МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ш.Ф. Арасланов, Т.И. Качнова

Задачник по темам
«Дифференциальные уравнения. Ряды. Уравнения математической физики»

для студентов II курса очной формы обучения специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» и направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Казань
2020

УДК 517.91; 517.521; 517.518.45; 517.95
ББК 22.161.6; 22.311
А79

Арасланов Ш.Ф., Качнова Т.И.
А79 Задачник по темам «Дифференциальные уравнения. Ряды. Уравнения математической физики» для студентов II курса очной формы обучения специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» и направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии» / Ш.Ф. Арасланов, Т.И. Качнова. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2020. – 19 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Материал соответствует рабочим программам дисциплины «Математика» для студентов II курса очной формы обучения специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» и направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

Приведены задачи с ответами для аудиторных и домашних заданий, список литературы.

Рецензент:
Кандидат технических наук, доцент кафедры «Основания, фундаменты, динамика сооружений и инженерная геология» КазГАСУ
Д.М. Нуриева

УДК 517.91; 517.521; 517.518.45; 517.95
ББК 22.161.6; 22.311

ЗАНЯТИЕ 1
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Аудиторное задание

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения дифференциальных уравнений там, где указаны начальные условия

1) $(3+y)xdx = (4+x^2)dy$

2) $(xy^2+x)dx = (x^2y-y)dy$

3) $xyy' = 1-x^2$

4) $xy' + y = y^2$

5) $xy(1+x)y' = 1+y^2 \qquad y|_{x=1} = 0$

6) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}; \quad y|_{x=0} = 1$

7, 8) Примеры из типового расчета (№ 1, 2)

Ответы:

1. $\ln|y+3| = \ln C\sqrt{1+x^2}$; $(y+3) = C\sqrt{1+x^2}$
2. $(1+y^2) = C(1-x^2)$
3. $x^2+y^2 = \ln Cx^2$
4. $Cx = \frac{y-1}{y}$
5. $\frac{2x}{x+1} = \sqrt{1+y^2}$ 6. $y = \frac{1+x}{1-x}$

Домашнее задание

1) $yy' = \frac{1-2x}{y}$

2) $y'\mathrm{tg}x - y = a$

3) $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

4) $\sin y \cos x\,dy = \cos y \sin x\,dx$; $y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$

5) $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

6) $y'\sin x = y\ln y$; $y\big|_{x=\pi/2} = e$

7, 8) Типовой расчет № 1, 2

Ответы:

1. $y = \sqrt[3]{C+3x-3x^2}$ 2. $y = C\sin x - a$
3. $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$ 4. $\cos x = \sqrt{2}\cos y$
5. $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$ 6. $y = e^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$

ЗАНЯТИЕ 2
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА: ОДНОРОДНЫЕ, ЛИНЕЙНЫЕ

Аудиторное задание

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения дифференциальных уравнений там, где указаны начальные условия

1) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$
2) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$
3) $y' = \frac{x+y}{x-y}$
4) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$
5) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
6) $y' + 2y = 4x$
7) $y' = \frac{1}{2x-y^2}$
8) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
9) Примеры из типового расчета (№ 3–6)

<u>Ответы:</u>

1. $\ln|Cx| = e^{-\frac{y}{x}}$
2. $x^2 = C^2 + 2Cy$
3. $\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2 + y^2}$
4. $y - 2x = Cx^3(y + x)$
5. $y = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$
6. $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$
7. $x = Ce^{2y} + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4}$
8. $y = (x + C)(1 + x^2)$

Домашнее задание

1) $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$
2) $(xy' - y)\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = x; \quad y|_{x=1} = 0$
3) $xdy - ydx = ydy$
4) $y' + y = \cos x$
5) $xy' + y = e^x; \ y|_{x=a} = b$
6) $y' = e^{2x} - e^x y$
7–10) Примеры из типового расчета (№ 3–6)

<u>Ответы:</u>

1. $x^2 + y^2 = Cy$
2. $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}$
3. $\ln|y| + \frac{x}{y} = C$
4. $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$
5. $y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$
6. $y = Ce^{-e^x} + e^x - 1$

ЗАНЯТИЕ 3
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Аудиторное задание

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения дифференциальных уравнений там, где указаны начальные условия

1) $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$
2) $xy' + y = y^2 \mathrm{In} x$
3) $y'' = 3x + 2\sin x$
4) $xy'' = y'$
5) $y'' - y' = x$
6) $y'^2 + 2yy'' = 0$
7) $1 + y'^2 = 2yy''$
8) $y''' = \cos 2x$
9) Примеры из типового расчета (№ 7–8)

