

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задания РГР-2 для студентов первого курса дневного отделения
(Бакалавриат)

КАЗАНЬ
2011

Составители: В.П. Бережнов, А.Г. Лабуткин.

УДК 512.

Определенный интеграл и его приложения. Кратные и криволинейные интегралы. Задания РГР-2 для студентов первого курса дневного отделения (бакалавриат) / Казанский государственный архитектурно-строительный университет: Составители: В.П. Бережнов, А.Г. Лабуткин, Казань, 2011, 33с.

Задания расчетно-графической работы (РГР-2) предназначены для самостоятельного выполнения студентами первого курса дневного отделения в рамках программы бакалавриата. В конце заданий приведены основные формулы, необходимые для решения задач.



Казанский государственный
архитектурно-строительный
университет, 2011 г.



Бережнов В.П., Лабуткин А.Г.
2011 г.

Вариант 1

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y \leq 2 - x^2$, $y \geq -x$.

3. Найти длину дуги кривой

$$y = 1 - \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (xy + y^2 - 4) dx dy$ по области D,

ограниченной линиями $3x + 5y \leq 15$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^3 dx \int_{\frac{x-1}{2}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D (x - y) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 2, \quad y \geq x, \quad y \leq x\sqrt{3}.$$

7. Найти объемы тел, на которые поверхность параболоида делит шар

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4(1 - z).$$

8. Найти площадь части поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$, расположенной

между плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам

$$\int_C (4 - y) dx - (2 - y) dy,$$

где C – кривая $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C (x - y) ds$,

где C – отрезок прямой ОБ: O(0,0), B(4,3).

Вариант 2

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 x dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq 2x - \frac{x^2}{4}, \quad y \geq \frac{x}{4} + \frac{3}{2}.$$

3. Найти длину дуги кривой $x = 2t - t^2$, $y = 2t + t^2$ между точками ее пересечения с осями координат.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (5x - 4xy + 3) dx dy$ по области D , ограниченной линиями $2x + 3y \leq 12$, $x \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_1^3 dx \int_{\frac{3-x}{2}}^{x^2} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двукратный интеграл, перейдя к полярным координатам, сделать чертеж.

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (1 + x^2 + y^2) dy.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y^2 = 2z, \quad 2x + 3y = 12, \quad x = 0, \quad z = 0.$$

8. Найти площадь части поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C (x^2 - y) dx + y dy$, где C – контур треугольника с вершинами $A(0,2)$, $B(1,2)$, $C(3,0)$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$, где C – кривая $x = 7 \cos t$, $y = 7 \sin t$, $z = 7t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Вариант 3

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{4}x^2, y = 3x - \frac{1}{2}x^2.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$y = \ln(1-x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (2x^2 - 3xy + 1) dx dy$ по области D,

ограниченной линиями $2x - y \geq 6, y \geq x - 6, y \leq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y^2 = 9 - z, \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1, x = 0, y = 0, z = 0, (y \geq 0).$$

8. Найти площадь части поверхности $2x - y + z = 4$, расположенной между плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\oint_C y dx - x dy$,

где C – окружность $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C xy ds$,

где C – четырехугольник с вершинами A(0,0), B(0,3), C(3,7), D(1,2).

Вариант 4

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y \leq 4 - x$, $y \geq \frac{3}{x}$.

3. Найти длину дуги кривой $y^2 = \frac{4}{9}(2 - x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (3y^2 - x + 2) dx dy$ по области D,

ограниченной линиями $y \geq x^3$, $x \geq y^3$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D x dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 2ax, y \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 12, z \geq 0.$$

8. Найти площадь части поверхности $z^2 = 4y$, расположенной между поверхностями $x^2 = 4y$, $y = 1$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам

$$\int_C (2x - y) dx + (x + y^2) dy,$$

где C – ломаная ОБА О (0,0), Б (2,0), А (2,2).

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C z^2 ds$,

где C – кривая $x = \sin 2t$, $y = \cos 2t$, $z = 4t$, $(0 \leq t \leq \pi)$.

