**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебно- методическое пособие

Казань
2016

УДК 517.958
ББК 22.311
Т41
Т41 Дифференциальные уравнения математической физики: Учебно-методическое пособие для студентов очной формы обучения направления 08.04.01 «Строительство» (магистратура) / Сост. С.Н.Тимергалиев. - Казань: КГАСУ, 2016.- 54 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

В учебно-методическом пособии излагаются основные понятия теории уравнений математической физики, простейшие методы решения задач для уравнений колебаний струны, теплопроводности. Лапласа. Приводятся примеры решения основных задач математической физики, а также задачи для самостоятельного решения.

Рецензент
Доктор физико- математических наук, профессор
кафедры прикладной математики КГАСУ
Р.С.Хайруллин

УДК 517.958
ББК 22.311

Введение

Очень многие задачи механики и физики сводятся к дифференциальным уравнениям с частными производными. При этом оказывается, что одно и то же уравнение может описывать совершенно различные по своей природе явления и процессы. Поэтому для исследования широкого круга задач механики и физики требуется сравнительно небольшое число различных видов дифференциальных уравнений. Изучением таких уравнений и занимается раздел математики «Уравнения математической физики».

§1. Основные понятия и определения

Уравнение, связывающее независимые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, неизвестную функцию $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ и ее частные производные, называется **дифференциальным уравнением с частными производными**. Оно имеет вид

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}) = 0, \quad (1.1)$$

$$k = k_1 + k_2 + ... + k_n,$$

где F - заданная функция своих переменных.

Порядок старшей производной k, входящей в уравнение (1.1), называется **порядком** уравнения. Например, уравнение второго порядка $(k = 2)$ с двумя независимыми переменными $(n = 2)$ имеет вид

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \quad (1.2)$$

где приняты обозначения:

$$x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv y,\ u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x},\ u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y},\ u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u_{xy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ u_{yy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Решением уравнения с частными производными (1.1) называется всякая функция $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, которая, будучи подставлена в уравнение (1.1) вместо неизвестной функции и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Уравнение (1.2) называется **линейным относительно старших производных**, если оно имеет вид

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1.3)$$

где $A(x, y), B(x, y), C(x, y) -$ известные функции переменных x, y.

Если коэффициенты A, B, C зависят не только от x и $y,$ но и от u, u_x, u_y, то такое уравнение называется **квазилинейным**.

Уравнение (1.2) называется **линейным**, если оно линейно как относительно старших производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, так и относительно функции $u(x, y)$ и ее первых производных u_x, u_y:

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + \\ +G(x,y)u = f(x,y), \qquad (1.4)$$

где A, B, C, D, E, G, f − известные функции переменных x, y.

Если $f(x, y) = 0$, то уравнение (1.4) называется **однородным** линейным дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка.

В рамках настоящего учебно-методического пособия мы ограничимся изучением линейных уравнений вида (1.4). Однако, и такие уравнения оказываются еще довольно сложными для исследования и решения. Поэтому в дальнейшем, в основном, будут рассматриваться лишь различные частные случаи уравнения (1.4), которые возникают при описании простейших задач механики и физики.

§2. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Постановка задач

Рассмотрим вопрос о том, как проводится исследование физических задач с помощью дифференциальных уравнений с частными производными. Исходным моментом является то, что исследуется не сам реальный физический процесс, а некоторая его модель (идеальный процесс), от которой требуется, чтобы она сохраняла основные черты изучаемого процесса и в то же время была настолько простой, чтобы поддавалась изучению имеющимися математическими методами.

При исследовании идеального процесса можно выделить следующие основные моменты.

1. Выбирается величина u (или несколько величин), характеризующая процесс, которая обычно является функцией пространственных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и времени t: $u = u(x_1, x_2, ..., x_n, t)$.

2. На основании законов, которым подчиняется идеальный процесс, выводится дифференциальное уравнение с частными производными относительно функции $u(x_1, x_2, ..., x_n, t)$.

3. Так как дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений, то его недостаточно для описания конкретного процесса. Поэтому выводятся еще некоторые дополнительные условия, характеризующие процесс. Такими дополнительными условиями чаще всего являются **граничные условия**, т.е. условия, заданные на границе рассматривае-

мой среды, и **начальные условия**, относящиеся к моменту времени, с которого начинается процесс.

Совокупность дифференциального уравнения и дополнительных условий представляет собой математическую формулировку физической задачи и называется **задачей математической физики**.

То обстоятельство, что задача математической физики должна отражать (хотя и приближенно) некоторый физический процесс, накладывает на нее ряд требований. А именно, задача считается **поставленной корректно** (правильно), если ее решение 1) существует, 2) единственно, 3) устойчиво, т.е. малые изменения любого из данных задачи вызывают малое изменение решения. Требование устойчивости необходимо по следующей причине. В данных любой конкретной задачи, полученных из опыта, всегда содержится некоторая погрешность и нужно, чтобы малая погрешность в данных приводила к малой погрешности в решении.

Естественно, что основной проблемой теории «Уравнений математической физики» является нахождение решения задачи математической физики в виде, удобном для практики. Зная это решение $u = u(x_1, x_2, ..., x_n, t)$, можно получить количественную характеристику процесса в любой точке среды и в любой момент времени. В случае, когда решение невозможно найти в явном виде, первостепенное значение приобретает вопрос о его существовании. Очень важны также и вопросы единственности и устойчивости решения.

В настоящем пособии мы ограничимся лишь явным нахождением решений основных задач математической физики, с которыми познакомимся ниже на конкретных примерах.

2.1. Малые поперечные колебания струны. Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. Предположим, что в исходном положении струна занимает отрезок $[0, l]$ оси Ox. Если ее вывести из положения равновесия, то она будет совершать колебания. Дадим математическую формулировку этому процессу. Примем следующую модель струны: струна есть упругая, невесомая и абсолютно гибкая нить. Таким образом, мы пренебрегаем: а) толщиной струны, б) силами, возникающими при ее изгибании, в) силами тяжести. Оставляем только силы натяжения $\vec{T}$, направленные по касательной к струне и подчиненные закону Гука: натяжение струны пропорционально ее удлинению.

Величиной, характеризующей процесс колебания струны, является вектор смещения $\vec{u}$ точек струны. Предположим, что 1) смещения струны лежат в одной плоскости (x, u) и 2) вектор смещения $\vec{u}$ перпендикулярен в любой момент к оси Ox (поперечные колебания). Тогда процесс колебания будет характеризоваться одной скалярной величиной $u = u(x, t)$- отклонением от положения равновесия точки струны с абсциссой x в момент времени t. Будем рассматривать малые колебания, т.е. такие, при которых можно пренебрегать квадратом u_x по сравнению с единицей.

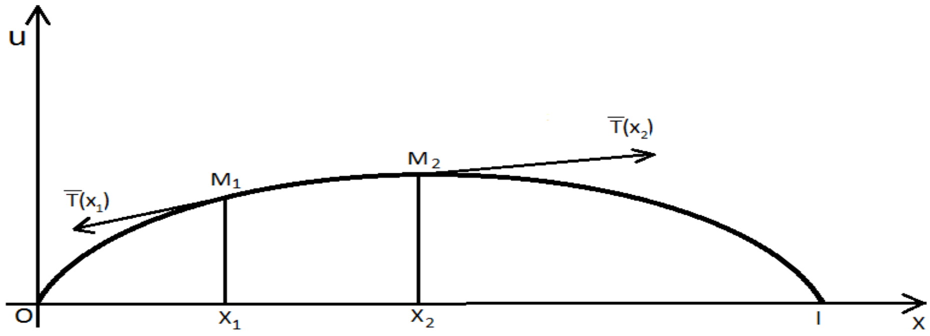

Рис. 1.

Выделим произвольный участок (x_1, x_2) струны (рис.1), который при колебании струны деформируется в участок M_1M_2. Длина дуги этого участка в момент времени t равна

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}\,dx \approx x_2 - x_1.$$

Следовательно, при наших предположениях удлинения струны не происходит и на основании закона Гука величина натяжения T в каждой точке струны не меняется со временем. Покажем также, что натяжение не зависит и от x, т.е. $T(x) = T_0 = const$. С этой целью найдем проекции сил натяжения, действующих на участок M_1M_2, на оси Ox и Ou (обозначим их T_{Ox} и T_{Ou}):

$$T_{Ox}(x_1) = -T(x_1)\cos\alpha(x_1), \quad T_{Ox}(x_2) = T(x_2)\cos\alpha(x_2),$$
$$T_{Ou}(x_1) = -T(x_1)\sin\alpha(x_1), \quad T_{Ou}(x_2) = T(x_2)\sin\alpha(x_2), \qquad (2.1)$$

где $\alpha(x)$ – угол между положительным направлением касательной к струне $u(x,t)$ в точке с абсциссой x и положительным направлением оси Ox.

Учитывая малость колебаний, в соотношениях (2.1) $\sin\alpha(x), \cos\alpha(x)$ можно заменить следующими величинами

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1, \quad \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx u_x. \quad (2.2)$$

На участок M_1M_2 струны действуют силы натяжения, внешние силы и силы инерции. На основании принципа Даламбера суммы проекций всех этих сил на оси Ox и Ou должны равняться нулю. Так как мы рассматриваем только поперечные колебания, то силы инерции и внешние силы направлены параллельно оси Ou. Тогда с учетом соотношений (2.1), (2.2) получим $T(x_2) - T(x_1) \approx 0$, откуда в силу произвольности точек x_1, x_2 следует, что натяжение не зависит от x, т.е. для всех значений x и t: $T(x) \equiv T_0 = const.$

Теперь выведем уравнение колебаний струны. Для этого составим сумму проекций всех сил на ось Ou. С учетом сказанного выше сумму проекций на ось Ou сил натяжения запишем в виде

$$Y = T_0[u_x(x_2,t) - u_x(x_1,t)].$$

Откуда, замечая, что

$$u_x(x_2,t) - u_x(x_1,t) = \int_{x_1}^{x_2} u_{xx}(x,t)dx,$$

получим

$$Y = T_0 \int_{x_1}^{x_2} u_{xx}(x,t)dx. \qquad (2.3)$$

Обозначим через $p(x,t)$ внешнюю силу, действующую на струну параллельно оси Ou и рассчитанную на единицу длины. Тогда проекция на ось Ou внешней силы, действующей на участок M_1M_2 струны, будет равна

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx. \qquad (2.4)$$

Пусть $\rho(x)$ – линейная плотность струны. Тогда сила инерции участка M_1M_2 струны будет равна

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)u_{tt}(x,t)dx. \qquad (2.5)$$

Приравнивая к нулю сумму проекций (2.3)-(2.5), получим

$$\int_{x_1}^{x_2} [T_0u_{xx}(x,t) - \rho(x)u_{tt}(x,t) + p(x,t)]dx = 0. \qquad (2.6)$$

Предположим теперь существование и непрерывность вторых производных $u_{xx}(x,t), u_{tt}(x,t)$, а также считаем функции $\rho(x), p(x,t)$ непрерывными. Тогда можно показать, что подынтегральное выражение в (2.6) есть тождественный нуль, т.е. имеем

$$\rho(x)u_{tt} = T_0u_{xx} + p(x,t). \qquad (2.7)$$

Это и есть искомое **уравнение колебаний струны.**

В случае однородной струны $(\rho = const)$ уравнение (2.7) обычно записывается в виде

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t), \qquad (2.8)$$

где $a^2 = T_0/\rho,\ f = p(x,t)/\rho.$

Уравнение (2.8) при $f(x,t) \neq 0$ называется **уравнением вынужденных колебаний** струны. При $f(x,t) \equiv 0$ (внешняя сила отсутствует) получаем **уравнение свободных колебаний** струны:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \qquad (2.9)$$

Сформулируем теперь основные дополнительные условия.

1) Концы струны, имеющие абсциссы $x = 0$ и $x = l$, перемещаются по заданному закону:

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t). \qquad (2.10)$$

Если концы струны жестко закреплены, то

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \qquad (2.11)$$

2) К концам струны приложены заданные силы:

$$u_x(0,t) = \nu_1(t), \quad u_x(l,t) = \nu_2(t). \qquad (2.12)$$

Если концы струны свободны, то

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0. \qquad (2.13)$$

3) Концы струны упруго закреплены:

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = \omega_1(t), \quad u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = \omega_2(t). \qquad (2.14)$$

В соотношениях (2.10), (2.12), (2.14) справа стоят известные функции, а h_1, h_2 в (2.14) - известные положительные постоянные.

Условия (2.10)- (2.14) называются **краевыми или граничными условиями**. Возможны и другие комбинации граничных условий. Например, один конец струны может перемещаться по заданному закону, а другой конец струны может быть свободным и т.д.

Очевидно, что процесс колебаний будет существенно зависеть также от того, каким способом струна выводится из равновесия. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ всем точкам струны сообщаются некоторые смещения и скорости. Это приводит к следующим условиям:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \; 0 \le x \le l, \qquad (2.15)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ −заданные функции, выражающие соответственно смещения и скорости точек струны в начальный момент времени.

Условия (2.15) называются **начальными условиями**, а функции $\varphi(x), \psi(x)$ - **начальными данными**.

Таким образом, физическая задача о колебаниях струны свелась к **следующей математической задаче:**

найти такое решение уравнения (2.7), которое удовлетворяет одному из граничных условий (2.10)- (2.14) и начальным условиям (2.15).

Эта задача называется **смешанной задачей**, так как включает в себя и граничные, и начальные условия.

Для уравнения (2.7) может быть поставлена и другая задача. Пусть струна достаточно длинная и нас интересует колебание ее точек, достаточно удаленных от концов, причем в течение малого промежутка времени. В этом случае режим на концах не будет оказывать существенного влияния и поэтому его не учитывают; струну же при этом считают бесконечной. Задача ставится так:

найти решение уравнения (2.7) при $-\infty < x < \infty, t > 0$ **так, чтобы оно удовлетворяло начальным условиям**

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), -\infty < x < \infty. \qquad (2.16)$$

Задача (2.7), (2.16) называется **задачей Коши.**

Уравнение (2.7) описывает колебательные процессы одномерного тела. В трехмерном случае многие колебательные процессы приводят к **волновому уравнению**

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x,y,z,t). \qquad (2.17)$$

Например, к уравнению (2.17) приводят следующие процессы: малые упругие колебания твердых тел, звуковые колебания, электромагнитные колебания.