<u>Ответы:</u>

1. $y = \frac{x^4}{4} \mathrm{In}^2|Cx|$

2. $y(1 + \mathrm{In}|x| + Cx) = 1$

3. $y = \frac{x^3}{2} - 2\sin x + C_1 x + C_2$

4. $y = C_1 x^2 + C_2$

5. $y = C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}$

6. $y = C_1 (x + C_2)^{2/3}$

7. $(x + C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$

8. $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

Домашнее задание

1) $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{2}$
2) $y' + 2xy = 2x^3 y^3$
3) $y''' = e^{2x} - \frac{1}{x^2}$
4) $xy'' + y' = \sqrt{x}$
5) $yy'' + (y')^2 = 1$
6) Примеры из типового расчета (№ 7–8)

<u>Ответы:</u>

1. $y = \frac{2}{x(C - \ln|x|)}$

2. $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$

3. $y = \frac{1}{8}e^{2x} + x\ln|x| - x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

4. $y = \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C_1 \ln|x| + C_2$

5. $(x + C_{2)})^2 - y^2 = C_1$

ЗАНЯТИЕ 4
ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Аудиторное задание

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения дифференциальных уравнений там, где указаны начальные условия

1) $y'' + y' - 2y = 0$
2) $3y'' - 2y' - 8y = 0$
3) $y'' - 9y' = 0$
4) $y'' - 4y' = 0$
5) $y'' + 2y' + y = 0$
6) $y'' + 6y' + 13y = 0$
7) $y'' + 4y = 0$
8) $4y'' + 4y' + y = 0 \quad y|_{x=0} = 2;\ y'|_{x=0} = 0$
9) $y''' + 9y' = 0$
10) $y^{\mathrm{IV}} - 8y'' + 16y = 0$

<u>Ответы:</u>

1. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$
2. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$
3. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$
4. $y = C_1 + C_2 e^{4x}$
5. $y = (C_1 x + C_2)e^{-x}$
6. $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-3x}$
7. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$
8. $y = e^{\frac{-x}{2}}(x + 2)$
9. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3$
10. $y = (C_1 x + C_2 x)e^{2x} + (C_3 + C_4 x)e^{-2x}$

Домашнее задание

1) $y'' - 4y' + 3y = 0 \quad y|_{x=0} = 2;\ y'|_{x=0} = 10$
2) $y'' - 2y' + y = 0$
3) $4y'' - 8y' - 5y = 0$
4) $4x''_{tt} - 20x'_t + 25x = 0$
5) $y^{\mathrm{IV}} - 13y'' + 36y = 0$
6) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
7) Пример из типового расчета № 9

Ответы:

1. $y = 4e^{x} + 2e^{3x}$
2. $y = (C_1 + C_2 x)e^{x}$
3. $y = e^{x}(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2})$
4. $y = (C_1 + C_2 t)e^{\frac{5}{2}t}$
5. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$
6. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{x}$

ЗАНЯТИЕ 5
ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Аудиторное задание

Найти общие решения неоднородных уравнений, находя их частные решения методом подбора

1) $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, если $f(x)$ равна:

а) $10e^{-x}$ б) $3e^{2x}$ в) $x - e^{-2x} + 1$ г) $2\sin x$ д) $e^{x}(3 - 4x)$

2) $2y'' + 5y' = f(x)$, если $f(x)$ равна:

а) $5x^2 - 2x - 1$ б) $0{,}1e^{-2{,}5x} - 25\sin 2{,}5x$

3) $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, если $f(x) = 3e^{2x}$

4) $y'' + y = f(x)$, если $f(x) = \cos x$

5) $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, если $f(x)$ равна:

а) $5e^{\frac{3}{5}x}$ б) $\sin\frac{4}{5}x$ в) $e^{\frac{3}{5}x}\sin\frac{4}{5}x$

6) Примеры из типового расчета (№ 10–13)

Ответы:

1. $y = C_1 x + C_2 e^{2x} + y^{*}$, где y^{*} равно:

   а) $\frac{5}{3}e^{-x}$ б) $3xe^{2x}$ в) $\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{12}e^{-2x}$ г) $\frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$

   д) $e^{x}(2x^2 + x)$

2. $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + y^{*}$, где y^{*} равно:

   а) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$ б) $\cos 2{,}5x + \sin 2{,}5x - 0{,}02xe^{-2{,}5x}$

3. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{3}{2}x^2 e^{2x}$

4. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$

5. $y = e^{\frac{3}{5}x}(C_1\cos\frac{4}{5}x + C_2\sin\frac{4}{5}x) + y^*$, где y^* равно:

а) $\frac{25}{16}e^{\frac{3}{5}x}$ б) $\frac{15}{219}\sin\frac{4}{5}x + \frac{40}{219}\cos\frac{4}{5}x$ в) $-\frac{1}{8}xe^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x$

Домашнее задание

1) $y'' + 4y' + y = 10\sin x$
2) $y'' - 7y' = 14x$
3) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$
4) $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x}\cos x$
5) Примеры из типового расчета (№ 10–13)

Ответы:

1. $y = (C_1x + C_2)e^{-2x} - 2{,}5\cos x$
2. $y = C_1 + C_2e^{7x} - x\left(x + \frac{2}{7}\right)$
3. $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$
4. $y = e^{\frac{3}{5}x}(C_1\cos\frac{4}{5}x + C_2\sin\frac{4}{5}x - \frac{5}{9}\cos x)$

ЗАНЯТИЕ 6
ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аудиторное задание

Найти общие решения дифференциальных уравнений

1) $y'' + y = -\mathrm{ctg}^2 x$
2) $y'' - y' = \frac{e^x}{e^x+1}$

Найти общие решения систем дифференциальных уравнений

3) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + z \\ \frac{dz}{dx} = y + 2z + x \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y - z \\ \frac{dz}{dx} = y + 5z \end{cases}$

Ответы:

1. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x \cdot \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + 2$
2. $y = C_1 e^x + C_2 + e^x x - (e^x + 1)\ln(e^x + 1)$
3. $\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9} \\ z = -C_1 e^x + C_2 e^{3x} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{9} \end{cases}$
4. $\begin{cases} y = e^{5x}(C_1\cos x + C_2\sin x) \\ z = e^{5x}(C_1\sin x - C_2\cos x) \end{cases}$

Домашнее задание

1) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$

2) $y'' + y = \mathrm{tg}x$

3) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z \\ \frac{dz}{dx} = y + z + x \end{cases}$

4) Примеры из типового расчета (№ 14).

Ответы:

1. $y = e^{-x}(\ C_1 + C_2 x) + e^{-x}(\ -1 - \ln|x|)$
2. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x \cdot \ln\,\mathrm{tg}\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right|$
3. $\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \\ z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1) \end{cases}$

ЗАНЯТИЕ 7
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ЗАЩИТЕ РГР И КОЛЛОКВИУМ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

ЗАНЯТИЕ 8
РАЗБОР ОШИБОК В КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ И КОЛЛОКВИУМЕ. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ПРИЗНАКИ СРАВНЕНИЯ

Аудиторное задание

Доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости

1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$

2) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{n(n+3)}+\cdots$

Исследовать вопрос о сходимости данных рядов с помощью признаков сравнения и необходимого признака сходимости

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$

Дополнительное (резервное) задание.

13) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1}$

Ответы:

1. *Сходится*
2. *Сходится*
3. *Сходится*
4. *Сходится*
5. *Расходится*
6. *Сходится*
7. *Расходится*
8. *Расходится*
9. *Сходится*
10. *Расходится*
11. *Расходится*
12. *Расходится*
13. *Расходится*
14. *Сходится*
15. *Сходится*
16. *Расходится*

Домашнее задание

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{(n+2)n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^4+1}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1+n}{n}}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$

Ответы:

1. *Расходится*
2. *Сходится*
3. *Сходится*
4. *Расходится*
5. *Расходится*
6. *Расходится*

ЗАНЯТИЕ 9
ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ ДАЛАМБЕРА И КОШИ

Аудиторное задание

Исследовать вопрос о сходимости данных рядов

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n2^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(4n-1)}$

Ответы:

1. *Сходится*
2. *Сходится*
3. *Расходится*
4. *Сходится*
5. *Сходится*
6. *Сходится*
7. *Сходится*
8. *Сходится*
9. *Сходится*
10. *Расходится*
11. *Сходится*
12. *Сходится*

Домашнее задание

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n+1)!}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^{\frac{3}{2}}(n+1)}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$

