МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

Сборник задач по темам «Пределы. Производные» для студентов дневного отделения (бакалавриат), направления 270800.62 «Строительство»

Методические указания

Казань 2015

УДК 517.5
ББК 22
Г67

Г67 Сборник задач по темам «Пределы. Производные» для студентов дневного отделения (бакалавриат), направления 270800.62 «Строительство»/ сост.:Н.К. Туктамышов, Т.Ю. Горская. Казань: КГАСУ, 2015. – 32 с.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Рецензенты:

Доцент кафедры экономико-математического моделирования ИУЭиФ КФУ кандидат экономических наук **И.А. Кодолова**

Профессор кафедры прикладной математики КГАСУ доктор физико – математических наук **Р.С. Хайруллин**

УДК 517.5
ББК 22

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2015

© Туктамышов Н.К., Горская Т.Ю., 2015

1. Понятие функции, область определения. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Понятие функции, область определения, множество значений

Функцией называется правило, ставящее в соответствие каждому значению *x* из множества M, называемого множеством определения функции, число *y* из множества N, называемого множеством значений функции. Введенная функция обозначается как *y=f(x)*, где *x* называется аргументом функции. Область определения функции обозначается через *D(f)*, а множество ее значений - через *E(f)*.

Задача. Найти область определения функции $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{2x-1}$.

Решение. Заданная функция определена при: $2x - 1 \neq 0,\ x \neq 0{,}5$ b и $1 + x > 0, x > -1$. Таким образом, область определения является пересечение интервалов:
$D(f) = (-1{,}0{,}5) \cup (0{,}5, +\infty)$.

Задача. Найти область определения *D(f)* и множество значений *E(f)* функции: $f(x) = \ln(1 - 2cosx)$.

Решение. Область определения формируется из неравенства:
$1 - 2cosx > 0, -1 \leq cosx < 1/2,$ которое приводит к объединению интервалов:
$D(f) = \cup_k \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right)$. Множество значений для натурального логарифма при изменении его аргумента $1 - 2cosx \in (0{,}3]$, определяется:
$E(f) = (-\infty, ln3]$.

Задача. Найти область определения и множество значений функции

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2} \cdot tg(x - 2).$$

Решение. Область определения *D(f)* формируется из пересечения областей определения сомножителей. Так, для радикала $\sqrt{16 - x^2}$ имеем: $|x| \leq 4$, что соответствует отрезку:$[-4{,}4]$. Функция $tg(x - 2)$ имеет область определения $x - 2 \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$. Пересекая эти множества, имеем: $D(f) = \{x \neq 2 + \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = -2, -1, 0\}$.

Множество значений *E(f)* получим объединением множеств функций-сомножителей, т.е. $E(f) = (-\infty, +\infty)$.

1. Найти области определения функций:

1) $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x}$

2) $f(x) = \arccos(\frac{x}{2} - 1)$

3) $f(x) = \frac{1}{xe^x}$

4) $f(x) = \frac{x-2}{cos2x}$

5) $f(x) = \frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$

6) $f(x) = \ln(3x^2 + 2x - 1)$

7) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$

8) $f(x) = \sqrt{sin2x}$

9) $f(x) = \ln(cos2x)$

10) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

2. Найти множество значений функций:

1) $f(x) = |x| + 1$

2) $f(x) = \frac{5}{x}$

3) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

4) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$

5) $f(x) = 1 - 3cosx$

6) $f(x) = 4^{-x^2}$

7) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$

8) $f(x) = \arccos(2sinx)$

9) $f(x) = arccos\frac{1-2x}{4}$

10) $f(x) = \sqrt{sin\sqrt{x}}$

Предел функции на бесконечности, вычисление предела

Число b называется пределом функции $y = f(x)$при $x \to +\infty$, если для любого положительного числа ε, каким бы малым она ни было, найдется положительное число N, такое, что для всех $x>N$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$.

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to +\infty$, если ее предел равен нулю, т.е. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Примером бесконечно малой функции служит $y = {}^{1}/_{x^n}, \quad n > 0.$

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to +\infty$, если ее предел равен бесконечности, т.е. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой функциями. Если $f(x)$ – бесконечно малая функция, то ${}^{1}/_{f(x)}$ – бесконечно большая, т.е. $\frac{1}{0} = \infty$. И наоборот, если $f(x)$ – бесконечно большая функция, то ${}^{1}/_{f(x)}$ – бесконечно малая, т.е. $\frac{1}{\infty} = 0$.

Свойства пределов

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \to a$, (a – число конечное или бесконечное). Тогда справедливо:

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$,
2. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$,
3. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, если $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$,
4. $\lim_{x\to a}[A \cdot g(x)] = A \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

A - постоянный множитель.

В результате вычисления пределов возникают неопределенности видов:

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$. Последняя неопределенность $0 \cdot \infty$ может быть сведена к двум предыдущим следующим образом: $0 \cdot \infty = \frac{0}{1/\infty} = \frac{0}{0}$ или $0 \cdot \infty = \frac{\infty}{1/0} = \frac{\infty}{\infty}$.

Задача. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 100x^2 + 1}{100x^3 + 15x}.$$

Решение. В результате подстановки предельного значения $x = +\infty$ получаем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Раскроем эту неопределенность, вынесением старшей степени аргумента за скобки:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 100x^2 + 1}{100x^3 + 15x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{100}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(100 + \frac{15}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{100}{x} + \frac{1}{x^3}}{100 + \frac{15}{x^2}} = \frac{1}{100},$$

т.к. $1/x^n \to 0$.

3. Вычислить пределы функций на бесконечности (неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$):

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{100x^2+1}{1+x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2-(2x+1)^2}{x^2-x+1}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^3-x^3}{(x+2)^2-4x}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(3x-5)^2}{(x-3)^3-(x+3)^3}$

При вычислении пределов функций на $+\infty$ возникают неопределенности вида $(\infty-\infty)$.

Задача. Вычислить предел: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x-10}-\sqrt{3x}\right)$.

Решение. Подставляя вместо x предельное значение, получаем неопределенность вида $(\infty-\infty)$, но, умножив и поделив на сопряженное ему выражение, мы избавляемся от неопределенности:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x-10}-\sqrt{3x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x-10}-\sqrt{3x}\right)\left(\sqrt{3x-10}+\sqrt{3x}\right)}{\sqrt{3x-10}+\sqrt{3x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-10-3x}{\sqrt{3x-10}+\sqrt{3x}} = \frac{-10}{\infty} = 0.$$

4. Вычислить пределы функций на бесконечности (неопределенность вида $(\infty-\infty)$):

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

6) $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

7) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$

8) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$

9) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-3x-4}\right)$

10) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$

Предел функции в точке. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Первый и второй замечательные пределы

Число A называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $|f(x)-A|<\epsilon$ при $0<|x-x_0|<\delta$, при этом пишут $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

При подстановке в первый замечательный предел значения $x = 0$, получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Таким образом, данный предел очень полезен при возникновении неопределенностей такого вида в пределах от тригонометрических функций. Кроме того, он показывает, что функции числителя и знаменателя при $x\to 0$ являются эквивалентными функциями. Напомним, функции $f(x)$, $g(x)$ будут эквивалентными при $x\to a$, если существует предел $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, при этом принято писать: $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$.

Примеры замечательных эквивалентностей при $x\to 0$

1) $\sin x \sim x$, 2) $\ln(1+x) \sim x$, 3) $\sqrt[k]{1+x}-1 \sim \frac{x}{k}$,

4) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 5) $a^x - 1 \sim x\ln a$, 6) $\ln(1-x) \sim -x$,

7) $\arcsin x \sim x$, 8) $e^x - 1 \sim x$, 9) $e^{-x} - 1 \sim x$.

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x\leftarrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Заметим, что второй замечательный предел после подстановки предельных значений x, сводится к неопределенности вида 1^∞.

Задача. Вычислить предел.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

Здесь от неопределённости вида $\frac{0}{0}$ избавились, разложив многочлены на множители.

Задача. Вычислить предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}}{3x^2-10x+3} = \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}\right)}{(3x-1)(x-3)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-2(x-3)}{(3x-1)(x-3)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-2}{(3x-1)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{-1}{16}.$$

Здесь, после подстановки предельного значения $x = 3$, получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для избавления от которой, многочлен в знаменателе разложили на множители, а числитель умножили и поделили на сопряженное ему выражение.

5. Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ 4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x-2}{x^3-x^2-x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

10) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

Задача. Используя первый замечательный предел, найти:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{sin3x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{xcos2x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{cos2x}=2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2(x/2)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x}\right)^2=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{2(x/2)}\right)^2$$
$$=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{sin3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x(3x-5)}{3sin3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{sin3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x-5}{3}=-\frac{5}{3}.$$

Задача. Используя таблицу замечательных эквивалентностей, найти:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+xsinx-cos2x}{sin^2x},\quad \lim_{x\to 3}\frac{\arcsin(x-3)}{2x^2-6x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+xsinx-cos2x}{sin^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x^2}{x^2}=3.$$

Здесь использовали эквивалентные функции:

$$sinx\sim x,\qquad 1-cos2x\sim\frac{1}{2}(2x)^2=2x^2\quad \text{при}\quad x\to 0.$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\arcsin(x-3)}{2x^2-6x}=|t=x-3, t\to 0|=\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{(t+3)t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(t+3)t}=\frac{1}{3}.$$

В пределе ввели замену переменных, затем применили эквивалентность: $arcsint \sim t$ при $t\to 0$.

6. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 5x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin4x}{\sqrt{3x+4}-2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos3x-cos7x}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x(\sqrt{x+1}-1)}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+xsinx}-\sqrt{cos2x}}{tg^2(x/2)}$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin(2x-4)}{3x^2-6x}$

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}-2cosx}{\pi-4x}$

Задача. Вычислить предел.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-1}{6x-4}\right)^{3x}=1^{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{3}{6x-4}\right)^{\frac{6x-4}{3}}\right]^{3x\frac{3}{6x-4}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{9x}{6x-4}}$$
$$=e^{\frac{9}{6}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

Сначала необходимо в предел подставить предельное значение *x*, в случае получения неопределённости вида 1^{∞}, выделить целую часть дроби, стоящую в скобках. Затем смоделировать степень этой дроби, согласно структуре второго замечательного предела. Применить замечательный предел и вычислить оставшуюся часть предела.

Задача. Вычислить предел $\lim_{x\to\infty}(x+3)ln\frac{x+1}{x+2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)ln\frac{x+1}{x+2}=\infty\cdot 0=\lim_{x\to\infty}ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{(x+3)}=ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{(x+3)}$$

$$=ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(2+\frac{1}{x+2}\right)^{(x+2)}\right]^{\frac{1}{x+2}(x+3)}=ln\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x+3}{x+2}}=lne=1.$$

Задача. Вычислить предел.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-5}{2x+8}\right)^{x-7}=\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}=+\infty.$$

На первый взгляд можно предположить, что предел относится ко второму замечательному, однако, подставив предельное значение *x*, получает определенность. Данный пример иллюстрирует тот факт, что применение замечательных пределов возможно лишь в случае неопределенностей конкретного вида, а именно, $\frac{0}{0}$ - для первого и 1^{∞} - для второго замечательных пределов.

Задача. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}.$$

Решение. Рассмотрим два способа решения: 1) воспользуемся таблицей эквивалентных функций, тогда $\ln(1+kx)\sim kx$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x}=k.$$

2) используем второй замечательный предел, для этого воспользуемся свойством предела и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\ln(1^{\infty})=ln\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{kx}k}=lne^{k}=k.$$

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)\cdot ctg3x=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0}ln(1+x)^{ctg3x}=ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$$

$$=lne^{1/3}=\frac{1}{3}.$$

Здесь воспользовались эквивалентностью $tgx\sim x$ при $x\to 0$ и тем, что $ctgx={}^{1}/_{tgx}$.

7. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-1}{6x-4}\right)^{3x}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}+3}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x-2}\right)^{2x-3}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+2}\right)^{2x-5}$

8. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{3}{x}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{\frac{4}{x}}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{10}{x}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{7}{3x}}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{tg3x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)\cdot ctg5x$

7) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{5}{x}}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-sinx)^{ctg2x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln3-\ln(x+3)}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$

Задачи для самостоятельного изучения

1.1.Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2-(2x+1)^2}{x^2-x+1}$,

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-x^3}{(x+2)^2-4x}$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2+x^2}{(x+1)^3-x^3}$,

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2-(x+3)^2}{(x+2)^2}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x+2)^2-(x-1)^2}{x^2+x+1}$,

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(5-3x)^2}{(x-3)^3-(x+3)^3}$,

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+1)}-\sqrt{x^2-3x-4}\right)$,

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x}-\sqrt{x(x+1)(x+2)}\right)$,

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x^2-3}\right)$,

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+1)}-\sqrt{x^2-1}\right)$,

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4}\right)$, 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-2}\right)$.

1.2.Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+5x+2}{3x^2+5x-2}$,

2) $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{2}}\dfrac{2x^2+3x-5}{2x^2+9x+10}$,

3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-7x+3}$,

4) $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\dfrac{2x^2-x-10}{2x^2-17x+30}$,

5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-x-12}{3x^2-11x-4}$,

6) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2+7x+6}$,

7) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{2x^2-7x-4}$,

8) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+12}-4}$,

9) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{3}}{x^2-1}$,

10) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{5-2x}-3}$,

11) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-2x-3}$,

12) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{7-3x}-2}{\sqrt{10+x}-3}$.

1.3.Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos6x}{xtg3x}$,

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{cosx-cos^3x}{xtgx}$,

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xarcsin3x}{1-cos6x}$,

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos4x}{1-cos2x}$,

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xasin2x}{1-cos4x}$,

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xarctgx}{1-cos2x}$,

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)ln\dfrac{1-2x}{3-2x}$,

8) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2)ln\dfrac{2x+1}{2x+3}$,

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+3}{x^2-x+5}\right)^x$,

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-5}{x^2-3x+4}\right)^x$,

11) $\lim\limits_{x\to\infty}x(lnx-\ln(x-2))$,

12) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x-3)-\ln x)$,

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$,

14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$,

15) $\lim\limits_{x\to0}(1-sinx)^{ctg^2x}$,

16) $\lim\limits_{x\to0}(1+tgx)^{ctg2x}$.

2. Производная функции. Правила и свойства дифференцирования

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента Δx, при стремлении последнего к нулю, если этот предел существует и конечен. Производная записывается как:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Правила дифференцирования и основные формулы дифференцирования

1. $c' = 0,$
2. $(u + v - w)' = u' + v' - w',$
3. $(cu)' = cu',$
4. $(uv)' = u'v + v'u,$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$
6. $y'_x = y'_z \, z'_x,$
7. $x'_y = \frac{1}{y'_x},$
8. $(x^n)' = nx^{n-1},$
9. $(\sin x)' = \cos x,$
10. $(\cos x)' = -\sin x,$
11. $(\mathrm{tg}\, x)' = \sec^2 x,$
12. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\mathrm{cosec}^2 x,$
13. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$
14. $(\ln x)' = \frac{1}{x},$
15. $(a^x)' = a^x \ln a,$
16. $(e^x) = e^x,$
17. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$
18. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}},$
19. $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2},$
20. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2},$
21. $(\mathrm{sh} x)' = \mathrm{ch} x,$
22. $(\mathrm{ch} x)' = \mathrm{sh} x,$
23. $(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x},$
24. $(\mathrm{cth}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$

Напомним, что $secx = \frac{1}{cosx}$, $cosecx = \frac{1}{sinx}$.

Производные степенных функций

Задача. Найти производную функции $y=\left(\frac{a}{\sqrt[5]{x^3}}+\frac{\sqrt[5]{x^2}}{b}\right)$.

Решение.

$$y'=\left(\frac{a}{\sqrt[5]{x^3}}+\frac{\sqrt[5]{x^2}}{b}\right)'=\left(ax^{\frac{-3}{5}}+\frac{1}{b}x^{\frac{2}{3}}\right)'=-\frac{3}{5}ax^{-\frac{3}{5}-1}+\frac{2}{3b}x^{\frac{2}{3}-1}=$$

$$=-\frac{3}{5}\frac{a}{\sqrt[5]{x^8}}+\frac{2}{3}\frac{1}{b\sqrt[3]{x}}.$$

9. Найти производные

$1)y=3x^2-2x+1,$ $2)y=\frac{x^3}{3}-5x^2+4x-3,$ $3)y=\frac{3}{\sqrt[3]{x}},$

$4)y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+5x,$ $5)y=x+2\sqrt{x}-3,$ $6)y=\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[3]{4},$

$7)y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3},$ $8)y=4\sqrt[4]{x}-5\sqrt[5]{x},$ $9)y=\sqrt{x}\left(x^3-\sqrt{x}+1\right),$

$10)y=x^4+\frac{x^3}{3}-2.5x^2+x-2.$

10.Найти производные

1) $y=(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$, 2) $y=(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3})(4x\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x})$,

3) $y=\frac{x}{x^2+1}$, 4) $y=\frac{x^2+1}{3(x^2-1)}$, 5) $y=(x^2-1)(1-x)$,

6) $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$, 7) $y=\frac{mx^2}{\sqrt{x}}+\frac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{p\sqrt{x}}{x}$, 8) $y=(x-0{,}5)^2$,

9) $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$, 10) $y=(\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)$.

Производные сложной функции

Задача. Найти производную функции $y=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$.

Решение.

$$y' = \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2x(1-x^2)-2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}(1-x^2)^{3/2}}.$$

11.Найти производные функций

1) $y = (x^2+1)^4$, 2) $y = (1-x)^{20}$, 3) $y = (x^3 - x)^6$,

4) $y = (7x^2 - \frac{4}{x} + 6)^6$, 5) $y = \left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$, 6) $y = \sqrt{1-x^2}$,

7) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$; 8) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, 9) $y = (1+2x)^{30}$,

10) $y = (1-2\sqrt{x})^4$.

Производные тригонометрических функций

Задача. Продифференцировать функцию $y = \sqrt{x}\sin x$.