Вариант 5

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^4 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx.$$

2. Найти площадь тех частей круга $x^2 + y^2 = 2$, на которые его делит парабола $y = x^2$.

3. Найти длину дуги кривой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (3x - 4y^2 + 5) dx dy$ по области D,

ограниченной линиями $y \leq 2x$, $y \geq x^3$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad D: x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2y, 3z + x + 2y = 6, z = 0.$$

8. Найти площадь части поверхности $x - y + z = 4$, расположенной между плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = -2$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C y dx + 2x dy$,
где C – квадрат $|x| + |y| = 9$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$,
где C – кривая $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Вариант 6

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^e (1 - \ln x) dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq 5x - x^2 - 6, y \geq 0.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$$

между точками ее пересечения с осями координат.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (7x^2 - 3xy + 2) dx dy$ по области D ,
ограниченной линиями $x \geq y^2, x \leq 4$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D xy dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 4, x + y + z = 10, z = 0.$$

8. Найти площадь части поверхности параболоида $2az = x^2 + y^2$,

расположенной внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C (x - 2z) dx + xz dy$,
где C – ломаная $ABCD$: $A(0,1,0)$, $B(1,0,1)$, $C(-1,2,0)$, $D(0,0,4)$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C y^4 ds$,

где C – кривая $x = 2\cos t, y = 2\sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Вариант 7

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{15}^{24} \frac{1}{3 + \sqrt{x+1}} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$xy = 1, y = x, x = 2.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^3 - y^2) dx dy$ по области D,

$$\text{ограниченной линиями } 2x + 3y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0.$$

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}(1-x^2)}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D y dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 2x, y \leq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$2z = x^2 + y^2 + z^2, z^2 = x^2 + y^2.$$

8. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = 4$, расположенной между плоскостями $y = 3x, y = 2x$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C (6 - y) dx + x dy$, где C – кривая $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C y^{-2} ds$, где C – дуга AB параболы $y = x^2$, A (1,1), B (3,9).

Вариант 8

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = -x^2, x + y + 2 = 0.$$

3. Найти длину дуги петли кривой $x = t^2, y = t - \frac{1}{3}t^3$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (3x^2 - 2y) dx dy$ по области D,

$$\text{ограниченной линиями } y \leq \sqrt{x}, y \geq x^2.$$

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^{\frac{3}{2}} dy \int_{2y^2}^{3+y} f(x, y) dx.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D (x + y) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 2Ry, y \leq x.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + z^2 = 3, \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

8. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{2xy}$, расположенной между плоскостями $x = 0, y = 0, x = 3, y = 3$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам

$$\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{(x^2 + y^2)},$$

где C – окружность $x = 3\cos t, y = 3\sin t$, проходимая в положительном направлении.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C (x^2 - 2xy) ds$,

где C – треугольник с вершинами A(0,1), B(1,4), C(3,3).

Вариант 9

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 x \ln(1+x^2) dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq 4x - x^2, y \geq x.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$x = \ln \cos y, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (4x^2 + 3y - 2) dx dy$ по области D,

$$\text{ограниченной линиями } y + x \leq 1, y - x \geq -1, x \geq 0.$$

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^3 dx \int_{x^2}^{x+6} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq ax, y \leq x, y \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 4 - x^2, y = 4 - 2x, x = 0, y = 0, z = 0, (x \geq 0).$$

8. Найти площадь части поверхности конуса $x^2 + z^2 = 25$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 25$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C y^2 dx + x^2 dy$,
где C – часть эллипса $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t, y \geq 0$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C \frac{ds}{\sqrt{(x^2 + y^2 + 1)}}$,
где C – отрезок AB, A (0,1), B (2,0).

Вариант 10

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi} \cos^5 x \, dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq x^2, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 6.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$y = \arctg \sqrt{e^{2x} - 1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (3x + xy - 4) \, dx \, dy$ по области D,

ограниченной линиями $3x + 2y \leq 6, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{2\sqrt{x}}^{3-x} f(x, y) \, dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D dx \, dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4(x + y), \quad y \geq 0, \quad x \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = 2.$$

8. Найти площадь части поверхности $3z = xy$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 9$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам

$$\int_C (x^2 - 2xy) \, dx - (xy + 2y^2) \, dy,$$

где C – кривая $y = \sqrt[3]{x}, 1 \leq x \leq 8.$

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2},$

где C – кривая $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 2t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$

Вариант 11

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}}.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 \leq 8x$, $y \geq 2x$.

3. Найти длину дуги кривой $x = y^2 - 4$, $-4 \leq x \leq 0$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (9x + 7xy) dx dy$ по области D,

ограниченной линиями $y \leq 2x + 1$, $x \leq 0$, $y \geq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^0 f(x, y) dx.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 0, z = 5 - x, y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}.$$

8. Найти площадь части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенной в первом октанте.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C y dx - (y + x^2) dy$, где C – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью OX.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) ds$, где C – первый виток винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$, ($a > 0$).

Вариант 12

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq 9 - 3x, y \geq x^2 - 3x.$$

3. Найти длину дуги кривой $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (8x^2 + y - 4) dx dy$ по области D,

ограниченной линиями $x + 2y \leq 8, x \geq 1, x \leq 5, y \geq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^3 dy \int_{\sqrt{3y}}^{\sqrt{18-y^2}} f(x, y) dx.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0, x \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y^2 + z = 4, y^2 = z - 2, x = -1, x = 2.$$

8. Найти площадь части поверхности $z^2 = 4x$, расположенной между поверхностями $y^2 = 4x, x = 1$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C yz dx + z\sqrt{R^2 - y^2} dy$,

где C – кривая $x = R \cos t, y = R \sin t, z = \frac{1}{2\pi}t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\oint_C (x - y) ds$,

где C – окружность $x^2 - 8x + y^2 = 0$, проходимая против хода часовой стрелки (уравнение окружности записать в параметрической форме).

Вариант 13

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq \sqrt{x+9}, y \geq 0, x+y \leq 3.$$

3. Найти длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{2}$, отсекаемой прямой $x+y = \frac{3}{2}$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (3x + 7y^2 - 1) dx dy$

по области D, ограниченной линиями $x \geq y^2, x \leq 1$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\frac{a\sqrt{2}}{2}}^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D dx dy, D: x^2 + y^2 = x + y, y \geq 0, x \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, z = 4x^2 + 4y^2, y = x^2, y = x.$$

8. Найти площадь части поверхности $z = xy$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 16$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам

$$\int_C x dx + y dy + (z - 2x) dz,$$

где C – отрезок прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{0}, 1 \leq y \leq 3$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C \sqrt{y} ds$,

где C – кривая $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Вариант 14

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^3 \ln(1+x^2) dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2 \leq 1-x, x+3 \geq 0.$$

3. Найти длину дуги кривой $x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $1 \leq t \leq 3$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+3xy+y) dx dy$ по области D ,

ограниченной линиями $xy \leq 4$, $x \geq 1$, $x \leq 2$, $y \geq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\frac{3-x}{2}} f(x,y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 2y, x \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, z = 4(x^2 + y^2), y = 2 - x, y = 4 - 2x, x = 0.$$

8. Найти площадь части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$,

расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4x$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C 2xy dx + x^2 dy$,

где C – а) парабола $y = x^2$, б) парабола $x = y^2$

(интегрировать вдоль дуг, лежащих между точками пересечения парабол).

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C (x^2 + y^2)^6 ds$,

где C – кривая $x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi, (a > 0)$.

