого уравнения можно выразить x через y, то получим аналитическое выражение обратной функции $x = \varphi(y)$. Примеры взаимно обратных функций:

$$y=x^{\alpha},\ x=y^{1/\alpha};\quad y=a^{x},\ x=\log_a y;\quad y=e^{x},\ x=\ln y;$$

$$y=\sin x,\ x=\arcsin y;\quad y=\cos x,\ x=\arccos y;\quad y=\operatorname{tg} x,\ x=\operatorname{arctg} y.$$

Теорема о производной обратной функции. Если $x=\varphi(y)$ – функция, обратная по отношению к функции $y=f(x)$ и $\varphi'(y)\neq 0$, то $f'(x)=1/\varphi'(y)$ или коротко:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}. \tag{8}$$

Доказательство. Соотношение $x=\varphi(y)$ определяет функцию, обратную к $y=f(x)$, поэтому $x=\varphi[f(x)]$. Полученное соотношение продифференцируем по x, помня, что в правой части стоит сложная функция. Тогда будем иметь $1=\varphi'_y y'_x$. Отсюда $y'_x=1/\varphi'_y$ или $y'_x=1/x'_y$.

Выведем формулы производных обратных тригонометрических функций:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},\quad (\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}. \tag{9}$$

Пусть y=arcsin x. Тогда x=sin$y$, и из (8) получим

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\sin y)'_y}=\frac{1}{\cos y},$$

где $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$. Перед корнем берется знак плюс, т.к. функция y=arcsin x принимает значения на отрезке $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ и, следовательно, $\cos y \ge 0$. Итак, имеем $y'_x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Пусть y=arctg x. Тогда x=tg y, и

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{\left(\dfrac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}\right)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Доказательство еще двух формул в (9) аналогично.

Таблица производных. Выпишем формулы (7), (5), (4), (9) и рядом полученные из них с помощью (6) для сложной функции $y=y(u)$ от x. Здесь $u = u(x)$.

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \qquad \left(u^\alpha\right)'_x = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'_x$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a, \qquad \left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'_x$$

$$\left(e^x\right)' = e^x, \qquad \left(e^u\right)' = e^u \cdot u'_x$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \qquad \left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'_x$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}, \qquad \left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'_x$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\sin u)' = \cos u \cdot u'_x$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'_x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$$

Дополним таблицу производной от показательно-степенной функции $y=u^v$:

$$\left(u^v\right)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v' .$$

Как видим из двух первых формул для сложной функции, первое слагаемое получается при дифференцировании сложной функции $u(x)^v$ при v=const, а второе при дифференцировании сложной функции $u^{v(x)}$ при u=const.

3. Неявная функция и ее дифференцирование

Пусть переменные x и y связаны некоторым уравнением, которое символически обозначим так: $F(x,y)=0$. Если из него можно выразить y через x, то получаем функцию $y=f(x)$. Если даже этого сделать нельзя, то всё равно линию с уравнением $F(x,y)=0$ можно рассмотреть как график некоторой функции $y=f(x)$. Поэтому говорят, что $y=f(x)$ есть неявная функция, заданная этим уравнением.

Покажем на примере метод нахождения производной неявной функции. Пусть она задана уравнением $x^2+3x^3y^2 - \sin y=0$. Дифференцируем обе части (считая, что y есть функция от x) и из полученного уравнения выражаем y':

$$2x + 9x^2y^2 + 3x^3 \cdot 2y \cdot y' - \cos y \cdot y' = 0 , \Rightarrow$$

$$y'\left(6x^3y - \cos y\right) = -\left(2x + 9x^2y^2\right),$$

$$y' = -\frac{2x + 9x^2y^2}{6x^3y - \cos y} .$$

4. Параметрические уравнения линии на плоскости. Параметрическое задание функции и её дифференцирование

Даны две функции аргумента (параметра) t

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t). \tag{10}$$

С каждым значением t сопоставим точку с координатами (10). При непрерывном изменении t эти точки образуют линию; говорят, что она задана параметрическими уравнениями (10). Эту линию рассмотрим как график некоторой функции $y=y(x)$. Её производная имеет вид

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} . \tag{11}$$

Доказательство.

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \Big/ \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

5. Дифференциал

Дифференциалом независимого переменного x называется его приращение, т.е. $dx=\Delta x$. *Дифференциалом функции* $y=f(x)$ называется произведение её производной на дифференциал аргумента

$$dy \equiv df = f'(x) \cdot dx. \qquad (12)$$

Здесь "≡" означает "тождественно равно", т.е. связывает два разных обозначения одного и того же. Геометрический смысл дифференциала *dy* виден из рис.4. Действительно, $|NK| = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\alpha = \Delta x \cdot f'(x)$ (использована формула (2)). Из рис.4 следует, что при малых Δx верно приближенное равенство приращения функции и ее дифференциала, т.е.

$$\Delta f \equiv \Delta y \approx df \equiv dy. \qquad (13)$$

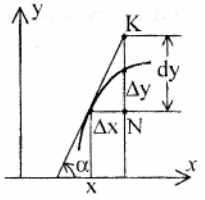

Рис. 4

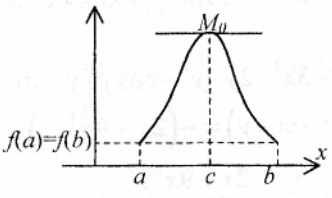

Рис. 5

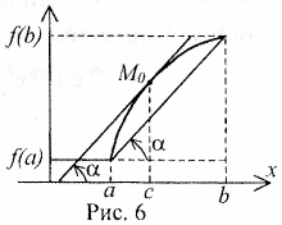

Рис. 6

Дифференцируемость и ее связь с непрерывностью. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* $x = x_0$, если в этой точке она имеет производную $f'(x)$. Иначе говоря, существует предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x),$$

здесь

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала, то её называют *дифференцируемой в этом интервале*.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Приращение функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, соответствующее приращению Δx запишем так: $\Delta y = (\Delta y / \Delta x)\Delta x$. В этом соотношении перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$, при этом учтём, что предел правой части равен произведению пределов сомножителей: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x$. В правой части первый предел существует и равен $f'(x_0)$ (в силу условий теоремы, так как функция в точке x_0 дифференцируема). Поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = f'(x_0) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x$. Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$, значит, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Согласно второму определению непрерывности функции в точке это означает, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ непрерывна.

Отметим, что утверждение, обратное утверждению теоремы, не справедливо. *Непрерывная функция не обязательно дифференцируема.* Например, кривые на рис. 8, 9 *непрерывны*, но касательная либо при переходе через точку M_0 поворачивается *скачком*, либо вертикальна в т. M_0. В силу (2) первое означает несовпадение пределов при $\Delta x > 0$ и при $\Delta x < 0$, а второе – что $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$, т. е. в обоих случаях функция *недифференцируема* при $x = x_0$.

6. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная от первой производной (т.е. от $f'(x)$) называется производной 2-го порядка или второй производной от функции $f(x)$, т.е. $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$. Она обозначается $f''(x)$ или $\frac{d^2 f}{dx^2}$, или y'', или $\frac{d^2 y}{dx^2}$, или y''_{xx}. Значит $y'' = (y')'$.

Пример.

$y = \sin 2x + 3x^2$, $\quad y' = 2\cos 2x + 6x$, $\quad y'' = -4\sin 2x + 6$.

Аналогично определяем производную 3-го порядка $y''' = (y'')'$ и т.д. Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями (10). Так как согласно (8) $t'_x = 1/x'_t$, то с помощью (11) и (3) можно вывести формулу 2-ой производной

$$y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y''_{tt}\cdot t'_x)\cdot x'_t - y'_t\cdot(x''_{tt}\cdot t'_x)}{(x'_t)^2} = \frac{y''_{tt}\cdot x'_t - y'_t\cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

или

$$y''_{xx} = \frac{g'_t(t)}{x'_t(t)}, \quad g(t) \equiv y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}. \tag{14}$$

Согласно (12)

$$dy \equiv df = f'(x)\cdot dx.$$

Дифференциал 2-го порядка есть

$$d^2y \equiv d^2f \equiv d(df) = d[f'(x)\cdot dx] = [f'(x)\cdot dx]'\cdot dx$$

(по (12)). Т.к. dx не зависит от x и выносится за знак производной, то $d^2y \equiv d^2f = f''(x)\cdot(dx)^2$.

7. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя

Теорема Ролля (теорема о корнях производной).

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в его внутренних точках, а на концах принимает равные значения ($f(a)=f(b)$), то существует внутри отрезка $[a,b]$ хотя бы одна точка c, в которой производная обращается в 0, т.е. $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы (рис.5). Т.к. $f(a)=f(b)$, то либо наибольшее, либо наименьшее значение $f(x)$ принимается во внутренней точке $x=c$. В этом случае касательная в точке $M_0(c, f(c))$ горизонтальна, т.е. образует о осью Ox угол $\alpha=0$, и $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Теорема Лагранжа (теорема о конечных приращениях)

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в его внутренних точках, то существует хотя бы одна внутренняя точка $x=c$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{15}$$

Геометрический смысл теоремы (рис.6). Из прямоугольного треугольника получаем $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\operatorname{tg}\alpha$, а из рисунка видно, что в некоторой точке $M_0(c, f(c))$ касательная параллельна хорде (т.е. $f'(c)=tg\alpha$). Из этих формул вытекает (15).

Теорема Коши (теорема об отношении приращений двух функций)

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы в его внутренних точках, причём нигде внутри отрезка $\varphi'(x)\neq 0$, то существует внутри $[a,b]$ точка $x=c$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \qquad (16)$$

Пояснение: Почему в условии теоремы не требуется $\varphi(a)\neq\varphi(b)$? Потому что, если бы $\varphi(a)=\varphi(b)$, то согласно теореме Ролля внутри отрезка $[a,b]$ нашлась хотя бы одна точка, в которой производная $\varphi'(x)=0$, что противоречит условию $\varphi'(x)\neq 0$.

Пояснение к теоремам Ролля, Лагранжа, Коши. В условиях этих теорем говорится о непрерывности функции на $[a,b]$ и ее дифференцируемости во внутренних точках. Отметим, что из дифференцируемости функции во внутренних точках следует ее непрерывность там же. Поэтому в условиях теорем достаточно было бы кроме дифференцируемости во внутренних точках, потребовать непрерывность функции только в точках a и b соответственно справа и слева. А непрерывность функции на (a, b) следовала бы из ее дифференцируемости. Отсюда ясно, что в условиях теорем нет противоречий.

Правило Лопиталя (раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть либо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, либо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ (здесь a – конечное число или ∞). Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \qquad (17)$$

(если 2-й предел существует).

Доказательство. Для случая $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ и конечного a. Считая $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывными, имеем $f(a)=\varphi(a)=0$,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Здесь использована теорема Коши (*c* заключено между *a* и *x*).

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln(1+x)\right]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(2x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

8. Формула Тейлора

Если $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно в окрестности точки $x=a$, то имеет место формула Тейлора

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+R_n(x), \quad (18)$$

где $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, $f^{(n)}(a)$ означает производную n-го порядка от $f(x)$ при $x=a$, а *"остаточный член в форме Лагранжа"* записывается так

$$R_n(x)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где ξ – некоторое число, заключенное между a и x.

Пусть $\forall n$ (для всех n) известна оценка $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|<M$, а x мало отличается от a . Тогда с ростом n остаток $R_n(x)$ становится весьма малым и в (18) им можно пренебречь. Таким образом, $f(x)$ *приближенно* заменяется многочленом степени не выше n. Если $a=0$, то (18) превращается в формулу Маклорена. Из неё, в частности, можно получить:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+R_n(x);$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+R_n(x);$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad \text{где} \quad R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

а ξ заключено между 0 и x.

II. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Исследование функции на возрастание и убывание, экстремумы с помощью первой производной

Определение монотонной функции. Функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $[a,b]$, если из $x_2 > x_1$ вытекает $f(x_2) \geq f(x_1)$ $(f(x_2) \leq f(x_1))$, где $x_{1,2} \in [a,b]$ ($x_{1,2}$ принадлежит $[a,b]$). Возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

Условия возрастания и убывания

Теорема. Возрастание (убывание) функции $f(x)$ на $[a,b]$ равносильно неравенству $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ при $a < x < b$. Геометрический смысл теоремы виден из рис.7. При $x < x_0$, где $f(x)$ возрастает, угол α между осью Ox и касательной к графику находится в 1-й четверти, т.е. $0 < \alpha < \pi/2$, и $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha > 0$. При $x > x_0$, где $f(x)$ убывает, α лежит в IV-й четверти, т.о. $-\pi/2 < \alpha < 0$, и $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha < 0$.

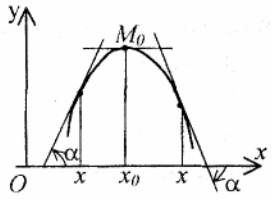

Рис. 7

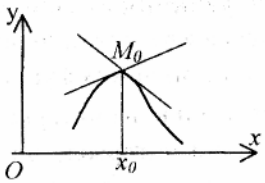

Рис. 8

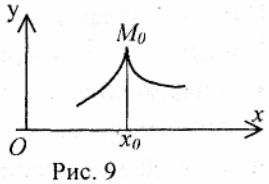

Рис. 9

Определение максимума и минимума (экстремумов). Функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум (минимум), если $f(x_0) > f(x)$ $(f(x_0) < f(x))$ при всех x, близких к x_0.

Необходимое условие экстремума. Критические точки

Теорема. Если $f(x)$ имеет при $x = x_0$ максимум или минимум, то либо $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0) = 0$. Геометрический смысл

теоремы виден из рис. 7-9 и формулы $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$. На рис.7 касательная при переходе через т. x_0 поворачивается непрерывно, при $x = x_0$ она горизонтальна, поэтому $\alpha = 0$, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$. На рис.8 касательная поворачивается скачком, а на рис.9 она вертикальна ($\alpha = \pm\pi/2$, $\operatorname{tg}\alpha = \infty$, а более конкретно $\operatorname{tg}\alpha = \pm\infty$); в обоих этих случаях $f'(x_0)$ не существует. Иногда говорят, что производные существуют, но разные слева и справа в т. x_0 (рис.8), или говорят, что производная равна бесконечности (рис.9). Точки оси x, в которых $f' = 0$ или не существует, называются *критическими точками* функции $f(x)$. По теореме каждая точка экстремума – критическая. Но не каждая критическая точка – точка экстремума.

Первое достаточное условие экстремума

Теорема. Пусть $f(x)$ непрерывна в окрестности т. x_0, включая т. x_0, и дифференцируема в этой окрестности (кроме, может быть, самой точки x_0). Если при переходе слева направо через x_0 производная меняет знак, то x_0 – точка экстремума. Геометрический смысл теоремы виден из рис.7-9. Смена знака $f'(x)$ означает смену знака α, т.е. смену возрастания на убывание (или наоборот), т.е. означает существование максимума (минимума).

Схема исследования функции на монотонность и экстремумы

1. Находим область определения и точки разрыва функции $f(x)$.
2. Находим $f'(x)$ и критические точки функции $f(x)$.
3. Разбиваем область определения на интервалы критическими точками и точками разрыва. В каждом интервале определяем знак $f'(x)$, подставляя в её выражение любое значение x из этого интервала. Таким образом, определяем интервалы возрастания и убывания.
4. Те из критических точек (но не точки разрыва), которые разделяют интервалы возрастания и убывания, будут точками экстремума. Находим значения $y = f(x)$ в этих точках.

2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции

Функция $f(x)$ на $[a,b]$ достигает наибольшего (наименьшего) значения либо на одном из концов отрезка, либо в одной из внутренних

точек максимума (минимума), которая, как известно, обязательно является критической точкой. Поэтому надо найти все критические точки внутри отрезка $[a,b]$, а затем в них и в концах a, b отрезка вычислить значения $f(x)$. Из всех значений выбрать наибольшее и наименьшее.

3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Кривая называется выпуклой (вогнутой), если при движении по ней точки M слева направо касательная в т.M поворачивается по часовой стрелке (против часовой стрелки). На рис.10 участок кривой левее т. M_0 –выпуклый, а правее – вогнутый. Точка M_0, разделяющая участки выпуклости и вогнутости, называется точкой перегиба.

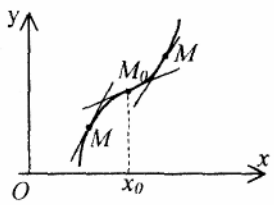

Рис. 10

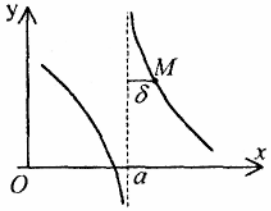

Рис. 11

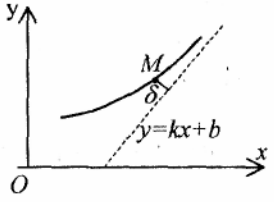

Рис. 12

Можно дать другое, равносильное определение выпуклости и вогнутости: кривая называется выпуклой (вогнутой) в интервале $[a, b]$, если она лежит ниже (выше) любой своей касательной. Очевидно, что выпуклость или вогнутость кривой зависит не столько от ее формы, сколько от расположения в плоскости xOy. И, наоборот, точка перегиба определяется только формой кривой.

Условия выпуклости и вогнутости

Теорема. Если на интервале (a,b) $f''<0$ ($f''>0$), то кривая $y=f(x)$ выпукла (вогнута).

Доказательство. Пусть $f''<0$, т.е. $\left[f'(x)\right]'<0$. Тогда по условию убывания функции имеем $\operatorname{tg}\alpha \equiv f'(x)$ – убывающая функция, где α – угол между осью Ox и касательной. Значит, сам угол α также убывает при движении слева направо, т.е. касательная поворачивается по часовой стрелке, и кривая выпуклая.

Условие точки перегиба

Теорема. Если $f''(x_0)=0$ или не существует и при переходе через x_0 производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба кривой. Теорема вытекает из условий выпуклости-вогнутости и определения точки перегиба.

4. Второе достаточное условие экстремума

Теорема. Пусть $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$). Тогда x_0 -точка максимума (минимума).

Доказательство. Т.к. $f'(x_0)=0$, то касательная к кривой $y=f(x)$ в т. $M_0(x_0, f(x_0))$ параллельна оси Ox. Если $f''(x_0)<0$, то $f''(x)<0$ при всех x, близких к x_0. Значит, вблизи т. M_0 кривая выпуклая. Отсюда видно, что x_0 -точка максимума (рис.7).

5. Асимптоты кривой

Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние δ от точки М кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении М в бесконечность. Асимптоты бывают: а) вертикальные, б) наклонные (в частности, горизонтальные).

Вертикальной асимптотой кривой $y=f(x)$ будет прямая $x=a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ (рис.11). Например, кривая $y=\dfrac{2}{x-5}$ имеет вертикальную асимптоту $x=5$, т.к. $y\to\infty$ при $x\to 5$.

Теорема. Прямая $y=kx+b$ является *наклонной асимптотой* кривой $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) (рис.12), если

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Если хотя бы один из этих пределов не равен конечному числу, то наклонной асимптоты у данной кривой нет.

Если указанные пределы не изменяются при стремлении $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$, то пишем просто $x\to\infty$ и полученная прямая $y=kx+b$ будет наклонной асимптотой как для $x\to+\infty$, так и для $x\to-\infty$ или короче $x\to\infty$.

6. Общая схема построения графика функции

1. Находим область определения, точки разрыва и пересечения с осями координат.
2. Определяем, является ли функция четной (проверяем тождество $f(-x)=f(x)$), нечетной (когда $f(-x) = -f(x)$) или функцией общего вида (когда ни одно из этих тождеств не выполняется). Определяем периодичность функции (когда $f(x+T)=f(x)$).
3. Определяем интервалы монотонности и экстремумы.
4. Находим участки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.
5. Находим вертикальные и наклонные асимптоты (если есть).
6. Если необходимо для большей точности, то определяем значения функции в дополнительных точках.

Часть указанных выше действий можно не делать, если, например, получаются трансцендентные уравнения. На основании проведенного исследования строится график.

III. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

1. Длина дуги и её производная

Дана кривая $y = f(x)$ (рис.13). Пусть $S = S(x)$ – длина дуги M_0M (т.е. $\overset{\cup}{M_0M}$) от начальной точки M_0 до переменной т. $M(x, y)$. Докажем формулу для производной от этой функции:

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1+[f'(x)]^2} \quad . \tag{19}$$

Имеем: $\frac{dS}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{\cup}{MM_1}}{\Delta x}$. Т.к. Δx мало, то приближенно заменим дугу $\overset{\cup}{MM_1}$ хордой $\overline{MM_1}$, т.е. $\Delta S \approx \left|\overline{MM_1}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, и

$$\frac{dS}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ .$$

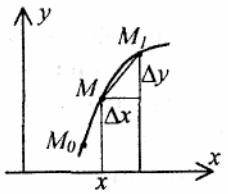

Рис. 13

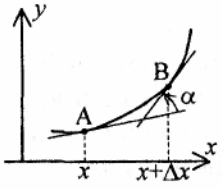

Рис. 14

2. Кривизна плоской кривой

Средней кривизной дуги AB кривой $y=f(x)$ называется отношение $K_{ср.}=\frac{\alpha}{\overset{\cup}{AB}}$, где α – угол между касательными в т.т. A и B (рис.14).

Кривизной линии в т. A называется предел средней кривизны дуги AB при $B\to A$. Докажем формулу

$$K=\frac{y''_{xx}}{\left[1+(y'_x)^2\right]^{3/2}}. \qquad (20)$$

Пусть $A(x, y)$, $B(x+\Delta x, y+\Delta y)$, а касательные в т.т. A, B образуют с осью Ox углы $\varphi(x)$, $\varphi(x+\Delta x)$. Тогда $\alpha=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x+\Delta x)=\Delta\varphi$, и с учетом (19)

$$K=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}{\frac{\Delta S}{\Delta x}}=\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dS}{dx}}=\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{1+(y'_x)^2}}.$$

Т.к. $\operatorname{tg}\varphi=y'(x)$, то $\varphi=\operatorname{arctg}\left[y'(x)\right]$ и $\frac{d\varphi}{dx}=\frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}}$. В итоге получаем (20).

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то с помощью (11), (14) из (20) можно получить

$$K = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{\left[(x'_t)^2 + (y'_t)^2\right]^{3/2}}. \qquad (21)$$

3. Уравнения линии в пространстве. Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой

Векторное и параметрические уравнения линии в пространстве

Дан вектор $\overline{OA} = \bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$ (рис.15), называемый радиусом-вектором точки А; его проекции -функции некоторого параметра t

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t). \qquad (22)$$

Тогда

$$\bar{r}(t) = \varphi(t) \cdot \bar{i} + \psi(t) \cdot \bar{j} + \chi(t) \cdot \bar{k} \qquad (23)$$

– *"векторная функция скалярного аргумента t "*. При изменении t точка А с координатами (22) перемещается по некоторой кривой.

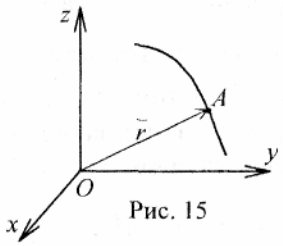

Рис. 15

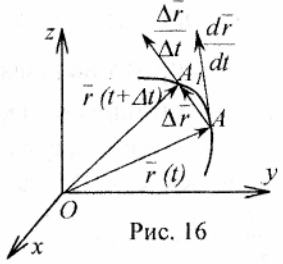

Рис. 16

Уравнения (22) называются параметрическими уравнениями этой кривой, а (23) называется её векторным уравнением.

Производная векторной функции. Её геометрический и механический смысл

Теорема. Производная $\frac{d\bar{r}}{dt}$ есть вектор, направленный по касательной к кривой.

Доказательство. Пусть $\Delta\bar{r} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t) = \overline{AA_1}$ (рис.16). Тогда вектор $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ также проходит через A, A_1. Если $\Delta t \to 0$, то $A_1 \to A$, и се-

кущая стремится совпасть с касательной. Поэтому вектор $\frac{d\bar{r}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ направлен по касательной. Заметим, что в силу (23)

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\varphi'(t),\, \psi'(t),\, \chi'(t)\right) = \left(x'(t),\, y'(t), z'(t)\right), \qquad (24)$$

Если т. A движется по кривой, и параметр t имеет смысл времени, то уравнения (22), (23) называются уравнениями движения точки, а вектор $\frac{d\bar{r}}{dt}$ совпадает с вектором скорости $\bar{V}$.

Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка кривой, заданной уравнением (22) или (23), где $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$, $z_0=\chi(t_0)$. Пусть $\bar{a} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ при $t=t_0$, т.е. $\bar{a} = \left(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \chi'(t_0)\right)$. Вектор $\bar{a}$ направлен по касательной к кривой. Плоскость, ортогональная к $\bar{a}$ и проходящая через т. M_0, называется нормальной плоскостью к кривой. Заметим, что $\bar{a}$ является направляющим вектором касательной прямой и нормальным вектором нормальной плоскости. Вспоминая уравнения прямой и плоскости

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},\ A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0,$$

где (m, n, p) - направляющий вектор, а (A, B, C) - нормальный вектор, получим уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\chi'(t_0)},$$

$$\varphi'(t_0)\cdot(x-x_0) + \psi'(t_0)\cdot(y-y_0) + \chi'(t_0)\cdot(z-z_0) = 0. \qquad (25)$$

IV. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Способы задания функции двух переменных

Аналитическое задание – когда функция $z = f(x, y)$ задана аналитическим выражением, например, $z=x^2 + 2y \cdot \sin(x-3y)$.

Табличное задание – с помощью таблицы, в которой на пересечении строки и столбца, соответствующем определенным значениям x и y, проставлено соответствующее значение функции $f(x, y)$.

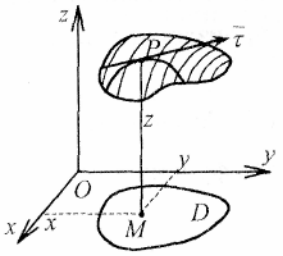

Рис. 17

Графическое изображение функции $z = f(x, y)$. Пусть эта функция определена в области D на плоскости Oxy, т.е. для таких пар чисел (x, y), что точка $M(x, y)$ лежит в D (рис.17). Условно можно записать $z = f(M)$. Из каждой такой точки M восстановим перпендикуляр к плоскости и отложим на нем отрезок, равный $f(x, y)$. Получим в пространстве т. $P(x, y, z)$, где $z = f(x, y) = f(M)$. Множество таких точек P при всевозможных $M \in D$ называют графиком функции $z = f(x, y)$, т.е. график – это поверхность с уравнением $z = f(x, y)$.

2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Число A называется пределом функции $z = f(x, y) = f(M)$, при $M \to M_0$ (т.е. при $x \to x_0$, $y \to y_0$), если разность $|f(M)-f(M_0)|$ можно сделать как угодно малой, взяв т. M достаточно близко к т. M_0.

Функция $z = f(x, y) = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0 , если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ (конечное число).

3. Частные и полные приращения. Частные производные

Пусть аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ получили приращения Δx и Δy. Частным приращением функции z по x (по y) и полным приращением называются соответственно разности

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),\ \Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y),$$
$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y). \qquad (26)$$

Частными производными по x (по y) от функции $z = f(x, y)$ называются

$$z'_x = f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \qquad (27)$$

$$z'_y = f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Отсюда видно, что z'_x есть производная по x, вычисленная в предположении, что $y=const$. Аналогично, z'_y есть производная по y, вычисленная в предположении, что $x=const$.

Пример. $z = x^{\sin y}$; $z'_x = \sin y \cdot x^{\sin y - 1}$; $z'_y = x^{\sin y} \cdot \ln x \cdot \cos y$.

Аналогично находим частные производные функции $u = \Phi(x, y, z)$.

4. Полный дифференциал

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется

$$dz \equiv df = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y. \qquad (28)$$

Как и для дифференциала функции одного переменного (см. (13)), при малых Δx и Δy верно приближенное равенство полного приращения функции Δf и ее дифференциала df, т.е.

$$\Delta f \equiv \Delta z \approx df \equiv dz. \qquad (29)$$

5. Производная сложной функции

Пусть $u = \Phi(x, y, z)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, т.е. u – сложная функция от t. Тогда аналогично (6) имеем

$$u'_t = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot x'_t + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y'_t + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot z'_t. \qquad (30)$$

6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Прямая линия называется касательной к поверхности с уравнением $\Phi(x, y, z)=0$ в точке $P(x_0, y_0, z_0)$, если она является касательной к какой-

либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через т. P. Так как таких кривых бесконечно много, то и касательных к поверхности в т. P бесконечно много.

Теорема. Все касательные прямые к данной поверхности в т. P лежат в одной плоскости, если $\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}$ не обращаются в нуль одновременно.

Доказательство. Пусть кривая проходит через т. P, лежит на поверхности и задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, или векторным уравнением $\bar{r}=\bar{r}(t)$ (см. (22), (23)). Подставим координаты любой точки этой кривой в уравнение поверхности и получим $\Phi[x(t), y(t), z(t)]=0$. Дифференцируем по t это тождество с учетом (30):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot x'_t+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y'_t+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot z'_t=0. \qquad (31)$$

Введем векторы $\bar{N}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$ и $\bar{\tau}=\left(x'_t, y'_t, z'_t\right)=\frac{d\bar{r}}{dt}$ (см. (24)), т.е. $\bar{\tau}$ направлен по касательной к кривой, а значит, по касательной к поверхности (рис.17). Из (31) имеем $\left(\bar{N}, \bar{\tau}\right)=0\Rightarrow\bar{N}\perp\bar{\tau}$. Значит, все касательные ортогональны к одному вектору $\bar{N}$, т.е. лежат в одной плоскости; $\bar{N}$ – её нормальный вектор. Эта плоскость называется касательной плоскостью к поверхности в т. P, а прямая, перпендикулярная к этой плоскости (т.е. параллельная $\bar{N}$), называется нормалью к поверхности.

Так как $\bar{N}$ является нормальным вектором к касательной плоскости и направляющим вектором нормали, то уравнения касательной плоскости и нормали в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ имеют вид

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{P_0}\cdot(x-x_0)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{P_0}\cdot(y-y_0)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{P_0}\cdot(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{P_0}}. \qquad (32)$$

7. Частные производные высших порядков

Вторые частные производные (или частные производные 2-го порядка) от функции $z = f(x, y)$ определяются так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx} = (z'_x)'_x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy} = (z'_y)'_y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy} = (z'_x)'_y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx} = (z'_y)'_x.$$

Можно показать, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

8. Экстремумы функции двух переменных

Необходимые условия экстремума функции двух переменных

Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в т. $M_0(x_0, y_0)$, то каждая из частных производных z'_x и z'_y в т. M_0 или не существует, или обращается в нуль. Эти условия аналогичны необходимому условию экстремума функции одного переменного. Точки, в которых z'_x и z'_y не существуют или равны нулю, называются критическими точками функции $z = f(x, y)$. Каждая точка экстремума является критической точкой, но не каждая критическая точка – точка экстремума.

Достаточные условия экстремума функции двух переменных

Обозначим $A = f''_{xx}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{yy}(M_0)$. Пусть M_0 – критическая точка, причём $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$. Тогда в точке M_0 :

1) $f(x, y)$ имеет максимум, если $AC\text{-}B^2 > 0$ и $A < 0$;
2) $f(x, y)$ имеет минимум, если $AC\text{-}B^2 > 0$ и $A > 0$;
3) $f(x, y)$ не имеет экстремума, если $AC\text{-}B^2 < 0$;
4) если $AC\text{-}B^2 = 0$, то экстремум может быть и может не быть (требуется дальнейшее исследование).

Эти условия обобщают второй достаточный признак экстремума функции одного переменного.

9. Производная по направлению. Градиент

Пусть в системе координат $Oxyz$ задана функция трёх переменных $U(P)=U(x, y, z)$, и $P(x, y, z)$ – произвольная точка пространства. Проведем через нее ось λ, направление которой определяется

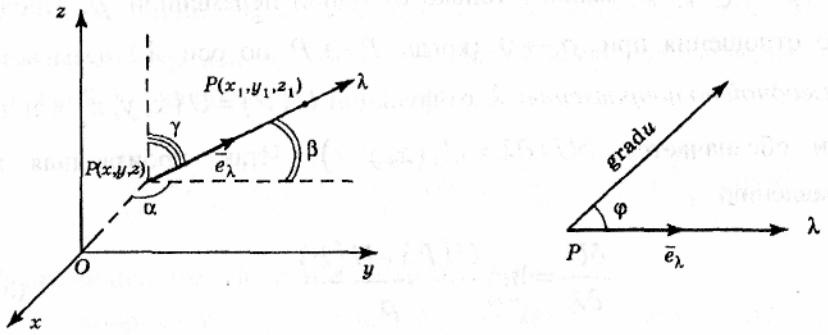

Рис. 18

единичным вектором $\overrightarrow{e_\lambda}$ (см. рис. 18а). Пусть ось λ образует с осями координат Ox, Oy, Oz углы α, β, γ соответственно, тогда $\overrightarrow{e_\lambda}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Пусть $P_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка оси λ, а расстояние $PP_1=\rho$. Проекции вектора PP_1 равны на оси координат разностям координат конца и начала этого вектора: $PP_1=(x_1-x, y_1-y, z_1-z)$. С другой стороны, проекции этого вектора равны его длине ρ, умноженной на косинус угла между соответствующей осью и вектором, поэтому $\overrightarrow{PP_1}=(\rho\cos\alpha, \rho\cos\beta, \rho\cos\gamma)$. Таким образом, $x_1-x=\rho\cos\alpha$, $y_1-y=\rho\cos\beta$, $z_1-z=\rho\cos\gamma$,

$$x_1=\rho\cos\alpha+x,\ y_1=\rho\cos\beta+y,\ z_1=\rho\cos\gamma+z.$$

Следовательно, имеем

$$U(P_1)=U(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\cos\beta, z+\rho\cos\gamma).$$

Пусть P – фиксированная точка, x, y, z – заданные числа и λ – фиксированная ось, т. е. α, β, γ – фиксированные величины. Пусть

изменяется только ρ и точка P_1 перемещается по оси λ относительно фиксированной точки P. При этом значение U в точке P_1 зависит только от одной переменной ρ, следовательно, отношение $[U(P_1)-U(P)]/\rho$ зависит только от одной переменной ρ. Предел этого отношения при $\rho \to 0$ (когда $P_1 \to P$ по оси λ) называется *производной по направлению* λ от функции $U(P)=U(x, y, z)$ в точке P и обозначается $\partial U/\partial\lambda = U'_\lambda(x, y, z)$. Итак, производная по направлению

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{\rho \to 0} \frac{U(P_1)-U(P)}{\rho}. \tag{33}$$

Для полного приращения функции трёх переменных справедливо представление

$$U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-U(x, y, z)=$$
$$=\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\Delta z+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y+\gamma_3\Delta z,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – бесконечно малые функции, стремящиеся к нулю, когда $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ одновременно. Это представление получено в предположении, что частные производные $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$ непрерывны. В последней формуле положим $\Delta x = \rho\cos\alpha$, $\Delta y = \rho\cos\beta$, $\Delta z = \rho\cos\gamma$. Тогда

$$U(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\cos\beta, z+\rho\cos\gamma)-U(x, y, z)=$$
$$=\frac{\partial U}{\partial x}\rho\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\rho\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\rho\cos\gamma+$$
$$+\gamma_1\rho\cos\alpha+\gamma_2\rho\cos\beta+\gamma_3\rho\cos\gamma.$$

Левая часть этой формулы равна $U(P_1)-U(P)$. Таким образом, получили выражение для $U(P_1)-U(P)$. Подставим его в числитель формулы (33) и сократим на ρ. При этом под знаком предела величины γ_1, γ_2, γ_3 стремятся к нулю при $\rho \to 0$ (когда $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ одновременно). Тогда (33) даст формулу для вычисления производной по направлению λ в точке P:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = U'_{\lambda}(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (34)$$

Из неё видно, что эта производная зависит от:

- координат x, y, z точки P, так как эти координаты входят в выражения для частных производных правой части формулы (34);
- направления оси λ, т. е. от углов α, β, γ, так как они входят в правую часть формулы (34).