Уравнение (2.7) является частным случаем уравнения (2.17). Другим частным случаем является **уравнение колебаний мембраны**

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t). \qquad (2.18)$$

К уравнению (2.18) приводят задачи о колебаниях двумерных тел, в частности, задача о малых колебаниях мембраны - свободно изгибающейся упругой пленки.

2.2. Распространение тепла в изотропном твердом теле. Рассмотрим задачу о распространении тепла в неравномерно нагретом твердом теле. За величину, характеризующую процесс, возьмем температуру $u = u(x,y,z,t)$. Примем следующую модель процесса: происходит механический перенос тепла из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой; все тепло идет на изменение температуры тела; свойства тела от температуры не зависят.

Воспользуемся следующими законами.

1) Закон Фурье: количество тепла dQ_1, проходящее через элементарную площадку dS внутри тела в направлении нормали $\vec{n}$ к этой площадке за время dt, равно

$$dQ_1 = -k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt, \qquad (2.19)$$

где $k > 0$ - коэффициент внутренней теплопроводности. Будем считать, что тело изотропно в отношении теплопроводности, т.е. k зависит только от точки (x,y,z) тела и не зависит от направления нормали $\vec{n}$: $k = k(x,y,z)$.

2) Количество тепла dQ_2, которое получает элементарный объем dV за время $t = t_2 - t_1$, связано с изменением температуры соотношением

$$dQ_2 = c\rho[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]dV, \qquad (2.20)$$

где c, ρ - удельная теплоемкость и плотность вещества.

Кроме того, нам понадобится формула Остроградского. Пусть V - некоторое тело, ограниченное кусочно-гладкой поверхностью S, а $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ – некоторые функции, непрерывные в $V+S$ и имеющие непрерывные первые производные в V. Тогда

$$\iiint\limits_V (P_x + Q_y + R_z)dV = -\iint\limits_S [P\cos(\nu,x) + Q\cos(\nu,y) + R\cos(\nu,z)]dS, \quad (2.21)$$

где ν - внутренняя нормаль к поверхности S.

Перейдем к выводу уравнения. Выделим внутри рассматриваемого тела T произвольный объем V, ограниченный поверхностью S. В силу формулы (2.19) через поверхность S за промежуток $t_2 - t_1$ объем V получит (или потеряет) количество тепла, равное

$$Q_1 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_S k \frac{\partial u}{\partial \nu} dS. \quad (2.22)$$

Пусть внутри тела имеются источники тепла. Обозначим через $F(x,y,z,t)$ плотность этих источников, т.е. количество тепла, выделяемого (или поглощаемого) в единицу времени в единице объема. Тогда количество тепла, выделяемого (или поглощаемого) в объеме V за время $t_2 - t_1$, будет равно

$$Q_3 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V F(x,y,z,t)dV. \quad (2.23)$$

Все тепло $Q_1 + Q_3$ пойдет на изменение температуры объема V. Поэтому с учетом (2.20) может быть записано в виде

$$Q_1 + Q_3 = Q_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V c\rho u_t dt, \quad (2.24)$$

при этом нами использовано равенство

$$u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} u_t dt.$$

Полагая в (2.21) $P = ku_x, Q = ku_y, R = ku_z$, получаем

$$\iiint\limits_V \{(ku_x)_x + (ku_y)_y + (ku_z)_z\}dV = -\iint\limits_S k[u_x\cos(\nu,x) + u_y\cos(\nu,y) +$$

$$+ u_z\cos(\nu,z)]dS = -\iint\limits_S k\frac{\partial u}{\partial \nu}dS. \quad (2.25)$$

С помощью (2.25) выражение (2.22) для Q_1 можно представить в виде

$$Q_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \{(ku_x)_x + (ku_y)_y + (ku_z)_z\}dV. \quad (2.26)$$

Если теперь (2.26) и (2.23) подставить в (2.24), то получим

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \{c\rho u_t - (ku_x)_x - (ku_y)_y - (ku_z)_z - F(x,y,z,t)\} dV = 0,$$

откуда

$$c\rho u_t = (ku_x)_x + (ku_y)_y + (ku_z)_z + F(x,y,z,t). \qquad (2.27)$$

Уравнение (2.27) называется **уравнением теплопроводности**.

Если тело однородно, то $c, \rho, k-$постоянные, и уравнение (2.27) примет вид

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x,y,z,t), \qquad (2.28)$$

где $a^2 = k/(c\rho),\ f = F/(c\rho).$

Если в теле нет источников тепла, т.е. $F \equiv 0$, то из (2.28) получаем **однородное уравнение теплопроводности**

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}). \qquad (2.29)$$

В случае двумерного тела, например, при распространении тепла в очень тонкой однородной пластинке, уравнение (2.28) переходит в

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t). \qquad (2.30)$$

Для одномерного тела – тонкого стержня – уравнение (2.28) примет вид

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t). \qquad (2.31)$$

При этом предполагается, что грани пластинки и боковая поверхность стержня теплоизолированы.

Рассмотрим теперь дополнительные условия. Из физических соображений следует, что для однозначного определения температуры необходимо знать распределение температуры в начальный момент и тепловой режим на границе S тела. Основными видами тепловых режимов являются следующие режимы.

1) На границе поддерживается определенная температура:

$$u|_S = f_1(P,t), \qquad (2.32)$$

где $f_1(P,t)-$известная функция точки $P \in S$ и времени t.

2) Через границу S подается определенный тепловой поток:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = f_2(P,t), \qquad (2.33)$$

где $f_2(P,t) = \dfrac{q(P,t)}{k}$; $q(P,t)-$плотность теплового потока, т.е. количество тепла, которое получает в единицу времени единица площади поверхности S; $\vec{n}-$внешняя нормаль к S; $k-$коэффициент внутренней теплопроводности.

В частности, если поверхность S теплоизолирована, то

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0.$$

3) Происходит теплообмен между телом и внешней средой, температура которой известна, по закону Ньютона: плотность теплового потока, получаемого телом из внешней среды, равна

$$q(P,t) = H(u_0 - u),$$

где u_0 – температура внешней среды, H – коэффициент теплообмена. В этом случае имеем граничное условие

$$(\frac{\partial u}{\partial n} + hu)|_S = f_3(P,t), \tag{2.34}$$

где $h = H/k,\ f_3 = hu_0$.

Начальное условие для уравнения теплопроводности (2.27) имеет вид:

$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), \tag{2.35}$$

где $\varphi(x,y,z)$ – заданная функция – температура в начальный момент времени $t = 0$ в любой точке (x,y,z) тела.

Таким образом, мы приходим **к задаче**: *найти решение уравнения теплопроводности (2.27), удовлетворяющее начальному условию (2.35) и либо условию (2.32) (**первая начально-краевая задача**), либо условию (2.33) (**вторая начально-краевая задача**), либо условию (2.34) (**третья начально-краевая задача**).* Совершенно аналогично ставятся задачи в двумерном и одномерном случаях, т.е. для уравнений (2.30), (2.31). Для уравнений (2.27), (2.30),(2.31) можно ставить также и задачу Коши, т.е. задачу без граничных условий.

Отметим, что к уравнению (2.27), помимо задачи о распространении тепла, приводятся и другие физические задачи: диффузия в жидкостях и газах, движение вязкой жидкости и др.

2.3. Установившаяся температура в однородном теле. Рассмотрим частный случай задачи о распространении тепла в однородном теле, когда температура u не меняется со временем (установившаяся или стационарная температура): $u = u(x,y,z)$. Так как в этом случае $u_t \equiv 0$, то уравнение (2.28) примет вид

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \Phi(x,y,z), \tag{2.36}$$

где $\Phi(x,y,z) = -f(x,y,z)/a^2$.

При отсутствии тепловых источников внутри тела ($f(x,y,z) \equiv 0$) уравнение (2.36) переходит в уравнение

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{2.37}$$

Уравнение (2.36) называется **уравнением Пуассона**, уравнение (2.37) – **уравнением Лапласа, оператор Δu - оператором Лапласа**.

Для однозначного определения температуры $u(x, y, z)$ теперь не надо задавать начальное ее распределение, а достаточно знать лишь тепловой режим на границе S тела. В результате приходим к следующим **задачам**: *внутри поверхности S найти решение уравнения (2.36) или (2.37), удовлетворяющее на границе S тела либо условию (2.32) (**задача Дирихле**), либо условию (2.33) (**задача Неймана**), либо условию (2.34) (**третья краевая задача или задача с косой производной**).*

Совершенно аналогично получаем двумерные уравнения Пуассона и Лапласа:

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = \Phi(x, y), \quad \Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{2.38}$$

Граничные условия для этих уравнений задаются на замкнутой плоской кривой.

К граничным задачам для уравнений Пуассона и Лапласа, помимо задачи об установившейся температуре, приводятся многие стационарные задачи из электростатики, магнитостатики, гидродинамики и других разделов естествознания.

§3. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотренные в §2 волновое уравнение, уравнение теплопроводности и уравнение Лапласа существенно отличаются друг от друга. Это отличие заключается и в их физической природе, и в постановке задач, и как увидим ниже, в методах их исследования. Оказывается, что эти уравнения являются представителями трех различных классов, на которые можно разбить большую часть всех уравнений с частными производными второго порядка, линейных относительно вторых производных. Настоящий параграф и будет посвящен этой классификации, при этом мы ограничимся случаем двух независимых переменных.

Итак, рассмотрим уравнение (1.3) в некоторой области G_0 плоскости переменных x, y. Предположим, что коэффициенты уравнения (1.3) $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$ имеют производные до второго порядка включительно, непрерывные в области G_0; F_1 - непрерывная функция своих аргументов. Поставим перед собой **задачу**: *с помощью замены независимых переменных x, y привести уравнение (1.3) к наиболее простому виду.*

Введем новые переменные:

$$\alpha = \alpha(x, y), \quad \beta = \beta(x, y). \tag{3.1}$$

От функций (3.1) потребуем, чтобы они были дважды непрерывно дифференцируемыми и чтобы якобиан

$$\frac{D(\alpha,\beta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.2)$$

в рассматриваемой области G_0. Как известно, условие (3.2) является необходимым и достаточным для существования обратного преобразования

$$x = x(\alpha,\beta),\ y = y(\alpha,\beta). \qquad (3.3)$$

Преобразования (3.3) позволяют выразить производные в уравнении (1.3) через производные функции $u(\alpha,\beta)$ по новым переменным α,β. Используя формулы дифференцирования сложных функций нескольких переменных, получаем

$$\begin{gathered} u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x, \quad u_y = u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y, \\ u_{xx} = u_{\alpha\alpha}\alpha_x^2 + 2u_{\alpha\beta}\alpha_x\beta_x + u_{\beta\beta}\beta_x^2 + u_\alpha \alpha_{xx} + u_\beta \beta_{xx}, \\ u_{xy} = u_{\alpha\alpha}\alpha_x\alpha_y + u_{\alpha\beta}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + u_{\beta\beta}\beta_x\beta_y + u_\alpha\alpha_{xy} + u_\beta\beta_{xy}, \quad (3.4) \\ u_{yy} = u_{\alpha\alpha}\alpha_y^2 + 2u_{\alpha\beta}\alpha_y\beta_y + u_{\beta\beta}\beta_y^2 + u_\alpha\alpha_{yy} + u_\beta\beta_{yy}. \end{gathered}$$

Подставляя значения производных из (3.4) в (1.3), приходим к уравнению

$$\overline{A}u_{\alpha\alpha} + 2\overline{B}u_{\alpha\beta} + \overline{C}u_{\beta\beta} + \overline{F}_1(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta) = 0, \qquad (3.5)$$

где

$$\begin{gathered} \overline{A}(\alpha,\beta) = A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2, \\ \overline{C}(\alpha,\beta) = A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2, \qquad (3.6) \\ \overline{B}(\alpha,\beta) = A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y; \end{gathered}$$

явное выражение $\overline{F}_1$ нас не интересует.

Функции $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ найдем так, чтобы обратить некоторые из коэффициентов $\overline{A}, \overline{C}, \overline{B}$ в нуль. Из соотношений (3.6) видно, что вопрос об обращении в нуль $\overline{A}$ и $\overline{C}$ эквивалентен вопросу разрешимости дифференциального уравнения первого порядка вида

$$Az_x^2 + 2Bz_xz_y + Cz_y^2 = 0 \qquad (3.7)$$

относительно неизвестной функции $z(x,y)$. Поделив уравнение (3.7) на z_y^2 и решая его затем как квадратное уравнение относительно $\frac{z_x}{z_y}$, для определения функции $z(x,y)$ получим два линейных уравнения с частными производными первого порядка вида

$$\begin{gathered} Az_x + (B - \sqrt{B^2 - AC})z_y = 0, \\ Az_x + (B + \sqrt{B^2 - AC})z_y = 0. \qquad (3.8) \end{gathered}$$

Уравнения (3.8) решаются с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в нашем случае имеют вид

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B-\sqrt{B^2-AC}},\quad \frac{dx}{A}=\frac{dy}{B+\sqrt{B^2-AC}},$$

или

$$Ady-(B-\sqrt{B^2-AC})dx=0,$$
$$Ady-(B+\sqrt{B^2-AC})dx=0.$$

Эти уравнения, в свою очередь, могут быть записаны в виде одного уравнения

$$A(dy)^2-2Bdxdy+C(dx)^2=0. \tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) называется **характеристическим уравнением для (1.3).** Пусть

$$\varphi(x,y)=c_1,\psi(x,y)=c_2 \tag{3.10}$$

- общие решения уравнения (3.9). Кривые (3.10) называются **характеристиками уравнения (1.3).**

Поведение общих решений (3.10), а следовательно, и искомый простейший вид уравнения (1.3), зависит от знака дискриминанта $\delta=B^2-AC$. Нетрудно проверить, что

$$\overline{B}^2-\overline{A}\overline{C}=(B^2-AC)\left[\frac{D(\alpha,\beta}{D(x,y)}\right]^2, \tag{3.11}$$

следовательно, знак δ не меняется при преобразованиях независимых переменных. В связи с этим классификация уравнений вида (1.3) производится по знаку δ.

Уравнение (1.3) называется в некоторой точке (x_0,y_0) *области* G_0 *уравнением*

- ***гиперболического типа**, если* $\delta(x_0,y_0)>0;$
- ***эллиптического типа**, если* $\delta(x_0,y_0)<0;$
- ***параболического типа**, если* $\delta(x_0,y_0)=0.$

Если в некоторой области $G_1\subset G_0$ *дискриминант* $\delta(x,y)>0,\quad \delta(x,y)<0$ *или* $\delta\equiv 0$ *в* G_1*, то уравнение (1.3) называется соответственно **уравнением гиперболического, эллиптического и параболического типа в области*** G_1**.**

В приложениях встречаются такие уравнения, у которых $\delta(x,y)$ не сохраняет знака во всей рассматриваемой области. Это – так называемые **вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа.** Мы ими заниматься не будем.

Вернемся теперь к задаче упрощения уравнения (1.3), причем каждый тип будем рассматривать в отдельности.

1. $\delta = B^2 - AC > 0$. Характеристическое уравнение (3.9) имеет два вещественных и различных общих решения (3.10). За новые переменные α, β возьмем

$$\alpha = \varphi(x, y), \;\; \beta = \psi(x, y). \tag{3.12}$$

Так как функции $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ удовлетворяют уравнению (3.7), то из (3.6) получим $\overline{A} = \overline{C} \equiv 0$. Из (3.11) следует $\overline{B} \neq 0$. Разделив уравнение (3.5) на $2\overline{B}$, будем иметь:

$$u_{\alpha\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta), \tag{3.13}$$

где $\Phi_1 = -\overline{F}_1 / (2\overline{B})$.

(3.13) есть канонический вид уравнения гиперболического типа.

2. $\delta = B^2 - AC = 0$. В этом случае общие решения уравнения (3.9) вещественны и совпадают. Положим

$$\alpha = \varphi(x, y),$$

а за $\beta(x, y)$ возьмем любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию, для которой якобиан $\dfrac{D(\varphi, \beta)}{D(x, y)} \neq 0$. Тогда из (3.6) следует $\overline{A} \equiv 0$.

Так как $\delta = 0$, то из (3.11) будем иметь $\overline{B} \equiv 0$. Нетрудно показать, что $\overline{C} \neq 0$. Поделив теперь уравнение (3.5) на $\overline{C}$, получим

$$u_{\beta\beta} = \Phi_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta), \tag{3.14}$$

где $\Phi_2 = -\overline{F}_1 / \overline{C}$.

(3.14) есть канонический вид уравнения параболического типа.

3. $\delta = B^2 - AC < 0$. В этом случае общие решения (3.10) характеристического уравнения (3.9) являются комплексными величинами. Пусть

$$\varphi(x, y) \equiv \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y) = c_1$$

- одно из решений (3.10); другое решение будет комплексно сопряженным с указанным. За новые переменные α, β возьмем

$$\alpha = \varphi_1(x, y), \quad \beta = \varphi_2(x, y).$$

Подставляя в уравнение (3.7) его решение $\varphi = \alpha + i\beta$, получаем

$$A(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2B(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) + C(\alpha_y + i\beta_y)^2 \equiv 0,$$

откуда, разделяя вещественную и мнимую части, будем иметь:

$$A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2 = A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2,$$

$$A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y = 0.$$

Если учесть соотношения (3.6), то видно, что $\overline{A} = \overline{C}, \overline{B} = 0$. Из (3.11) следует $\overline{A} \neq 0$. Поделив теперь уравнение (3.5) на $\overline{A}$, получим

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=\Phi_3(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta), \quad \Phi_3=-\overline{F}_1/\overline{A}. \qquad (3.15)$$

(3.15) есть канонический вид уравнения эллиптического типа.

Отметим, что рассмотренные в §2 уравнения колебаний струны (2.8), теплопроводности (2.31), Лапласа (2.38) принадлежат соответственно гиперболическому, параболическому и эллиптическому типу.

Отметим также, что классификация дифференциальных уравнений с частными производными производится и в случае, когда число независимых переменных больше двух [1]. Волновое уравнение (2.17), уравнения теплопроводности (2.29) и Лапласа (2.37) принадлежат соответственно гиперболическому, параболическому и эллиптическому типу.

Пример 3.1. Определить тип уравнения

$$u_{xx}+4u_{xy}+3u_{yy}+3u_x+6u_y=0$$

и привести его к каноническому виду.

Решение. Так как $A=1, B=2, C=3$ и $\delta(x,y)=2^2-1\cdot 3=1>0$, то данное уравнение гиперболического типа. Приведем его к каноническому виду. В соответствии с (3.9) составим характеристическое уравнение

$$(dy)^2-4dx\cdot dy+3(dx)^2=0.$$

Решаем его. Получаем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4\frac{dy}{dx}+3=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=2\pm\sqrt{2^2-1\cdot 3}=2\pm 1.$$

Следовательно, уравнение имеет характеристики $y-3x=c_1, \quad y-x=c_2$. Поэтому в соответствии с (3.12) положим

$$\alpha=y-3x, \quad \beta=y-x.$$

Так как $\alpha_x=-3, \beta_x=-1, \alpha_y=\beta_y=1;$ вторые производные функций α,β равны нулю, то с помощью формул (3.4) получаем

$$u_x=-3u_\alpha-u_\beta, \; u_y=u_\alpha+u_\beta, \quad u_{xx}=9u_{\alpha\alpha}+6u_{\alpha\beta}+u_{\beta\beta},$$

$$u_{xy}=-3u_{\alpha\alpha}-4u_{\alpha\beta}-u_{\beta\beta}, \quad u_{yy}=u_{\alpha\alpha}+2u_{\alpha\beta}+u_{\beta\beta}.$$

Эти выражения производных подставим в исходное уравнение:

$$(9u_{\alpha\alpha}+6u_{\alpha\beta}+4u_{\beta\beta})+4(-3u_{\alpha\alpha}-4u_{\alpha\beta}-u_{\beta\beta})+3(u_{\alpha\alpha}+2u_{\alpha\beta}+u_{\beta\beta})+$$

$$+3(-3u_\alpha-u_\beta)+6(u_\alpha+u_\beta)=0,$$

откуда, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получаем канонический вид уравнения $4u_{\alpha\beta}+3u_\alpha-3u_\beta=0$.

Пример 3.2. Определить тип уравнения

$$y^2u_{xx}+x^2u_{yy}-\frac{x^2}{y}u_y-\frac{y^2}{x}u_x=0$$

и привести его к каноническому виду.

Решение. Так как $A = y^2, \quad B = 0, \quad C = x^2$ и $\delta(x,y) = 0^2 - y^2 \cdot x^2 = -(xy)^2 < 0$ во всех точках, не лежащих на прямых $x = 0$ или $y = 0$, то в любом открытом квадранте данное уравнение имеет эллиптический тип. Приведем его к каноническому виду. В соответствии с (3.9) составим характеристическое уравнение

$$y^2(dy)^2 + x^2(dx)^2 = 0.$$

Решаем его. Имеем:

$$(ydy + ixdx)\cdot(ydy - ixdx) = 0 \quad \Rightarrow \quad ydy + ixdx = 0,\ ydy - ixdx = 0.$$

Следовательно, уравнение имеет комплексно сопряженные характеристики $y^2 \pm ix^2 = c.$ Поэтому полагаем

$$\alpha = y^2, \quad \beta = x^2.$$

Так как $\alpha_x = 0, \beta_x = 2x, \alpha_y = 2y, \beta_y = 0, \alpha_{xx} = \alpha_{xy} = 0, \alpha_{yy} = 2, \beta_{xx} = 2,$ $\beta_{xy} = \beta_{yy} = 0,$ то с помощью формул (3.4) находим

$$u_x = u_\beta \cdot 2x,\ u_y = u_\alpha \cdot 2y, \quad u_{xx} = u_{\beta\beta}\cdot 4x^2 + 2u_\beta, u_{yy} = u_{\alpha\alpha}\cdot 4y^2 + 2u_\alpha.$$

Подставив эти значения в исходное уравнение, получим

$$y^2(4x^2u_{\beta\beta} + 2u_\beta) + x^2(4y^2u_{\alpha\alpha} + 2u_\alpha) - \frac{x^2}{y}\cdot 2yu_\alpha - \frac{y^2}{x}\cdot 2xu_\beta = 0,$$

т.е. $4x^2y^2(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta}) = 0.$ Сокращая на $4x^2y^2 \neq 0,$ приходим к уравнению канонического вида $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0.$

Пример 3.3. Определить тип уравнения

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$$

и привести его к каноническому виду.

Решение. Так как $A = x^2, B = xy, C = y^2$ и $\delta = (xy)^2 - x^2\cdot y^2 = 0$, то уравнение параболического типа. Приведем его к каноническому виду. Составим характеристическое уравнение

$$x^2(dy)^2 - 2xydxdy + y^2(dx)^2 = 0.$$

Левая часть этого уравнения есть полный квадрат: $(xdy - ydx)^2 = 0$, откуда $xdy - ydx = 0.$ Это есть уравнение с разделяющимися переменными.

Решаем его: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|c| \Rightarrow \dfrac{y}{x} = c.$

Итак, характеристическое уравнение имеет одно семейство действительных характеристик. Положим

$$\alpha = \frac{y}{x},$$

а за $\beta(x,y)$ в соответствии с вышесказанным возьмем любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию, для которой якобиан $\dfrac{D(\alpha,\beta)}{D(x,y)} \neq 0.$ Например, пусть $\beta = x.$ Тогда

$$\frac{D(\alpha,\beta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} \neq 0.$$

Так как

$$\alpha_x = -\frac{y}{x^2}, \alpha_y = \frac{1}{x}, \beta_x = 1, \beta_y = 0, \alpha_{xx} = \frac{2y}{x^3}, \alpha_{xy} = -\frac{1}{x^2}, \ \alpha_{yy} = \beta_{xx} =$$

$= \beta_{xy} = \beta_{yy} = 0,$ то подставляя эти значения производных в (3.4), получаем

$$u_{xx} = \frac{y^2}{x^4}u_{\alpha\alpha} - \frac{2y}{x^3}u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta} + \frac{2y}{x^3}u_{\alpha},$$

$$u_{xy} = -\frac{y}{x^3}u_{\alpha\alpha} + \frac{1}{x}u_{\alpha\beta} - \frac{1}{x^2}u_{\alpha}, \quad u_{yy} = \frac{1}{x^2}u_{\alpha\alpha}.$$

Теперь эти выражения производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} внесем в исходное уравнение. Получим

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^4}u_{\alpha\alpha} - \frac{2y}{x^3}u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta} + \frac{2y}{x^3}u_{\alpha}\right) + 2xy\left(-\frac{y}{x^3}u_{\alpha\alpha} + \frac{1}{x}u_{\alpha\beta} - \frac{1}{x^2}u_{\alpha}\right) +$$

$$+ y^2 \cdot \frac{1}{x^2}u_{\alpha\alpha} = 0,$$

откуда $x^2 u_{\beta\beta} = 0.$ Сократив на $x^2 \neq 0$, получим канонический вид заданного уравнения: $u_{\beta\beta} = 0.$

Задачи

Определить тип уравнений и привести их к каноническому виду.

3.1. $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} = 0.$

Ответ: гиперболический, $u_{\alpha\beta} = 0.$

3.2. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x + 6u_y = 0.$

Ответ: параболический, $\alpha = 2x - y, \beta = x, \quad u_{\beta\beta} + 3u_{\beta} = 0.$

3.3. $u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} = 0.$

Ответ: эллиптический, $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0.$

3.4. $u_{xx} - 2\sin x \cdot u_{xy} - \cos^2 x \cdot u_{yy} - \cos x \cdot u_y = 0.$

Ответ: гиперболический, $u_{\alpha\beta} = 0.$

3.5. $u_{xx} - 2xu_{xy} + x^2 u_{yy} - 2u_y = 0.$

Ответ: параболический, $\alpha = y + \dfrac{x^2}{2}, \beta = x, \quad u_{\beta\beta} - u_\alpha = 0.$

3.6. $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0.$

Ответ: гиперболический, $u_{\alpha\beta} - u_\alpha = 0.$

3.7. $u_{xx} + 2u_{xy} + \cos^2 x \cdot u_{yy} - ctgx \cdot (u_x + u_y) = 0.$

Ответ: гиперболический, $u_{\alpha\beta} = 0.$

3.8. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y = 0.$

Ответ: гиперболический, $u_{\alpha\beta} + 2u_\alpha + u_\beta = 0.$

3.9. $(1+x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2)u_x = 0.$

Ответ: эллиптический, $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0.$

3.10. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0.$

Ответ: параболический, $\alpha = y + 3x, \beta = x, \quad u_{\beta\beta} - u_\alpha - u_\beta = 0.$

§4. Нахождение общих решений некоторых дифференциальных уравнений с частными производными

Как известно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $n-$го порядка представляется функцией от независимой переменной x и n произвольных постоянных интегрирования $c_1, c_2, ..., c_n$:

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n). \tag{4.1}$$

Зная это общее решение, можно решить ту или иную задачу, например, задачу Коши, определяя соответствующим образом постоянные $c_1, c_2, ..., c_n$.

Для дифференциальных уравнений с частными производными невозможно указать единого вида общего решения, аналогичного (4.1), но можно находить его в отдельных частных случаях путем непосредственного интегрирования их канонических форм. Этот факт мы проиллюстрируем на некоторых примерах уравнений.

Пример 4.1. Найти общее решение уравнения колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{4.2}$$

Решение. Сначала приведем его к каноническому виду. Характеристическое уравнение (3.9) в нашем случае имеет вид:

$$(dx)^2 - a^2 (dt)^2 = 0,$$

а его общие решения -

$$x - at = c_1, \ x + at = c_2.$$

Следовательно, в соответствии с (3.12) за новые переменные α, β берем

$$\alpha = x - at, \quad \beta = x + at. \tag{4.3}$$

Так как

$$\alpha_x = 1, \alpha_t = -a, \beta_x = 1, \beta_t = a, \alpha_{xx} = \alpha_{tt} = \alpha_{xt} = \beta_{xx} = \beta_{tt} = \beta_{xt} \equiv 0,$$

то из формул (3.4) получим

$$u_x = u_\alpha + u_\beta, \quad u_{xx} = u_{\alpha\alpha} + 2u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta},$$

$$u_t = u_\alpha(-a) + u_\beta a, \quad u_{tt} = u_{\alpha\alpha}a^2 - 2u_{\alpha\beta}a^2 + u_{\beta\beta}a^2.$$

Подставив эти значения u_{xx}, u_{tt} в уравнение (4.2), получим канонический вид уравнения колебаний струны

$$u_{\alpha\beta} = 0. \tag{4.4}$$

Найдем общее решение уравнения (4.4). Обозначим

$$u_\beta = v. \tag{4.5}$$

Тогда уравнение (4.4) примет вид

$$v_\alpha = 0. \tag{4.6}$$

Уравнению (4.6) удовлетворяет любая функция, не зависящая от α. Следовательно,

$$v = f(\beta), \tag{4.7}$$

где $f(\beta) -$ произвольная функция переменной β. Подставляя (4.7) в (4.5), имеем

$$u_\beta(\alpha, \beta) = f(\beta). \tag{4.8}$$

Проинтегрируем уравнение (4.8) по переменной β, рассматривая α как параметр и беря постоянную интегрирования в виде произвольной функции этого параметра. В результате получим

$$u(\alpha, \beta) = \int f(\beta)d\beta + f_1(\alpha),$$

где $f_1(\alpha) -$ произвольная функция α. Обозначив $\int f(\beta)d\beta = f_2(\beta)$, окончательно получим

$$u(\alpha, \beta) = f_1(\alpha) + f_2(\beta).$$

Возвращаясь к старым переменным x, t с помощью соотношений (4.3), будем иметь

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at). \tag{4.9}$$

Нетрудно проверить, что функция (4.9) есть решение уравнения (4.2), если f_1 и f_2 - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Выражение (4.9) является **общим решением уравнения свободных колебаний струны (4.2).**

Пример 4.2. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx}+2u_{xy}-15u_{yy}=0.$$

Решение. Сначала приведем его к каноническому виду. Составим характеристическое уравнение и решаем его:

$$(dy)^2-2dxdy-15(dx)^2=0\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}-15=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1\pm4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-5x=c_1, y+3x=c_2-\text{характеристики уравнения.}$$

Следовательно, в соответствии с (3.12) за новые переменные α,β берем

$$\alpha=y-5x,\quad \beta=y+3x.$$

Так как

$$\alpha_x=-5, \beta_x=3, \alpha_y=\beta_y=1, \alpha_{xx}=\alpha_{yy}=\alpha_{xy}=\beta_{xx}=\beta_{yy}=\beta_{xy}\equiv0,$$

то из формул (3.4) получим

$$u_x=u_\alpha\cdot(-5)+u_\beta\cdot3,\quad u_y=u_\alpha+u_\beta,\ u_{xx}=25u_{\alpha\alpha}-30u_{\alpha\beta}+9u_{\beta\beta},$$

$$u_{xy}=-5u_{\alpha\alpha}-2u_{\alpha\beta}+3u_{\beta\beta},\quad u_{yy}=u_{\alpha\alpha}+2u_{\alpha\beta}+u_{\beta\beta}.$$

Подставим эти значения u_{xx},u_{xy},u_{yy} в уравнение:

$$25u_{\alpha\alpha}-30u_{\alpha\beta}+9u_{\beta\beta}+2(-5u_{\alpha\alpha}-2u_{\alpha\beta}+3u_{\beta\beta})-15(u_{\alpha\alpha}+2u_{\alpha\beta}+u_{\beta\beta})=0,$$

откуда получим его канонический вид: $u_{\alpha\beta}=0$, общее решение которого дается формулой (см. пример 4.1) $u(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)+f_2(\beta)$. Возвращаясь к старым переменным x,y, получаем окончательно

$$u(x,y)=f_1(y-5x)+f_2(y+3x),$$

где f_1 и f_2 - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Пример 4.3. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}=0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решаем его:

$$(dy)^2-2dxdy+5(dx)^2=0\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}+5=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1\pm2i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-x\pm2xi=c-\text{комплексно сопряженные характеристики уравнения.}$$

Поэтому за новые переменные α,β берем

$$\alpha=y-x,\quad \beta=2x.$$

Так как

$$\alpha_x=-1, \beta_x=2, \alpha_y=1, \beta_y=0, \alpha_{xx}=\alpha_{yy}=\alpha_{xy}=\beta_{xx}=\beta_{yy}=\beta_{xy}\equiv0,$$

то из формул (3.4) получим

$$u_x=u_\alpha\cdot(-1)+u_\beta\cdot2,\quad u_y=u_\alpha,\ u_{xx}=u_{\alpha\alpha}-4u_{\alpha\beta}+4u_{\beta\beta},$$

$$u_{xy}=-u_{\alpha\alpha}+2u_{\alpha\beta},\quad u_{yy}=u_{\alpha\alpha}.$$

Подставим эти значения u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} в уравнение:

$$u_{\alpha\alpha} - 4u_{\alpha\beta} + 4u_{\beta\beta} + 2(-u_{\alpha\alpha} + 2u_{\alpha\beta}) + 5u_{\alpha\alpha} = 0,$$

откуда получим его канонический вид: $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0 -$ уравнение Лапласа. Из теории аналитических функций комплексного переменного известно, что действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Следовательно, общее решение уравнения Лапласа можно записать в виде

$$u(\alpha, \beta) = \mathrm{Re}\, f(\alpha + i\beta),$$

где $f(\alpha + i\beta) -$ произвольная аналитическая функция аргумента $\alpha + i\beta.$ Возвращаясь к старым переменным x, y, получаем общее решение исходного уравнения в виде

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(y - x + 2xi).$$

Пример 4.4. Найти общее решение уравнения

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решаем его:

$$x^2 (dy)^2 + 2xydxdy + y^2 (dx)^2 = 0 \Rightarrow x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy \pm 0}{2x^2} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln c \Rightarrow xy = c.$$

Итак, характеристическое уравнение имеет одно семейство действительных характеристик. Положим $\alpha = xy$, а за $\beta(x, y)$ в соответствии с вышесказанным возьмем любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию, для которой якобиан $\dfrac{D(\alpha, \beta)}{D(x, y)} \neq 0.$ Например, пусть $\beta = x.$ Тогда

$$\frac{D(\alpha, \beta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ \beta_x & \beta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x \neq 0.$$

Так как

$$\alpha_x = y, \alpha_y = x, \beta_x = 1, \beta_y = 0, \alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \beta_{xx} = \beta_{xy} = \beta_{yy} = 0, \alpha_{xy} = 1,$$

то подставляя эти значения производных в (3.4), получаем

$$u_x = u_\alpha \cdot y + u_\beta,\ u_y = u_\alpha \cdot x,\ u_{xx} = y^2 u_{\alpha\alpha} + 2yu_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta},$$

$$u_{xy} = xyu_{\alpha\alpha} + xu_{\alpha\beta} + u_\alpha, \quad u_{yy} = x^2 u_{\alpha\alpha}.$$

Теперь эти выражения производных внесем в исходное уравнение:

$$x^2 (y^2 u_{\alpha\alpha} + 2yu_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}) - 2xy(xyu_{\alpha\alpha} + xu_{\alpha\beta} + u_\alpha) + y^2 x^2 u_{\alpha\alpha} +$$

$$+ x(yu_\alpha + u_\beta) + yxu_\alpha = 0,$$

откуда $\beta u_{\beta\beta} + u_\beta = 0 -$ канонический вид уравнения. Решаем его. Обозначим $v = u_\beta$. Тогда уравнение примет вид: $\beta v_\beta + v = 0$. Это есть уравнение с разделяющимися переменными, при этом переменная α считается параметром. Получаем

$$\beta \frac{dv}{d\beta} = -v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{d\beta}{\beta} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|\beta| + \ln|c_1(\alpha)| \Rightarrow v\beta = c_1(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{c_1(\alpha)}{\beta} \Rightarrow u_\beta = \frac{c_1(\alpha)}{\beta} \Rightarrow u(\alpha,\beta) = \int \frac{c_1(\alpha)}{\beta} d\beta + c_2(\alpha) =$$

$$= c_1(\alpha)\ln|\beta| + c_2(\alpha),$$

где $c_1(\alpha), c_2(\alpha) -$ постоянные интегрирования, представляющие собой произвольные функции переменной α. Возвращаясь к старым переменным x, y, получаем общее решение исходного уравнения в виде

$$u(x,y) = c_1(xy)\ln|x| + c_2(xy),$$

$c_1(xy), c_2(xy) -$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции аргумента xy.

Задачи

Найти общее решение уравнений:

4.1. $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$; 4.2. $u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0$;

4.3. $u_{xx} + 4u_{xy} - 21u_{yy} = 0$; 4.4. $u_{xx} + 6u_{xy} + 13u_{yy} = 0$;

4.5. $u_{xx} + 4u_{xy} + 20u_{yy} = 0$; 4.6. $u_{xx} - 2u_{xy} + 26u_{yy} = 0$;

4.7. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$;

4.8. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - u_x - u_y = 0$;

4.9. $u_{xx} - 8u_{xy} + 16u_{yy} - u_x + 4u_y = 0$;

4.10. $u_{xx} + 2\cos x \cdot u_{xy} - \sin^2 x \cdot u_{yy} - \sin x \cdot u_y = 0$.

Ответы:

4.1. $u = f_1(y-3x) + f_2(y-x)$; 4.2. $u = f_1(y-5x) + f_2(y-x)$;

4.3. $u = f_1(y-7x) + f_2(y+3x)$; 4.4. $u = \operatorname{Re} f(y-3x+2xi)$;

4.5. $u = \operatorname{Re} f(y-2x+4xi)$; 4.6. $u = \operatorname{Re} f(y+x+5xi)$;

4.7. $u = c_1(y-3x)e^{-2x} + c_2(y-3x)$; 4.8. $u = c_1(y-x)e^{y} + c_2(y-x)$;

4.9. $u = c_1(y+4x)e^{x} + c_2(y+4x)$;

4.10. $u = f_1(y - x - \sin x) + f_2(y + x - \sin x).$

§5. Метод Даламбера решения задачи Коши для уравнения свободных колебаний струны

Как мы видим, общие решения дифференциальных уравнений с частными производными зависят уже не от произвольных постоянных, а от произвольных функций. Определяя соответствующим образом эти функции, можно удовлетворять тем или иным дополнительным условиям. Этот факт проиллюстрируем на примере задачи Коши для уравнения колебаний струны.

Итак, рассмотрим следующую **задачу Коши:** *найти функцию* $u(x,t)$, *непрерывную при* $-\infty < x < \infty,\ t \ge 0,$ *так чтобы она удовлетворяла уравнению (4.2) при* $-\infty < x < \infty, \quad t > 0$ *и начальным условиям*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty, \qquad (5.1)$$

где $\varphi(x),\ \psi(x) -$ *заданные функции.*

Предположим, что решение $u(x,t)$ задачи Коши существует. Так как функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (4.2), то она необходимо должна иметь вид (4.9). Произвольные функции f_1 и f_2 в (4.9) найдем так, чтобы функция (4.9) удовлетворяла начальным условиям (5.1). Подставляя (4.9) в (5.1), получаем

$$\begin{gathered} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x). \end{gathered} \qquad (5.2)$$

Интегрируя второе равенство в (5.2), имеем

$$f_1(x) - f_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \psi(y)dy + c, \qquad (5.3)$$

где $c -$ произвольная постоянная интегрирования.

Решая первое уравнение в (5.2) вместе с (5.3), для функций f_1, f_2 получаем выражения вида

$$\begin{gathered} f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(y)dy + \frac{c}{2}, \\ f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(y)dy - \frac{c}{2}, \quad -\infty < x < \infty. \end{gathered} \qquad (5.4)$$

Если теперь (5.4) подставить в (4.9), то будем иметь:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy. \qquad (5.5)$$

Формула (5.5) называется **формулой Даламбера.**

При выводе формулы (5.5) мы предполагали существование решения задачи Коши. Предположим, что **функция** $\varphi(x)$ **дважды, а функция** $\psi(x)$ **один раз непрерывно дифференцируемы при** $-\infty < x < \infty$. Тогда непосредственной подстановкой (5.5) в уравнение (4.2) и в начальные условия (5.1) можно убедиться, что **функция (5.5) действительно является единственным решением задачи Коши.**

Пример. Найти решение $u(x,t)$ уравнения $u_{tt} = 4u_{xx}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0) = \cos x, u_t(x,0) = \sin^2 x, \quad -\infty < x < \infty.$

Решение. Так как $\varphi(x) = \cos x,\ \psi(x) = \sin^2 x,\ a = 2,$ то внося эти значения в формулу Даламбера (5.5), получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\cos(x-2t) + \cos(x+2t)] + \frac{1}{2\cdot 2}\int_{x-2t}^{x+2t} \sin^2 y dy.$$

Вычислим интеграл

$$\int_{x-2t}^{x+2t} \sin^2 y dy = \int_{x-2t}^{x+2t} \frac{1-\cos 2y}{2} dy = \frac{1}{2}(y - \frac{\sin 2y}{2})\Big|_{x-2t}^{x+2t} = 2t -$$

$$-\frac{1}{4}[\sin 2(x+2t) - \sin 2(x-2t)].$$

Так как $\cos(x-2t) + \cos(x+2t) = 2\cos x \cdot \cos 2t, \quad \sin 2(x+2t) -$ $-\sin 2(x-2t) = 2\sin 4t \cdot \cos 2x,$ то решение задачи Коши окончательно можно записать в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2}t + \cos x \cdot \cos 2t - \frac{1}{8}\sin 4t \cdot \cos 2x.$$

Задачи

Используя формулу Даламбера, найти решения $u(x,t)$ следующих задач Коши ($-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty$):

5.1. $u_{tt} = 5u_{xx}, \quad u(x,0) = \frac{\sin x}{x}, u_t(x,0) = x^2;$

5.2. $u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x,0) = x^2, u_t(x,0) = \cos^2 x;$

5.3. $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u(x,0) = e^x, u_t(x,0) = x;$

5.4. $u_{tt} = 6u_{xx}, \quad u(x,0) = \sin x, u_t(x,0) = x^3;$

5.5. $u_{tt} = 2u_{xx}, \quad u(x,0) = e^{-x}, u_t(x,0) = \cos 3x;$

5.6. $u_{tt} = 3u_{xx}, \quad u(x,0) = \frac{x}{1+x^2}, u_t(x,0) = \sin 5x;$

5.7. $u_{tt}=5u_{xx},\quad u(x,0)=\dfrac{1}{1+x^2},\ u_t(x,0)=e^{3x}$;

5.8. $u_{tt}=4u_{xx},\quad u(x,0)=e^{-x^2},\ u_t(x,0)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

§6. Метод Фурье решения смешанных задач для уравнения колебаний струны

Для решения смешанных задач во многих случаях используется так называемый метод Фурье или метод разделения переменных. В настоящем параграфе применение этого метода мы рассмотрим на примере смешанных задач для уравнения колебаний струны (2.8).

6.1. Случай свободных колебаний. Однородные граничные условия. *Требуется найти решение уравнения*

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \tag{6.1}$$

при граничных условиях

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0 \tag{6.2}$$

и начальных условиях

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{6.3}$$

где $\varphi(x),\psi(x)-$*заданные функции.*

Метод Фурье решения задачи состоит в следующем.

I. Сначала находим частные решения уравнения (6.1), удовлетворяющие граничным условиям (6.2). Их будем искать в виде

$$u(x,t)=X(x)T(t), \tag{6.4}$$

где $X(x),T(t)-$неизвестные функции одной переменной. С целью определения $X(x),T(t)$ функцию (6.4) подставим в уравнение (6.1). Получим

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t),$$

откуда, разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{6.5}$$

Соотношение (6.5) должно удовлетворяться тождественно при $0<x<l,\,0<t<T_0$ (T_0-произвольно фиксированное положительное число). Зафиксировав произвольно x в правой части (6.5) и меняя t в левой части, приходим к выводу, что левая часть соотношения (6.5) необходимо должна равняться постоянной; этой же постоянной должна равняться и правая часть. Обозначая эту постоянную через $-\lambda$, будем иметь:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

откуда получим два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно функций $T(t)$ и $X(x)$:

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \qquad (6.6)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \qquad (6.7)$$

Таким образом, уравнение (6.1) распалось на два уравнения (6.6), (6.7), из которых одно содержит функцию только от t, а другое – функцию только от x, или, как говорят, в уравнении (6.1) переменные разделились.

Теперь функцию (6.4) подставим в граничные условия (6.2). Получим

$$X(0)T(t) = 0, \;\; X(l)T(t) = 0,$$

откуда

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \qquad (6.8)$$

так как случай $T(t) \equiv 0 \; (u \equiv 0)$ интереса не представляет. Таким образом, переменные разделились также и в граничных условиях.

Для определения функции $X(x)$ мы пришли к следующей граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Задача Штурма- Лиувилля. *Найти такие значения параметра λ, называемые* ***собственными значениями,*** *при которых существуют нетривиальные (т.е.не равные нулю тождественно) решения уравнения (6.7), удовлетворяющие граничным условиям (6.8), а также найти эти решения, называемые* ***собственными функциями.***

Найдем решение этой задачи. Уравнение (6.7) есть уравнение с постоянными коэффициентами; для его решения надо составить характеристическое уравнение

$$k^2 + \lambda = 0,$$

корни которого $k = \pm\sqrt{-\lambda}$. Следовательно, вид решения зависит от знака λ.

а) Пусть $\lambda < 0$. Общее решение уравнения (6.7) в этом случае имеет вид:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные. Подставляя его в граничные условия (6.8), будем иметь:

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0.$$

Относительно c_1, c_2 мы получили однородную систему линейных алгебраических уравнений. Так как ее определитель не равен нулю, система имеет только нулевое решение. Поэтому задача Штурма- Лиувилля в этом случае неразрешима.

б) Пусть $\lambda = 0$. Общее решение уравнения (6.7) имеет вид $X(x) = c_1 + c_2 x$. Из условий (6.8) получаем $c_1 = 0,\ c_1 + c_2 l = 0,$ откуда $c_1 = c_2 = 0$. Поэтому задача Штурма- Лиувилля также неразрешима.

в) Пусть $\lambda > 0$. В этом случае общее решение уравнения (6.7) дается формулой

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x. \tag{6.9}$$

Подстановка (6.9) в граничные условия (6.8) дает

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0,$$
$$c_1 \cos\sqrt{\lambda}l + c_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \tag{6.10}$$

Система (6.10) имеет ненулевое решение только тогда, когда ее определитель равен нулю. Так как определитель системы (6.10) равен $\sin\sqrt{\lambda}l,$ то приравнивая его к нулю, для определения значений λ получаем уравнение

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Решая его, находим корни $\sqrt{\lambda} = \dfrac{\pi k}{l}, k = 1, 2, ...$, следовательно, собственные значения задачи Штурма- Лиувилля имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, k = 1, 2, ... \tag{6.11}$$

Подставляя значения (6.11) вместо λ в систему (6.10), будем иметь: $c_1 = 0,$ а c_2 − произвольное. В дальнейшем будем считать, что $c_2 = 1$. Внося все это в (6.9), получаем собственные функции задачи (6.7), (6.8):

$$X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l}x, k = 1, 2, ... \tag{6.12}$$

Решаем теперь уравнение (6.6) при $\lambda = \lambda_k$, т.е. уравнение

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0.$$

Общее его решение имеет вид:

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k \sin\frac{k\pi a}{l}t,\ \ k = 1, 2, ... \tag{6.13}$$

где a_k, b_k − произвольные постоянные.

Подставив функции (6.12),(6.13) в (6.4), получим бесконечную последовательность частных решений уравнения (6.1), удовлетворяющих граничным условиям (6.2):

$$u_k(x,t)=\left(a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad k=1,2,\dots \qquad (6.14)$$

II. Теперь построим решение, удовлетворяющее еще и заданным начальным условиям (6.3). С этой целью образуем бесконечный ряд из частных решений (6.14):

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x. \qquad (6.15)$$

В дальнейшем будем предполагать, что ряд (6.15) сходится равномерно в области $0\le x\le l,\ 0\le t\le T_0$ **и допускает двукратное почленное дифференцирование по переменным** x **и** t. Ясно, что для этого нужно, чтобы функции $\varphi(x),\psi(x)$ удовлетворяли определенным условиям. Достаточно, например, выполнения следующих требований:

1°) $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,l]$, третья производная кусочно непрерывно дифференцируема на $[0,l]$ и

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0,\ \ \varphi''(0)=\varphi''(l)=0;$$

2°) $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,l]$, вторая производная кусочно непрерывна на $[0,l]$, $\psi(0)=\psi(l)=0.$

Тогда в силу линейности и однородности уравнения (6.1) сумма ряда (6.15) из его решений также будет решением уравнения (6.1). Кроме того, поскольку каждое слагаемое ряда удовлетворяет однородным граничным условиям (6.2), то сумма ряда будет удовлетворять и этим условиям.

Покажем, что постоянные a_k и b_k в (6.15) можно определить так, чтобы удовлетворялись и начальные условия (6.3). Продифференцируем ряд (6.15) по t:

$$u_t(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-a_k\sin\frac{k\pi a}{l}t+b_k\cos\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x. \qquad (6.16)$$

Подставляя (6.15),(6.16) в (6.3), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi}{l}x=\varphi(x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}b_k\sin\frac{k\pi}{l}x=\psi(x),\ \ 0\le x\le l. \qquad (6.17)$$

Соотношения (6.17) представляют собой разложения функций $\varphi(x),\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам. Из теории тригонометрических рядов Фурье известно, что всякая функция $F(x)$, непрерывная на отрезке $[0,l]$ вместе со своей производной первого порядка и удовлетворяющая условию $F(0)=F(l)=0$, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по синусам:

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

где

$$F_k=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx.$$

Заметим, что функции $\varphi(x),\psi(x)$ удовлетворяют указанным условиям. Поэтому соотношения действительно будут выполняться, если постоянные a_k, b_k имеют вид:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx,\quad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx. \tag{6.18}$$

Подставляя (6.18) в (6.15), получаем решение смешанной задачи (6.1)-(6.3).

Таким образом, **решение задачи (6.1)- (6.3) дается формулой (6.15), в которой постоянные a_k, b_k определены соотношениями (6.18).**

Рассмотрим **физическую интерпретацию решения (6.15).** Если ввести обозначения $a_k=A_k\sin\delta_k$, $b_k=A_k\cos\delta_k$, то это решение можно записать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\left(\frac{k\pi a}{l}t+\delta_k\right). \tag{6.19}$$

Каждый член этого ряда представляет собой так называемую **стоячую волну,** при которой точки струны совершают гармоническое колебательное движение с одинаковой фазой δ_k, с амплитудой $A_k\sin\frac{k\pi}{l}x$ и частотой $\omega_k=\frac{k\pi a}{l}$. При таком колебании струна будет издавать звук, высота которого зависит от частоты колебаний ω_k. Частота основного (самого низкого) тона выражается формулой $\omega_1=\frac{\pi a}{l}$. Остальные тона, соответствующие частотам, кратным ω_1, называются гармониками. Решение (6.19) складывается из отдельных гармоник; амплитуда их, а поэтому и влияние их на интенсивность звука, издаваемого струной, обыкновенно быстро убывает при увеличении номера гармоники и все их действие сводится к созданию тембра звука. Приведенная интерпретация решения подтверждается экспериментально: с помощью резонаторов можно выделять гармоники, соответствующие различным значениям k.

6.2. Случай вынужденных колебаний. Однородные граничные условия. *Найти решение уравнения*

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \tag{6.20}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,t)=0, u(l,t)=0 \qquad (6.21)$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0\le x\le l, \qquad (6.22)$$

где $\varphi(x), \psi(x)-$*заданные функции.*

Эту задачу разобьем на две более простые. Для этого решение представим в виде

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \qquad (6.23)$$

где $v(x,t)$ есть решение задачи

$$v_{tt}=a^2v_{xx}, \qquad (6.24)$$

$$v(0,t)=0, \quad v(l,t)=0, \qquad (6.25)$$

$$v(x,0)=\varphi(x), \quad v_t(x,0)=\psi(x), \quad 0\le x\le l, \qquad (6.26)$$

а $w(x,t)$ есть решение задачи

$$w_{tt}=a^2w_{xx}+f(x,t), \qquad (6.27)$$

$$w(0,t)=0, \quad w(l,t)=0, \qquad (6.28)$$

$$w(x,0)=0, \quad w_t(x,0)=0. \qquad (6.29)$$

Задача (6.24)- (6.26) для функции $v(x,t)$ рассмотрена нами в пункте 6.1; ее решение дается рядом (6.15). Решение $w(x,t)$ задачи (6.27)- (6.29) будем искать в виде

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad (6.30)$$

где $T_k(t)-$неизвестные функции.

Пусть ряд (6.30) равномерно сходится в области $0\le x\le l, 0\le t\le T_0$ и допускает почленное двукратное дифференцирование по $x,t.$ Тогда, подставляя (6.30) в (6.27), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2T_k(t)\right]\sin\frac{k\pi}{l}x=f(x,t). \qquad (6.31)$$

При произвольно фиксированном t (6.31) представляет собой разложение функции $f(x,t)$ в ряд Фурье по синусам. Поэтому для коэффициентов разложения (выражений в квадратных скобках) имеем

$$T_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2T_k(t)=f_k(t), \quad k=1,2,..., \qquad (6.32)$$

где

$$f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi}{l}xdx. \qquad (6.33)$$

С учетом (6.30) и $w_t(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k'(t)\sin\frac{k\pi}{l}x,$ из условий (6.29) получим

$$T_k(0)=0,\quad T_k'(0)=0,\quad k=1,2,... \tag{6.34}$$

Следовательно, для определения функций $T_k(t)$ имеем задачу (6.32), (6.34), представляющую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (6.32) с начальными условиями (6.34). Ее решение может быть получено с помощью метода вариации произвольных постоянных в следующем виде

$$T_k(t)=\frac{l}{k\pi a}\int\limits_0^t\sin\left[\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\right]f_k(\tau)d\tau,\quad k=1,2,... \tag{6.35}$$

Подставляя сюда вместо $f_k(t)$ выражение (6.33), а затем полученный результат в (6.30), получаем решение задачи (6.27)- (6.29). Решение исходной задачи (6.20)- (6.22) найдем по формуле (6.23).

6.3. Случай вынужденных колебаний. Неоднородные граничные условия. Рассмотрим задачу: *найти решение уравнения*

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \tag{6.36}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t) \tag{6.37}$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{6.38}$$

где $\mu_1(t),\mu_2(t),\varphi(x),\psi(x)-$ *заданные функции.*

Решение этой задачи будем искать в виде

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t). \tag{6.39}$$

От функции $w(x,t)$ потребуем, чтобы она имела непрерывные вторые производные по x и t и удовлетворяла ненулевым граничным условиям

$$w(0,t)=\mu_1(t),\ w(l,t)=\mu_2(t). \tag{6.40}$$

Такую функцию всегда можно найти, например,

$$w(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)].$$

Считая теперь функцию $w(x,t)$ известной, выведем задачу для функции $v(x,t)$. Подставляя (6.39) в уравнение (6.36), получаем

$$v_{tt}+w_{tt}=a^2(v_{xx}+w_{xx})+f(x,t)$$

или

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+f_1(x,t), \tag{6.41}$$

где принято обозначение $f_1(x,t)=f(x,t)+a^2w_{xx}-w_{tt}$.

Далее, с учетом (6.37), (6.40) и соотношения $v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$, вытекающего из (6.39), для $v(x,t)$ получаем однородные граничные условия

$$v(0,t)=0, \quad v(l,t)=0. \tag{6.42}$$

Наконец, учитывая (6.38), будем иметь:

$$\begin{gathered} v(x,0)=\varphi(x)-w(x,0)=\varphi_1(x), \\ v_t(x,0)=\psi(x)-w_t(x,0)=\psi_1(x). \end{gathered} \tag{6.43}$$

Таким образом, для определения функции $v(x,t)$ мы пришли к задаче (6.41)- (6.43) для уравнения вынужденных колебаний струны с однородными граничными условиями; эта задача была рассмотрена нами в пункте 6.2.

Пример 6.1. Решить методом Фурье смешанную краевую задачу для уравнения свободных колебаний струны:

$$\begin{cases} u_{tt}=64u_{xx}, \\ u(0,t)=u(6,t)=0, \\ u(x,0)=\sin\pi x, \\ u_t(x,0)=\sin 3\pi x. \end{cases}$$

Решение. Решение этой задачи дается формулой (6.15), в которой коэффициенты a_k, b_k определены соотношениями (6.18). В нашем случае $\varphi(x)=\sin\pi x,\ \psi(x)=\sin 3\pi x,\ l=6,\ a=8.$ Внося эти данные в (6.18), получаем

$$a_k=\frac{1}{3}\int_0^6 \sin\pi x\cdot\sin\frac{k\pi}{6}x dx, \quad b_k=\frac{1}{4\pi k}\int_0^6 \sin 3\pi x\cdot\sin\frac{k\pi}{6}x dx,\ k=1,2,...$$

Вычислим интегралы:

$$a_k=\frac{1}{3}\int_0^6 \sin\pi x\cdot\sin\frac{k\pi}{6}x dx=\frac{1}{3}\int_0^6\frac{1}{2}[\cos(\pi x-\frac{k\pi}{6}x)-\cos(\pi x+\frac{k\pi}{6}x)]dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{\sin(1-\frac{k}{6})\pi x}{(1-\frac{k}{6})\pi}-\frac{\sin(1+\frac{k}{6})\pi x}{(1+\frac{k}{6})\pi}\right]\Bigg|_0^6=\frac{1}{(6-k)\pi}[\sin(6\pi-\pi k)-\sin 0]-$$

$$-\frac{1}{(6+k)\pi}[\sin(6\pi+\pi k)-\sin 0]=0, \qquad \text{если} \quad k\neq 6;$$

$$b_k=\frac{1}{4\pi k}\int_0^6 \sin 3\pi x\cdot\sin\frac{k\pi}{6}x dx=\frac{1}{4\pi k}\int_0^6\frac{1}{2}[\cos(3\pi x-\frac{k\pi}{6}x)+$$

$$+\cos(3\pi x+\frac{k\pi}{6}x)]dx=\frac{1}{8\pi k}\left[\frac{\sin(3-\frac{k}{6})\pi x}{(3-\frac{k}{6})\pi}-\frac{\sin(3+\frac{k}{6})\pi x}{(3+\frac{k}{6})\pi}\right]\Bigg|_0^6=$$

$$=\frac{3}{4\pi^2 k(18-k)}[\sin(18\pi-k\pi)-\sin 0]-\frac{3}{4\pi^2 k(18+k)}[\sin(18\pi+k\pi)-$$

$$-\sin 0]=0,\quad \text{если}\ \ k\neq 18;$$

при $k=6$: $a_6=\frac{1}{3}\int_0^6\sin^2\pi x dx=\frac{1}{3}\int_0^6\frac{1-\cos 2\pi x}{2}dx=\frac{1}{6}\left(x-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\right)\Bigg|_0^6=1;$

при $k=18$:

$$b_{18}=\frac{1}{72\pi}\int_0^6\sin^2 3\pi x dx=\frac{1}{72\pi}\int_0^6\frac{1-\cos 6\pi x}{2}dx=\frac{1}{144\pi}\left(x-\frac{\sin 6\pi x}{6\pi}\right)\Bigg|_0^6=\frac{1}{24\pi}.$$

Подставив эти значения коэффициентов a_k, b_k в (6.15), получим решение задачи в следующем виде

$$u(x,t)=\cos 8\pi t\cdot\sin\pi x+\frac{1}{24\pi}\sin 24\pi t\cdot\sin 3\pi x.$$

Покажем, что коэффициенты a_k, b_k в некоторых случаях, как, например, в этом примере, можно найти и другим способом, не прибегая к формулам (6.18). Для этого функцию $u(x,t)$ в виде (6.15) и ее производную $u_t(x,t)$ в виде (6.16) подставим в начальные условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{\pi k}{6}x=\sin\pi x,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\pi k}{3}\cdot b_k\sin\frac{\pi k}{6}x=\sin 3\pi x.$$

В правых частях этих равенств стоят разложения в ряд Фурье по синусам с известными коэффициентами. Поэтому приравнивая коэффициенты при $\sin\frac{\pi k}{6}x,\ k=1,2,\ldots,$ получаем систему

$$\begin{cases} a_6=1,\ a_k=0,\ k=1,2,\ldots,k\neq 6; \\ 24\pi\cdot b_{18}=1,\quad \frac{4}{3}\pi k\cdot b_k=0,\ k=1,2,\ldots,k\neq 18, \end{cases}$$

откуда $a_6=1,\ b_{18}=\frac{1}{24\pi}$; остальные a_k, b_k равны нулю.

Пример 6.2. Решить методом Фурье смешанную краевую задачу для уравнения вынужденных колебаний струны:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x + t, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin 2\pi x, \\ u_t(x,0) = 1 - \cos \pi x,\ 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Решение. В соответствии с изложенным в разделе 6.2 §6 решение этой задачи ищется в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{6.44}$$

где $v(x,t)$ есть решение задачи

$$v_{tt} = v_{xx},$$
$$v(0,t) = 0, \quad v(2,t) = 0,$$
$$v(x,0) = \sin 2\pi x, \quad v_t(x,0) = 1 - \cos \pi x, \quad 0 \le x \le 2,$$

а $w(x,t)$ есть решение задачи

$$w_{tt} = w_{xx} + x + t,$$
$$w(0,t) = 0, \quad w(2,t) = 0,$$
$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0.$$

Сначала решаем задачу относительно функции $v(x,t)$, решение которой дается формулой (6.15), в которой коэффициенты a_k, b_k определены соотношениями (6.18). В нашем случае

$$\varphi(x) = \sin 2\pi x,\ \psi(x) = 1 - \cos \pi x,\ l = 2,\ a = 1.$$

Внося эти данные в (6.18), получаем

$$a_k = \int_0^2 \sin 2\pi x \cdot \sin \frac{k\pi}{2} x dx, \quad b_k = \frac{2}{\pi k} \int_0^2 (1 - \cos \pi x) \cdot \sin \frac{k\pi}{2} x dx,\ k = 1, 2, \ldots$$

Вычислим интегралы:

$$a_k = \int_0^2 \sin 2\pi x \cdot \sin \frac{k\pi}{2} x dx = \int_0^2 \frac{1}{2} [\cos(2\pi x - \frac{k\pi}{2} x) - \cos(2\pi x + \frac{k\pi}{2} x)] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2 - \frac{k}{2})\pi x}{(2 - \frac{k}{2})\pi} - \frac{\sin(2 + \frac{k}{2})\pi x}{(2 + \frac{k}{2})\pi} \right] \Bigg|_0^2 = \frac{1}{(4-k)\pi} [\sin(4\pi - \pi k) - \sin 0] -$$

$$- \frac{1}{(4+k)\pi} [\sin(4\pi + \pi k) - \sin 0] = 0, \qquad \text{если} \quad k \ne 4;$$

при $k = 4$: $\quad a_4 = \int_0^2 \sin^2 2\pi x dx = \int_0^2 \frac{1 - \cos 4\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 4\pi x}{4\pi} \right) \Bigg|_0^2 = 1;$

$$b_k=\frac{2}{\pi k}\int_0^2(1-\cos\pi x)\cdot\sin\frac{k\pi}{2}xdx=\frac{2}{\pi k}\int_0^2\sin\frac{k\pi}{2}xdx-\frac{2}{\pi k}\int_0^2\cos\pi x\cdot\sin\frac{k\pi}{2}xdx=$$

$$=-\frac{2}{\pi k}\frac{\cos\frac{k\pi}{2}x}{\frac{k\pi}{2}}\Bigg|_0^2-\frac{2}{\pi k}\int_0^2\frac{1}{2}[\sin(\frac{k\pi}{2}x-\pi x)+\sin(\frac{k\pi}{2}x+\pi x)]dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2k^2}(1-\cos\pi k)-\frac{1}{\pi k}\left[-\frac{\cos(\frac{k}{2}-1)\pi x}{(\frac{k}{2}-1)\pi}-\frac{\cos(\frac{k}{2}+1)\pi x}{(\frac{k}{2}+1)\pi}\right]\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{4}{\pi^2k^2}[1-(-1)^k]+\frac{2}{\pi k}\left[\frac{\cos(\pi k-2\pi)-1}{(k-2)\pi}+\frac{\cos(\pi k+2\pi)-1}{(k+2)\pi}\right]=$$

$$=\frac{4}{\pi^2k^2}[1-(-1)^k]+\frac{2}{\pi^2k}[(-1)^k-1]\left(\frac{1}{k-2}+\frac{1}{k+2}\right)=\frac{16[(-1)^k-1]}{\pi^2k^2(k^2-4)},$$

если $k\neq 2;$

при $k=2:$

$$b_2=\frac{1}{\pi}\int_0^2(1-\cos\pi x)\sin\pi xdx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos\pi x}{\pi}\Bigg|_0^2-\int_0^2\frac{\sin 2\pi x}{2}dx\right]=0.$$

Таким образом, все коэффициенты b_k с четными номерами равны нулю. Подставив найденные значения коэффициентов a_k, b_k в (6.15), получим решение первой задачи относительно $v(x,t)$ в следующем виде

$$v(x,t)=\cos 2\pi t\cdot\sin 2\pi x+\frac{32}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}t\cdot\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}x}{(2k-1)^2[4-(2k-1)^2]}. \quad (6.45)$$

Перейдем к решению задачи относительно функции $w(x,t)$. Ее ищем в виде (6.30), где $l=2$ и функции $T_k(t)$ определяются формулой (6.35), которая в нашем случае примет вид:

$$T_k(t)=\frac{2}{k\pi}\int_0^t\sin\left[\frac{k\pi}{2}(t-\tau)\right]f_k(\tau)d\tau,\quad k=1,2,..., \quad (6.46)$$

где для $f_k(\tau)$ в силу (6.33) с учетом $f(x,\tau)=x+\tau$ получаем

$$f_k(\tau)=\int_0^2(x+\tau)\sin\frac{k\pi}{2}xdx.$$

Вычислим интеграл: $f_k(\tau)=\int\limits_0^2 x\sin\frac{k\pi}{2}xdx+\tau\int\limits_0^2\sin\frac{k\pi}{2}xdx.$ Первый интеграл в этой сумме вычисляется по частям:

$$\int\limits_0^2 x\sin\frac{k\pi}{2}xdx=\left|u_1=x,\,du_1=dx,\,dv_1=\sin\frac{k\pi}{2}xdx\Rightarrow v_1=-\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x\ \right|=$$

$$=-\frac{2}{k\pi}x\cos\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2+\frac{2}{k\pi}\int\limits_0^2\cos\frac{k\pi}{2}xdx=-\frac{4}{k\pi}\cos k\pi+\frac{4}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2=$$

$$=-\frac{4}{k\pi}(-1)^k.$$

Второй интеграл равен $\int\limits_0^2\sin\frac{k\pi}{2}xdx=-\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2=-\frac{2}{k\pi}[(-1)^k-1].$

Следовательно, $f_k(\tau)=\frac{2}{k\pi}[2(-1)^{k+1}+\left(1-(-1)^k\right)\cdot\tau].$ Внося это выражение в (6.46), для $T_k(t)$ интегрированием по частям получаем

$$T_k(t)=\frac{8(-1)^{k+1}}{(k\pi)^2}\int\limits_0^t\sin[\frac{k\pi}{2}(t-\tau)]d\tau+\frac{4[1-(-1)^k]}{(k\pi)^2}\int\limits_0^t\tau\sin[\frac{k\pi}{2}(t-\tau)]d\tau=$$

$$=\left|u_1=\tau,\,du_1=d\tau,\,dv_1=\sin[\frac{k\pi}{2}(t-\tau)]d\tau\Rightarrow v_1=\frac{2}{k\pi}\cos[\frac{k\pi}{2}(t-\tau)]\right|=$$

$$=\frac{8(-1)^{k+1}}{(k\pi)^2}\frac{\cos[\frac{k\pi}{2}(t-\tau)]}{\frac{k\pi}{2}}\Bigg|_0^t+\frac{4[1-(-1)^k]}{(k\pi)^2}\{\tau\cdot\frac{2}{k\pi}\cdot\cos[\frac{k\pi}{2}(t-\tau)]\Big|_0^t-$$

$$-\frac{2}{k\pi}\int\limits_0^t\cos[\frac{k\pi}{2}(t-\tau)]d\tau\}=\frac{16(-1)^{k+1}}{(k\pi)^3}\left(1-\cos\frac{k\pi}{2}t\right)+$$

$$+\frac{8[1-(-1)^k]}{(k\pi)^3}\left(t-\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}t\right).\qquad(6.47)$$

Теперь, если (6.47) подставить в (6.30), то получим решение второй задачи $w(x,t)$, которое вместе с (6.45) по формуле (6.44) дает решение исходной задачи.

Задачи

Методом Фурье найти решения следующих смешанных задач для уравнения колебаний струны:

6.1. $\begin{cases} u_{tt} = 36u_{xx}, \\ u(0,t) = u(5,t) = 0, \\ u(x,0) = 4\sin 2\pi x, \\ u_t(x,0) = 12\pi \sin 2\pi x; \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} u_{tt} = 25u_{xx}, \\ u(0,t) = u(3,t) = 0, \\ u(x,0) = 5\sin 3\pi x, \\ u_t(x,0) = 20\pi \sin 4\pi x; \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx}, \\ u(0,t) = u(4,t) = 0, \\ u(x,0) = 6\sin 3\pi x, \\ u_t(x,0) = 1 - \cos \pi x; \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + xt, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 7\sin 4\pi x, \\ u_t(x,0) = 15\pi \sin 5\pi x; \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + xt^2, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 12\sin 6\pi x, \\ u_t(x,0) = 1 - \cos 4\pi x; \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - x + t^2, \\ u(0,t) = u(4,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin 4\pi x, \\ u_t(x,0) = 1 - \cos 2\pi x. \end{cases}$

§7. Метод Фурье решения начально- краевых задач для уравнения теплопроводности в тонком стержне

В настоящем параграфе метод Фурье применим к решению первой начально-краевой задачи для уравнения (2.31) теплопроводности в тонком стержне.

7**.1. Случай однородного уравнения.** Рассмотрим **задачу:** *найти функцию* $u(x,t)$, *непрерывную при* $0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T_0$, *удовлетворяющую уравнению*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, 0 < t \le T_0, \tag{7.1}$$

граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T_0 \tag{7.2}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{7.3}$$

где $\varphi(x)$- *заданная функция, имеющая непрерывную производную и* $\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$

Ищем решение уравнения (7.1), удовлетворяющее условиям (7.2), в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{7.4}$$

Подставляя (7.4) в уравнение (7.1) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

или

$$T'(t)+a^2\lambda\, T(t)=0, \tag{7.5}$$

$$X''(x)+\lambda\, X(x)=0. \tag{7.6}$$

Кроме того, из граничных условий (7.2) следует, что

$$X(0)=0, \quad X(l)=0. \tag{7.7}$$

Итак, для определения функции $X(x)$ имеем задачу Штурма- Лиувилля (7.6), (7.7). Эта задача изучена нами в пункте 6.1 §6. Ее решение имеет вид:

$$\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x)=\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k=1,2,... \tag{7.8}$$

Подставляя значения λ_k из (7.8) в уравнение (7.5), получаем

$$T_k'(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t)=0,$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение дается формулой

$$T_k(t)=a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}, \quad k=1,2,..., \tag{7.9}$$

где a_k – произвольные постоянные.

Теперь, если (7.8), (7.9) подставить в (7.4), то получим частные решения уравнения (7.1), удовлетворяющие граничным условиям (7.2), следующего вида

$$u_k(x,t)=a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k=1,2,...$$

Чтобы удовлетворить начальному условию (7.3), составим ряд из этих частных решений:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{7.10}$$

Подставляя (7.10) в условие (7.3), будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi}{l}x=\varphi(x), \quad 0\le x\le l. \tag{7.11}$$

(7.11) есть разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам. Поступая как и в §6, приходим к тому, что соотношение (7.11) будет удовлетворено, если коэффициенты разложения (7.11) определены по формулам

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx, \quad k = 1,2,... \qquad (7.12)$$

Подставляя (7.12) в (7.10), получаем решение задачи (7.1)- (7.3).

По поводу обоснования полученного решения в виде (7.10) необходимо сказать то же самое, что и в §6: ряд (7.10) и ряды, получаемые формальным почленным дифференцированием этого ряда дважды по x, один раз по t, сходятся равномерно в области $0 \le x \le l, 0 \le t \le T_0$. Можно показать, что при условиях, наложенных выше на функцию $\varphi(x)$, эти условия выполняются.

7**.2. Случай неоднородного уравнения.** *Требуется найти функцию* $u(x,t)$, *непрерывную при* $0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T_0$, *удовлетворяющую уравнению*

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, 0 < t \le T_0, \qquad (7.13)$$

граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T_0 \qquad (7.14)$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (7.15)$$

где $\varphi(x)$- *заданная функция, имеющая непрерывную производную и* $\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$

Решение задачи (7.13)- (7.15) будем искать в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \qquad (7.16)$$

где $v(x,t)$ есть решение задачи

$$v_t = a^2 v_{xx}, \qquad (7.17)$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \qquad (7.18)$$

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (7.19)$$

а $w(x,t)$ есть решение задачи

$$w_t = a^2 w_{xx} + f(x,t), \qquad (7.20)$$

$$w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0, \qquad (7.21)$$

$$w(x,0) = 0. \qquad (7.22)$$

Задача (7.17)- (7.19) для функции $v(x,t)$ рассмотрена нами в пункте 7.1; ее решение дается рядом (7.10). Решение $w(x,t)$ задачи (7.20)- (7.22) будем искать в виде

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad (7.23)$$

где $T_k(t)$ – неизвестные функции.

Пусть ряд (7.23) равномерно сходится в области $0 \le x \le l,\, 0 \le t \le T_0$ и допускает почленное дифференцирование дважды по x и один раз по t. Тогда, подставляя (7.23) в (7.20), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k'(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t)\right]\sin\frac{k\pi}{l}x = f(x,t),$$

откуда

$$T_k'(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = f_k(t), \quad k=1,2,..., \tag{7.24}$$

где

$$f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi}{l}xdx. \tag{7.25}$$

С учетом (7.23) из условий (7.22) получим

$$T_k(0)=0, \quad k=1,2,... \tag{7.26}$$

Следовательно, для определения функций $T_k(t)$ имеем задачу (7.24), (7.26), представляющую задачу Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка (7.24) с начальным условием (7.26). Ее решение дается формулой

$$T_k(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_k(\tau)d\tau, \quad k=1,2,... \tag{7.27}$$

Подставляя в (7.27) вместо $f_k(t)$ выражение (7.25), а затем полученный результат в (7.23), получаем решение задачи (7.20)- (7.22). Решение исходной задачи (7.13)- (7.15) найдем по формуле (7.16).

Решение задачи для уравнения теплопроводности (7.13) в случае неоднородных граничных условий совершенно аналогично соответствующему случаю для уравнения колебаний струны (см. пункт 6.3).

В заключение параграфа отметим, что для уравнения теплопроводности может быть поставлена **задача Коши:** *найти функцию* $u(x,t)$, *непрерывную при* $t \ge 0, \quad -\infty < x < \infty$, *удовлетворяющую уравнению*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t>0, \quad -\infty < x < \infty$$

и начальному условию

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где $\varphi(x)-$ *непрерывная и ограниченная функция.*

Решение этой **задачи Коши** дается **формулой Пуассона**

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\, F(x,t,\tau)d\tau,$$

где $\quad F(x,t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}}$.

Функция $F(x,t,\tau)$ называется **фундаментальным решением уравнения теплопроводности.**

Пример 7.1. Решить методом Фурье начально-краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности: $\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, \\ u(0,t)=u(4,t)=0, \\ u(x,0)=\sin 3\pi x. \end{cases}$

Решение. Решение этой задачи дается формулой (7.10), в которой коэффициенты a_k определены соотношениями (7.12). В нашем случае $\varphi(x)=\sin 3\pi x,\quad l=4,\ a=\sqrt{2}$. Внося эти данные в (7.12), получаем

$$a_k=\frac{1}{2}\int_0^4 \sin 3\pi x\cdot\sin\frac{k\pi}{4}x dx,\ k=1,2,...$$

Вычислим интегралы:

$$a_k=\frac{1}{2}\int_0^4 \sin 3\pi x\cdot\sin\frac{k\pi}{4}x dx=\frac{1}{2}\int_0^4 \frac{1}{2}[\cos(3\pi x-\frac{k\pi}{4}x)-\cos(3\pi x+\frac{k\pi}{4}x)]dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\sin(3-\frac{k}{4})\pi x}{(3-\frac{k}{4})\pi}-\frac{\sin(3+\frac{k}{4})\pi x}{(3+\frac{k}{4})\pi}\right]\Bigg|_0^4=\frac{1}{12-k}[\sin(12\pi-k\pi)-\sin 0]-$$

$$-\frac{1}{12+k}[\sin(12\pi+k\pi)-\sin 0]=0,\qquad \text{если } k\neq 12;$$

при $k=12$:

$$a_{12}=\frac{1}{2}\int_0^4 \sin^2 3\pi x dx=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{1-\cos 6\pi x}{2}dx=\frac{1}{4}\left(x-\frac{\sin 6\pi x}{6\pi}\right)\Bigg|_0^4=1.$$

Подставив эти значения коэффициентов a_k в (7.10), получим решение задачи в следующем виде

$$u(x,t)=e^{-18\pi^2 t}\cdot\sin 3\pi x.$$

Второй способ нахождения коэффициентов a_k. Функцию $u(x,t)$, заданную соотношением (7.10), подставим в начальное условие:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin\frac{\pi k}{4}x=\sin 3\pi x.$$

Правая часть этого равенства представляет собой разложение в ряд Фурье по синусам. Поэтому, приравнивая коэффициенты при одинаковых $\sin\frac{\pi k}{4}x,\ k=1,2,\ldots$, будем иметь: $a_{12}=1$; остальные a_k равны нулю.

Пример 7.2. Решить методом Фурье начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x\cdot t, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x\cdot(2-x),\ 0\le x\le 2. \end{cases}$$

Решение. В соответствии с изложенным в разделе 7.2 §7 решение этой задачи ищется в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{7.28}$$

где $v(x,t)$ есть решение задачи

$$v_t = v_{xx},$$
$$v(0,t)=0, \quad v(2,t)=0,$$
$$v(x,0) = x\cdot(2-x), \quad 0\le x\le 2,$$

а $w(x,t)$ есть решение задачи

$$w_t = w_{xx} + x\cdot t,$$
$$w(0,t)=0, \quad w(2,t)=0,$$
$$w(x,0)=0.$$

Сначала решаем задачу относительно функции $v(x,t)$, решение которой дается формулой (7.10), в которой коэффициенты a_k определены соотношениями (7.12). В нашем случае $\varphi(x)=x(2-x)$, $l=2$, $a=1$. Внося эти данные в (7.12), получаем

$$a_k = \int_0^2 x(2-x)\cdot\sin\frac{k\pi}{2}x dx,\ k=1,2,\ldots$$

Вычислим эти интегралы с помощью двукратного интегрирования по частям:

$$a_k = \int_0^2 x(2-x)\cdot\sin\frac{k\pi}{2}xdx = \left| \begin{array}{c} u_1 = x(2-x),\ du_1 = (2-2x)dx, \\ dv_1 = \sin\frac{k\pi}{2}x\cdot dx \Rightarrow v_1 = -\dfrac{\cos\frac{k\pi}{2}x}{\frac{k\pi}{2}} \end{array} \right| =$$

$$= x(2-x)\cdot\left(-\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x\right)\Bigg|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int_0^2 \cos\frac{k\pi}{2}x\cdot(2-2x)dx =$$

$$=\left|\begin{matrix} u_1 = 2-2x,\; du_1 = -2dx, \\ dv_1 = \cos\frac{k\pi}{2}x\cdot dx \Rightarrow v_1 = \dfrac{\sin\frac{k\pi}{2}x}{\frac{k\pi}{2}} \end{matrix}\right| = \frac{2}{k\pi}\{(2-2x)\cdot\frac{2}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2 -$$

$$-\frac{2}{k\pi}\int_0^2 \sin\frac{k\pi}{2}x\cdot(-2)dx\} = \frac{8}{(k\pi)^2}\int_0^2 \sin\frac{k\pi}{2}xdx = \frac{8}{(k\pi)^2}\left(-\dfrac{\cos\frac{k\pi}{2}x}{\frac{k\pi}{2}}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$=\frac{16}{(k\pi)^3}(1-\cos k\pi) = \frac{16}{(k\pi)^3}[1-(-1)^k],\;\; k=1,2,...$$

Отсюда видно, что коэффициенты a_k с четными номерами равны нулю. Подставив эти значения коэффициентов a_k в (7.10), получим решение первой задачи относительно $v(x,t)$ в следующем виде

$$v(x,t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\cdot e^{-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4}t}\cdot\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}x. \qquad (7.29)$$

Перейдем к решению задачи относительно функции $w(x,t)$. Ее ищем в виде (7.23), где $l=2$ и функции $T_k(t)$ определяются формулой (7.27), которая в нашем случае примет вид:

$$T_k(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2(t-\tau)} f_k(\tau)d\tau, \quad k=1,2,..., \qquad (7.30)$$

где для $f_k(\tau)$ в силу (7.25) с учетом $f(x,\tau) = x\cdot\tau$ получаем интеграл $f_k(\tau) = \int_0^2 x\cdot\tau\cdot\sin\frac{k\pi}{2}xdx,$ который вычисляется по частям:

$$f_k(\tau) = \tau\cdot\int_0^2 x\cdot\sin\frac{k\pi}{2}xdx = \left|\begin{matrix} u_1 = x,\; du_1 = dx, \\ dv_1 = \sin\frac{k\pi}{2}xdx \Rightarrow v_1 = -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x \end{matrix}\right| =$$

$$=\tau\{-\frac{2}{k\pi}x\cos\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int_0^2\cos\frac{k\pi}{2}xdx\} = \tau\{-\frac{4}{k\pi}\cos k\pi + \frac{4}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2\} =$$

$$= -\frac{4}{k\pi}(-1)^k\cdot\tau = \frac{4}{k\pi}(-1)^{k+1}\cdot\tau.$$

Внося это выражение в (7.30), для $T_k(t)$ получаем

$$T_k(t)=\frac{4(-1)^{k+1}}{k\pi}\int_0^t \tau\cdot e^{-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2(t-\tau)}d\tau=\left|\begin{array}{c} u_1=\tau,\, du_1=d\tau,\\ dv_1=e^{-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2(t-\tau)}d\tau\Rightarrow v_1=\frac{4}{(k\pi)^2}e^{-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2(t-\tau)}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{4(-1)^{k+1}}{k\pi}\left[\tau\cdot\frac{4}{(k\pi)^2}\cdot e^{-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2(t-\tau)}\Bigg|_0^t-\frac{4}{(k\pi)^2}\int_0^t e^{-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]=$$

$$=\frac{16(-1)^{k+1}}{(k\pi)^3}\left[t-\frac{4}{(k\pi)^2}\cdot e^{-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2(t-\tau)}\Bigg|_0^t\right]=\frac{16(-1)^{k+1}}{(k\pi)^3}\left[t+\frac{4}{(k\pi)^2}\left(e^{-\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 t}-1\right)\right].$$

Теперь, если это значение $T_k(t)$ подставить в (7.23), то получим решение второй задачи $w(x,t)$, которое вместе с (7.29) по формуле (7.28) дает решение исходной задачи.

Задачи

Методом Фурье найти решения следующих начально-краевых задач для уравнения теплопроводности:

7.1. $\begin{cases} u_t=9u_{xx},\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\\ u(x,0)=\sin 2\pi x;\end{cases}$ 7.2. $\begin{cases} u_t=2u_{xx},\\ u(0,t)=u(2,t)=0,\\ u(x,0)=4\sin\pi x+3\sin 5\pi x;\end{cases}$

7.3. $\begin{cases} u_t=6u_{xx},\\ u(0,t)=u(4,t)=0,\\ u(x,0)=8\sin 3\pi x+9\sin 4\pi x;\end{cases}$ 7.4. $\begin{cases} u_t=5u_{xx}+x,\\ u(0,t)=u(5,t)=0,\\ u(x,0)=\sin 4\pi x;\end{cases}$

7.5. $\begin{cases} u_t=6u_{xx}+t,\\ u(0,t)=u(4,t)=0,\\ u(x,0)=x(4-x);\end{cases}$ 7.6. $\begin{cases} u_t=3u_{xx}+x+t,\\ u(0,t)=u(2,t)=0,\\ u(x,0)=x(2-x).\end{cases}$

§8. Метод Фурье решения краевых задач для уравнения Лапласа

Решение краевых задач для уравнения Лапласа в случае некоторых простейших областей (круг, сектор, кольцо, прямоугольник, шар, цилиндр) может быть найдено также методом Фурье. Получающиеся при этом задачи Штурма- Лиувилля на собственные значения приводят к различным классам специальных функций. В этом параграфе мы рассмотрим задачу Дирихле для кругового сектора и круга, при решении которых, как и в предыдущих параграфах, используются только тригонометрические функции.

При решении задач в круговом секторе или в круге удобно перейти к полярным координатам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Выражая производные u_{xx}, u_{yy} через производные по переменным r, φ с помощью формул (3.4), уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ в полярных координатах можно записать в виде

$$\Delta u(r,\varphi) \equiv u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0. \qquad (8.1)$$

8.1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круговом секторе. *Найти функцию $u(r,\varphi)$, непрерывную в замкнутом круговом секторе $0 \le r \le a, 0 \le \varphi \le \alpha < 2\pi$, удовлетворяющую внутри кругового сектора уравнению Лапласа (8.1) и граничным условиям:*

$$u(a,\varphi) = f(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \alpha, \qquad (8.2)$$

$$u(r,0) = u(r,\alpha) = 0, \ \ 0 \le r \le a, \qquad (8.3)$$

где $f(\varphi)-$ заданная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = f(\alpha) = 0$.

Согласно методу Фурье решение уравнения (8.1) при условиях (8.3) будем искать в виде

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \qquad (8.4)$$

Подставляя (8.4) в уравнение (8.1), получаем

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{\frac{1}{r^2}R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = const,$$

откуда для определения неизвестных функций $R(r), \Phi(\varphi)$ будем иметь уравнения:

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \qquad (8.5)$$

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0. \qquad (8.6)$$

Из граничных условий (8.3) следует, что

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(\alpha) = 0. \qquad (8.7)$$

Итак, для определения функции $\Phi(\varphi)$ имеем задачу Штурма- Лиувилля (8.6), (8.7). Эта задача изучена нами в §§6,7. Ее решение имеет вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2, \quad \Phi_k(\varphi) = \sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi, \quad k = 1, 2, ... \qquad (8.8)$$

Подставляя значения λ_k из (8.8) в уравнение (8.5), получаем

$$r^2 R'' + rR' - \lambda_k R = 0, \qquad (8.9)$$

которое представляет собой однородное дифференциальное уравнение Эйлера второго порядка. Его решения можно искать в виде

$$R(r) = r^{\mu}, \qquad (8.10)$$

где μ - некоторая постоянная.

Подставляя (8.10) в уравнение (8.9) и сокращая на r^{μ}, для определения постоянной μ приходим к уравнению

$$\mu^2 = \lambda_k,$$

корнями которого являются $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_k} = \pm\frac{k\pi}{\alpha}$. Следовательно, общее решение уравнения Эйлера (8.9) имеет вид

$$R_k(r) = c_k r^{\sqrt{\lambda_k}} + d_k r^{-\sqrt{\lambda_k}}, \ k = 1, 2, ... \qquad (8.11)$$

где c_k, d_k – произвольные постоянные.

Так как решение $u(r,\varphi)$ должно быть непрерывным в замкнутом круговом секторе, то $d_k = 0, \ k = 1, 2, ...$ Тогда из (8.11) получим

$$R_k(r) = c_k r^{\sqrt{\lambda_k}}, \ k = 1, 2, ... \qquad (8.12)$$

Теперь, если (8.8), (8.12) подставить в (8.4), то получим частные решения уравнения (8.1), удовлетворяющие граничным условиям (8.3), следующего вида

$$u_k(r,\varphi) = c_k r^{\sqrt{\lambda_k}} \sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi, \quad k = 1, 2, ...$$

Чтобы удовлетворить условию (8.2), составим ряд из этих частных решений:

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^{\sqrt{\lambda_k}} \sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi. \qquad (8.13)$$

Подставляя (8.13) в условие (8.2), будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k a^{\sqrt{\lambda_k}} \sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi = f(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \alpha. \qquad (8.14)$$

(8.14) есть разложение функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье по синусам. Поступая как и в §§6,7, приходим к тому, что соотношение (8.14) будет удовлетворено, если коэффициенты разложения (8.14) определены по формулам

$$c_k a^{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi \, d\varphi, \quad k = 1, 2, ...$$

откуда

$$c_k = \frac{2}{\alpha} a^{-\sqrt{\lambda_k}} \int_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\, d\varphi, \quad k = 1, 2, ... \qquad (8.15)$$

Подставляя (8.15) в (8.13), получаем решение задачи Дирихле (8.1)- (8.3).

8.2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге. *Найти функцию* $u(r,\varphi)$, *непрерывную в замкнутом круге* $0 \le r \le a, 0 \le \varphi \le 2\pi$, *удовлетворяющую внутри круга уравнению Лапласа (8.1) и граничному условию*

$$u(a,\varphi) = f(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad (8.16)$$

где $f(\varphi)$ *– заданная непрерывная функция.*

Прежде всего, заметим, что в случае круга искомая функция $u(r,\varphi)$ должна быть периодической с периодом 2π:

$$u(r,\varphi + 2\pi) = u(r,\varphi). \qquad (8.17)$$

Поэтому функция $f(\varphi)$ дополнительно должна удовлетворять условию

$$f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi).$$

Ищем решение уравнения Лапласа (8.1), удовлетворяющее условию (8.17), снова в виде (8.4). Для определения функций $R(r), \Phi(\varphi)$, как и в предыдущем пункте 8.1, получаем уравнения (8.5), (8.6). Условие (8.17) дает

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \qquad (8.18)$$

Итак, для функции $\Phi(\varphi)$ имеем задачу Штурма- Лиувилля (8.6), (8.18). Решаем ее. Рассмотрим три случая.

1) $\lambda < 0$. Общее решение уравнения (8.6) имеет вид:

$$\Phi(\varphi) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\varphi},$$

где A, B – произвольные постоянные. Ясно, что ни при каких постоянных $A, B,$ не равных одновременно нулю, $\Phi(\varphi)$ не является периодической, т.е. не выполняется условие (8.18), а значит, задача Штурма- Лиувилля в этом случае не имеет решения.

2) $\lambda = 0$. Общее решение уравнения (8.6)

$$\Phi(\varphi) = A\varphi + B.$$

Из условия (8.18) следует, что $A = 0$, следовательно, задача Штурма- Лиувилля имеет решение вида

$$\lambda_0 = 0, \quad \Phi_0(\varphi) = A_0 = const.$$

3) $\lambda > 0$. Общее решение уравнения (8.6) есть

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi.$$

Это решение будет удовлетворять условию периодичности (8.18) лишь при $\lambda = k^2, k = 1, 2, ...$

Таким образом, решения задачи Штурма- Лиувилля (8.6), (8.18) имеют вид:

$$\lambda_k = k^2, \quad \Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi, \quad k = 0,1,2,... \qquad (8.19)$$

(отрицательные значения k не дают новых решений), где A_k, B_k – произвольные постоянные.

Теперь значения $\lambda_k = k^2$ подставим в уравнение (8.5) и, рассуждая как в пункте 8.1, находим его решения в виде

$$R_k(r) = r^k, \ k = 0,1,2,... \qquad (8.20)$$

Внося выражения $\Phi_k(\varphi), R_k(r)$ из (8.19), (8.20) в (8.4), получаем частные решения уравнения Лапласа (8.1), удовлетворяющие условию периодичности (8.17), в виде

$$u_k(r,\varphi) = r^k(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi), k = 0,1,2,... \qquad (8.21)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (8.16), из частных решений (8.21) образуем ряд

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi). \qquad (8.22)$$

Подставляя (8.22) в граничное условие (8.16), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a^k A_k \cos k\varphi + a^k B_k \sin k\varphi) = f(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \qquad (8.23)$$

Ряд слева в (8.23) есть полный тригонометрический ряд Фурье для отрезка $[0,2\pi]$. Поэтому мы удовлетворим условию (8.23), если положим $A_0, a^k A_k, a^k B_k, k = 1,2,...$ равными коэффициентам Фурье функции $f(\varphi)$:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi, \quad a^k A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi d\varphi,$$

$$a^k B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin k\varphi d\varphi, \quad k = 1,2,... \qquad (8.24)$$

Подставляя значения коэффициентов A_k, B_k из (8.24) в (8.22), получаем решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Отметим, что построенные решения задачи Дирихле в круговом секторе (8.13) и в круге (8.22) являются формальными. Для их обоснования необходимо провести те же рассуждения, что и в случае уравнения колебаний струны (§6).

В заключение отметим, что решение задачи Дирихле в круге (8.22) можно представить в виде

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\varphi - \psi) + r^2} f(\psi)d\psi.$$

Эта формула называется **формулой Пуассона**, а интеграл справа – **интегралом Пуассона.**

Пример 8.1. Решить методом Фурье краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом секторе $0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \alpha < 2\pi$:

$$\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \\ u(r,0) = u\left(r, \dfrac{\pi}{3}\right) = 0, \\ u(1,\varphi) = 1 - \cos 6\varphi. \end{cases}$$

Решение. Решение этой задачи дается формулой (8.13), в которой коэффициенты определены соотношениями (8.15). В нашем случае

$$a = 1, \alpha = \frac{\pi}{3},\quad f(\varphi) = 1 - \cos 6\varphi.$$

Подставляя эти значения в (8.15), для определения коэффициентов c_k получаем $c_k = \dfrac{6}{\pi}\int\limits_0^{\pi/3}(1-\cos 6\varphi)\cdot \sin 3k\varphi d\varphi,\ k = 1, 2, \ldots$ Вычислим интегралы:

$$c_k = \frac{6}{\pi}\int\limits_0^{\pi/3}(1-\cos 6\varphi)\cdot\sin 3k\varphi d\varphi = \frac{6}{\pi}\int\limits_0^{\pi/3}\sin 3k\varphi d\varphi - \frac{6}{\pi}\int\limits_0^{\pi/3}\cos 6\varphi\cdot\sin 3k\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{6}{\pi}\frac{\cos 3k\varphi}{3k}\Bigg|_0^{\pi/3} - \frac{6}{\pi}\int\limits_0^{\pi/3}\frac{1}{2}[\sin(3k\varphi - 6\varphi) + \sin(3k\varphi + 6\varphi)]d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi k}(1 - \cos\pi k) - \frac{3}{\pi}\left[-\frac{\cos(3k-6)\varphi}{3k-6} - \frac{\cos(3k+6)\varphi}{3k+6}\right]\Bigg|_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{2}{\pi k}[1-(-1)^k] + \frac{3}{\pi}\left[\frac{\cos(\pi k - 2\pi) - 1}{3k-6} + \frac{\cos(\pi k + 2\pi) - 1}{3k+6}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k}[1-(-1)^k] + \frac{1}{\pi}[(-1)^k - 1]\left(\frac{1}{k-2} + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{8[1-(-1)^k]}{\pi k(k^2-4)},\ \text{если}\ \ k \ne 2;$$

при $k = 2$:

$$c_2 = \frac{6}{\pi}\int\limits_0^{\pi/3}(1-\cos 6\varphi)\sin 6\varphi d\varphi = \frac{6}{\pi}\left[-\frac{\cos 6\varphi}{6}\Bigg|_0^{\pi/3} - \int\limits_0^{\pi/3}\frac{\sin 12\varphi}{2}d\varphi\right] = 0.$$

Таким образом, все коэффициенты c_k с четными номерами равны нулю.

Теперь, подставив найденные значения коэффициентов c_k в формулу (8.13), получим решение исходной задачи в следующем виде

$$u(r,\varphi) = \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)[(2k-1)^2-4]}\cdot r^{6k-3}\sin(6k-3)\varphi.$$

Пример 8.2. Решить методом Фурье краевую задачу для уравнения Лапласа в круге $0 \le r \le 3,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$:

$$\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \\ u(3,\varphi) = \cos 2\varphi. \end{cases}$$

Решение. Решение этой задачи дается формулой (8.22), в которой коэффициенты A_k, B_k определены при помощи соотношений (8.24). **Сначала коэффициенты A_k, B_k найдем с помощью (8.24).** Так как в нашем случае $f(\varphi) = \cos 2\varphi,\ a = 3,$ то из формул (8.24) будем иметь:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}\cdot \frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 0,$$

$$A_k = \frac{3^{-k}}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \cdot \cos k\varphi d\varphi = \frac{3^{-k}}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\cos(2\varphi - k\varphi) + \cos(2\varphi + k\varphi)]d\varphi =$$

$$= \frac{3^{-k}}{2\pi}\left[\frac{\sin(2-k)\varphi}{2-k} + \frac{\sin(2+k)\varphi}{2+k}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 0, \quad \text{если} \quad k \ne 2;$$

при $k = 2$:

$$A_2 = \frac{3^{-2}}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{9\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{18\pi}\left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{9};$$

$$B_k = \frac{3^{-k}}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \cdot \sin k\varphi d\varphi = \frac{3^{-k}}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\sin(k\varphi - 2\varphi) + \sin(k\varphi + 2\varphi)]d\varphi =$$

$$= \frac{3^{-k}}{2\pi}\left[-\frac{\cos(k-2)\varphi}{k-2} - \frac{\cos(k+2)\varphi}{k+2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 0, \ \text{если} \ k \ne 2;$$

при $k = 2$:

$$B_2 = \frac{1}{9\pi}\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{9\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{18\pi}\left(-\frac{\cos 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Внося найденные значения коэффициентов в формулу (8.22), получаем решение исходной задачи в виде

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{9} r^2 \cos 2\varphi.$$

Второй способ нахождения коэффициентов A_k, B_k. Функцию (8.22) подставим в граничное условие:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) = \cos 2\varphi.$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos k\varphi,\ k=0,1,2,...$ и $\sin k\varphi,\ k=1,2,...$, для определения A_k, B_k получаем

$$3^2 A_2 = 1,\ 3^k A_k = 0,\ k = 0,1,3,,...; \qquad 3^k B_k = 0,\ k = 1,2,...,$$

откуда $A_2 = \dfrac{1}{9}$; остальные A_k и все B_k равны нулю.

Задачи

Методом Фурье найти решения следующих краевых задач для уравнения Лапласа:

8.1. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \\ u(r,0) = u\left(r,\dfrac{\pi}{4}\right) = 0,\ 0 \le r \le 3, \\ u(3,\varphi) = 1 - \cos 8\varphi,\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$ 8.2. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \\ u(r,0) = u\left(r,\dfrac{\pi}{5}\right) = 0, 0 \le r \le 2, \\ u(2,\varphi) = 1 - \cos 10\varphi, 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{5}; \end{cases}$

8.3. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \\ u(1,\varphi) = \sin 3\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi; \end{cases}$ 8.4. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \\ u(4,\varphi) = \cos 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi; \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \\ u(4,\varphi) = \sin^2 \varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi; \end{cases}$ 8.6. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \\ u(2,\varphi) = \cos^2 3\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

Использованная литература

1.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1972.- 736 с.

2. Крикунов Ю.М. Лекции по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям.- Казань: Изд-во Казанск. ун-та,1970.- 210 с.

3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике.- М.: Физматлит,2004.-688 с.

4. Вуколов Э.А., Ефимов А.В., Земсков В.Н. и др. Сборник задач по математике для втузов. Ч.4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения.- М.: Наука,1990.-304 с.

Содержание