Решение.

$$y' = \left(\sqrt{x}\sin x\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'\sin x + \sqrt{x}(\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x.$$

Задача. Продифференцировать функцию $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'(1+\sin x) - (1+\sin x)'\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{1+\sin x}.$$

12.Найти производные функций

1) $y = \sin x + \cos x$, 2) $y = \frac{tgx}{x}$, 3) $y = \cos^2 x$,

4) $y = \cos\frac{x}{3}$, 5) $y = \cos^3 4x$, 6) $y = \frac{1}{2}tg^2\sqrt{x}$,

7) $y = \frac{x}{1-\cos x}$, 8) $y = \frac{1}{4}tg^4 x$, 9) $y = \sqrt{tg\frac{x}{2}}$,

10) $y = \sin^2(\cos 3x)$.

Производные обратных тригонометрических функций

Задача. Найти производную функции $y = \frac{arcsinx}{x}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{arcsinx}{x}\right)' = \frac{(arcsinx)'x - x'arcsinx}{x^2} = \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - arcsinx}{x^2} =$$

$$= \frac{x - \sqrt{1-x^2}arcsinx}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

13.Найти производные функций

1) $y = xarcsinx,$

2) $y = (\arcsin x)^2$,

3) $y = \sqrt{x}arctgx$,

4) $y = \frac{\arccos x}{x}$,

5) $y = arctgx^2$,

6) $y = \arcsin\sqrt{x}$,

7) $y = \frac{1}{\arcsin\frac{x}{2}}$,

8) $y = \frac{x}{1+x^2} - arctgx$,

9) $y = \arcsin\frac{x}{2}$,

10) $y = arctg\sqrt{6x-1}$.

Производные логарифмических и показательных функций

Задача. Продифференцировать функцию $y = \frac{2^x}{x}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{2^x}{x}\right)' = \frac{2^x ln2 \cdot x - x' \cdot 2^x}{x^2} = \frac{2^x(ln2 \cdot x - 1)}{x^2}.$$

Задача. Продифференцировать функцию $y = x^3 \log_3 x$.

Решение.

$$y' = (x^3 \log_3 x)' = 3x^2 \log_3 x + x^3 \cdot \frac{1}{xln3} = 3x^2 \log_3 x + \frac{x^2}{ln3}.$$

14.Найти производные функций

1) $y = x^2 \log_3 x$,

2) $y = \sqrt{\ln x}$,

3) $y = \ln(1-2x)$,

4) $y = \ln^4 \sin x$,

5) $y = \ln^2 x$,

6) $y = x \cdot \lg x$,

7) $y = \frac{1}{\ln x}$,

8) $y = \ln(x^2 - 4x)$,

9) $y = x^3 lnx,$

10) $y = \frac{x}{lnx},$

11) $y = lnx^3,$

12) $y = ln\frac{1}{x^2}.$

15.Найти производные функций

1) $y = \frac{3^x}{x}$, 2) $y = x^2 e^x$, 3) $y = \frac{x^3+2^x}{e^x}$,

4) $y = 10^x$, 5) $y = x \cdot 10^x$, 6) $y = e^{\sqrt{x+1}}$,

7) $y = \frac{x}{e^x}$, 8) $y = \frac{e^x}{sinx}$, 9) $y = e^x cosx$,

10) $y = e^x(sinx + cosx)$, 11) $y = (3x^2 + 5x - 10)e^x$.

Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим сложную логарифмическую функцию $z(x) = ln(y(x))$, тогда ее производная равна $z' = (lny)' = \frac{y'}{lny}$.

Дифференцирование показательно-степенных функций $y = u(x)^{v(x)}$, где функции $u(x), v(x)$ – дифференцируемые в некотором промежутке функции.

Для дифференцирования таких функций, как правило, применяют способ логарифмирования с последующем дифференцированием логарифмической функции. Действительно, если

$y = u(x)^{v(x)}$ тогда $lny = lnu(x)^{v(x)} = v(x)lnu(x)$,

продифференцируем обе части уравнения по аргументу *x*:

$$(lny)' = (v(x)lnu(x))'$$

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot lnu(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Таким образом, для производной y' имеем:

$$y' = y\left(v'(x) \cdot lnu(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Метод логарифмического дифференцирования применяют также в тех случаях, когда логарифмирование упростит дифференцирование выражения.

Задача. Найти производную функции $y = (1+x)\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$.

Решение.

$$lny = \ln[(1+x)\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}]$$

$$lny = ln(1+x) + ln\sqrt{1+x^2} + ln\sqrt[3]{3+x^3}$$

$$= \ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{3}\ln(3+x^3)$$

$$(lny)' = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(3+x^3)'}{3+x^3}$$

$$(lny)' = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2}{3+x^3}$$

$$y' = y\cdot(lny)' = (1+x)\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{3+x^3}\right).$$

Задача. Найти производную функции $y = x^{8(1+4lnx)}$.

Решение.

$lny = 8(1+4lnx)\cdot lnx$

$$(lny)' = 8[(1+4lnx)'\cdot lnx + (1+4lnx)\cdot(lnx)']$$

$$= 8\left[\frac{4}{x}\cdot lnx + (1+4lnx)\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$y' = x^{8(1+4lnx)}\cdot\frac{8}{x}[8lnx+1].$$

16. Найти производную функций

1) $y = x^{x^2}$, 2) $y = (\ln x)^x$, 3) $y = (\sin x)^{\cos x}$,

4) $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$ 5) $y = (arcsinx)^{sinx}$, 6) $y = x^{\frac{1}{1-x}}$,

7) $y = \frac{(3x+2)^3\sqrt{2x-3}}{(4x-1)^2\sqrt[3]{x^3-2x}}$, 8) $y = \frac{(x^2-1)^3(1+\sqrt{x})^4}{x^4\sqrt[3]{(3x+2)^2}}$,

9) $y = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x+2}(x-1)^2}{x^5}}$, 10) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

Производная функций, заданных параметрически

Задача. Найти производную функции, заданной параметрически

$x = 2^{-t}$, $y = 2^{2t}$, $t \in R$.

Решение.

$$x'_t = -2^{-t}\ln 2,\quad y'_t = 2\cdot 2^{2t}\ln 2 \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\cdot 2^{2t}\ln 2}{-2^{-t}\ln 2} = -2^{3t+1}.$$

Задача. Найти производную функции, заданной параметрически

$$x = 3\log_2 \operatorname{ctg} t,\qquad y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t,\quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение.

$$x'_t = 3\frac{1}{\operatorname{ctg} t}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\frac{1}{\ln 2} = -\frac{3}{\ln 2 \sin 2t},$$

$$y'_t = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{1}{\sin^2 t} = -\frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t},$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{4\cos 2t \ln 2 \sin 2t}{\sin^2 2t(-3)} = \frac{4\ln 2}{3}\operatorname{ctg} 2t.$$

17.Найти производную функций

1) $\begin{cases} x = 3cos^2 t, \\ y = 2sin^3 t. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t^2. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t + lncost, \\ y = t - lnsint. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = t + sint, \\ y = 1 - cost. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = cos\frac{t}{2}, \\ y = 1 - sint. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = lnt, \\ y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right). \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t^5 + 2t. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = lnt, \\ y = \frac{1}{1-t^2}. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x = 3sin^2 t, \\ y = 2cos^3 t. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = arcsin\sqrt{1-t^2}, \\ y = arccos^2 t. \end{cases}$

Производная неявной функции

Неявной функцией *y* аргумента *x* называется функция, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$. Для нахождения производной функции *y(x)* нужно продифференцировать уравнение $F(x, y) = 0$ по переменной *x*, полагая *y* – функцией от *x*.

Задача. Найти производную функции, заданной неявно $x^2 + 3xy + y^2 = 5$.

Решение.

$(x^2 + 3xy + y^2)' = (5)'$

$2x \quad + 3y + 3xy' + 2yy' = 0.$

$y'(3x + 2y) = -2x - 3y.$

$$y' = \frac{-2x - 3y}{3x + 2y}.$$

18.Найти производную функции, заданной неявно

1) $x^2 - 2xy - y^2 = 3x,$ 2) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$ 3) $x^3 - 3x^2y - \frac{y^3}{3} = 7,$

4) $2^x + 2^y = 2^{x+y},$ 5) $x - y = arcsinx - arcsiny,$ 6) $2ylny = x,$

7) $y = 1 + xe^y,$ 8) $arctg\frac{y}{x} = ln\sqrt{x^2 + y^2},$

9) $xsiny - cosy + cos2y = 3$, 10) $xsin(x-y) - ycos(x+y) = x$.

Правило Лопиталя

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 $(g'(x) \neq 0)$ и выполняется:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = 0$$

или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

если при этом существует предел $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, тогда выполняется равенство:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Задача. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя:

$$1.\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x\cdot 3x^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{\left(x^3\right)'} = \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\cdot 3x^2} = 0$$

$$2.\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1}.$$

Раскрытие неопределенностей типа: 0·∞, ∞–∞, $0^0, \infty^0, 1^\infty$.

Данные типы неопределенностей приводятся к типам $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Например, для неопределенности ∞–∞ имеем: $f(x) - g(x) = \dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{1/f(x)g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$.

Неопределенность вида 0·∞: $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$, свели к неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, если $f(x)$ - бесконечно малая, а $g(x)$ - бесконечно большая и $f(x)g(x)=\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$ неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Для неопределенностей трех последних типов полезно представить функцию в виде. $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln(f(x))}$.

Задача. Вычислить пределы:

1. $(0\cdot\infty)$

$$\lim_{x\to 0} x\ln|x| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = 0.$$

2. $(\infty-\infty)$

$$\lim_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-tgx}{xtgx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{tgx+\dfrac{x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\cos^2 x-1\right)\cos^2 x}{\cos^2 x\left(\sin x\cos x+x\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{\cos 2x} = 0.$$

3. 0^0

$$\lim_{x\to +0} x^{\sin x} = e^{\lim_{x\to +0}\sin x\ln x}.$$

$$\lim_{x\to +0}\sin x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}} =$$

$$= -\lim_{x\to +0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{\cos x} = 1\cdot 0.$$

$$\lim_{x\to +0} x^{\sin x} = e^0 = 1.$$

4. ∞^0

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(x+2^x\right)}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(x+2^x\right)=\left(0\cdot\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+2^x\right)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x(\ln 2)^2}{2^x\ln 2}=\ln 2;$$

$$\lim(x+2^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln 2}=2.$$

5. 1^∞

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x}.$$

$$3\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=3\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x\cdot 2x}=$$

$$=-6\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=-6$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{3}{x^2}}=e^{-6}.$$

19.Вычислить пределы:

1. Раскрыть неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

   1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$; 2) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$;

   3) $\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; 4) $\lim_{x\to 1-0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

2. Раскрыть неопределенность типа $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$.

   1) $\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; 2) $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$;

   3) $\lim_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$; 4) $\lim_{x\to 1+0}\ln x\ln(x-1)$.

3. Раскрыть неопределенность типа $0^0,\infty^0,1^\infty$.

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to +0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$;

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{ctgx}$.

Задачи для самостоятельной работы

2.1.Найти производные функций:

1) $y=(2x-1)^3$, 2) $y=(1-3x)^5$, 3) $y=(1-x^2)^{10}$,

4) $y=\sqrt[3]{(5-4x)^2}$, 5) $y=\sqrt{(4-x^2)^3}$, 6) $y=(1-2\sqrt{x})^4$,

7) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$, 8) $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, 9) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$,

10) $y=x\sqrt{1-x^2}$, 11) $y=\dfrac{\sqrt{4x-1}}{x}$, 12) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$.

2.2.Найти производные функций:

1) $y=tg^2\sqrt{x}$, 2) $y=\sqrt{sinx^2}$, 3) $y=\dfrac{1}{3}ctg^3\left(\dfrac{x^4}{4}+1\right)$,

4) $y=(1-sin^3x)^4$, 5) $y=ctg\sqrt[3]{1+x^2}$, 6) $y=sin^2(cos3x)$,

7) $y=\dfrac{sin^2x}{cosx}$, 8) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-tg4x}{1+tg4x}}$, 9) $y=\left(\dfrac{1-cos2x}{1+cos2x}\right)^2$,

10) $y=\dfrac{1}{3}tg^3x-tgx+x$, 11) $y=\dfrac{1}{2}tg^2 2x+\dfrac{1}{6}tg^3 2x+\dfrac{1}{2}tg2x$,

12) $y=cos^3xsin3x$, 13) $y=cos^4xcos4x$, 14) $y=sin^4x-cos^4x$.

2.3.Найти производные функций:

1) $y = arcsin\frac{x}{2}$, 2) $y = arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, 3) $y = arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,

4) $y = arccos\frac{1}{x}$, 5) $y = arccos\sqrt{1-x^2}$, 6) $y = \sqrt{arccosx^2}$,

7) $y = arctg(2\sqrt{x})$, 8) $y = arctg\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$, 9) $y = arctg^2\frac{1}{\sqrt{x}}$,

10) $y = 2xarcsin\frac{x}{2} + \sqrt{1-x^2}$, 11) $y = arctg^2\sqrt{1+x^2}$,

12) $y = \sqrt[3]{arcsin\frac{2}{\sqrt{x}}}$.

2.4.Найти производные функций:

1) $y = 3^{x^2-1}$, 2) $y = xe^{1-\frac{x^2}{2}}$, 3) $y = 2^{sinx}$,

4) $y = 3^{2x}2^{-3x}$, 5) $y = e^{cos^2x}$, 6) $y = 2^{\frac{x}{lnx}}$,

7) $y = x2^{x^2}$, 8) $y = (x^2-1)e^{-x^2}$, 9) $y = x^2e^{-2x}$,

10) $y = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, 11) $y = \ln(1+sinx)$, 12) $y = \ln(1+cosx)$,

13) $y = ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)$, 14) $y = ln\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)$,

15) $y = ln\left(sinx + \sqrt{1+sin^2x}\right)$, 16) $y = \frac{1}{x}(ln^3x + 3ln^2x + 6lnx + 6)$,

17) $y = ln\sqrt[4]{\frac{2x+1}{2x-1}}$, 18) $y = ln\sqrt{\frac{e^{4x}}{1+e^{4x}}}$, 19) $y = ln\sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$.

2.5.Найти производные функций:

1) $y = x^{\frac{1}{x}}$, 2) $y = x^{x^2-1}$, 3) $y = (x^2+1)^{\frac{3}{x}}$, 4) $y = x^{cosx}$,

5) $y = x^{\frac{1}{lnx}}$, 6) $y = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x^2}$, 7) $y = (x^2+1)^{cosx}$, 8) $y = (x+4)^{tgx}$,

9) $y = (ctg2x)^{tgx}$, 10) $y = x^{sinx^3}$, 11) $y = (ctg2x)^{3e^x}$,

12) $y = (lnx)^{3^x}$, 13) $y = (cos5x)^{e^x}$, 14) $y = x^{3^x}$,

15) $y = (cos2x)^{\frac{1}{4}lncos2x}$, 16) $y = (sin\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

2.6.Найти производные функций:

1) $\begin{cases} x = lnctgt, \\ y = \frac{1}{cos^2t}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = ln\frac{1-t}{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = arctg\dfrac{t+1}{t-1}, \\ y = arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{lnt}, \\ y = ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = arctge^t \\ y = \sqrt{e^t+1}. \end{cases}$

7) $x^2 - 4xy - \dfrac{y^2}{2} = 3,$ 8) $x^2 + y^2 - \dfrac{1}{2}xy = 5x,$

9) $\dfrac{1}{3}x^3 - xy^2 - y^3 = 9,$ 10) $x^3 + axy^2 + byx^2 + y^3 = 11,$

11) $\sin(xy) + \cos(xy) = tg(x+y),$ 12) $e^x siny - e^y cosx = 11.$

2.7.Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(2x+1)},$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{lnx}{\mathrm{ctgx}},$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}},$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ln^2x}{\sqrt[100]{x}},$ 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{lnx}{\mathrm{x}-1},$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{sin\pi x},$

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2cosx}\right),$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}},$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{xsinx}-\dfrac{1}{x^2}\right),$

10) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x}},$ 11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tgx},$ 12) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{8(1+lnx)}.$

---

3. Применение дифференциального исчисления для исследования функции

Исследование функции на монотонность и экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции

Задача. Исследовать возрастание и убывание функции $y = 2x^3 - 3x^2$.

Решение. Проверим выполнение достаточного условия возрастания и убывания функции, для этого найдем производную функции, приравняем ее к нулю и определим интервалы ее знакопостоянства. Итак:

$$y' = 6x^2 - 6x = 0 \qquad 6x(x-1) = 0$$

Уравнение имеет корни $x = 0,\ x = 1.$ Эти числа разбивают действительную ось на три интервала. При этом, $y' > 0$, если $x \in (-\infty, 0) \cup (1, = \infty)$, следовательно, функция здесь возрастает. При $x \in (0,1)$ функция убывает, поскольку там $y' < 0$.

Задача. Исследовать функцию $y = (x-5)e^x$ на экстремум.

Решение. Находим производную функции и приравниваем ее к нулю, получаем точки, подозрительные на экстремум:

$$y' = e^x + (x-5)e^x = (x-4)e^x = 0.$$

$x = 4$ делит вещественную ось на два интервала монотонности функции $y = (x-5)e^x$. Проверим знак производной в каждом интервале: при $x < 4$ $y' < 0$, следовательно, функция убывает, при $x > 4$ $y' > 0$, функция возрастает. Поэтому точка $x = 4$ является точкой минимума функции $y = (x-5)e^x$.

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x - x^3$ на отрезке [-2,3].

Решение. Известно, что функция, ограниченная на замкнутом множестве достигает своих максимальных и минимальных значений как внутри области, так и на ее границе. Следовательно, исследуем функцию на экстремум и проверим значения на концах интервала.

$y' = 3 - 3x^2 = 3(1-x^2) = 0,$ решением уравнения является пара точек $x = -1,\ x = 1$. Эти точки лежат внутри отрезка [-2,3]. Проверяя знаки производной, имеем, функция $y = 3x - x^3$убывает в интервалах $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и возрастает на $(-1,1)$. $x = -1$ –точка минимума, $x = 1$ – точка максимума. Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке найдем значения функции в точках экстремума и на концах промежутка:

$$y(-2) = 3 \cdot (-2) - (-2)^3 = 2,$$
$$y(-1) = 3 \cdot (-1) - (-1)^3 = -2,$$
$$y(1) = 3 \cdot 1 - 1^3 = 2,$$
$$y(3) = 3 \cdot 3 - 3^3 = -18.$$

Таким образом, наибольшее значение функции на отрезке [-2,3] равно 2, оно достигается в точках $= -2,\ x = 1$. Наименьшее значение равно -18, достигается в точке $x = 3$.

20.Найти интервалы возрастания и убывания функций:

1) $y = 6x - x^2$, 2) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$, 3) $y = 2x^2 - lnx$,

4) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$, 5) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$, 6) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$,

7) $y = x^2 e^x$, 8) $y = \dfrac{x}{lnx}$, 9) $y = \sqrt{2x - x^2}$.

21.Найти экстремумы функций:

1) $y = 2x^3 + 3x^2$, 2) $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$, 3) $y = x^3 - \dfrac{x^4}{4}$,

4) $y = 4x^3 + 9x^2 + 6x - 1$, 5) $y = x - 2lnx$, 6) $y = x^2 e^{-x^2}$,

7) $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$, 8) $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$, 9) $y = \dfrac{lnx}{x}$,

10) $y = (x + 2)^2(1 - x)^3$, 11) $y = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$, 12) $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

22. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках:

1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2, [-1; 3]$, 2) $f(x) = 6x^2 - 3x^4, [-2; 2]$,

3) $f(x) = x + 2\sqrt{x}, [0; 4]$, 4) $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16, [1; 4]$,

5) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}, [0; 4]$, 6) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-1; 2]$,

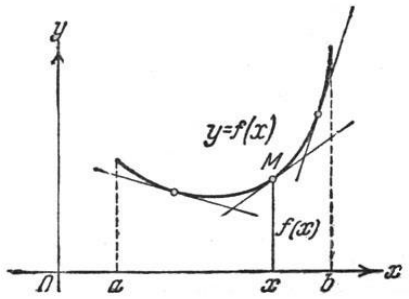
7) $f(x) = x - 4\sqrt{x + 2} + 8, [-1; 7]$, 8) $f(x) = 2x^2 + \dfrac{108}{x} - 59, [2; 4]$,

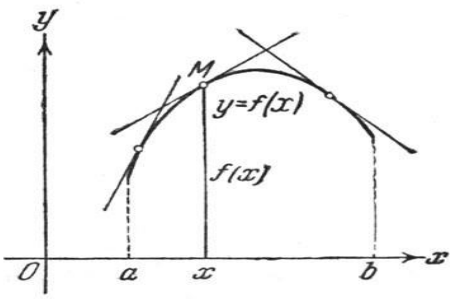
9) $f(x) = \dfrac{10x}{x^2 + 1}, [0; 3]$, 10) $f(x) = 8x + \dfrac{4}{x^2} - 15, \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

Выпуклость, вогнутость. Точка перегиба

График функции $y = f(x)$ называется выпуклым на интервале (a, b), если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис.1).

График функции $y = f(x)$ называется вогнутым на интервале (a, b),





если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис.2).

Рис. 1. Рис.2.

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функций: если $f''(x) < 0$ на (a, b), то график функции $y = f(x)$ является выпуклым в этом интервале, если $f''(x) > 0$ на (a, b), то график функции $y = f(x)$ - вогнутый.

Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется точка на графике, если график слева и справа от нее имеет разные направления выпуклости (рис. 3).

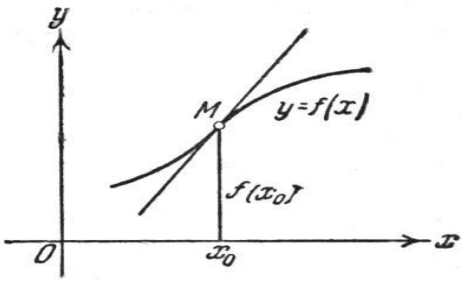


рис.3.

Необходимый признак точки перегиба: если x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Задача. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = x^5 + 5x - 6$.

Решение. Найдем $y' = 5x^4 + 5$, $y'' = 20x^3$. При $x < 0, y'' < 0$, следовательно, кривая выпукла, при $x > 0, y'' > 0$, кривая вогнута. $x = 0$ – абсцисса точки перегиба.

Итак, в интервале $(-\infty, 0)$ график выпуклый, а в интервале $(0, +\infty)$ – вогнутый, точкой перегиба графика является точка с координатами (0,-6).

23. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривых:
1) $y = x^3 - 6x^2 + x$, 2) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$, 3) $y = (x+2)^2(x-1)^3$,
4) $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$, 5) $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$, 6) $y = (x+2)^6 + 2x + 2$,
7) $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}$, 8) $y = \dfrac{1 + lnx}{x^2}$, 9) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$,
10) $y = (x+1)^4 + e^x$.

Асимптоты кривой

Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние от точки этой кривой до прямой стремится к нулю, когда точка неограниченно удаляется от начала координат. Различаются вертикальные и наклонные асимптоты.

Вертикальные асимптоты. Кривая, график функции $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = x_0$, если имеет место предел $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Наклонные асимптоты. Пусть кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту с уравнением $y = kx = b$, тогда существуют конечные пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx).$$

Задача. Найти асимптоты кривой $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

Решение. Функция определена для $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Так как $\lim_{x\to 2+0} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty$, то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой. Исследуем наличие вертикальных асимптот, для этого найдем пределы:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) = \lim_{x\to\infty} x \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right)\sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \infty.$$

Так как пределы не конечны, наклонной асимптоты нет.

24. Найти асимптоты кривых:

1) $y = x\sqrt{1-x}$, 2) $y = x - 2arctgx$, 3) $y = ln\frac{x}{x+2} + 1$,

4) $y = \sqrt[3]{(x+1)^{-2}} - \sqrt[3]{x^{-2}} + 1$, 5) $y = \frac{4\sqrt{x}}{x+2}$, 6) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$,

7) $y = 3 - 3ln\frac{x}{x+4}$, 8) $y = \sqrt[3]{x^{-2}} - x$, 9) $y = x + 2\sqrt{-x}$.

Схема исследования функции и построения ее графика

1. Найти область определения функции
2. Исследовать функцию на непрерывность
3. Исследовать функцию на четность
4. Найти точки пересечения графика с осями координат и определить интервалы знакопостоянства функций; найти точки разрыва и определить их характер.
5. Исследовать поведение функции на границах области определения, найти асимптоты.
6. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.

7. Исследовать направление выпуклости графика функции, найти точки перегиба.
8. Составить таблицу значений функции для некоторых значений ее аргумента
9. Исследовать все полученные результаты, построить график функции.

Задача.

Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x-2}$ и построить ее график.

1. Область определения функции: $x\neq 2$.
2. Функция не является периодической.
3. Функция не является ни четной, ни нечетной.
4. График пересекает оси в точках (–1,0) и (0,–½) точка разрыва x=0. Отметим интервалы знакопостоянства функции: (–∞,–1) и (–1, 2) – здесь функция принимает лишь отрицательные значения; (2,+∞) – здесь функция принимает положительные значения.
5. Находим

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2+2x+1}{x-2}=-\infty,\quad \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2+2x+1}{x-2}=\infty.$$

График функции имеет вертикальную асимптоту x=2

Далее имеем $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x-2}=\infty.$

Найдем коэффициенты наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x(x-2)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x-2}=4.$$

y=x+4 - наклонная асимптота.

6. Найдем интервалы возрастания и убывания функции. Имеем

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+2x+1}{x-2}\right)'=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

$f'(x)>0$ при $x>5,\ x<-1;$

$f'(x)<0$ при $-12<x<2,\ 2<x<5.$

Значит, функция возрастает на лучах $(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$ и убывает на промежутках $[-1,2)\cup(2,5,]$.

Найдем точки экстремума функции:

$x = -1$ – точка максимума, $y=0$;
$x = 5$ – точка минимума, $y = 12$.

7. Исследуем функцию на выпуклость. Для этого найдем вторую производную данной функции:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}\right)' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x-5)}{(x-2)^4} = \frac{18}{(x-2)^3};$$

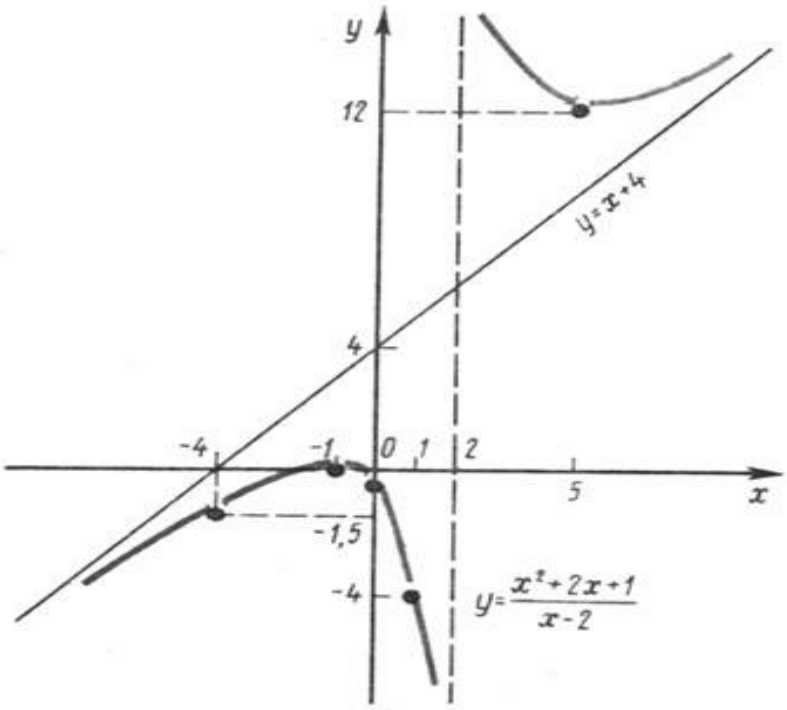
$f''(x) > 0$ при $x > 2$ – здесь функция вогнута вверх;

$f''(x) < 0$ при $x < 2$ – здесь функция выпукла вверх.

8. Составим таблицу значений функции для некоторых значений аргумента.

x	-4	-1	0	1	5
$f(x)$	-1,5	0	-0,5	-4	12

9. Строим график.



25. Провести полное исследование функций и построить их графики:

1) $y = \frac{x^3}{3} + x^2$, 2) $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$, 3) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$,

4) $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$, 5) $y = \frac{(x^2-1)(x-2)}{x}$, 6) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$,

7) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, 8) $y=x-2lnx$, 9) $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$.

Задачи для самостоятельной работы

3.1. Исследовать возрастание и убывание функций:

1) $y=x^2+5x+6$, 2) $y=x^3-3x^2+2$, 3) $y=x^3+x$,

4) $y=x^3-9x^2+15x+7$, 5) $y=\dfrac{x^3}{3}+3x^2+9x+10$,

6) $y=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{8}{3}x^3-x^2-16x$, 7) $y=\dfrac{x^2-5}{x+3}$, 8) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$,

9) $y=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}$, 10) $y=xlnx$, 11) $y=(x+1)^2(2-x)^2$.

3.2. Найти экстремумы функций:

1) $y=x^3+3x^2-4$, 2) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}$, 3) $y=2x^3-3x^2-4$,

4) $y=2x^3-9x^2+12x-9$, 5) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$, 6) $y=\dfrac{e^x}{x}$,

7) $y=(3x+6)e^{\frac{x}{3}}$, 8) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$, 9) $y=x-\ln(1+x^2)$,

10) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$, 11) $y=5\sqrt[5]{x-2}-x$, 12) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$.

3.3.Найти наибольшее и наименьшее значения функций на отрезках:

1) $f(x)=x^3-3x^2+6x-2$, $[-1;1]$, 2) $f(x)=x^4-2x^2+3$, $[-3;2]$,

3)$f(x)=2\sqrt{x}-x,[0;4]$, 4)$f(x)=x-4\sqrt{x}+5,[1;9]$,

5) $f(x)=4-x-\dfrac{4}{x^2}$, $[1;4]$, 6) $f(x)=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x}+8$, $[-4;-1]$,

7) $f(x)=\dfrac{4x}{4+x^2}$, $[-4;2]$, 8)$f(x)=x^2-2x\sqrt{x}+x-4,[0;4]$,

9)$f(x)=3-x-\frac{4}{(x+2)^2},[-1;2]$, 10)$f(x)=-\frac{x^2}{2}+2x+\frac{8}{x-2}+5,[-2;1]$.

3.4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой:

1) $y=x^3-5x^2+3x-5$, 2) $y=x^4+2x^3-12x^2-5x+2$,

3) $y=4x^3-x^4$, 4) $y=x^4-12x^3+48x^2-50$,

5) $y=-x^4-2x^3+36x^2+x$, 6) $y=(x-1)^4-24x^2+5x$,

7) $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, 8) $y=\dfrac{x^3-3x+5}{x-1}$,

9) $y=\dfrac{x^3-3x^2-2x+1}{1-3x^2}$, 10) $y=\dfrac{2x^3+2x^2-9x-3}{2x^2-3}$.

3.5. Найти асимптоты кривых:

1) $y=\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$, 2) $y=\dfrac{(4-x)^3}{9(2-x)}$, 3) $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$,

4) $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, 5) $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$, 6) $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$,

7) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, 8) $y=\dfrac{x^3+1}{4x}$, 9) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$,

10) $y=\dfrac{3x^2-1}{x^3}$, 11) $y=\dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^2}$.

3.6. Провести полное исследование функций:

1) $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2$, 2) $y=\dfrac{1}{6}x^3(x^2-5)$, 3) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$,

4) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$, 5) $y=x^3e^{-x}$, 6) $y=\dfrac{x^2}{x^3-1}$,

7) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$, 8) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$, 9) $y=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$,

10) $y=x\sqrt{1-x}$.

ОТВЕТЫ

1. Понятие функции, область определения. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

1. **1)** $[-2;0)\cup(0;2]$; **2)** $[0;4]$; **3)** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; **4)** $x\neq\frac{\pi(2n+1)}{4}, n\in Z$; **5)** $(-\infty;2]\cup[2;+\infty)$; **6)** $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$; **7)** $[0;2)$; **8)** $\bigcup_{k\in Z}[\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{2}(k+1)]$; **9)** $\bigcup_{k\in Z}(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})$; **10)** $[-1;1)$.

2. **1)** $[1;+\infty)$; **2)** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; **3)** $[-4;4]$; **4)** $(-\infty;3]$; **5)** $[-2;4]$; **6)** $(0;1]$; **7)** $[0;1]$; **8)** $(-\infty;+\infty)$; **9)** $(-\infty;+\infty)$; **10)** $[0;1]$.

3. **1)** 0; **2)** ∞; **3)** $\frac{1}{2}$; **4)** -1; **5)** $\frac{1}{4}$; **6)** 100; **7)** ∞; **8)** -3; **9)** 3; **10)** $-\frac{1}{2}$.

4. **1)** 0; **2)** 0; **3)** $\frac{5}{2}$; **4)** 0; **5)** $\frac{1}{2}$; **6)** 1; **7)** 2; **8)** 0; **9)** 1; **10)** 2.

5. **1)** 9; **2)** ∞; **3)** 0; **4)** $-\frac{2}{5}$; **5)** $\frac{1}{2}$; **6)** ∞; **7)** 6; **8)** 4; **9)** 3; **10)** $\frac{1}{4}$.

6. **1)** $\frac{2}{5}$; **2)** $\frac{1}{2}$; **3)** -1; **4)** $\frac{\sqrt{2}}{8}$; **5)** $\frac{16}{3}$; **6)** 20; **7)** 1; **8)** 6; **9)** $\frac{1}{3}$; **10)** $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

7. **1)** $\frac{1}{e}$; **2)** e^6; **3)** e^2; **4)** ∞; **5)** $e^{-2/3}$; **6)** 1; **7)** $e^{3/2}$; **8)** $\frac{1}{e}$; **9)** e^2; **10)** e^{18}.

8. **1)** e^{18}; **2)** e^{-28}; **3)** e^{-10}; **4)** $e^{-35/3}$; **5)** $\frac{1}{3}$; **6)** $\frac{1}{5}$; **7)** e^{-20}; **8)** $e^{-1/2}$; **9)** $-\frac{1}{3}$; **10)** 2.

1.1. **1)** -3; **2)** 3; **3)** 0; **4)** 0; **5)** 8; **6)** $-\frac{1}{2}$; **7)** 2; **8)** ∞; **9)** -1; **10)** $\frac{1}{2}$.

1.2. **1)** $\frac{3}{7}$; **2)** 7; **3)** $\frac{8}{5}$; **4)** $-\frac{9}{7}$; **5)** $\frac{7}{13}$; **6)** 5; **7)** $\frac{1}{18}$; **8)** $\frac{4}{3}$; **9)** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$; **10)** $-\frac{3}{2}$; **11)** $\frac{1}{8}$; **12)** $-\frac{9}{2}$.

1.3. **1)** 6; **2)** 1; **3)** $\frac{1}{6}$; **4)** 4; **5)** $\frac{1}{4}$; **6)** $\frac{1}{2}$; **7)** -1; **8)** -1; **9)** 1; **10)** 1; **11)** 2; **12)** -3; **13)** 2; **14)** -3; **15)** 0; **16)** $\sqrt{e}$.

2. Производная функции. Правила и свойства дифференцирования

9. **1)** $6x-2$; **2)** $x^2-10x+4$; **3)** $-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$; **4)** x^3-x+5; **5)** $1-\frac{1}{\sqrt{x}}$; **6)** $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$; **7)** $-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}$; **8)** $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$; **9)** $\frac{7}{2}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-1$; **10)** $4x^3+x^2-5x+1$.

10. **1)** $7x^6+2x^5-12x^4+2x^3-2x^2+3$; **2)** $-\frac{4x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3}}-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x^2\sqrt{x}}+\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{16}{3}\sqrt[3]{x}--\frac{1}{9\sqrt[3]{x^4}}\right)$; **3)** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; **4)** $\frac{-4x}{3(x^2-1)^2}$; **5)** $-3x^2+2x+1$; **6)** $\frac{-3x^5}{(1+x^3)^2}$; **7)** $\frac{3m}{2}\sqrt{x}+\frac{7}{5}n\sqrt[6]{x}++\frac{p}{2\sqrt[3]{x^2}}$; **8)** $2(x-0.5)$; **9)** $4x^3-3x^2-14x+9$; **10)** $-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

11. **1)** $8x(x^2+1)$; **2)** $-20(1-x)^{19}$; **3)** $6(x^3-x)(3x^2-1)$; **4)** $6\left(7x^2-\frac{4}{x}++6\right)^5\left(14x+\frac{4}{x^2}\right)$; **5)** $5\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^4\cdot\frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$; **6)** $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; **7)** $\frac{4x^3+8x^7}{\sqrt{(1-x^4-x^8)^3}}$; **8)** $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{-1}{(x-1)^2}$; **9)** $60(1+2x)^{29}$; **10)** $4\left(1+2\sqrt{x}\right)^3\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$.

12. **1)** $cosx-sinx$; **2)** $\frac{1}{xcos^2x}-\frac{tgx}{x^2}$; **3)** $-sin2x$; **4)** $-\frac{1}{3}sin\frac{x}{3}$; **5)** $-12cos^2 4xsin4x$; **6)** $\frac{tg\sqrt{x}}{cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$; **7)** $\frac{1-cosx+xsinx}{(1-cosx)^2}$; **8)** $\frac{tg^3x}{cos^2x}$; **9)** $\frac{1}{4}\sqrt{ctg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{cos^2\frac{x}{2}}$; **10)** $-3sin3x\cdot\sin(2cos3x)$.

13. 1) $arcsinx+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; **2)** $\frac{2arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}$; **3)** $\frac{arcsinx}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$; **4)** $\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{arcsinx}{x^2}$; **5)** $\frac{2x}{1+x^4}$; **6)** $\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$; **7)** $\frac{-1}{arcsin^2\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}}$; **8)** $\frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$; **9)** $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; **10)** $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$.

14. 1) $2x\log_3 x+\frac{x}{ln3}$; **2)** $\frac{1}{2\sqrt{lnx}x}$; **3)** $\frac{-2}{1-2x}$; **4)** $4ln^3 sinx\cdot ctgx$; **5)** $\frac{2lnx}{x}$; **6)** $lgx+\frac{1}{ln10}$; **7)** $\frac{-1}{xln^2x}$; **8)** $\frac{2x-4}{x^2-4}$; **9)** $3x^2lnx+x^2$; **10)** $\frac{lnx-1}{ln^2x}$; **11)** $\frac{3}{x}$; **12)** $\frac{-2}{x}$.

15. 1) $\frac{3^x(ln3\cdot x-1)}{x^2}$; **2)** $e^x(2x+x^2)$; **3)** $\frac{-x^3+3x^2+2^x(ln2+1)}{e^x}$; **4)** $10^x ln10$; **5)** $10^x(1++xln10)$; **6)** $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$; **7)** $e^{-x}-xe^{-2x}$; **8)** $e^x(1-ctgx)$; **9)** $e^x(cosx-sinx)$; **10)** $e^x 2cosx$; **11)** $(3x^2+11x-5)e^x$.

16. 1) $x^{x^2-1}(2lnx+1)$; **2)** $(lnx)^x\left(lnlnx+\frac{1}{lnx}\right)$; **3)** $(sinx)^{cosx}(-sinx\cdot lnsinx+ctgx\cdot cosx)$; **4)** $(x+1)^{\frac{2}{x}}\left(-\frac{2\ln(x+1)}{x^2}+\frac{2}{x(x+1)}\right)$; **5)** $(arcsinx)^{sinx}\left(cosx\cdot lnarcsinx+\frac{sinx}{arcsinx\sqrt{1-x^2}}\right)$; **6)** $x^{\frac{1}{1-x}}\left(\frac{lnx}{(1-x)^2}+\frac{1}{x(1-x)}\right)$; **7)** $\frac{(3x+2)\sqrt[5]{2x-3}}{(4x-1)^2\sqrt[3]{x^2-2x}}\cdot\left(\frac{3}{3x+2}+\frac{2}{5(2x-3)}-\frac{8}{4x-1}--\frac{2x-2}{3(x^2-2x)}\right)$; **8)** $\frac{(x^2-1)^3(1+\sqrt{x})^4}{x^4\sqrt[3]{(3x+2)^2}}\cdot\left(\frac{6x}{x^2-1}+\frac{2}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}-\frac{4}{x}-\frac{2}{3x+2}\right)$; **9)** $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x+2}(x-1)^2}{x^5}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2(x+2)}+\frac{2}{x-1}-\frac{5}{x}\right)$; **10)** $-\frac{2x^5}{1-x^6}\cdot\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

17. 1) $-sint$; **2)** $1+t^2$; **3)** $-ctgt$; **4)** $\frac{sint}{1+cost}$; **5)** $\frac{-2cost}{sin\frac{t}{2}}$; **6)** $\frac{t^2-1}{2t}$; **7)** $\frac{5t^4+2}{3t^2+8}$; **8)** $\frac{2t^2}{(1-t^2)^2}$; **9)** $-cost$; **10)** $2arccost$.

18. 1) $\frac{2x-2y-3}{2x+2y}$; **2)** $-\sqrt{\frac{y}{x}}$; **3)** $\frac{3x^2-6xy}{3x^2+y^2}$; **4)** $\frac{2^x(2^y-1)}{2^y(1-2^x)}$; **5)** $\frac{(1-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-y^2}}{(1-\sqrt{1-y^2})\sqrt{1-x^2}}$; **6)** $\frac{1}{2(lny+1)}$; **7)** $\frac{e^y}{1-xe^y}$; **8)** $\frac{x+y}{x-y}$; **9)** $\frac{-siny}{xcosy+siny-2sin2y}$; **10)** $\frac{1-\sin(x-y)-xcos(x-y)-ysin(x+y)}{ysin(x+y)-\cos(x+y)-xcos(x-y)}$.

19. 1. 1) 0; **2)** $-\frac{1}{6}$; **3)** $\frac{1}{2}$; **4)** -∞. **2. 1)** 1; **2)** 0; **3)** +∞; **4)** 0. **3. 1)** 1; **2)** 1; **3)** 1; **4)** 2; **5)** e^{-1}; **6)** +∞; **7)** 1; 8) $e^{\frac{-2}{\pi}}$; 9) $e^{\frac{-1}{4}}$; 10) $e^{\frac{1}{2}}$.

2.1.1) $6(2x-1)^2$; **2)** -15$(1-3x)^4$; **3)** -20$x(1-x^2)^9$; **4)** $\frac{-8}{3\sqrt[3]{5-4x}}$; **5)** $-3x\sqrt{4-x^2}$; **6)** $\frac{-4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$; **7)** $\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$; **8)** $\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$; **9)** $\frac{-2x}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{(1+x^2)^4}}$; **10)** $\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; **11)** $\frac{2}{x\sqrt{4x-1}}-\frac{\sqrt{4x-1}}{x^2}$; **12)** $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})}-\frac{1+\sqrt{x}}{(1+\sqrt{2x})^2\sqrt{2x}}$.

2.2. 1) $\frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}cos^2\sqrt{x}}$; **2)**$\frac{xcosx^2}{\sqrt{sinx^2}}$; **3)** $-\frac{ctg^2\left(\frac{x^4}{4}+1\right)\cdot x^3}{sin^2\left(\frac{x^4}{4}+1\right)}$; **4)** $4(1-sin^3x)^3(-3sin^2xcosx)$; **5)** $\frac{-2x}{sin^2\sqrt[3]{1+x^2}\cdot 3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$; **6)** $-3sin3x\cdot\sin(2cos3x)$; **7)** $sinx(2+tg^2x)$; **8)** $-\frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1+tg4x}{1-tg4x}\right)^2}\cdot\frac{2}{cos^24x(1+tg4x)^2}$; **9)** $\frac{4sin4x}{(1+cos2x)^2}\cdot\left(\frac{1-cos2x}{1+cos2x}\right)$; **10)** $\frac{tg^2x-1}{cos^2x}+1$; **11)** $\frac{(tg2x+1)^2}{cos^22x}$;
12) $3cos^2x\cdot cos4x$; **13)** -4$cos^3x\cdot sin5x$; **14)** $2sin2x$.

2.3. 1) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; **2)** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2-x}}$; **3)** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2(1-x)(x+1)}}$; **4)** $\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$; **5)** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; **6)** $\frac{x}{\sqrt{arccosx^2}\sqrt{1-x^4}}$; **7)** $\frac{1}{(1+4x)\sqrt{x}}$; **8)** $\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{2\sqrt{1+x^2}(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})}$; **9)** $-\frac{arctg\frac{1}{\sqrt{x}}}{(x+1)\sqrt{x}}$; **10)** $2arcsin\frac{x}{2}+\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; **11)** $\frac{2xarctg\sqrt{1+x^2}}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$; **12)** $\frac{-1}{3x\cdot\sqrt[3]{arcsin^2\frac{2}{\sqrt{x}}}\sqrt{x-4}}$.

2.4. **1)** $3^{x^2-1}ln3\cdot 2x$; **2)** $e^{1-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$; **3)** $2^{sinx}ln2\cdot cosx$; **4)** $3^{2x}2^{-3x}ln\frac{9}{8}$; **5)** $-sin2x\cdot e^{cos^2x}$; **6)** $2^{\frac{x}{lnx}}ln2\cdot\frac{lnx-1}{ln^2x}$; **7)** $2^{x^2}ln2(1+2x^2)$; **8)** $2xe^{-x^2}(2-x^2)$; **9)** $2e^{-2x}(x-x^2)$; **10)** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; **11)** $\frac{cosx}{1+sinx}$; **12)** $\frac{-sinx}{1+cosx}$; **13)** $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; **14)** $\frac{-1}{2\sqrt{x(x-1)}}$; **15)** $\frac{cosx}{\sqrt{1+sin^2x}}$; **16)** $\frac{-ln^3x}{x^2}$; **17)** $\frac{-1}{4x^2-1}$; **18)** $\frac{2}{1+e^{4x}}$; **19)** $\frac{2}{1-e^{4x}}$.

2.5. 1) $\frac{x^{\frac{1}{x}}(1-lnx)}{x^2}$; **2)** $x^{x^2-1}\left(2xlnx+\frac{x^2-1}{x}\right)$; **3)** $(x^2+1)^{\frac{3}{x}}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\ln(x^2+1)+\frac{6}{x^2+1}\right)$; **4)** $x^{cosx}\left(-sinxlnx+\frac{cosx}{x}\right)$; **5)** 0; **6)** $\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x^2}\cdot\left(2xln\left(\frac{x}{x-1}\right)+x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)\right)$; **7)** $(x^2+1)^{cosx}\cdot\left(-sinxln(x^2+1)+\frac{2x}{x^2+1}\right)$; **8)** $(x+4)^{tgx}\left(\frac{\ln(x+4)}{cos^2x}+\frac{tgx}{x+4}\right)$; **9)** $(ctg2x)^{tgx}\cdot\left(\frac{lnctg2x}{cos^2x}-\frac{2tgx}{ctg2x\cdot sin^22x}\right)$; **10)** $x^{sinx^3}\cdot\left(3x^2cosx^3\cdot lnx+\frac{sinx^3}{x}\right)$; **11)**

$(ctg2x)^{3e^x}\cdot\left(3e^x lnctg2x-\frac{6e^x}{ctg2x\cdot sin^2 2x}\right)$; **12)** $3^x(lnx)^{3^x}\cdot\left(ln3lnlnx+\frac{1}{xlnx}\right)$; **13)** $e^x(cos5x)^{e^x}\cdot(lncos5x-5tg5x)$; **14)** $3^x x^{3^x}\left(ln3lnx+\frac{1}{lnx}\right)$; **15)** $-(cos2x)^{\frac{1}{4}lncos2x}\cdot lncos2x\cdot tg2x$; **16)** $(sin\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}lnsin\sqrt{x}+\frac{ctg\sqrt{x}}{2\sqrt{x^3}}\right)$.

2.6. 1) $2tg^2t$; **2)** $\frac{1}{1-t}$; **3)** $t\sqrt{1-t^2}$; **4)** $\frac{(t-1)(t^2+1)}{\sqrt{1-t^2}}$; **5)** $\frac{t^2ln^2t}{(1+\sqrt{1-t^2})\sqrt{1-t^2}}+ln^2t$; **6)** $\frac{1+e^{2t}}{2\sqrt{1+e^t}}$; 7) $\frac{2x-4y}{4x+y}$; **8)** $\frac{5-2x-{}^{y}/_{2}}{2y-{}^{x}/_{2}}$; **9)** $\frac{x^2-y^2}{2xy+3y^2}$; **10)** $-\frac{3x^2+ay^2+2bxy}{bx^2+3y^2+2axy}$; **11)** $-\frac{ycos(xy)-ysin(xy)+{}^{1}/_{cos^2(x+y)}}{xcos(xy)-xsin(xy)+{}^{1}/_{cos^2(x+y)}}$; **12)** $-\frac{e^x siny+e^y sinx}{e^x cosy-e^y cosx}$.

2.7. 1) 1; **2)** 0; **3)** $\frac{2}{5\sqrt[10]{3^3}}$; **4)** 0; **5)** 1; **6)** 2; **7)** -∞; **8)** $\frac{3}{2}$; **9)** 0; **10)** e; **11)** $\frac{1}{3}$; **12)** e^8.

3. Применение дифференциального исчисления для исследования функции

21. 1) $y_{max}=y(-1)=1,\ y_{min}=y(0)=0$; **2)** $y_{max}=y(2)=\frac{16}{3},\ y_{min}=y(-2)=-\frac{16}{3}$; **3)** $y_{max}=y(3)=\frac{27}{4}$; **4)** $y_{max}=y(-1)=-2,\ y_{min}=y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}$; **5)** $y_{min}=y(2)=2-ln4$; **6)** $y_{max}=y(-1)=\frac{1}{e},\ y_{min}=y(0)=0$; **7)** $y_{max}=y(-1)=2,\ y_{min}=y(-3)=6$; **8)** $y_{max}=y(0)=0,\ y_{min}=y(4)=8$; **9)** $y_{max}=y(e)=\frac{1}{e}$; **10)** $y_{max}=y\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{43^8}{5^5},\ y_{min}=y(-2)=0$; **11)** $y_{max}=y(\pm1)=2,\ y_{min}=y(0)=0$; **12)** $y_{max}=y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2},\ y_{min}=y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$.

22. 1) $f_{min}=f(1)=-5, f_{max}=f(3)=47$; **2)** $f_{min}=f(\pm2)=-24, f_{max}=f(\pm1)=3$; **3)** $f_{min}=f(0)=0, f_{max}=f(4)=8$; **4)** $f_{min}=f(2)=-4, f_{max}=f(4)=4$; **5)** $f_{min}=f(0)=-1, f_{max}=f(4)=\frac{3}{5}$; **6)** $f_{min}=f(-1)=-10, f_{max}=f(1)=2$; **7)** $f_{min}=f(2)=2, f_{max}=f(-1)=f(7)=3$; **8)** $f_{min}=f(3)=-5, f_{max}=f(2)=3$; **9)**

$f_{min} = f(0) = 0, f_{max} = f(1) = 5;$ **10)**
$f_{min} = f(1) = -3, f_{max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 5.$

3.2.1) $y_{max} = y(-2) = 0,\ y_{min} = y(0) = -4;$ **2)** $y_{min} = y(1) = -\frac{1}{12};$ **3)** $y_{max} = y(0) = -4;$ **4)** $y_{max} = y(1) = -4,\ y_{min} = y(2) = -5;$ **5)** $y_{max} = y(2) = -4,\ y_{min} = y(0) = 0;$ **6)** $y_{min} = y(1) = e;$ **7)** $y_{min} = y(-5) = -9e^{-5/3};$ **8)** $y_{max} = y(\pm 1) = 1;$ **10)** $y_{max} = y(0) = 4,\ y_{min} = y(-2) = \frac{8}{3};$ **11)** $y_{max} = y(3) = 3,\ y_{min} = y(1) = -6.$

3.3.**1)** $f_{min} = f(-1) = -12, f_{max} = f(1) = 2;$ **2)** $f_{min} = f(\pm 1) = 2, f_{max} = f(-3) = 66;$ **3)** $f_{min} = f(0) = f(4) = 0, f_{max} = f(1) = 1;$ **4)** $f_{min} = f(4) = 1, f_{max} = f(1) = f(9) = 2;$ **5)** $f_{min} = f(1) = -1, f_{max} = f(2) = 1;$ **6)** $f_{min} = f(-4) = -2, f_{max} = f(-2) = 2;$ **7)** $f_{min} = f(-2) = -1, f_{max} = f(2) = 1;$ **8)** $f_{min} = f(0) = f(1) = -4, f_{max} = f(4) = 0;$ **9)** $f_{min} = f(-1) = 0, f_{max} = f(0) = 2;$ **10)** $f_{min} = f(-2) = -3, f_{max} = f(0) = 1.$

Содержание

1. Понятие функции, область определения. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ ……...3
2. Производная функции. Правила и свойства дифференцирования …….....14
3. Применение дифференциального исчисления для исследования функций……...26
4. Ответы……..34

Литература

1. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 – 484с.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том Второй. М.: Изд-во «Наука», 2000. – 656с.

3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов – 9-е изд. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 800с.
4. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов/ Р.Ш. Марданов, А.Ю. Хасанова, Р.А. Султанов, А.Г. Фатыхов; под ред. Р.Ш. Марданова. – Казань. гос. ун-т, 2009. – 576 с.
6. Горская Т.Ю. Конспект лекций по курсу математика. Дифференциальное исчисление. – Казань. КГЭУ, 2008. – 108 с.
7. Лапин Н.В., Онегов Л.А. Пределы. Производные. Исследование функций. Задания для расчетно-графической работы студентов 1 курса очной формы обучения. – Казань. Изд-во КГАСУ, 2014. – 35 с.