При фиксированных P и λ производная по направлению $dU/\partial\lambda$ характеризует поведение функции при движении по оси λ. Когда $dU/\partial\lambda > 0$, в положительном направлении оси λ функция U возрастает, причём тем быстрее, чем больше эта производная. В сказанном легко убедиться на основании (33).

Градиент функции и его связь с производной по направлению

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана функция $U(P) = U(x, y, z)$, где x, y, z – координаты точки P. От этой функции найдём частные производные $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$. Эти производные вычислим для точки $P(x, y, z)$ и построим вектор с началом в точке P, обозначаемый $\mathrm{grad}U$ и называемый *градиентом функции в точке* P, проек-

ции которого равны только что вычисленным частным производным. Итак, градиент функции $U(x, y, z)$ в точке P равен

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{k}. \qquad (35)$$

Длина этого вектора определяется формулой

$$|\text{grad}U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Через точку P проведем ось λ с единичным вектором $\overrightarrow{e_\lambda} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (рис. 18б). Запишем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{e_\lambda}$ и $\text{grad}U$:

$$\left(\text{grad}U, \overrightarrow{e_\lambda}\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\cos\gamma.$$

Правая часть этой формулы равна $\partial U/\partial\lambda$ – производной по направлению λ от функции U в точке P. Таким образом, получим

$$\frac{\partial U}{\partial\lambda} = \left(\text{grad}U, \overrightarrow{e_\lambda}\right).$$

Эта формула связывает производную по направлению в точке P и $\text{grad}U$ в точке P. Скалярное произведение в формуле выразим через длины векторов и косинус угла φ между ними:

$$\frac{\partial U}{\partial\lambda} = |\,\text{grad}\,U\,|\cos\varphi.$$

Пусть P – фиксированная точка (её координаты – заданные числа). Тогда $\text{grad}U$ в этой точке, определённый по формуле (35), есть фиксированный вектор. Будем изменять угол φ, т. е. направление оси λ. Из последней формулы видно, как изменяется производная по направлению $\partial U/\partial\lambda$ в точке P с изменением направления оси λ, т. е.

т. е. угла φ. Ясно, что наибольшее свое значение эта производная принимает, когда $\cos\varphi = 1$, т. е. $\varphi = 0$, и ось λ направлена по $\mathrm{grad}U$. Получили, что $\mathrm{grad}U$ – вектор, направление которого указывает направление наискорейшего возрастания функции U по сравнению со всеми другими направлениями оси λ.

V. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Понятие неопределенного интеграла. Теорема о двух первообразных одной функции

В дифференциальном исчислении мы решали задачу: дана $F(x)$, требуется найти $f(x) = F'(x)$. Теперь рассмотрим обратную задачу: по заданной функции $f(x)$ нужно найти $F(x)$ такую, чтобы ее производная $F'(x)$ совпадала с функцией $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Такая функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$. Например, для $f(x)=x^2$ первообразной будет $F(x)=x^3/3$, т.к. $F'(x) = x^2 = f(x)$. Кроме того, функция $F(x)=x^3/3+C$ (C – постоянная) также первообразная для $f(x)=x^2$.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две первообразные одной функции $f(x)$, то они могут отличаться друг от друга лишь на постоянное слагаемое, т.е. $F_2(x)=F_1(x)+C$ (C – постоянная).

Доказательство. Дано: $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$, т.е. $F_1'(x) = F_2'(x)$. Введем функцию $\varphi(x)=F_2(x) - F_1(x)$, произвольно выберем точки a, b. Функция $\varphi(x)$ имеет производную на интервале $[a,b]$, причем $\varphi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = 0$ для всех x, и следовательно $\varphi(x)$ непрерывна на $[a,b]$. По теореме Лагранжа $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)\cdot(b-a)$, где c – некоторая внутренняя точка из интервала $[a,b]$. Т.к. $\varphi'(x) = 0$ для всех x, в том числе и для $x = c$, то $\varphi'(c) = 0$, а значит $\varphi(b) - \varphi(a) = 0 \Rightarrow \varphi(b) = \varphi(a)$. Т.к. a, b – любые точки, то заменяя b на b_1, опять получим равенство $\varphi(b_1) = \varphi(a)$. Таким образом, значение функции $\varphi(x)$ не изменяется с изменением x, т.е. $\varphi(x) = C$ (C – постоянная). Итак, доказали $F_2(x) - F_1(x)=C$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных $F(x)+C$ и обозначается

$\int f(x)dx = F(x) + C$, здесь C – произвольная постоянная; x называется переменной интегрирования, dx – дифференциалом переменной интегрирования, $f(x)$ - подынтегральной функцией; $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, знак $\int$ - знаком интеграла.

Интегрирование – это операция отыскания первообразной функции для $f(x)$, т.е. операция - обратная дифференцированию.

Нахождение $\int f(x)dx$ или $F(x)+C$, где $F(x)$ - любая первообразная для $f(x)$, а C – произвольная постоянная, - называется *неопределенным интегрированием.*

2. Основные свойства неопределенных интегралов

Из определения интеграла вытекают следующие свойства:

1. $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$.

Действительно, $\int f(x)dx = F(x) + C$, $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Значит

$$\left(\int f(x)dx \right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) + C' = f(x), \text{ т.к. } C' = 0.$$

2. $d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$.

Доказательство.

$$d\left(\int f(x)dx \right) = \left(\int f(x)dx \right)' dx = f(x)dx.$$

3. $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + C$.

Доказательство.

$$\int d\left(F(x)\right) \equiv \int 1 d\left(F(x)\right) = F(x) + C.$$

В самом деле: $\int 1du = u + C$ т.к. $u' = 1$. При этом доказательстве мы использовали $\int 1dx = x + C$ и следующее очевидное свойство:

4. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где u – любая другая переменная, в частности, которая может являться функцией от x, например $u = \varphi(x)$ или $u = u(x)$.

5. $\int f(x)dx \equiv \int \frac{f(x)}{\varphi'(x)}\varphi'(x)dx = \int \frac{f(x)}{\varphi'(x)}d\varphi(x) \equiv \int \frac{f(x(\varphi))}{\varphi'_x(x(\varphi))}d\varphi$, где φ любая функция от x, и после интегрирования вместо φ надо подставить $\varphi(x)$.

Доказательство. Для доказательства свойства покажем, что производные по x от левой и правой частей равны. Этого достаточно, т.к. согласно теореме о двух первообразных, в этом случае сами левые и правые части отличаются только на произвольную постоянную. В этом смысле и понимается равенство неопределенных интегралов. Итак, согласно (6) и свойству 1

$$\left(\int \frac{f(x(\varphi))}{\varphi'_x(x(\varphi))}d\varphi\right)'_x = \left(\int \frac{f(x(\varphi))}{\varphi'_x(x(\varphi))}d\varphi\right)'_\varphi \cdot \varphi'_x = \frac{f(x(\varphi))}{\varphi'_x(x(\varphi))}\cdot\varphi'_x = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Это свойство, фактически используется при интегрировании заменой переменной, а самое главное, показывает, что в подынтегральном выражении с подынтегральной функцией $f(x)$ и дифференциалом переменной интегрирования dx можно обращаться как с обычными сомножителями, т.е. умножать одно и соответственно делить другое на одно и то же число или функцию. При этом, используется также свойство дифференциала (12) ($d\varphi = \varphi'_x dx$) для перехода от dx к $d\varphi$. Смысл замены переменной x на φ в том, чтобы в новой переменной интеграл легко брался, например, становился табличным.

Легко доказываются следующие два свойства:

6. $\int\left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

7. $\int A\cdot f(x)dx = A\int f(x)dx$.

8. Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ имеет геометрический смысл площади криволинейной трапеции между вертикалями $x=const$, например, a и b, и между кривой $y=f(x)$ и осью Ox (если $f(x)<0$, то соответствующая площадь берется со знаком минус).

3. Таблица интегралов

Таблица производных и свойство 1 позволяют составить таблицу основных интегралов. (Производная правой части каждой из нижеследующих формул равна подынтегральной функции).

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$,
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$,
4. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$.
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$.

Дополним таблицу формулами, которые получаются с помощью методов приведенных далее (проверить формулы можно, взяв производные от правых частей).

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.
13. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right) + C$.
14. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right) + C$.

Использование свойств 5 и 4 позволяет свести интеграл к табличному. В этом состоит метод непосредственного интегрирования.

Пример. $\int e^{x^2} \cdot 2x dx = \int e^{x^2} dx^2 = e^{x^2} + C$ (здесь $\varphi(x)$ или $u = x^2$).

4. Интегрирование заменой переменной

Формула замены переменной в неопределенном интеграле выглядит так:

$$\int f(x)dx = \int f\left[x(t)\right] \cdot x'_t(t)dt, \qquad t=t(x), \qquad (1)$$

где после вычисления неопределенного интеграла по t от подынтегральной функции $f\left[x(t)\right]\cdot x_t'(t)$ вместо переменной t надо подставить ее выражение через x. Здесь функция $x=x(t)$ имеет непрерывную производную $x_t'(t)$, не обращающуюся в ноль.

Доказательство формулы (1). Обозначим $t=t(x)$ функцию, обратную к $x=x(t)$. Тогда, как известно, $t_x' = \dfrac{1}{x_t'}$. Возьмем производную по x от левой части равенства (1). По свойству 1 получим $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$. Производная по x от правой части (дифференцируем как сложную функцию) равна

$$\left(\int f\left[x(t)\right]\cdot x_t'(t)dt \right)_x' = \left(\int f\left[x(t)\right]\cdot x_t'(t)dt \right)_t' t_x' = f\left[x(t)\right]x_t'(t)\frac{1}{x_t'(t)} = f\left[x(t)\right].$$

То есть производная правой части равна $f(x)$. Итак левая и правая часть равенства (1) есть первообразные одной и той же функции $f(x)$. По теореме о двух первообразных одной функции они могут отличаться лишь на постоянное слагаемое. Следовательно, равенство (1) верно, т.к. оно и понимается с точностью до постоянного слагаемого.

Пример интегрирования при помощи замены переменной. $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$. Положим $x=\sin t$, ($x(t)=\sin t$), причем, x изменяющемуся от –1 до +1, пусть соответствует t изменяющееся от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ и, следовательно, $\cos t \geq 0$. Дифференциал заменится $dx = (\sin t)_t' dt = \cos t dt$; Подинтегральная функция $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ заменится на $f\left[x(t)\right]=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$. Тогда

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\cos^2 t\,dt = \int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int\cos 2t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C,$$

т.к. $\int\cos 2t dt = \dfrac{1}{2}\int\cos 2t\cdot 2dt = \dfrac{1}{2}\int\cos 2t\cdot d2t = \dfrac{1}{2}\sin 2t + C$.

Осталось вернуться к переменной x. Т.к. $x=\sin t$, то $t=\arcsin x$. Таким образом, $\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{4}\sin(2\arcsin x)+C$. В этом примере, как и во многих других, ответ можно записать иначе, если заметить, что $\sin 2t=2\sin t\cos t=2x\sqrt{1-x^2}$. Итак

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

5. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \qquad (2)$$

Здесь u и v – две дифференцируемые функции от x.

Доказательство.

$$d(uv)=(uv)'dx=(u'v+uv')dx=vu'dx+uv'dx=v\,du+u\,dv.$$

Интегрируя, получаем $uv=\int v\,du+\int u\,dv$, откуда следует (2).

Формула (2) связывает между собой различные интегралы, выражающиеся через функции $u(x)$ и $v(x)$. Как правило, первоначально, интеграл, который требуется вычислить, имеет вид $\int f(x)\varphi(x)dx$. Обозначают $u(x)=f(x)$, $dv=\varphi(x)dx$. Чтобы воспользоваться (2), надо вычислить $v(x)=\int dv(x)\equiv\int\varphi(x)dx$, а также $du=u'(x)dx\equiv f'(x)dx$, после чего остается найти интеграл $\int v\,du\equiv\int v(x)du(x)=\int v(x)u'(x)dx\equiv\int v(x)f'(x)dx$. Формула (2) оказывается полезной, если вычисление двух интегралов $\int dv(x)$ и $\int v(x)du(x)$ – задача более простая, чем вычисление одного первоначального интеграла.