Вариант 15

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^3 x \ln(x+2) dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq 4 - x^2, y \geq 2x + 1.$$

3. Найти длину дуги кривой $x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ от $y = 0$ до $y = 3$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+3y) dx dy$ по области D ,

ограниченной линиями $x + 2y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_1^3 dy \int_{\frac{1}{4}y^2}^{y^2} f(x, y) dx.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D y dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 2ax, y \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями (параболоидом и конусом)

$$z = 6 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, (z \geq 0).$$

8. Найти площадь части плоскости $x + 2y + 4z = 8$, расположенной в первом октанте.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C 2xy dx - x^2 dy$,

где C – дуга параболы $y = \frac{x^2}{4}$, соединяющей точки $O(0,0)$ и $A(2,1)$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$,

где C – кривая $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Вариант 16

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^4 \frac{dx}{x + 2\sqrt{x+1}}.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x + y \leq 4, y^2 \leq 2x, y \geq 0.$$

3. Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = 2$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (3x - y) dx dy$ по области D ,

ограниченной линиями $y - 2x \leq 2$, $x \leq 0$, $y \geq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$$

8. Найти площадь части поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$,

расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C (x + y) dx - x dy$,

где C – эллипс $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

Вариант 17

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^5 \frac{dx}{x^2 + 2x}.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq (x+1)^2, y \leq (x-1)^2, y \geq 0.$$

3. Найти длину дуги кривой $x^2 = (y+1)^3$, отсеченной прямой $y = 2$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (2x+3y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями $x+y \geq -2, x \leq 0, y \leq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования и вычислить

$$J = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D x dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 2Ry, y \geq \frac{R}{2}, x \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x + y + z = 2, 3x + 2y = 4, 3x + y = 2, y = 0, z = 0.$$

8. Найти площадь поверхности $z^2 = 2xy$, расположенной между плоскостями $x = a, y = a, x \geq 0, y \geq 0$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам

$$\int_C (x^2 - z^2) dx - y dy + xy dz,$$

где C – прямая, соединяющая точки $A(-1,3,-2)$ и $B(1,4,-3)$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C (x+z)ds$,
где C – кривая $x=t, y=\sqrt{\frac{3}{2}}t^2, z=t^3, (0 \leq t \leq 1)$.

Вариант 18

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \geq x^2 - 2x, y \leq \frac{x}{2}.$$

3. Найти длину дуги кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ от $y=1$ до $y=e$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (y-2x)dxdy$ по области D ,

$$\text{ограниченной линиями } 3x+y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0.$$

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D dxdy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4x.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, y = \frac{5}{2}x, y = 0, z = 0.$$

8. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = 9$, расположенной
внутри другого цилиндра $x^2 + y^2 = 9$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам

$$\int_C (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy,$$

где C – дуга параболы $y = x^2$, соединяющей точки $A(1,1)$ и $B(2,4)$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$,

где C – кривая $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Вариант 19

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x \, dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2 \leq 5 - x, \quad y \geq -\frac{x}{4}.$$

3. Найти длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{2} - 1$ между точками ее пересечения с осью OX .

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (y - 3x) \, dx \, dy$ по области D ,

ограниченной линиями $2x + 3y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+2} f(x, y) \, dx.$$

6. Вычислить двойной интеграл $\iint_D dx \, dy$, перейдя к полярным координатам,

где D – часть круга $x^2 + y^2 = 4y$, находящаяся вне круга $x^2 + y^2 = 4$.

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 4x, \quad z = 2x, \quad z = x.$$

8. Найти площадь части поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 2z$,

расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 3$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C (2 - y) \, dx + x \, dy$,

где C – кривая $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C \sqrt{(x^2 + y^2)} ds$,
где C – окружность $x^2 + y^2 = ax$.

Вариант 20

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-3}^0 \frac{x+1}{\sqrt{1-x}} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq 2 - x^2, y \geq x.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = amt, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (2y - x) dx dy$ по области D ,
ограниченной линиями $3y - 2x \leq 6, x \leq 0, y \geq 0$

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области

$$\int_0^4 dy \int_{1+\frac{1}{2}y}^{4+\frac{3}{2}y} f(x, y) dx.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x, y \geq -x.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 1, z = -1, y^2 = x, y^2 = 4 - 3x.$$

8. Найти площадь части поверхности $2z = x^2$, расположенной между
плоскостями $x = 2y, y = 2x, x = 2\sqrt{2}$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам

$$\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{(x^2 + y^2)},$$

где C – кривая $x = 2\cos t, y = 2\sin t$, проходимая в положительном направлении.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C xy ds$,

где C – квадрат $|x| + |y| = a, (a > 0)$.

Вариант 21

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x + x^3}.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x + y \leq 3, y \geq x^2 + 1.$$

3. Найти длину дуги кривой $\rho = 2a \cos \varphi$, расположенную внутри кривой

$$\rho = a, -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (3y - x) dx dy$ по области D ,

ограниченной линиями $5x + y \geq -5, x \leq 0, y \leq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^4 dx \int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D dx dy, D: x^2 + y^2 \leq 4y, y \geq 2.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями (внутреннего по отношению к цилиндру)

$$x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0.$$

8. Найти площадь поверхности полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C 2xy dx - x^2 dy$,

где C – а) дуга параболы $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 2$, б) прямая $y = x, 0 \leq x \leq 2$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C xy ds$,

где C – часть окружности $x = \cos t, y = \sin t$, лежащая в первом октанте.

Вариант 22

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^3 \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq x^2, y \leq 2-x, y \geq 0.$$

3. Найти длину дуги кривой $x = 1 - \ln \cos y, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (3y - 2x) dx dy$ по области D ,

ограниченной линиями $3x - 2y \leq 6, x \geq 0, y \leq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 1.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 2, z = x^2 + y^2 + 3.$$

8. Найти площадь части плоскости $x + y + z = 2a$, расположенной в первом октанте и ограниченной поверхностью цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$,

где C – эллипс $x = 2\cos t, y = 3\sin t$, проходимый в положительном направлении.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C \frac{ds}{1+x-y}$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(2,1)$.

Вариант 23

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq 2x+1, y \geq x-1, x \leq 1.$$

3. Найти длину дуги кривой $x = \frac{t^6}{6}, y = 4 - \frac{t^4}{4}$ между точками пересечения ее с осями координат.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (2x-3y) dx dy$ по области D ,

$$\text{ограниченной линиями } 4x-3y \leq 12, y \leq 0, x \geq 0.$$

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^4 dx \int_{\frac{1}{4}x^2}^{2\sqrt{x}} f(x,y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq x, y \leq x\sqrt{3}.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$12z = 2x^2 + 3y^2, x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1.$$

8. Найти площадь части поверхности $z = xy$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам

$$\int_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

где C – кривая $x = 5 \cos t, y = 5 \sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C (x + y) ds$,
где C – четверть окружности $x^2 + y^2 = 9$, лежащая в первом октанте.

Вариант 24

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq 6x - x^2 - 5, y \geq 0.$$

3. Найти длину дуги кривой $x = t^2, y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ между точками пересечения ее с осями координат.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (2y - 3x) dx dy$ по области D ,
ограниченной линиями $2x - y \leq 2, y \leq 0, x \geq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{1+2y}^{4-y^2} f(x, y) dx.$$

6. Вычислить тройной интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам

$$\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \quad V: x^2 + y^2 \leq 2x, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq z \leq a.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$3x + y = 6, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1, \quad x + y + z = 6, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

8. Найти площадь части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, расположенной
внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C y^2 dx + 2xy dy$,
где C – дуга окружности $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C x^2(1-y) ds$,
где C – квадрат $|x| + |y| = 4$.

Вариант 25

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sin x, y = \cos x, x = 0.$$

3. Найти длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{2} - 1$, расположенной ниже оси OX .

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (y - 2x) dx dy$ по области D ,

ограниченной линиями $3x + y \leq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_{-3}^6 dx \int_0^{2+\frac{2}{3}x} f(x, y) dy + \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D xy dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq x, x \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 3x^2 + 4y^2, x + 2y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

8. Найти площадь части поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C \cos y dx - \sin x dy$,
где C – отрезок прямой $y = -x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$,
где C – первый виток винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

Вариант 26

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 \leq x + 2$, $x \leq 2$.

3. Найти длину дуги кривой

$$x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, 0 \leq t \leq \pi.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (3x + 2y) dx dy$ по области D ,

ограниченной линиями $y \leq -x^2$, $y \geq -1$.

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D (3 - x - y) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, z = 0, y = 2x, x + y = 6, y = 1.$$

8. Найти площадь той части поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = a^2$, которая

лежит в первом октанте и расположена внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C (x^2 - y^2) dx$,
где C – кривая $y = x^2$, $0 \leq y \leq 4$.
10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C xy ds$,
где C – четверть эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $(x \geq 0, y \geq 0)$.

Вариант 27

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y \leq \cos x, y \geq \sin x, x \geq 0.$$

3. Найти длину дуги кривой

$$x = y^2 - 4, \quad -4 \leq x \leq 0.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (y - 2x) dx dy$ по области D ,

$$\text{ограниченной линиями } 3x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0.$$

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_{-3}^0 dx \int_0^{2+\frac{2}{3}x} f(x, y) dy + \int_0^4 dx \int_0^{(4-x)^{\frac{1}{2}}} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D xy dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq x, x \geq 0.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 3x^2 + 4y^2, x + 2y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

8. Найти площадь части поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, расположенной

$$\text{внутри цилиндра } x^2 + y^2 = 2ax.$$

9. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C \cos y dx - \sin x dy$,
 где C – отрезок прямой $x + y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C \frac{ds}{z^2 + x^2 + y^2}$,
 где C – кривая $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Вариант 28

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x + y \leq 2, y \leq x^3, y \geq 0.$$

3. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ от $x = \sqrt{8}$ до $x = \sqrt{15}$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x - 2y) dx dy$ по области D ,

$$\text{ограниченной линиями } 2x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0.$$

5. Переменить порядок интегрирования, сделать чертеж области интегрирования

$$\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy.$$

6. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам

$$\iint_D \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq rx.$$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 3y = 12, 2z = y^2.$$

8. Найти площадь части плоскости $x + y + z = 4$, вырезанной

$$\text{плоскостями } x = 0, y = 0, x = 2, y = 2.$$

9. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_C y^2 ds$,

где C – первая арка циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$.

10. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_C 2xy dx - x^2 dy$,

где C – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(2,1)$.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Определенный интеграл :

а) формула Ньютона-Лейбница : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, $F'(x) = f(x)$,

б) формула замены переменной : $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,

в) формула интегрирования по частям :

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad u = u(x), \quad du = u'(x)dx, \quad dv = v'(x)dx, \quad v(x) = \int v'(x)dx.$$

2. Площадь плоской фигуры :

а) $S = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))dx$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, $a \leq x \leq b$,

б) $S = \int_c^d (\psi_2(y) - \psi_1(y))dy$, $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, $c \leq y \leq d$.

3. Длина дуги кривой :

а) $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$,

б) $y = y(t)$, $x = x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$,

в) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$.

г) $\rho = \rho(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} d\theta$.

4. Двойной интеграл :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad D : \{\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}.$$

5. Изменение порядка интегрирования :

$$\text{а) } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad D : \{\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\},$$

$$\text{б) } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \quad D : \{\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

6. Двойной интеграл в полярных координатах :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^\beta d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho, \quad D : \{\rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta), a \leq \theta \leq \beta\}.$$

7. Объем тела, тройной интеграл :

$$\text{а) } V = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy, \quad f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y), (x, y) \in D,$$

$$\text{б) } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

$$V : \{\psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y), \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}.$$

8. Площадь поверхности :

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy, \quad z = f(x, y), (x, y) \in D.$$

9. Криволинейный интеграл по координатам :

$$\text{а) } \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \varphi'(x)) dx,$$

$$C : \{y = \varphi(x), a \leq x \leq b\}$$

$$\text{б) } \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt,$$

$$C : \{x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

10. Криволинейный интеграл по длине дуги :

$$\text{а) } \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx, \quad C : \{y = \varphi(x), a \leq x \leq b\},$$

$$\text{б) } \int_C f(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad C : \{x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2\}.$$