**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

Задания для практических занятий по темам

«Дифференциальные уравнения. Ряды. Теория вероятностей и математическая статистика»

для студентов второго курса дневного отделения (бакалавриат), направлений подготовки 190100 «Наземные транспортно-технологические комплексы», 270800 «Строительство»

3 семестр

Казань
2013

УДК 517.9;519.2
ББК 22.161.6;22.17
Л24

Л24 Задания для практических занятий по темам «Дифференциальные уравнения. Ряды. Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов второго курса дневного отделения (бакалавриат), направлений подготовки 190100 «Наземные транспортно-технологические комплексы», 270800 «Строительство». 3 семестр / Сост.: Н.В. Лапин, Л.А. Онегов, Т.И. Качнова. –Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та 2013. – 22 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Задания для практических занятий составлены в соответствии с программой по курсу математики для студентов 2 курса инженерно-строительных специальностей (бакалавриат) и содержат необходимые задания и ответы.

Рецензент

Профессор кафедры высшей математики КГАСУ
И.П. Семенов

УДК 517.9;519.2
ББК 22.161.6;22.17

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Занятие 1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.

Аудиторное задание: Решить уравнения

1. (3901) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0,$;
2. (3903) $y^2y'=1-2x$;
3. (3902) $xyy'=1-x^2$;
4. (3905) $xy'+y=y^2$;
5. $xy(1+x)y'=1+y^2$; $y|_{x=1}=0$;
6. (3914) $y'=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $y|_{x=0}=1$;
7. (3941) $y'=e^{y/x}+y/x,$
8. (3939) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2},$
9. (3934) $y'=y^2/x^2-2,$

Ответы:

1. $1+y^2=c(1-x^2)$;
2. $y=\sqrt[3]{c+3x-3x^2}$,
3. $x^2+y^2=\ln cx^2$; 4. $cx=\dfrac{y-1}{y}$;
5. $\dfrac{2x}{x+1}=\sqrt{1+y^2}$, 6. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$,
7. $\ln|cx|y=-e^{-y/x}$;
9. $arctg\dfrac{y}{x}=\ln c\sqrt{x^2+y^2}$;
8. $x^2=c^2+2cy$,

Домашнее задание: Решить уравнение

1. (3909) $y'=10^{x+y}$;
2. $y\ln y+xy'=0$,
3. $(1+x^2)y'+y=0$; $y|_{x=1}=1$;
4. (3938) $y=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$;
5. (3937) $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$,
6. (3942) $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$,
7. примеры 1–4 из РГР

Ответы:

1. $10^x+10^{-y}=c$;
2. $y=e^{c/x}$,
3. $\ln y=\pi/4-arctgx$; 4. $y^2=2x^2\ln|cx|$
5. $x^2+y^2=cy$, 6. $\ln\dfrac{y}{x}=cx+1$,

Занятие 2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Аудиторное задание: Решить уравнения

1. (3905) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

2. (3956) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$,

3. (3954) $y' + 2y = 4x$;

4. $y'' = 3x + \sin x$

5. (4158) $xy'' = y'$;

6. (4159) $y'' - y' = x$,

7. (4166) $1 + (y')^2 = 2yy''$,

8. (4251) $y'' + y' - 2y = 0$,

9. (4253) $y'' - 4y' = 0$,

10. $y'' + 2y' + y = 0$

11. (4256) $y'' + y = 0$,

12. (4262) $y'' - 4y' + 3y = 0$,
$y|_{x=0} = 6,\ y'|_{x=0} = 10$

13. (4257) $y'' + 6y' + 13y = 0$,

Ответы:

1. $y = e^{-x^2}(c + x^2/2)$;

2. $y = cxe^{1/x} + x^2$,

3. $y = ce^{-2x} + 2x - 1$;

4. $y = x^3/2 - 2\sin x + c_1 x + c_2$

5. $y = c_1 x + c_2$, 6. $y = c_1 e^x + c_2 - x - x^2/2$,

7. $(x + c_2)^2 = 4c_1(y - c_1)$

8. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$, 9. $y = c_1 + c_2 e^{4x}$

10. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$;

11. $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

12. $y = 4e^x + 2e^{3x}$,

13. $y = e^{-3x}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$

Домашнее задание: Решить уравнение

1. (3957) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;