Замечание: При определении функции v по дифференциалу dv мы можем брать любую произвольную постоянную, так как в конечный результат она не входит (что легко проверить, подставив в равенство (2) вместо v выражение $v+C$). Поэтому удобно считать эту постоянную равной нулю.

Правило интегрирования по частям применяется во многих случаях. Так, например, интегралы вида $\int P(x)e^{bx}dx$, $\int P(x)\cos(bx)dx$,

$\int P(x)\sin(bx)dx$, где $P(x)$ – некоторый многочлен, определяются, полагая $u=P(x)$. Для вычисления интегралов вида $\int P(x)\log_a(bx)dx$, $\int P(x)\arcsin(bx)dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg}(bx)dx$, полагают $dv=P(x)dx$.

Пример 1. $\int x\sin xdx=?$

Положим $u=x$, $dv=\sin x\,dx$; тогда $du=dx$, $v=-\cos x$. $\Rightarrow$ (Следовательно)

$$\int x\sin xdx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C.$$

Пример 2. $\int x^{10}\ln xdx=?$

Положим $u=\ln x$, $dv=x^{10}dx$; тогда $du=\frac{1}{x}dx$

$v=\int x^{10}dx=\frac{x^{11}}{11}$ (C=0). Следовательно

$$\int x^{10}\ln xdx=\frac{1}{11}x^{11}\ln x-\frac{1}{11}\int x^{11}\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{1}{11}x^{11}\ln x-\frac{1}{11}\int x^{10}dx=\frac{1}{11}x^{11}\left(\ln x-\frac{1}{11}\right)+C$$

Пример 3. $\int(3x-2)\cdot 5^x dx=?$

Положим $u=3x-2$, $dv=5^x dx$; тогда $du=3dx$, $v=\int 5^x dx=\frac{5^x}{\ln 5}$.

Поэтому

$$\int(3x-2)\cdot 5^x dx=\frac{1}{\ln 5}(3x-2)5^x-\frac{3}{\ln 5}\int 5^x dx=\frac{1}{\ln 5}(3x-2)5^x-\frac{3}{\ln^2 5}5^x+C.$$

Пример 4. $J=\int(x^2+7x-5)\cos 2xdx=?$

Положим $u=x^2+7x-5$, $dv=\cos 2x\,dx$; тогда $du=(2x+7)\,dx$, $v=\frac{\sin 2x}{2}$,

$$J=(x^2+7x-5)\frac{\sin 2x}{2}-\int(2x+7)\frac{\sin 2x}{2}dx.$$

Применим еще раз интегрирование по частям к последнему интегралу, принимая $u_1=\frac{2x+7}{2}$, $dv_1=\sin 2x\,dx$; тогда $du_1=dx$, $v_1=-\frac{\cos 2x}{2}$;

$$\int\frac{(2x+7)}{2}\sin 2xdx=\frac{(2x+7)}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)-\int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx=$$

$$=-\frac{(2x+7)\cos 2x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

Поэтому $J=(x^2+7x-5)\frac{\sin 2x}{2}+(2x+7)\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}-C$. После приведения общих членов и изменения знака произвольной постоянной окончательно имеем $J=(2x^2+14x-11)\frac{\sin 2x}{4}+(2x+7)\frac{\cos 2x}{4}+C$.

6. Интегрирование простейших рациональных дробей

Определение. Правильные рациональные дроби вида

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k – целое положительное число ≥ 2),

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т.е. $\frac{p^2}{4}-q<0$),

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k – целое положительное число ≥ 2; корни знаменателя комплексные),

называются простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов.

Интегрирование простейших дробей типа I, II и III не составляет большой трудности, поэтому мы проведем их интегрирование без каких-либо дополнительных пояснений:

I. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$.

II. $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=-\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C$.

III. $$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+$$

$$+\frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int\frac{d\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2+1}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей IV типа. Пусть нам дан интеграл такого типа:

IV. $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$. Произведем преобразования:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=-\frac{A}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}}+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Этот интеграл обозначим через I_k и запишем в виде

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

полагая $x+\frac{p}{2}=t, dx=dt, q-\frac{p^2}{4}=m^2$ (по предположению корни знаменателя комплексные, а следовательно, $q-\frac{p^2}{4}>0$). Далее связываем I_{k-1} и I_k : $I_{k-1} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}$. Применим интегрирование по частям, принимая $u = \frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}$, $dv=dt$; тогда $du = -\frac{(k-1)2tdt}{(t^2+m^2)^k}$, $v=t$;

$$I_{k-1} = \frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{(t^2+m^2-m^2)dt}{(t^2+m^2)^k}.$$

Отсюда

$$I_{k-1} = \frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} + 2(k-1)I_{k-1} - 2(k-1)m^2 I_k .$$

Группируя I_{k-1} в правой части и перенося I_k в левую, получим

$$2(k-1)m^2 I_k = \frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} + \left[2(k-1)-1\right]I_{k-1},$$

откуда

$$I_k = \frac{t}{2(k-1)m^2(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)m^2} I_{k-1}.$$

Таким образом, мы выразили I_k через I_{k-1} . Подставив в эту формулу вместо k число k-1, выразим I_{k-1} через I_{k-2} . Продолжая идти тем же путем, дойдем до известного интеграла

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m}\int \frac{d(t/m)}{(t/m)^2+1} = \frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m} + C .$$

Подставляя затем всюду в полученные формулы вместо t и m их значения, получим выражение интеграла IV через x и заданные числа A, B, p, q.

7. Разложение многочлена на множители. Рациональные функции

Разложение многочлена на множители

$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n$, где n - целое положительное число, называется многочленом (полиномом) степени n. A_0, A_1, A_2,..., A_n – числа, называются коэффициентами многочлена, их будем считать действительными числами. Число $x = a$, при котором многочлен обращается в нуль $f(a) = 0$, называется корнем многочлена. Согласно основной теореме алгебры, всякий многочлен имеет хотя бы один корень – действительный или комплексный. Многочлен степени n имеет n – корней, среди которых могут быть и действительные и комплексные числа.

Если число $\alpha+i\beta$ (α, β - действительные числа) является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то комплексно-сопряженное число $\alpha-i\beta$ также является корнем этого многочлена. Отсюда вытекает, что для многочлена степени n справедливо следующее разложение на множители:

$$f(x)=A_0(x-a_1)\cdots(x-a_i)(x-b_1)^{\beta_1}\cdots(x-b_j)^{\beta_j}\cdot \\ \cdot(x^2+l_1x+m_1)\cdots(x^2+l_kx+m_k)(x^2+p_1x+q_1)^{\gamma_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{\gamma_r} \quad (3)$$

При этом $i+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_j+2k+2\gamma_1+2\gamma_2+\cdots+2\gamma_r=n$. Здесь предполагается, что среди множителей нет одинаковых, т.е. считается, что одинаковые множители уже объединены в степени. Квадратные трехчлены не разлагаются на линейные множители с действительными корнями, т.е. указанные трехчлены имеют лишь комплексные корни.

Множителю $x-a_i$ отвечает простой действительный корень $x=a_i$ многочлена $f(x)$. Множителю $(x-b_j)^{\beta_j}$ отвечает действительный корень $x=b_j$ кратности β_j многочлена $f(x)$. Множителю $(x^2+l_k\,x+m_k)$ отвечает пара комплексно-сопряженных корней многочлена $f(x)$. Множителю $(x^2+p_r\,x+q_r)$ отвечает пара комплексно-сопряженных корней кратности γ_r многочлена $f(x)$.

Рациональные функции (рациональные дроби)

Рациональной функцией (дробью) называется функция, которая определяется формулой, содержащей конечное число 4-х арифметических действий: сложение, вычитание, умножение и деление. Рациональную функцию (дробь) можно представить в виде отношения двух многочленов

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n}.$$

Если $m<n$, дробь называется правильной. Если $m\geq n$, дробь называется неправильной. Неправильную дробь, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, всегда можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби, т.е. в виде

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{f(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен, $\frac{F(x)}{f(x)}$ - правильная дробь.

Пример. $\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$ делим по правилу деления многочленов

$$\begin{array}{r|l} x^4-3 & x^2+2x+1 \\ \hline -\,x^4+2x^3+x^2 & x^2-2x+3 \\ \hline -2x^3-x^2-3 & \\ -\,-2x^3-4x^2-2x & \\ \hline 3x^2+2x-3 & \\ -\,3x^2+6x+3 & \\ \hline -4x-6 & \end{array}.$$

Итак, получили $\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x+6}{x^2+2x+1}$.

Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании *правильных* рациональных дробей.

Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей

Пусть правильная рациональная дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ имеет знаменатель вида (3). Тогда эту дробь можно разложить на следующую сумму простейших дробей:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_i}{x-a_i}+\left[\left(\frac{B_{1,1}}{x-b_1}+\cdots+\frac{B_{1,\beta_1}}{(x-b_1)^{\beta_1}}\right)+\cdots+\left(\frac{B_{j,1}}{x-b_j}+\cdots+\frac{B_{j,\beta_j}}{(x-b_j)^{\beta_j}}\right)\right]+$$

$$+\left[\frac{L_1x+M_1}{x^2+l_1x+m_1}+\cdots+\frac{L_kx+M_k}{x^2+l_kx+m_k}\right]+ \qquad (4)$$

$$+\left[\left(\frac{P_{1,1}x+Q_{1,1}}{x^2+p_1x+q_1}+\cdots+\frac{P_{1,\gamma_1}x+Q_{1,\gamma_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\gamma_1}}\right)+\cdots+\left(\frac{P_{r,1}x+Q_{r,1}}{x^2+p_rx+q_r}+\cdots+\frac{P_{r,\gamma_r}x+Q_{r,\gamma_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{\gamma_r}}\right)\right].$$

Простому корню знаменателя $f(x)$ отвечает одна дробь. Корню кратности β_j или γ_r знаменателя отвечает сумма β_j или γ_r дробей, в которых последовательно возрастают степени знаменателя. Числителями дробей, отвечающих комплексно-сопряженным корням, стоят двучлены первой степени. В формуле (4) $A_1,\ldots A_i$, $B_{1,1},\ldots$, L_1, $M_1,\ldots,P_{1,1},Q_{1,1},\ldots$ – постоянные, которые требуется найти, их называют коэффициентами. Формула (4) приводится без вывода, но рассмотренный дальше метод определения коэффициентов этого разложения можно рассматривать как обоснование этого разложения. Правую часть формулы (4) приведем к общему знаменателю, он будет равен $f(x)$, тогда получим

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{\Phi(x)}{f(x)} \qquad (5)$$

$\Phi(x)$ – является многочленом. Мы его расположим по степеням x, собирая члены с одинаковыми степенями x, причем коэффициенты при степенях x многочлена $\Phi(x)$ будут содержать искомые (которые ищутся) коэффициенты разложения (4), т.е. коэффициенты $A_1,\ldots A_i$, $B_{1,1},\ldots$, L_1, $M_1,\ldots,P_{1,1},Q_{1,1},\ldots$. В соотношении (5) знаменатели отбросим:

$$F(x)=\Phi(x). \qquad (6)$$

Это соотношение, как и соотношения (5), (4), выполняется при всех x, т.е. является тождеством. Здесь обе части равенства (6) являются многочленами. Если два многочлена равны друг другу тождественно, т.е. при всех x, то их коэффициенты при одинаковых степенях x равны друг другу.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов $F(x)$ и $\Phi(x)$ в (6), получим уравнения для определения искомых коэффициентов формулы (4), их будет столько, сколько надо. Но уравнения для определения указанных коэффициентов можно получить иначе: подставляя в тождество (6) произвольные значения вместо x. Очень простые уравнения получаются, если в (6) подставлять значения

x, равные действительным корням знаменателя $f(x)$. На практике оба эти подхода лучше использовать вместе.

Примеры.

1) $\dfrac{x-3}{x^3-x}=\dfrac{x-3}{x(x+1)(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-1}$,

$x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=+1$ – корни знаменателя.

Приведем к общему знаменателю, потом его отбросим

$$x\text{-}3=A\,(x^2\text{-}1)+B\,x\,(x\text{-}1)+C\,x\,(x\text{+}1)\,. \qquad (7)$$

Справа приведем подобные члены, т.е. многочлен расположим по степеням x

$$x\text{-}3=x^2\,(A+B+C)+x\,(-B+C)+(-A)\,.$$

Слева, справа сравним коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравняем друг другу коэффициенты левой и правой частей при x^2, x и x^0=1 (свободные члены). Получим уравнения соответственно:

$0=A+B+C$,

$1=-B+C$,

$-3=-A$.

Решение системы: $A=3$, $B=-2$, $C=-1$.

Но эти коэффициенты проще найти иначе. В соотношение (7) вместо x подставим значения, равные корням знаменателя, т.е. 0, -1, 1. При этом получим уравнения соответственно:

$$-3=-A\,,\Rightarrow A=3,$$
$$-4=2B\,,\Rightarrow B=-2,$$
$$-2=2C\,,\Rightarrow C=-1.$$

Получаем разложение:

$$\frac{x-3}{x^3-x}=\frac{3}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}\,.$$

2) $\dfrac{7x^2+6x+3}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}=\dfrac{7x^2+6x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$,

$x=-1$ – действительный корень кратности 2 знаменателя. Приведем к общему знаменателю, затем его отбросим

$$7x^2+6x+3=$$
$$A\,(x+1)\,(x^2+x+1)+B\,(x^2+x+1)+(Cx+D)\,(x+1)^2\,. \qquad (8)$$

Положим $x = -1$, получим $4 = B$, $B = 4$. В формуле (8) сравним коэффициенты при x^3, x^2 слева, справа и свободные члены. Получим соответственно:

$0 = A + C$,

$7 = A \cdot (2) + B + C \cdot (2) + D$,

$3 = A + B + D$.

С учетом найденного значения $B = 4$ из этой системы трех уравнений имеем $A = -4$, $C = 4$, $D = 3$. Получаем разложение:

$$\frac{7x^2 + 6x + 3}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1} = \frac{-4}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{4x+3}{x^2 + x + 1}. \qquad (9)$$

8. Интегрирование рациональных функций

Пусть требуется найти интеграл от рациональной дроби: $\int \frac{Q(x)}{f(x)} dx$.

Здесь возможны два случая:

1) $\frac{Q(x)}{f(x)}$ - есть правильная дробь. Мы ее разложим на сумму простейших дробей по формуле (4), тогда искомый интеграл $\int \frac{Q(x)}{f(x)} dx$ будет равен сумме интегралов от простейших дробей, которые вычисляются указанным раньше методом.

2) $\frac{Q(x)}{f(x)}$ - является неправильной дробью. Запишем ее в виде $\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)}$, где $M(x)$ – многочлен, $\frac{F(x)}{f(x)}$ - правильная дробь. Эту дробь разложим на сумму простейших дробей по формуле (4). Тогда искомый интеграл $\int \frac{Q(x)}{f(x)} dx$ будет равен интегралу от многочлена $M(x)$, который вычисляется непосредственно, плюс сумма интегралов от простейших дробей, которые вычисляются известным способом.

Пример. С учетом разложения (9) вычислим интеграл

$$\int \frac{7x^2 + 6x + 3}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1} dx = -4 \int \frac{dx}{x+1} + 4 \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{4x+3}{x^2 + x + 1} dx =$$

$$= \left\{ d(x+1) = (x+1)'dx = dx \right\} = -4\int \frac{d(x+1)}{x+1} + 4\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} + \int \frac{4x+3}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{4x+3}{x^2+x+1}dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+x+1}dx = \int \frac{4x+3}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}dx = \\ = \int \frac{4x+3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \left\{ \begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=t \\ x=t-\frac{1}{2} \end{array} \right\} = \int \frac{4t+1}{t^2+\frac{3}{4}}dt = 4\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt + \\ + \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = 2\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} = \\ = 2\ln\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{array} \right\} =$$

$$= -4\ln(x+1) - \frac{4}{x+1} + 2\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C .$$

9. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Иррациональной называется функция, определенная формулой, в которой над аргументом производится лишь конечное число 4-х арифметических действий (сложение, вычитание, умножение и деление) и действий извлечения корня с целым показателем.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \ldots \sqrt[n_k]{(ax+b)^{m_k}}\right)dx,$$

где R - рациональная функция своих аргументов. Обозначим через r наименьшее общее кратное показателей корней n_1, n_2, ... n_k (т.е. наименьшее из всех целых чисел, делящихся без остатка на n_1, n_2, ... n_k). Сделаем замену $ax+b=t^r$, $x=\frac{1}{a}(t^r-b)$, $dx=\frac{r}{a}t^{r-1}dt$. Тогда каждая дробная степень $(ax+b)$ выразится через целую степень t и, следова-

тельно, подынтегральная функция обратится в рациональную функцию от t, и, следовательно, интеграл от нее может быть вычислен.

Замечание: если вместо $ax+b$ в интеграле стоит $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$, то замена $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=t^r$ приводит к аналогичному результату.

Пример. $J=\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x=1}}$. Используя подстановку $x+1=t^6$, $x=t^6-1$, $dx=6t^5$, получим

$$J=\int\frac{(t^6-1)\cdot 6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^5(t^3-1)(t^3+1)}{t^2(t+1)}dt=6\int\frac{t^3(t^3-1)(t+1)(t^2-t+1)}{(t+1)}dt=$$

$$=6\int t^3(t^3-1)(t^2-t+1)dt=6\int(t^8-t^7+t^6-t^5+t^4-t^3)\,dt=$$

$$=6\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}-\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}+\frac{6}{7}(x+1)^{7/6}-(x+1)+\frac{6}{5}(x+1)^{5/6}-\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}+C.$$

Есть еще один из видов иррациональных функций, от которых берутся интегралы, т.е. интегралы выражаются через элементарные функции. Это интегралы вида

$$J=\int P\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\quad a\neq 0,\ c-\frac{b^2}{4a}\neq 0,$$

где P - рациональная функция своих аргументов x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

В квадратном трехчлене выделяем полный квадрат $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$ и делаем замену $t=x+\frac{b}{2a}$. Возможны три различных случая, в зависимости от знаков a и $c-\frac{b^2}{4a}$, которые могут быть равны соответственно + +, + -, - +. Знаков - - быть не может, т.к. подкоренное выражение ≥ 0. Каждому случаю соответствует свои тип интеграла от рациональной функции R и соответствующая замена через новую переменную u :

1) + + :

$J=\int R\left(t,\sqrt{n^2+m^2t^2}\right)dt$, замена $mt=n\,\mathrm{tg}\,u$.

2) + - :

$J=\int R\left(t,\sqrt{m^2t^2-n^2}\right)dt$, замена $mt=\dfrac{n}{\sin u}$ или $mt=\dfrac{n}{\cos u}$.

3) - + :

$J=\int R\left(t,\sqrt{n^2-m^2t^2}\right)dt$, замена $mt=n\sin u$.

Для всех 3-х типов интегралов после замены получим интегралы от рациональных функций тригонометрических функций $\sin u$ и $\cos u$. Эти интегралы берутся, что будет показано далее.

10. Интегрирование тригонометрических функций

Вначале приведем некоторые тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}. \tag{10}$$

$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x,\ \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,$$

$$1+\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\ 1+\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Интеграл вида $J=\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, где R - рациональная функция своих аргументов $\sin x$ и $\cos x$, с помощью так называемой универсальной тригонометрической подстановки $u=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$, приводится к некоторой дробно-рациональной функции относительно переменной u.

Пусть $u=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$, тогда

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}, \tag{11}$$

$$\frac{x}{2}=\mathrm{arctg}\,u,\ x=2\,\mathrm{arctg}\,u,\ dx=\frac{2du}{1+u^2}.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sin\cdot-\cos\cdot}=\int\frac{\frac{2du}{1+\cdot^2}}{\frac{2\cdot}{1+\cdot^2}-\frac{1-\cdot^2}{1+\cdot^2}}=\int\frac{2du}{\cdot^2+2\cdot-1}=2\int\frac{d(u+1)}{(\cdot+1)^2-2}=$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cdot+1-\sqrt{2}}{u+1+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\cdot}{2}+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Замена (11) для вычисления интеграла J в силу своей универсальности является не всегда экономной в смысле проведения выкладок, т.е. она во многих случаях приводит к большим вычислениям. Поэтому применяются там, где это возможно, другие замены, более экономные.

Отметим три случая, в которых можно использовать (11), но лучше сделать другие замены:

1) $\int R(\sin x)\cos x\,dx$. Здесь лучше сделать замену $\sin x=u$. Тогда $\cos x\,dx = du$.

Интеграл примет вид: $\int R(u)\,du$.

2) $\int R(\cos x)\sin x\,dx$. Здесь лучше сделать $\cos x=u$. Тогда $-\sin x\,dx = du$, интеграл: $-\int R(u)\,du$.

3) $\int R\left(\sin^2 x,\cos^2 x\right)dx$. Замена $\operatorname{tg}x=u$. Тогда $x=\operatorname{arctg}u$, $dx=\frac{du}{1+u^2}$,

$$\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{u^2}{1+u^2},\ \cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{1}{1+u^2}.$$

Интеграл примет вид: $\int R\left(\frac{u^2}{1+u^2},\frac{1}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}$. В понятных случаях вычислить интеграл $\int R\left(\sin^2 x,\cos^2 x\right)dx$ можно еще проще, не делая указанной замены, а просто используя формулы (10) для понижения степени тригонометрических функций.

11. Неберущиеся интегралы, или о функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$ для любого x. В высшей математике доказывается, что для любой непрерывной функции $f(x)$ существует первообразная $F(x)$, т.е. есть существует неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$. Оказывается, что этот неопределенный интеграл или первообразную $F(x)$ не всегда можно записать с помощью элементарной функции. Примерами таких неопределенных интегралов являются следующие:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx, \ldots$$

Для того, чтобы записать такие интегралы, нужно ввести новые функции, уже не являющиеся элементарными.

12. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции S_{aABb}, ограниченной снизу интервалом $[a,b]$, сверху – графиком непрерывной функции $y = f(x)$, слева – прямой $x=a$, справа – прямой $x=b$, причем $f(x) \geq 0, x \in [a,b]$.

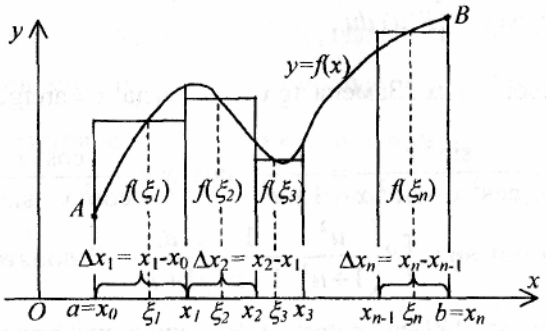

Рис. 1

Разбиваем $[a,b]$ произвольно на n частей точками $x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=b$. Внутри первого интервала $[a, x_1]$ произвольно выбираем ξ_1, внутри второго ξ_2 и т.д.; в этих точках вычисляем значения функции $f(x)$, т.е. находим $f(\xi_1)$, $f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$. Обозначим $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots$, $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Образуем произведения $f(\xi_1)\Delta x_1$, $f(\xi_2)\Delta x_2, \ldots, f(\xi_n)\Delta x_n$ и просуммируем их. Получим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n .$$

Из рисунка видно, что S_n равно площади ступенчатой фигуры. Если число разбиений n увеличивать так, чтобы длины всех интервалов уменьшались, то ступенчатая фигура по форме приближается к криволинейной трапеции. Поэтому

$$S_{aABb} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (12)$$

VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

13. Определение определенного интеграла. Его геометрический смысл

Пусть в интервале $[a,b]$ задана непрерывная функция $f(x)$ (рис. 1). Разобьем интервал произвольным образом на n частей точками $x_0=a$, x_1, $x_2,\ldots$, x_{n-1}, $x_n = b$. Получим n частичных интервалов с длинами $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1,\ldots$, $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$, на которые распадется интервал $[a,b]$. Внутри первого интервала $[a, x_1]$ произвольно выберем точку ξ_1, внутри второго - точку ξ_2 и т.д. В каждой из этих точек вычислим значение функции, т.е. найдем числа $f(\xi_1)$, $f(\xi_2),\ldots, f(\xi_n)$. Образуем произведения $f(\xi_1)\Delta x_1$, $f(\xi_2)\Delta x_2,\ldots, f(\xi_n)\Delta x_n$ и сложим их. Полученная сумма

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (13)$$

называется интегральной суммой для функции $f(x)$ и интервала $[a,b]$. Если независимо от способа разбиения интервала $[a,b]$ на частичные интервалы и от выбора точек $\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_n$, интегральная сумма (13) при $n \to \infty$ ($\max \Delta x_i \to 0$) имеет один и тот же предел, то этот предел называют определенным интегралом (О.И.) от функции $f(x)$ на интервале $[a,b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)dx$. Итак,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (14)$$

(в предельном переходе неограниченно увеличивается число n разбиений интервала, а длины всех интервалов разбиений стремятся к нулю). Здесь a – верхний предел, b - нижний предел интегрирования. Отметим, что О.И. – это число, неопределенный интеграл – функция. Из сравнения формул (12) и (14) видим, что О.И. – это площадь криволинейной трапеции S_{aABb} (рис.1). В этом состоит *геометрический смысл определенного интеграла.*

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна в интервале $[a,b]$, то О.И. от функции $f(x)$ на интервале $[a,b]$ существует.

Ранее мы предполагали $a < b$. Пусть теперь $a > b$. В этом случае примем

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx . \qquad (15)$$

При $a = b$: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Из формулы (14) при $f(x)$=1 следует, что $\int_a^b dx = b - a$.

14. Свойства определенного интеграла

1) Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла, т.е. если $A = const$, то

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx . \qquad (16)$$

Доказательство.

$$\int_a^b Af(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} Af(\xi_i)\Delta x_i = A \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx .$$

2) Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций. Например, для двух функций имеем

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx . \qquad (17)$$

3) Если $f(x) \geq \varphi(x)$ всюду в интервале $[a,b]$ (здесь $a < b$), то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx . \qquad (18)$$

4) Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в интервале $[a,b]$ (причем $a < b$), то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) . \qquad (19)$$

5) Теорема о среднем. Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[a,b]$, то в этом интервале найдется хотя бы одна точка ξ, $a \leq \xi \leq b$, для которой справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) . \qquad (20)$$

Это свойство, т.е. формула (20), имеет теоретическое значение. Но для вычисления интеграла, стоящего слева, формула не годится, т.к. точка ξ заранее неизвестна.

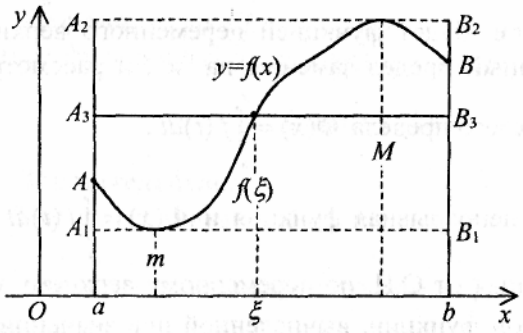

Рис. 2

Свойства 4-5 определенного интеграла имеют простое геометрическое истолкование. Пусть подынтегральная функция $f(x)>0$ всюду в интервале $[a,b]$. На рис.2 площади прямоугольников с основанием ab, с высотами m, $f(\xi)$, M равны $S_{aA_1B_1b} = m(b-a)$, $S_{aA_3B_3b} = f(\xi)(b-a)$, $S_{aA_2B_2b} = M(b-a)$.

Площадь криволинейной трапеции с основанием ab, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, равна $S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$.

Свойство 4 показывает, что $S_{aA_1B_1b} \leq S_{aABb} \leq S_{aA_2B_2b}$. Свойство 5 показывает, что $S_{aABb} = S_{aA_3B_3b}$.

6) Для любых 3-х точек a, b, c выполняется соотношение

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad (21)$$

если все 3 интеграла существуют.

15. Производная от определенного интеграла по переменному верхнему пределу

Из определения О.И. вытекает, что О.И. не зависит от обозначения переменной интегрирования, а зависит лишь от подынтегральной функции $f(x)$ и пределов интегрирования, т.е. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$. Возьмем непрерывную функцию $f(x)$, нижний предел интегрирования a зафиксируем, а верхний предел b будем изменять. Тогда $\int_a^b f(t)dt$ также будет изменяться, т.е. будет функцией переменного верхнего предела. Верхний переменный предел заменим на x, и рассмотрим функцию переменного верхнего предела $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Теорема. Если *f(x)* – непрерывная функция и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то $\Phi'(x) = f(x)$, т.е. производная от О.И. по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, вычисленной при значении аргумента, равного верхнему пределу x.

Доказательство.

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x},$$

где

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

т.к. $\Phi(x+\Delta x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int\limits_a^x f(t)dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$. Но по 5-му свойству (20) имеем $\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x$, где $x\le\xi\le x+\Delta x$. Поэтому $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x)$, т.к. ξ - некоторая точка из интервала $[x, x+\Delta x]$ и из $\Delta x \to 0 \Rightarrow \xi\to x$. Итак $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x)$. Из теоремы сразу следует, что $\int\limits_a^x f(t)dt$ есть первообразная для функции *f(x)*.

16. Теорема Ньютона-Лейбница

Теорема. Если *F(x)* есть какая-нибудь первообразная для непрерывной функции *f(x)*, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a), \qquad (22)$$

Доказательство.

Пусть *F(x)* - какая-нибудь первообразная для *f(x)*, т.е. $F'(x)=f(x)$. В предыдущем пункте доказано, что и $\int\limits_a^x f(t)dt$ есть первообразная для *f(x)*. Но две первообразные одной и той же функции *f(x)* могут отличаться лишь на постоянное слагаемое, т.е.

$$\int\limits_a^x f(t)dt=F(x)+C \qquad (23)$$

для всех *x*. Для $x = a$ это равенство примет вид

$$\int\limits_a^a f(t)dt=F(a)+C,\ \Rightarrow 0=F(a)+C,\ \Rightarrow C=-F(a).$$

Подставим это в (23): $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. В этой формуле x – любое значение, положим $x = b$. Получим $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ или $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, т.к. О.И. не зависит от обозначения переменной интегрирования. В дальнейшем разность двух значений функции будем обозначать $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Итак, доказано

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Эта формула показывает, что вычисление О.И. от функции *f(x)* приводится к нахождению первообразной *F(x)* для *f(x)* (т.е. к вычислению неопределенного интеграла).

Пример

$$\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

17. Замена переменных в определенном интеграле

Теорема. Дан $\int_a^b f(x)dx$, где *f(x)*- непрерывная функция. Пусть $x=\varphi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, причем:

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, т.е. $t = \alpha$ и $t = \beta$ отвечают соответственно значениям $x = a$ и $x = b$ согласно $x=\varphi(t)$;

2) $\varphi'(t)$ непрерывна в интервале $[\alpha, \beta]$;

3) $\varphi'(t)$ сохраняет знак в интервале $[\alpha, \beta]$, т.е. $\varphi(t)$ - монотонная функция в этом интервале. Тогда справедлива следующая формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (24)$$

Из формулы видно, что при замене переменной вида $x=\varphi(t)$ в определенном интеграле в отличие от неопределенного интеграла нет необходимости возвращаться к старой переменной x после вычисления инте-

грала по t . При замене переменной в определенном интеграле мы от старых пределов a , b для x должны перейти к новым пределам α, β для x.

Пример.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}.$$

Сделаем замену x=tg t, т.е. $\varphi(t)$ = tg t. $\Rightarrow \varphi'(t)=\dfrac{1}{\cos^2 t}$,

$$dx=\varphi'(t)dt=\frac{dt}{\cos^2 t},\ \left(1+x^2\right)^{3/2}=\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{3/2}=\frac{1}{\cos^3 t}.$$

Найдем α, β . Пусть x= 0, т.е. 0 = tg $\alpha \Rightarrow \alpha$= 0; пусть x= 1, т.е. 1 = tg β $\Rightarrow \beta$= π/4. Итак

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}=\int_0^{\pi/4}\cos^3 t\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\pi/4}\cos t\,dt=\sin t\Big|_0^{\pi/4}=\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

18. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть u и v – две дифференцируемые функции от x. Тогда

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Интегрируя обе части тождества в пределах от a до b, получим

$$\int_a^b (uv)'dx=\int_a^b u'vdx+\int_a^b uv'dx. \qquad (25)$$

Так как $\int (uv)'dx=uv+C$, то $\int_a^b (uv)'dx=uv\Big|_a^b$; поэтому равенство (25) может быть записано в виде $uv\Big|_a^b=\int_a^b v\,du+\int_a^b u\,dv$ или окончательно

$$\int_a^b v\,du=uv\Big|_a^b-\int_a^b u\,dv. \qquad (26)$$

Пример.

$$\int_1^2 x\ln x dx\,.$$

Выберем $u=\ln x$, $dv = x\,dx$; тогда $du=\frac{1}{x}dx$, $v=\int x dx=\frac{x^2}{2}$ (C=0).

Вычисляем по формуле (26)

$$\int_1^2 x\ln x dx=\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{4}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\int_1^2 x dx=2\ln 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=2\ln 2-1+\frac{1}{4}=2\ln 2-\frac{3}{4}\,.$$

19. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур

Пусть $f(x)\geq 0$ для $x\in[a,b]$ (см. рис.3а). Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла, площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу осью Ox, слева – прямой $x=a$, справа – прямой $x=b$ вычисляется по формуле

$$S_1=\int_a^b f(x)dx\,.$$

На основе этой формулы легко получить следующее:
для $f(x)\leq 0$ (см. рис.3б):

$$S_2=-\int_a^b f(x)dx\,,$$

для $f_1(x)\leq f_2(x)$ (см. рис.3в):

$$S_3=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx\,.$$

В последнем случае определяемая площадь находится между двумя кривыми, одна из которых выше другой. Как они располагаются относительно оси Ox при этом не важно.

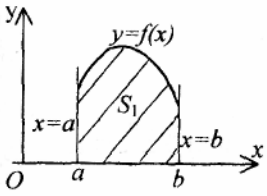

Рис. 3а

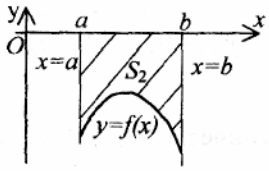

Рис. 3б

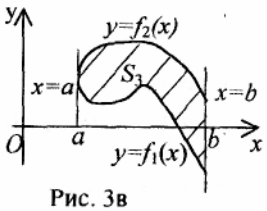

Рис. 3в

В некоторых случаях измеряемую фигуру надо разбить на части.

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями x+y=2, $y=x^3$, y=0. Решение. Найдем абсциссу точки пересечения прямой и кубической параболы из уравнения $2-x=x^3 \Rightarrow x=1$. Ордината $y=1$. Нарисуем график:

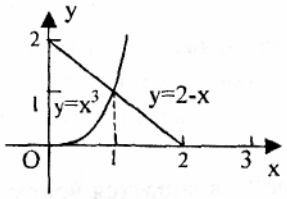

Рис. 4

Искомая площадь есть сумма площадей под кривой $y=x^3$ (0<x<1) и под отрезком прямой $y=2-x$ (1<x<2). Каждая площадь под кривой $y=f(x)$ вычисляется по формуле $S=\int_a^b f(x)dx$. Отсюда имеем

$$S=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2(2-x)dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-\frac{(2-x)^2}{2}\Big|_1^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

20. Длина дуги кривой

Пусть дуга задана уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$. Тогда в соответствии с формулой (19) на стр. 18 для производной длины дуги, длина дуги l определяется следующей формулой:

$$l=\int_a^b dl=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (27)$$

Если дуга кривой задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, то в соответствии с формулами (11) и (12) раздела I ($dy\equiv df=f'(x)\cdot dx\Rightarrow dx=x'(t)\cdot dt$) имеем

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt .$$

Пример.

Найти длину дуги кубической параболы $y=x^2$ при $0 \le x \le 1$.

Решение.

Учитывая, что $f'(x) = 2x$, получим

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx = 2\int_0^1 \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\, dx .$$

Отсюда, используя формулу (14) из таблицы интегралов, имеем

$$l = \frac{2}{2}\left(x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\ln\left| x + \sqrt{x^2+\frac{1}{4}} \right| \right)\Bigg|_0^1 = \sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{4}\ln\left(1+\sqrt{\frac{5}{4}}\right) - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) .$$

21. Объем тела вращения

Пусть криволинейная трапеция *aABb* (рис.5) вращается вокруг оси *Ox*.

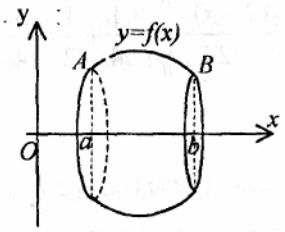

Рис. 5

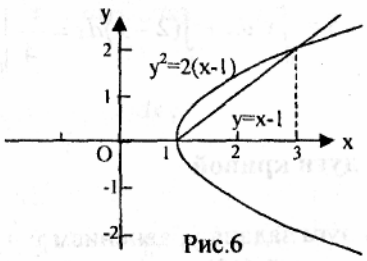

Рис.6

Объем V тела вращения может быть вычислен, если интервал $[a,b]$ разделить на участки шириной Δx_i, через границы которых провести плоскости, перпендикулярные оси Ox. Тогда объем тела приближенно будет равно сумме объемов ΔV_i цилиндров с высотой Δx_i и круглым основанием с радиусом $f(\xi_i)$, т.е. $\Delta V_i = \pi f^2(\xi_i)\,\Delta x_i$. В пределе $(\max \Delta x_i \to 0)$ эта сумма даст определенный интеграл, поэтому

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx .$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=x\ (t)$, $y=y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$V = \pi \int_\alpha^\beta y^2(t)\,x'(t)dt .$$

Пример.

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2=2(x-1)$, $y=x-1$.

Решение.

Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой из уравнения

$2(x-1) = (x-1)^2 \Rightarrow x_1=1$, $x_2=3$. Ординаты $y_1=0$, $y_2=2$. Нарисуем график (см. рис.6). Искомый объем есть разность объемов, полученных от вращения соответственно параболы с верхней границей $y^2=2(x-1)$ $(1<x<3)$ и отрезка прямой $y=x-1$ $(1<x<3)$. Каждый объем для кривой $y=f(x)$ вычисляется по формуле $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. Отсюда имеем

$$V = \pi \int_1^3 2(x-1)dx - \pi \int_1^3 (x-1)^2\,dx = \pi \left[(x-1)^2 - \frac{(x-1)^3}{3} \right]\Bigg|_1^3 = \frac{4}{3}\pi .$$

22. Площадь поверхности тела вращения

Пусть криволинейная трапеция $aABb$ (рис.5) вращается вокруг оси Ox. Площадь поверхности тела вращения S может быть вычислена аналогичными рассуждениями, как для объема тела вращения. Надо только заметить, что площадь усеченного конуса с высотой Δx_i и образующей Δl_i равна $\Delta S_i \approx 2\pi f(\xi_i)\,\Delta l_i$, откуда согласно формуле (27) имеем $\Delta S_i \approx 2\pi\ f(\xi_i)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ \Delta x_i$. Поэтому

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx .$$

Пример.

Найти площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линией $y^2=2(x-1)$ при $1 \le x \le 3$.
Решение. График соответствующей кривой имеется на рис.6. Учитывая, что

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2(x-1)}},$$

получим

$$S=2\pi\int_1^3\sqrt{2(x-1)}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2(x-1)}}\,dx=\pi\int_1^3\sqrt{2x-1}\,d(2x-1).$$

Отсюда имеем

$$S=\pi\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}\Big|_1^3=\frac{2}{3}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

23. Приближенное вычисление определенного интеграла. Формула Симпсона

Не для всякой непрерывной функции ее первообразная может быть выражена через элементарные функции. Кроме того, подынтегральная функция может быть получена экспериментально и дана в виде таблицы или графически. В таких случаях применяются различные методы приближенного вычисления определенного интеграла. Довольно часто используется формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{\Delta x}{3}\left[y_0+y_n+2\left(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2}\right)+4\left(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1}\right)\right],$$

где $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, n – четное, $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1),\ldots,$ $y_n=f(x_n)$; $x_0=a$, $x_1,\ldots,x_n=b$ – точки деления отрезка $[a,b]$ на равные частичные интервалы шириной Δx. Эта формула легко получается, если рассмотреть $\frac{n}{2}$ частичных интервалов шириной $2\Delta x$: $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4],\ldots,$ $[x_{n-2},x_n]$. В каждом таком интервале $[x_i, x_{i+2}]$ (i, $i+2$ – четные индексы), посередине находится точка x_{i+1}, где $i+1$ – нечетный индекс. Три точки с абсциссами x_i, x_{i+1}, x_{i+2} имеют значения ординат соответственно y_i, y_{i+1}, y_{i+2}. Через эти три точки проведем параболу $y=Ax^2+Bx+C$ и выразим ее ко-

эффициенты через x_i, x_{i+1}, x_{i+2} и y_i, y_{i+1}, y_{i+2}. Если теперь вычислим определенный интеграл для параболы

$$S_i = \int_{x_i}^{x_{i+2}} (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \Big|_{x_i}^{x_{i+2}}$$

и заменим A, B, C их представлением через x_i, x_{i+1}, x_{i+2} и y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, то получим

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx S_i = \int_{x_i}^{x_{i+2}} (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{\Delta x}{3}\left[y_i + y_{i+2} + 4y_{i+1}\right].$$

Суммируя равенство по всем интервалам, получим формулу Симпсона.

Пример.

Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-9}^{1} \sqrt[3]{x^3 + 1}dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

Решение.

Разделим отрезок [-9, 1] на 10 равных частей. Полагая $\Delta x = \frac{1-(-9)}{10} = 1$, составим таблицу значений подынтегральной функции:

x	$y=\sqrt[3]{x^3+1}$	x	$y=\sqrt[3]{x^3+1}$
$x_0=-9$	$y_0=-8.996$	$x_6=-3$	$y_6=-2.962$
$x_1=-8$	$y_1=-7.995$	$x_7=-2$	$y_7=-1.913$
$x_2=-7$	$y_2=-6.993$	$x_8=-1$	$y_8=0$
$x_3=-6$	$y_3=-5.991$	$x_9=0$	$y_9=1$
$x_4=-5$	$y_4=-4.987$	$x_{10}=1$	$y_{10}=1.260$
$x_5=-4$	$y_5=-3.979$		

По формуле Симпсона имеем

$$\int_{-9}^{1}\sqrt[3]{x^3+1}dx=$$

$$\frac{\Delta x}{3}\left[y_0+y_{10}+2\left(y_2+y_4+y_6+y_8\right)+4\left(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[-8.996+1.260+2\cdot(-14.942)+4\cdot(-18.878)\right]=-37.711.$$

24. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в интервале $[a,+\infty)$, т.е. для всех $x\geq a$. Тогда для любого $M\geq a$ существует $\int_a^M f(x)dx$, причем с изменением M интеграл, вообще говоря, изменяется. Несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ определяется формулой $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx$.

Если предел в правой части существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится; если предел справа равен ∞ или не существует, то несобственный интеграл расходится. Аналогично определяются несобственные интегралы:

1) $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\lim\limits_{N\to-\infty}\int_N^a f(x)dx,\quad N<a$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{\substack{M\to+\infty\\N\to-\infty}}\int_N^M f(x)dx$.

Пример.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\lim_{M\to+\infty}\int_1^M x^{-3}dx=\lim_{M\to+\infty}\frac{-1}{2x^2}\Bigg|_1^M=\lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{2M^2}+\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{2M^2}=\frac{1}{2}$$

интеграл сходится.

Интегралы от разрывных функций. Интеграл $\int_a^c f(x)dx$ от функции $f(x)$, разрывной в точке $x = c$, определяется формулой

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)dx .$$

Если предел в правой части существует и конечен, то интеграл называется несобственным сходящимся интегралом; в противном случае интеграл называется расходящимся. Аналогично определяются случаи разрыва слева и внутри интервала интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} \int_{a+\delta}^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0, \\ \delta \to 0, \\ \delta > 0, \varepsilon > 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right].$$

Более подробное изложение материала и доказательства теорем можно найти, к примеру, в следующих литературных источниках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салимов Р.Б., Славутин М.Л. Математика для инженеров и технологов. – Казань: Изд-во КМО, 2005. – 589 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. –М.: Наука, 1985. – Т. I. – 432 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций повысшей математике. 1 часть. – М.: Айрис-пресс, 2004.– 288 с.

Содержание

I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ……..3
1. Производная функции, ее геометрический и механический смысл……3
2. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций……4
3.Неявная функция и ее дифференцирование……..……9
4. Параметрические уравнения линии на плоскости
Параметрическое задание функции и ее дифференцирование…….…..9
5.Дифференциал……10
6. Производные и дифференциалы высших порядков…..……..11
7. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя……..……..12
8. Формула Тейлора……14

II. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ……14
1. Исследование функции на возрастание и убывание, экстремумы с помощью первой производной……15
2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений. непрерывной на отрезке функции……....16
3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба……..……...17
4. Второе достаточное условие экстремума……..……...18
5. Асимптоты кривой……..……18
6. Общая схема построения графика функции……19

III. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА……..…..19
1. Длина дуги и ее производная……..……...19
2. Кривизна плоской кривой……..……20
3. Уравнение линии в пространстве.
Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой……..21

IV. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ……..……23
1. Способы задания функции двух переменных……..……23
2. Предел и непрерывность функции двух переменных……..…...23
3. Частные и полные приращения. Частные производные……..……...23
4. Полный дифференциал……..……24
5. Производная сложной функции……..……..24
6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности……..……24
7. Частные производные высших порядков……..…...26
8. Экстремумы функции двух переменных……..……26
9. Производная по направлению. Градиент……....26

V. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ……....31
1. Понятие неопределенного интеграла.
Теорема о двух первообразных одной функции……..…31
2. Основные свойства неопределенных интегралов……....32
3. Таблица интегралов……..……..33
4. Интегрирование заменой переменной……..……34
5. Интегрирование по частям……..……...36
6. Интегрирование простейших рациональных дробей……..……38
7. Разложение многочлена на множители. Рациональные функции…..40
8. Интегрирование рациональных функций……..…...45
9. Интегрирование некоторых иррациональных функций……..46
10. Интегрирование тригонометрических функций……....48
11. Неберущиеся интегралы, или о функциях, интегралы
от которых не выражаются через элементарные функции……...49
12. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции……..…..50

VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ……..51
13. Определение определенного интеграла. Его геометрический
смысл ……...……..…51
14. Свойства определенного интеграла…… …52
15. Производная от определенного интеграла по переменному
верхнему пределу……..……54
16. Теорема Ньютона–Лейбница……..……55

17. Замена переменных в определенном интеграле……..…….……..56

18. Интегрирование по частям в определенном интеграле……..……..57
19. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур……..……58
20. Длина дуги кривой……..……..59
21. Объем тела вращения……..……60
22. Площадь поверхности тела вращения……..……61
23. Приближенное вычисление определенного интеграла. Формула Симпсона……..……62
24. Несобственные интегралы……..……64

ЛИТЕРАТУРА……..……..65

Шамиль Фатыхович АРАСЛАНОВ,
Сергей Иванович ФИЛИППОВ

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЗАОЧНОГО И ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ. ЧАСТЬ II

Учебное пособие
для студентов заочного и дистанционного обучения

Редактор Н.Х. Михайлова
Корректор М.А. Рожавина

Редакционно-издательский отдел
Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Подписано в печать 27.06.05. Формат 60x84/ 16
Заказ 413. Бумага тип N 1 Усл.-печ. л. 4,25
Тираж 300 экз. Печать RISO Усл.-изд. л. 4,0

Печатно-множительный отдел КГАСУ
420043, Казань, Зеленая, 1.