<u>Ответы:</u>

1. *Сходится*
2. *Расходится*
3. *Сходится*
4. *Сходится*
5. *Сходится*
6. *Расходится*
7. *Сходится*
8. *Сходится*
9. *Сходится*
10. *Расходится*

ЗАНЯТИЕ 10
ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ.
АБСОЛЮТАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДА

Аудиторное задание

Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{n+1}{n})$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$

<u>Ответы:</u>

1. *Сходится условно*
2. *Сходится абсолютно*
3. *Сходится условно*
4. *Расходится*
5. *Сходится условно*
6. *Сходится абсолютно*

Домашнее задание

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+\sqrt[3]{n}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^3}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\sqrt{3^n}}$

<u>Ответы:</u>

1. *Сходится условно*
2. *Сходится абсолютно*
3. *Сходится условно*
4. *Сходится абсолютно*
5. *Сходится абсолютно*

ЗАНЯТИЕ 11
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ»

ЗАНЯТИЕ 12
СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИУСА СХОДИМОСТИ И ИНТЕРВАЛА СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Аудиторное задание

Найти интервал сходимости степенных рядов

1) $1 + x + \cdots + x^n + \ldots$

2) $x + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

7) $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)3^{n-1}x^{n-1}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$

<u>Ответы:</u>

1. $-1 < x < 1$
2. $-1 \le x \le 1$
3. $-\frac{1}{10} < x < \frac{1}{10}$
4. $-1 < x \le 1$
5. $-\infty < x < \infty$
6. $x = 0$
7. $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$
8. $-1 \le x < 1$

Домашнее задание

1) $x + 2x^2 + \ldots + n!\,x^n + \ldots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n4^{n-1}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2(n-1)}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$

<u>Ответы:</u>

1. $x = 0$

2. $-4 \le x < 4$

3. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $-1 \le x \le 1$

5. $x = 0$

ЗАНЯТИЕ 13
ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА. ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К ПРИБЛИЖЁННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Аудиторное задание

1) Разложить функцию $y = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестностях точки $x = 3$.

2) Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции $y = \ln(1 + e^x)$ в окресностях точки $x = 0$.

3) Разложить функции в окрестностях точки $x = 0$, пользуясь формулами разложения в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 + x)$, $(1 + x)^m$:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, -\infty < x < \infty$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, -\infty < x < \infty$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, 0! = 1, -\infty < x < \infty$

$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots(m-(n-1))\cdot}{n!} x^n + \ldots, -1 < x < 1$

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x < 1$

и указать интервалы сходимости.

3.1) $y = e^{2x}$

3.2) $y = \sin\frac{x}{3}$

3.3) $y = \sqrt[3]{8 - x^3}$

3.4) $y = \ln(10 + x)$

4) Вычислить приближенно с указанной точностью

4.1) $\cos 10°$ с точностью 10^{-4}

4.2) $\sqrt[3]{30}$ с точностью 10^{-3}

5) Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx$ с точностью 10^{-5}.

6) Решить приближённо дифференциальное уравнение

$y'' - 2y' + y = 0,\ y|_{x=0} = 0;\ y'|_{x=0} = 1,$

ограничившись тремя первыми ненулевыми членами разложения $y(x)$ в ряд Маклорена. Найти точное решение и сравнить с приближённым решением.

Ответы:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}$

2. $y = \ln(1+e^x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{32} - \frac{x^4}{192} + \cdots$

3.1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!},\ -\infty < x < \infty$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}(2n-1)!},\ -\infty < x < \infty$

3.3. $2 - 2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{2}{3^2\cdot 2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots + \frac{2\cdot 5\ldots(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n} + \cdots\right],\ -2 < x < 2$

3.4. $\ln 10 + \left[\frac{x}{10} - \frac{x^2}{2\cdot 10^2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot 10^n} + \cdots\right],\ -10 < x < 10$

4.1. 0,9848 *4.2.* 3,107

5. 0,24488

6. $y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} + \frac{y''(0)}{2!} + \frac{y'''(0)}{3!} + \ldots \approx x + x^2 + \frac{x^3}{2};\ y = e^x x$

Домашнее задание

1) Разложить функции в ряд Маклорена и указать интервалы сходимости.

1.1) $y = e^{-x^2}$ 1.2) $y = \cos^2 x$

2) Вычислить приближенно с указанной точностью

2.1) $\sin 10°$ с точностью 10^{-4} 2.2) $\sqrt[3]{7}$ с точностью 10^{-3}

3) Вычислить приближенно определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{5}} e^{-x^3}\,dx$ с точностью 10^{-3}.