2. (4160) $y'' = \frac{y'}{x} + x$,

3. $y'' = x$; 4. (4172) $yy'' = (y')^2$

5. (4252) $y'' - 9y = 0$

6. (4263) $y'' + 4y' + 29y = 0$;
$y|_{x=0} = 0\ y'|_{x=0} = 15$

7. примеры 7-9 из РГР

Ответы:

1. $y = (c + x)(1 + x^2)$;

2. $y = \frac{x^3}{3} + c_1 x^2 + c_2$,

3. $y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$; 4. $y = c_1 e^{c_2 x}$

5. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$, 6. $y = 3e^{-2x} \sin 5x$

Занятие 3. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Аудиторное задание: Решить уравнения

1. (4275) $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, если $f(x)$ равна
1) $10e^{-x}$, 2) $3e^{2x}$; 3) $2\sin x$; 4) $2x^3 - 30$; 5) $e^x(3-4x)$;
2. (4276) $2y'' + 5y' = f(x)$, если $f(x)$ равна
1) $5x^2 - 2x - 1$, 2) $29\cos x$; 3) e^x.
3. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, 4. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$,

Ответы:

1. $y = c_1e^x + c_2 + \overline{y}$; где $\overline{y}$ равно:
1) $5/3e^{-x}$, 2) $3xe^{2x}$; 3) $3/5\cos x + 1/5\sin x$; 4) $x^3 + 9/2x^2 + 21/2x - 15/4$;
5) $e^x(2x^2 + x)$;
2. $y = c_1 + c_2e^{-5/2x} + \overline{y}$; где $\overline{y}$ равно:
1) $1/3x^3 - 3/5x^2 + 7/25x$, 2) $5\sin x - 2\cos x$; 3) $1/7e^x$;
3. $y = (\ln|\cos x| + c_1)\cos x + (x + c_2)\sin x$
4. $y = e^{-x}(c_1 + c_2x) + e^{-x}(-1 - \ln|x|)$

5. $y = c_1x + c_2$, 6. $y = c_1e^x + c_2 - x - x^2/2$,

Домашнее задание: Решить уравнение

1. (4268) $2y'' + y' - y = 2e^x$, ;
2. (4272) $y - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$,
3. (4270) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$
4. (4274) $y'' + 4y' - 5y = 1$;
5. примеры 10-13 из РГР

Ответы:

1. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x/2} + e^x$
2. $y = (c_1 + c_2x)e^{3x} + 2/9x^2 + 5/27x + 11/27$,
3. $y = c_1e^{6x} + c_2e^x + 1/74(5\sin x + 7\cos x)$;
4. $y = c_1e^x + c_2e^{-5x} - 0{,}2$

Занятие 4. Защита РГР по теме: «Дифференциальные уравнения»

Сведения по теме. Приведем рассмотренные типы уравнений и методы их решения.

1. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

в котором $y = y(x)$ – искомая формула. Здесь коэффициент при dx зависит только от x, а коэффициент dy только от y.
Интегрируя уравнение, найдем:

$$\int M(x)dx + N(y)dy = C \text{ или } F_1(x) + F_2(y) = C$$ – общий интеграл уравнения.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

$$M_1(x) \cdot M_2(y)dx + N_1(x) \cdot N_2(y)dy = 0,$$

Здесь коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y.
Разделив уравнение на $M_2(y) \cdot N_1(x)$, придем к уже рассмотренному уравнению с разделенными переменными следующего вида:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0\,.$$

3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Однородное уравнение подстановкой $\frac{y}{x} = t$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

4. Линейное уравнение первого порядка:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

Данное уравнение – линейно (т.е. первой степени) относительно искомой функции y и ее производных. Решение уравнения ищем в виде произведения двух функций $U = U(x)$ **и** $V(x)$, т.е. в виде $y = U \cdot V$. При этом уравнение распадается на два уравнения, относительно только от $U(x)$ и относительно только от $V(x)$, каждое из которых является уравнением с разделяющимися переменными.

5. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. К ним относятся:

а) $y'' = f(x)$. Последовательным интегрированием найдем решение уравнения;

б) $y'' = f(x, y')$. Это уравнение не содержит явно искомую функцию y. Полагая, $y' = z$, сводим исходное уравнение к уравнению первого порядка: $z' = f(x, z)$;

с) $y'' = f(y, y')$. Это уравнение не содержит явно независимую переменную x. Для понижения порядка уравнения, положим $y'_x = p(y)$. При этом $y''_{xx} = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p$. Подставляя y'_x и y''_{xx} в исходное уравнение, получим уравнение первого порядка относительно функции p с аргументом y:

$$p'_y \cdot p = f(y, p).$$

6. Линейное однородное уравнение второго порядка, с постоянными коэффициентами:

$$y'' + p \cdot y' + qy = 0,$$

где p $и$ q – заданные числа.

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

где частные решения $y_1(x)\, и\, y_2(x)$ находят в зависимости от корней характеристического уравнения

$$k^2 + p \cdot k + q = 0.$$

В зависимости от корней $k_1\, и\, k_2$ квадратного (характеристического) уравнения возникают следующие случаи:

а) $k_1\, и\, k_2$ – действительные и различные числа $(k_1 \neq k_2)$. Тогда $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$ и общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид: $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$;

б) $k_1\, и\, k_2$ – действительные и равные числа $(k_1 = k_2)$. Тогда $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = x e^{k_1 x}$ и общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид: $y = e^{k_1 x}(c_1 + c_2 x)$;

с) $k_1\, и\, k_2$ – комплексно-сопряженные числа $(k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i, где\, i = \sqrt{-1})$. Тогда $y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ и общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид: $y = e^{\alpha x}(c_1 \cdot \cos \beta x + c_2 \cdot \sin \beta x)$.

7. Линейное неоднородное уравнение второго порядка, с постоянными коэффициентами:

$$y'' + p \cdot y' + qy = f(x),$$

Общее решение этого уравнения определяется формулой $y = \overline{y} + y^*$, где $\overline{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + p \cdot y' + qy = 0,$$

а y^* – частное решение исходного неоднородного уравнения. Частное решение y^* ищем, используя метод неопределенных коэффициентов или метод вариации произвольных постоянных.

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука. Главная редакция физико- математической литературы, 1977. – 416 с.
2. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. – М.: Физматлит, 2009. – 484 с.

Ряды

Занятие 5. Числовые ряды. Признаки сравнения. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.

Аудиторное задание:

1. (2727) Доказать сходимость ряда. Пользуясь непосредственно определением сходимости ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+....+\frac{1}{n(1+n)}+....$$

Исследовать вопрос о сходимости рядов, используя следствие из необходимого признака сходимости:

2. (2776) $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+....+\frac{1}{1000n+1}+....$

3. (2773) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+....+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+....$

Исследовать вопрос о сходимости рядов с помощью признаков сравнения:

4. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{n^n}+....$

5. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}+....$

6. (2737) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2^3\cdot 3}+....+\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}+....$

7. (2738) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+....+\sin\frac{\pi}{2^n}+....$

8. (2739) $1+\frac{1+2}{1+2^2}\ +....+\frac{1+n}{1+n^2}+....$

9. (2743) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\ +....+\frac{1}{n^2+1}+....$

Ответы: 2) расходится; 3) расходится; 4) сходится; 5) расходится, 6) сходится; 7) сходится; 8) расходится; 9) сходится.

Доказать сходимость рядов с помощью признака Даламбера:

10. (2754) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+....+\frac{1}{(2n+1)!}+....$

11. (2765) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{n}{2^n}+....$

12. (2758) $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+....+\frac{n^2}{3^n}+....$

Доказать сходимость данных рядов с помощью радикального признака Коши:

13. (2764) $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+....+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+....$

14. (2765) $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+....+\arcsin^n\frac{1}{n}+....$

Вопрос о сходимости данных рядов решить с помощью интегрального признака Коши:

15. (2777) $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+....+\frac{2}{1+n^n}+....$

16. (2765) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{n^2}+....$

Ответы: 15) расходится; 16) расходится.

Вопрос о сходимости данных рядов решить с помощью признака Лейбница:

17. (2790) $1-\frac{1}{3}+....+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+....$

18. (2794) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+....+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2^n}+....$

19. (2795) $2-\frac{3}{2}+....+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}+....$

Ответы: 17) сходится условно; 18) сходится абсолютно; 19) расходится.

Домашнее задание: Исследовать вопрос о сходимости рядов

1. (2728) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+....;$

2. (2772) $1+\frac{2}{3}+....+\frac{n}{2n-1}+....;$

3. (2741) $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+....+\frac{n+1}{(n+2)n}+....;$

4. (2745) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+....+\frac{1}{\ln(n+1)}+....;$

5. (2782) $\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+....+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+....;$

6. (2783) $1+\frac{1\cdot 2}{2^2}+....+\frac{n!}{n^n}+....;$

7. (2766) $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+....+\frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}+....;$

8. (2768) $\frac{1}{2\cdot\ln 2}+\frac{1}{3\cdot\ln 3}+....+\frac{1}{n\cdot\ln n}+....;$

9. (2791) $1-\frac{1}{3^3}+....+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}+....;$

10. (2793) $\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{4}+....+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+....\,.$

Ответы: 1) сходится; 2) расходится; 3) расходится; 4) расходится; 5) расходится; 6) сходится; 7) сходится; 8) расходится; 9) сходится абсолютно; 10) сходится абсолютно.

<u>Занятие 6.</u> Степенные ряды. Вычисление радиуса сходимости степенного ряда. Формула Тейлора. Разложение функции в ряды Тейлора и Маклорена. Применение рядов к приближенным вычислениям.

Коллоквиум «Числовые и степенные ряды»

Аудиторное задание: Найти интервал сходимости степенных рядов.

1. (2802) $1+x+...+x^n+....;$

2. (2805) $x+\frac{x^2}{2^2}...+\frac{x^n}{n^2}+....;$

3. (2878) $10x+100x^2+10^n x^n+\ldots.$; 4. (2881) $1+x+\ldots+n!x^n+\ldots.$;

5. (2880) $x+\dfrac{x^2}{20}+\ldots+\dfrac{x^n}{n10^{n-1}}+\ldots.$; 6. (2885) $\dfrac{x}{1\cdot 2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{x^n}{n(n+1)}+\ldots.$;

Ответы: 1) $-1<x<1$; *2)* $-1\le x\le 1$; *3.* $-1/10<x<1/10$; *4) x=0*; *5)* $-1/10\le x<1/10$; *6)* $-1\le x\le 1$.

7. (2841) Разложить функцию $y=\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=1$(при $x_0=1$)

Ответ: $(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^n}{n}+\ldots.$

Разложить данные функции в окрестности точки $x=0$, пользуясь формулами разложения в ряд Макларена функций $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^m$

8. (2855) $y=e^x$, 9. (2859) $y=\sin\dfrac{x}{2}$, 10. (2864) $y=x\cdot\ln(1+x)$,

11. (2866) $y=\sqrt[3]{8-x^3}$.

Ответы: 8) $1+2x+\dfrac{(2x)^2}{2!}\ldots+\dfrac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots.$; *9)* $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^3}{2^3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}+\ldots.$;

10) $x^2-\dfrac{x^3}{2}\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{n-1}}{n}+\ldots.$; *11)* $2-2\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3+\dfrac{2}{3^2\cdot 2!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^6+\ldots+\dfrac{2\cdot 5\ldots(3n-4)}{3n\cdot n!}\left(\cdot\dfrac{x}{2}\right)^{3n}+\ldots.\right]$.

12. Вычислить приближенно с указанной точностью:

1. (2898) $\sqrt{e}$ с точностью до 0,001;
2. (2904) $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

13. Вычислить приближенно определенный интеграл:

$\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx$ с точностью 10^{-5}

Ответы: 12) 1) 1,649; 2) 0,9848; 13) 0,24488.

Домашнее задание: Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1. (2806) $x+\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}\ldots+\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots.$; 2. (2879) $x-\dfrac{x^2}{2^2}+\ldots+(-1)^{(n+1)}\dfrac{x^n}{n}+\ldots.$;

3. (2808) $2x+6x^2+n(n+1)x^n+\ldots.$;

Ответы: 1. $-1\le x<1$, *2.* $-1<x\le 1$, *3.* $-1<x<1$.

Разложить данные функции в ряд Макларена:

4.(2856) $y=e^{-x^2}$, 5. (2860) $y=\cos^2 x$

Ответы: 4) $1-x^2+\dfrac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}+\ldots.$; *5)* $1-[x^2-\dfrac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{2n}+\ldots.$.

6. (2905) Пользуясь формулой разложения в ряд Маклорена функции $(1+x)^m$ вычислить $\sqrt[3]{30}$ с точностью до 0,001.
Ответ: 3,107.

Приведем некоторые сведения по теме.
Числовым рядом называется выражение

$$u+u_1+....+u_n+... \text{ или коротко } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

содержащее бесконечное число слагаемых.
Сумма первых n членов ряда (конечная сумма) называется n-й частичной суммой этого ряда и обозначается:

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n.$$

Определение: Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$, то говорят, что ряд расходится и имеет сумму, равную *S*. В противном случае, говорят, что ряд расходится, и суммы не имеет.
Необходимый признак сходимости: если расходится, то его n-й член стремится к 0 при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Следствие: если n-й член ряда не стремится к 0 при $n\to\infty$, то ряд расходится.
Обратное утверждение не имеет места, т.е. из того, что n-й член ряда стремится к 0 при $n\to\infty$ еще не следует, что ряд сходится.
Признаки сравнения рядов с положительными членами.
Если сходится ряд с большим числом членов, то ряд с меньшим общим членом подавно сходится.
Если сходится ряд с меньшим общим членом, то ряд с большим общим членом подавно расходится.
Признаки сходимости рядов с положительными членами.
Признак Даламбера. Если для ряда (1) с положительными членами существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$. При $l=1$ ответа не имеем.
Радикальный признак Коши. Если для ряда (1) с положительными членами существует конечный предел $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$, то ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$. При $l=1$ ответа не имеем.
Интегральный признак Коши. Пусть члены ряда (1) положительны и убывают, т.е.__$u_1>u_2>....>u_n>...$ Пусть $f(x)$- непрерывная убывающая функция, такая, что $f(1)=u_1, f(2)=u_2, ...f(n)=u_n...$ Тогда: 1) если несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится ряд (1); 2) если указанный интеграл расходится, то ряд (1) расходится.

Знакочередующиеся ряды. Пусть $u_1, u_2, ..., u_n, ...$– положительные числа. Ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \qquad (2)$$

называется знакочередующимся рядом. Для этого ряда имеет место Теорема Лейбница. Если для ряда (2) выполняются следующие условия: $u_1 > u_2 > .... > u_n > ...$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то этот ряд сходится, причем его сумма положительна и меньше первого члена ряда.

Степенные ряды. Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... , \qquad (3)$$

в котором $a_0, a_1, a_2, a_n ....$– заданные числа.

Степенной ряд (3) всегда сходится в точке *x=0.* Если он также сходится в точке $x \neq 0$, то существует число $R > 0$, такое, что для всех $|x| < R$ ряд сходится, а для $|x| > R$, ряд расходится. Таким образом, областью сходимости степенного ряда (3) является интервал $-R < x < R$. На концах интервала, т.е. при $x = \pm R$ ряд (3) может сходиться, но может и расходиться. Это требует особого рассмотрения. Число *R* называется радиусом сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости степенного ряда определяется формулой:

$$R = \frac{1}{Z}, \text{ где } Z = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ или } Z = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Разложения некоторых функций в ряд Макларена

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \; (-\infty < x < \infty)$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... \; (-\infty < x < \infty)$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + ... \; (-\infty < x < \infty)$
4. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-(n-1)}{n!} x^n + ... , (-1 < x < 1)$;
5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + ... \; (-1 < x < 1)$.

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1977. – 416 с .
2. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. – М.: Физматлит, 2009. – 484 с.

Теория вероятностей и математическая статистика

Занятие 7. Классическое и статистическое определение вероятностей. Теоремы сложения и умножения. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Аудиторное задание

1. Вычислить $C^2{}_6$, C_6^3, C_6^4, A_6^2, A_6^3, A_6^4.
2. В группе 8 студентов и 10 студенток. Сколько различных танцевальных пар можно из них составить? Сколько различных компаний по 2 студента и 2 студентки?
3. В урне 6 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.
4. В урне 6 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба этих шара будут белыми?
5. В урне 6 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.
6. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.
7. (51) Два стрелка стреляют по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень: 1) попадают оба стрелка; 2) попадает только один из стрелков; 3) оба совершают промах.
8. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна и равна 0,8, а вероятность того, что деталь второго набора стандартна и равна 0,9. Из наугад выбранного набора наугад выбирается деталь. Какова вероятность появления стандартной детали?
9. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой – 5 белых и 5 красных шаров, во второй – 2 белых и 8 красных шара, в третьей – только красные шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар – красный?
10. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна и равна 0,8, а вероятность того, что деталь второго набора стандартна и равна 0,9. Из наугад выбранного набора извлекается одна деталь. Она оказывается стандартной. Найти вероятность того, что деталь извлечена из первого набора?
11. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой – 5 белых и 5 красных шаров, во второй – 2 белых и 8 красных шара. В третьей – только красные шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает один шар. Он оказывается красного цвета. Какова вероятность того, что он извлечен из первой урны?

Ответы:2) 80, 1260; 3) 6/13; 4) 5/26, 5) 7/13; 6); 7) 0,56, 0,38, 0,06; 8) 0,85; 9) 23/30; 10) 4/85≈0,47; 11) 5/23.

Домашнее задание

1. В ящике 15 деталей, из которых 10 окрашенных. Сборщик взял 3 детали наугад. Какова вероятность того, что все они окрашены?
2. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится герб?
3. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры и набрал их наугад. С какой вероятностью он набрал нужный номер?
4. (47)В ящике 10 деталей. Из которых 4 окрашены. Сборщик наугад взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена?
5. (56) Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочнике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится: 1) только в одном справочнике; 2) только в двух справочниках; 3) во всех трех справочниках?
6. Прибор может работать в двух режимах: 1) нормальном и 2) ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора, ненормальный – в 20%. Вероятность выхода из строя прибора за время t в нормальном режиме равна 0,1; в ненормальном – 0,7. Найти полную вероятность p выхода прибора из строя за время t?
7. Группа студентов состоит из 3-х отличников, 5-и хорошо успевающих и 17 занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызывается наугад 1 студент: 1) найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку; 2) вызванный студент получил хорошую оценку. Найти вероятность того, что этот студент из третьей группы.

Ответы: 1) 24/91; 2) 0,75; 3) 0,001; 4) 5/6; 5) 0,188; 0,452; 0,336; 6) 0,22; 7) 41/75; 17/41.

<u>Занятие 8.</u> Формула Бернулли. Локальная и интегральная теорема Лапласа. Дискретная случайная величина. Непрерывная случайная величина. Нормальное распределение.

Аудиторное занятие

1. (110) Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?
2. (112) Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее двух раз, б) не менее двух раз.
3. (119) Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность этого события в каждом испытании равна 0,25. Указание. Использовать локальную теорему Лапласа $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. По таблице $\varphi(1{,}37) = 0{,}1561$.
4. (125) Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна p=0,8. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз и не более 90 раз. Указание: воспользоваться интегральной теоремой Лапласа $P_n(k_1,k_2) = \Phi(x^{//}) - \Phi(x^{/}), где\, x^{/} = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$=-1,25; $x^{//} = 2.5$. По таблице $\Phi(2,5) = 0,4938, \Phi(1,25) = 0,3944$.
5. (168) Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений герба при двух бросаниях монеты.
6. (176) Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг. Указание: следует воспользоваться распределением Пуассона: $P_n(k) = \lambda^k \cdot e^{-k} / k!\; при \lambda = np = 10$.
7. (210) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

8. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: x_1=1, x_2=2, x_3=3; а также математическое ожидание этой величины и ее квадрата: M(X)=2,3, M(X^2)=5,9. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям.
9. (257) Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0,\, при\, x \le 0 \\ x^2,\, при\, 0 < x \le 1 \\ 1,\, при\, x > 1 \end{cases}.$$

найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу (0,25; 0,75).

10. (297) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной интегральной функцией:
$$F(x)=\begin{cases}0, при\ x\le -2\\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2}, при -2<x\le 2\\ 1, при\ x>2\end{cases}.$$
11. (328) Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X, соответственно равно, 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12,14). Указание: воспользоваться формулой: $P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\delta})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\delta}), где\, \alpha=12, \beta=14, a=10, \delta=2$. По таблице $\Phi(2)=0,4772$, $\Phi(1)=0,3413$.

Ответы:1) так как $P_4(2)>P_6(3)$, то вероятнее выиграть две партии из четырех; 2) а) $p=P_5(0)+P_5(1)=3/16$, б) $Q=1-[P_5(0)+P_5(1)]=13/16$; 3) $p_{243}(70)=0,0231$; 4) $p_{100}(75;90)=0,8882$; 6) $P_{100\,000}(5)=0,0375$; 7) $M(X)=-0,3$, $Д(X)=15,21$, $\sigma(X)=3,9$; 8) $p_1=0,2$; $p_2=0,3$; $p_3=0,5$; 9) p=P(0,25<X<0,75)=0,5; $P_4(3)=c_4^3p^3q=0,25$; 10) M(X)=0, Д(X)=4/3; 11) P(12<X<14)=0,1359.

Домашнее задание

1. (111) Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: а) одну партию из двух или две партии из четырех; б) не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.
2. (115) В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.
3. (120) Найти вероятность того, что событие А наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.
4. (126) Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится не менее 1470 и не более 1500 раз.
5. (211) Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения.

X	4,3	5,1	10,6
p	0,2	0,3	0,5

6. (329) Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X, соответственно, равно 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15; 25).
7. (296) Случайная величина X в интервале (0; 5) задана дифференциальной функцией $f(x)= \frac{2}{25}x$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти дисперсию X.
8. Выдать индивидуальные задания по «Математической статистике» для самостоятельной работы.

Ответы:1) а) вероятнее выиграть одну партию из двух: $P_2(1)=1/2$, $P_4(2)=3/8$; б) вероятнее выиграть не менее двух партий из четырех: $P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=11/16$, $P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=8/16$; 2) б) 0,31, б) 0,48, в) 0,52, г) 0,62; 3) $p_{2400}(1400)=0,0041$; 4) $p_{2100}(1470;1500)=0.4326$; 5) Д(X)≈8.545, ;
6) P(15<X<25)=0,6826,; 7) *Д(X)=25/18.*

Занятие 9. Статистический ряд. Гистограмма. Статистические среднее и дисперсия. Доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии.

Тема занятия выносится на самостоятельное изучение.

Контрольная работа: «Теория вероятностей и математическая статистика».

Основные формулы теории вероятностей

1. Классическое определение вероятности события А.

$P(A)=\frac{m}{n}$, где n – общее число элементарных исходов испытания; m – число благоприятных для А исходов. Элементарные исходы должны быть равновозможными и образовывать полную группу попарно несовместных событий, т.е. при испытании обязано произойти одно и только одно из них.

2. Теорема о сложении вероятностей несовместных событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \quad (1)$$

Под суммой $A+B$ понимается выполнение хотя бы одного из событий *A* или *B*, т.е. $A+B=(A \text{ или } B)$.

3. Вероятность противоположного события.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (2)$$

Здесь событие $\overline{A}$ (противоположное к *A*) заключается в невыполнении *A*.

4. Теорема сложения вероятностей совместных событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1')$$

Под произведением *AB* понимается выполнение событий *A* и *B*, т.е. $AB = (A \text{ и } \mathrm{B})$.

5. Теорема умножения вероятностей независимых событий.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (3)$$

Независимость *A* и *B* означает, что вероятность выполнения *B* не зависит от выполнения *A* (и наоборот).

6. Вероятность выполнения события *A* хотя бы один раз.

$$P = 1 - (1-p)^n \text{ или } P = 1 - q^n \qquad (4)$$

Здесь *p* – вероятность появления *A* в каждом из *n* независимых испытаний, $q = 1 - p$.

7. Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (5)$$

Здесь $P_A(B)$ – условная вероятность события *B*, т.е. его вероятность, найденная при условии, что *A* произошло.

Другое обозначение: $P_A(B) = P(B/A)$.

8. Формула полной вероятности.

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A), \qquad (6)$$

где А может наступить лишь при выполнении одного (любого) из несовместных событий («гипотез») $B_1, B_2, \ldots B_n$, образующих полную группу.

9. Формула Байеса.

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{P(A)} \qquad (i = 1, \ldots n) \qquad (7)$$

Она применяется, когда известно, что *A* произошло и нужно найти вероятность того, что это явилось следствием выполнения события B_i.

Здесь $P(A)$ находим по формуле (6).

10. Формула Бернулли.

$$P_n(k) = c_n^k p^k q^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \qquad (8)$$

Она применяется для вычисления вероятности того, что при n независимых испытаниях событие A произойдет ровно k раз, если вероятность появления A в каждом испытании одинакова и равна числу p. Здесь $q = 1 - p$. C_n^k – число сочетаний из n элементов по k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{k\ \text{множителей}}}{1\cdot 2\dots k}, \qquad C_n^0 = C_n^n = 1.$$

11. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

Если n весьма велико, то $P_n(k)$ можно найти приближенно:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad где \quad \varphi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \tag{9}$$

Вероятность появления A не менее k_1 раз и не более k_2 раз

$$P_n\left(k_1 \le k \le k_2\right) \approx \Phi(\mathrm{x}_2) - \Phi(\mathrm{x}_1), \tag{10}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ – «функция Лапласа», $x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$ $(i = 1,2)$.

Таблицы $\varphi(x)$ и $\Phi(\mathrm{x})$ приведены в приложениях 1,2 для $x \ge 0$ [2]. При их использовании нужно учесть, что

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \Phi(-x) = -\Phi(x), \quad \Phi(x) \approx \frac{1}{2}\ при\ \mathrm{x} > 5.$$

12. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины (ДСВ) и её числовые характеристики.

Пусть ДСВ X может принимать лишь значения $x_1,\dots x_n$ с вероятностями $p_1,\dots p_n$ (т.е. $P(X = x_i) = p_i$). При этом

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \tag{11}$$

Законом распределения величины X называется таблица

X	x_1	x_2	…	x_n
P	P_1	P_2	…	P_n

с условием (11).

Математическое ожидание величины X:

$$M(X) \equiv m_x = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{12}$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение величины X:

$$D[X] = (x_1 - m_x)^2 p_1 + \dots + (x_n - m_x)^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i \tag{13}$$

или $D[X] = M\left[(X - m_x)^2\right] = M\left[X^2\right] - m_x^2$, где $M\left[X^2\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$.

13. Закон распределения и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины (НСВ). Числовые характеристики НСВ.

Пусть значения НСВ *X* заполняют сплошь интервал (a,b), в частности $(-\infty,\infty)$. Закон распределения величины *X* есть функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что *X* примет значение, меньшее *x,* т.е.

$$F(x)=P(X<x)=P\big(X\in(-\infty,x)\big). \tag{14}$$

Она непрерывна и возрастает от 0 до 1, когда *x* изменяется от $-\infty$ до ∞.
Плотность распределения величины *X* – производная от $F(x)$ т.е.

$$f(x)=F'(x)=\frac{dF}{dx},\ \text{откуда}\ F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt \tag{15}$$

функции $f(x)$ и $F(x)$ называют также дифференциальной и интегральной функциями распределения.

Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение величины X:

$$M[X]\equiv m_x=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx,$$

$$D[X]=M\Big[(X-m_x)^2\Big]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)\,dx, \tag{16}$$

$$\sigma=\sqrt{D[X]}$$

14. Вероятность попадания НСВ *X* в заданный интервал:

$$P(\alpha<x<\beta)\equiv P\big(X\in(\alpha,\beta)\big)=F(\beta)-F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\ . \tag{17}$$

15. Нормальный закон распределения.

Говорят, что НСВ *X* распределена по нормальному закону, если её плотность имеет следующее специальное выражение:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\qquad(\sigma>0) \tag{18}$$

В этом частном случае вычисления по формулам (17), (18) дают:

$$M[X]=a,\qquad D[X]=\sigma,$$

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \tag{19}$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (см.11).

Литература

1. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. – М.: Физматлит, 2009. – 484 с.
2. Гмурман В.Б. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1974. – 334 с.

Задания для практических занятий по темам

«Дифференциальные уравнения. Ряды. Теория вероятностей и математическая статистика»

для студентов второго курса дневного отделения (бакалавриат), направлений подготовки 190100 «Наземные транспортно-технологические комплексы», 270800 «Строительство»

3 семестр

Составители: Лапин Н.В., Онегов Л.А.,
Качнова Т.И.