4) Решить приближённо дифференциальное уравнение $y' = y^2,\ y(0) = 1,$

ограничившись тремя первыми ненулевыми членами разложения $y(x)$ в ряд Маклорена. Найти точное решение и сравнить с приближённым решением.

Ответы:

1.1. $1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}+\cdots,\ -\infty<x<\infty$

1.2. $1-x^2+\frac{(2x)^4}{2\cdot4!}-\frac{(2x)^6}{2\cdot6!}+\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}+\cdots,\ -\infty<x<\infty$

2.1. 0,17365

2.2. 1,912

3. 0,1996

4. $y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}+\frac{y''(0)}{2!}+\ldots\approx 1+x+x^2;\quad y=\frac{1}{1-x}$

ЗАНЯТИЕ 14
РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ
В ИНТЕРВАЛЕ (–π,π) и (-*l*, *l*)

Аудиторное задание

Разложить функцию в ряд Фурье.

1. $y=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},x\in(-\pi,\pi)$
2. $y=\begin{cases}6, & 0\le \mathrm{x}\le 2\\ 3\mathrm{x}, & 2\le \mathrm{x}\le 4\end{cases}$ Приняв период $\mathrm{T}=4$, задать значения функции в интервале $-2\le \mathrm{x}\le 0$

Ответы:

1. $y=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$
2. $y=\frac{15}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6}{\pi^2n^2}(1-\cos n\pi)\cos\frac{n\pi}{2}x+\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\right]$

Домашнее задание

1. $f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x<0\\ x^2, & 0\le x\le 2\end{cases}$

Ответ:

1. $f(x)=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}+\frac{4}{\pi}\left[\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^3}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]\sin\frac{\pi nx}{2}\right\}$

ЗАНЯТИЕ 15
РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ЧЁТНЫХ И НЕЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ

Аудиторное задание

Разложить функцию в ряд Фурье

1. $y = 2|x|, -1 \le x \le 1$
2. $y = \begin{cases} 1, & -\pi \le x \le 0 \\ 3, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

<u>Ответы:</u>

1. $y = 2|x| = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$

2. $f(x) = 2 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$

Домашнее задание

1. $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2},\ 0 \le x \le \pi$; разложить в ряд по косинусам

<u>Ответ:</u>

1. $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$

ЗАНЯТИЕ 16
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ: «СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И РЯДЫ ФУРЬЕ»

ЗАНЯТИЕ 17
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОДОМ ФУРЬЕ)

Аудиторное задание

1) Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее краевым условиям $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$ и начальным условиям $u(x,0) = x - x^2$; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 3x$

<u>Ответ:</u>

$$u = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(1-(-1)^n)}{\pi^3 n^3}\cos\pi nt + (-1)^{n+1}\frac{6}{\pi^2 n^2}\sin\pi nt\right]\sin\pi nx$$

Домашнее задание

1) Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

удовлетворяющее краевым условиям $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(2,t) = 0 \end{cases}$

и начальным условиям $u(x,0) = 0$; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Ответ:

$$u = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{3\pi^3 n^3} \cdot \sin\frac{\pi n}{2} \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi n t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \text{ или}$$

учитывая, что $\sin\frac{\pi 2k}{2} = 0$; $\sin\frac{\pi(2k+1)}{2} = \cos\pi k = (-1)^k$, то

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16(-1)^k}{3\pi^3(2k+1)^3} \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi(2k+1)t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(2k+1)x}{2}\right)$$

ЗАНЯТИЕ 18
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В СТЕРЖНЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Аудиторное задание

1) Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее краевым условиям $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(2,t) = 0 \end{cases}$ и начальному условию $u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Ответ:

$$u = u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} e^{\frac{-9\pi^2(2k-1)^2}{4}t} \cdot \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2}\right)$$

Домашнее задание

1) Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее краевым условиям $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(4,t) = 0 \end{cases}$ и начальному условию $u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$

Ответ:

$$u = u(x,t) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{\frac{-\pi^2(2k+1)^2}{4}t} \cdot \sin\left(\frac{\pi(2k+1)x}{4}\right)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 2: учебное пособие для втузов. – 13-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие. – 22-е изд. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2001. – 432 с.

Арасланов Шамиль Фатыхович
Качнова Таисия Ивановна

Задачник по темам

«Дифференциальные уравнения. Ряды.
Уравнения математической физики»

для студентов II курса очной формы обучения специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» и направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии»