МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.И. Лукашенко, Р.И. Ахметзянов, М.Ф. Минсагиров

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРАХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Учебно-методическое пособие

Казань
2017

УДК 624.04
ББК 38.112
Л84

Лукашенко В.И., Ахметзянов Р.И., Минсагиров М.Ф.
Л84 Определение ресурса статически определимой системы при заданных параметрах случайных величин: Учеб.-метод. пособие / В.И. Лукашенко, Р.И. Ахметзянов, М.Ф. Минсагиров. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2017. – 55 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

В учебно-методическом пособии изложены методы вероятностного анализа случайных величин, моделируемых в заданных интервалах, применительно к решению задач оценки прочности и ресурса строительных конструкций. Пособие определяет задания и порядок выполнения курсовой работы, предусмотренной рабочей программой по курсу «Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций», для студентов специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» и магистрантов направления подготовки 08.04.01 «Строительство» по программе «Теоретические основы и практические методы расчета строительных конструкций»

Ил. 25; табл. 29.

Рецензенты:
Доктор технических наук, заслуженный деятель науки и техники РТ,
профессор кафедры МК и ИС КГАСУ
И.Л. Кузнецов
Кандидат технических наук, доцент кафедры МК и ИС КГАСУ
О.И. Ефимов

УДК 624.04
ББК 38.112

Введение

Реальное сооружение и его условия эксплуатации отличаются от идеализированной расчетной модели и условий, рассматриваемых на стадии проектирования. Фактические напряжения, деформации и перемещения являются случайными величинами из-за случайного характера внешних воздействий, прочностных и других внешних условий**.** Поэтому надежность результатов расчета и, в конечном счете, конструкции, должна быть определена с помощью вероятностных методов строительной механики с привлечением методов теории вероятностей.

Обычный подход к расчету конструкций состоит из двух этапов.

1. Для заданной расчетной модели вычисляются напряжения, деформации и перемещения в элементах конструкций, подверженных действию различных внешних нагрузок. Эта задача решается методами строительной механики, теории упругости, теории пластичности и т.д. Такой подход называется **детерминистическим.**

2. Вычисленные величины сопоставляются с нормативно допустимыми значениями. При этом решается задача надежности, долговечности и экономичности конструкции. Обычно для решения этих задач использовался сначала **метод допускаемых напряжений** для определения коэффициентов запаса прочности. Он заключался в том, что для любого волокна конструкции должно было выполняться условие:

$$k\,S \le S_{\text{доп}},$$

где $S_{\text{доп}}$ – допускаемое напряжение; S – напряжение в волокне, определяемое методами строительной механики; k – коэффициент запаса.

В 1945 году метод допускаемых напряжений уступил место другому методу, снимавшему частично эти противоречия, он получил название **«Метод предельных состояний».** Общий коэффициент запаса был расчленен на три коэффициента: однородности материала, перегрузки и условий работы. Таким образом, вероятностная оценка общих коэффициентов запаса прочности была расчленена на три независимых оценки, учитывающих различную изменчивость прочностных характеристик материалов, величин и характера нагрузок. При этом предполагалось, что в расчлененном варианте решение неопределенностей будет точнее. В 1955 году метод, благодаря работам

Н.С. Стрелецкого, был включен в «Строительные нормы и правила СССР» и в дальнейшем усовершенствован: система расчетных коэффициентов была расширена до пяти. Это коэффициенты **надежности по нагрузке –** γ_f**, по материалу –** γ_m**,по назначению –** γ_n**, при расчете по временному сопротивлению –** γ_u **и коэффициенты условий работы –** γ_c**.**

1. Основные понятия и задачи вероятностных методов (СМ)

Надежность – свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность объекта выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонта и транспортирования. Иначе, ***надежность*** – это устойчивость качества по отношению ко всем возможным возмущениям. Надежность определяется количественными показателями (промежуток времени, число рабочих циклов, число километров и т.д.).

В зависимости от назначения системы и условий ее эксплуатации надежность включает различные свойства: 1) безотказность; 2) долговечность; 3) ремонтопригодность; 4) сохраняемость и любые их сочетания.

Безотказность – вероятность безотказной работы конструкции за определенный промежуток времени.

Долговечность – вероятный промежуток времени безотказной работы конструкции.

Ремонтопригодность – вероятность того, что неисправная система может быть восстановлена за заданное время.

Содержание теории надежности – разработка методов оценки надежности систем и создание систем, обладающих заданными показателями надежности и долговечности.

Задачи расчета на надежность:

– определение вероятности выхода конструкции из строя в заданных условиях;

– нахождение по заданной, экономически целесообразной, надежности требуемых размеров конструкции;

– определение допустимых нагрузок или оптимального срока эксплуатации;

– оценка надежности системы по имеющимся оценкам надежности составляющих ее элементов.

В задачу теории надежности строительных конструкций входит также обоснование процедур нормирования расчетных характеристик.

Специфика теории надежности строительных конструкций состоит в необходимости учета случайных свойств нагрузок и воздействий на сооружения, а также учета совместного действия случайных нагрузок на систему со случайными прочностными характеристиками.

Основное понятие теории надежности – **отказ** – это событие, состоящее в нарушении работоспособности системы. Понятие отказа близко по смыслу к

понятию предельного состояния. К предельным состояниям 1-й группы относятся: общая потеря устойчивости формы, потеря устойчивости положения, любое разрушение, переход в изменяемую систему, качественное изменение конфигурации; состояния, при которых возникает необходимость прекращения эксплуатации в результате текучести материала, сдвига в соединениях, ползучести или чрезмерного раскрытия трещин. Предельные состояния 2-й группы – недопустимые деформации конструкции в результате прогиба, поворота или осадок, характеризуемых разностью вертикальных перемещений узлов, отнесенных к расстоянию между ними, креном сооружения в целом, относительным прогибом или выгибом, кривизной элемента, относительным углом закручивания, горизонтальным или вертикальным смещением элемента или сооружения в целом, углом перекоса или поворота. К предельным состояниям 2-й группы относятся также недопустимые колебания конструкции, изменение положения, образование или раскрытие трещин.

Примеры отказов – обрушения, опрокидывания, потеря устойчивости, хрупкое разрушение, большие деформации и прогибы, механический или коррозионный износ, растрескивание и т.д.

Отказы вызваны влиянием случайных факторов, поэтому они носят случайный характер. **За показатель (меру) надежности системы может быть принята вероятность *P* безотказной работы в течение всего срока службы *T*.**

Недостатки теории надежности – сложно получить опытные данные в количестве, достаточном для последующей их обработки методами теории вероятностей. Сложно длительный срок проводить испытания конструкции для получения надежных выводов о ее долговременной работе.

2. Понятия и математический аппарат, используемые в вероятностных методах СМ

Событие – качественный или количественный результат опыта, осуществляемого при определенных условиях. Например, событие – попадание предела текучести стали R_y в интервал от 240 до 260 МПа.

Событие может быть **случайным, достоверным или невозможным**. Объективная математическая оценка возможности реализации случайного события – ***вероятность*.** Вероятность – есть объективная мера возможности наступления события независимо от того, является ли оно массовым или нет. В жизни все (полуинтуитивно) применяют вероятностные оценки будущим событиям и весьма успешно.

Частота события *A* (статистическая вероятность):

$$P^*(A) = m / n,$$

где m– число опытов, в которых наблюдается событие A; n – общее число опытов.

Значения $P^*(A)$ – случайны:

$$\underset{n\to\infty}{P^*(A)} \to P(A),$$

где $P(A)$ – <u>математическая вероятность</u>, являющаяся **достоверной** величиной, если вероятность того, что при n→∞ $P^*(A) = P(A)$ равна 1.

$0 \le P(A) \le 1$.

При $m = n$ вероятность $P(A) = 1$ – событие **достоверное;**

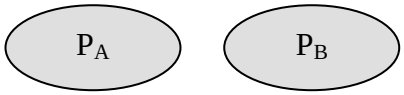
при $m = 0$, соответственно, $P(A) = 0$ – событие **невозможное.**

События ***несовместны*** в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе, например, появление одновременно двух цифр от 1 до 6 на игральном кубике при одном его бросании.

Случайные события ***совместны***, если при данном испытании могут произойти оба эти события (при одновременном бросании двух кубиков).

Если события *A* и *B* несовместны, то вероятность появления **или** события *A*, **или** события *B*:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$



P_A+ P_B

или в общем виде для n несовместных *A:*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

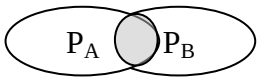
B

B B

Сумма вероятностей двух противоположных событий:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Событие *A* ***независимо*** от *B*, если вероятность появления события *A* не зависит от того, произошло событие *B* или нет.



P_AB

Если события *A* и *B* независимы (они совместны), то вероятность появления **и** события *A*, **и** события *B* равна:

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

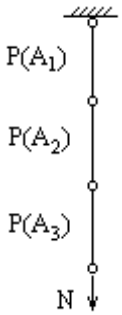
а в общем виде:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

В урне два кубика – черный и белый – и два шарика – черный и белый. Вероятность появления черного кубика равна произведению вероятностей появления черного цвета и кубика, т.е. 1/2·1/2=1/4.

Из формулы видно, например, что если событие *A* (появление максимальной ветровой нагрузки) и событие *B* (появление максимальной снеговой нагрузки) – независимы, то вероятность одновременного появления *A* и *B* (т.е. максимумов нагрузок) меньше вероятности появления одного из событий (максимумов нагрузки) $\left(P^{\max}_{снег+ветер} = P^{\max}_{снег} \cdot P^{\max}_{ветер}\right)$.

Вероятность $P(AB)$ тем меньше, чем меньше $P(A)$ и $P(B)$. А если *A* и *B* зависимы, то это учитывается условной вероятностью появления одного из них при появлении другого. При последовательным соединении вероятность неразрушения последовательной системы:



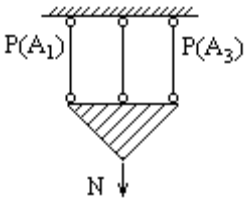
$$P = P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

где $P(A_i)$, i =1, 2, 3 – вероятности неразрушения i-го элемента системы; A_i – событие, состоящее в неразрушении i-го элемента системы.

Пример последовательного соединения – статически определимая система, так как разрушение всей системы происходит при разрушении хотя бы одного из элементов, таким образом, вероятность неразрушения всей системы меньше вероятности неразрушения любого ее отдельного элемента.

При параллельном соединении вероятность разрушения параллельной системы:

$$\overline{P} = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3),$$



где $P(\overline{A}_i), i = 1,3$ – вероятности разрушения i-го элемента системы.

Вероятность неразрушения параллельной системы:

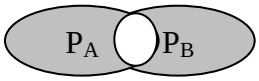
$$P = 1 - \overline{P} = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)),$$

или в общем виде: $$P = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i)).$$

Пример параллельного соединения – статически неопределимая система, так как разрушение всей системы происходит при разрушении всех избыточных и еще одной связей. Таким образом, вероятность неразрушения всей системы больше вероятности неразрушения любого ее отдельного элемента. Однако в действительности в статически неопределимой системе вероятности разрушения элементов системы **не** независимы, так как разрушение одного элемента из-за перераспределения усилий приводит к изменению вероятностей разрушения остальных элементов.

Например, при диаграмме Прандтля «условное» разрушение одного элемента статически неопределимой системы (т.е. напряжение в этом элементе при увеличении N остается постоянным и равным R_y) в меньшей степени приводит к перераспределению усилий, а, следовательно, и к изменению вероятностей разрушения. Таким образом, статически неопре-делимая система со стержнями, работающими по диаграмме Прандтля, больше подходит в качестве примера для параллельной системы.

Если случайные события A и B совместны (и независимы), то вероятность появления **или** A, **или** B:



P(A+B)

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B),$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Если случайные события A и B зависимы (и совместны) и вероятности их появления $P(A)$ и $P(B)$, то вероятность совмещения событий A и B (произойдет и A, и B):

$$P(AB) = P(A)P(B/A),$$

где $P(B/A)$ – <u>условная вероятность</u>, т.е. вероятность появления события B, при условии, что событие A произошло. Аналогично

$$P(AB) = P(B)P(A/B).$$

Например, в урне два черных и два белых шара. Событие *A* – появление белого шара с первого раза, событие *B* – появление белого шара со второго раза. Вероятность появления белого шара два раза подряд определяется формулой:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=1/2\cdot 1/3=1/6.$$

Из приведенных формул можно получить:

$$P(A/B)=P(A)\frac{P(B/A)}{P(B)} \quad ,$$

где $P(A)$ – <u>априорная вероятность появления события *A*</u>, определенная до того, как стала известна информация о событии *B*; $P(A/B)$ – <u>апостериорная вероятность появления события *A*</u>, основанная на той информации, что *A* и *B* произошли, но мы определяем вероятность того, что перед *B* было *A*.

Если *A* и *B* независимы, то $P(A/B)=P(A)$ и наоборот.

Пусть имеется *n* несовместных событий $A_1, A_2,...,A_n$ с вероятностями их появления $P(A_1),P(A_2),...,P(A_n)$, и пусть $P(B/A_1),P(B/A_2),...,P(B/A_n)$ – условные вероятности осуществления события *B* с одним из n событий $A_1, A_2,...,A_n$. То есть события *B* и A_1, *B* и A_2,…, *B* и A_n – зависимы и совместны. Тогда вероятность осуществления события *B*:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i).$$

Это формула полной вероятности,

где $P(A_i)P(B/A_i)$ – вероятность того, что произойдет *B* и A_i; $P(B)$ – по-другому – вероятность того, что *B* произойдет с любым из A_i.

Пусть событие *B* произошло, это изменит вероятности $P(A_1),P(A_2),...,P(A_n)$. Надо найти условные вероятности $P(A_1/B),P(A_2/B),...,P(A_n/B)$ осуществления события A_i, i =1,…*n* при условии, что *B* произошло (т.е. если *B* произошло, то надо найти вероятность того, что ему предшествовало появление именно события A_i).

Формула полной вероятности Байеса:

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B/A_j)} \quad ,$$

где $P(A_i)$ – вероятность появления события A_i (i =1, 2,…*n*) до того, как произошло *B*; $P(A_i/B)$ – как бы является удельным весом вероятности $P(A_i)$ в сумме всех вероятностей $P(A_j), j=1,n$).

Производится *n* независимых опытов, имеющих два возможных исхода – появление и непоявление события *A* (вероятность появления *p* , непоявления *q* = 1 – *p*). Вероятность того, что при *n* испытаниях событие *A* наступает *m* раз ***(формула Бернулли):***

$$P_n^m(A)=C_n^m p^m q^{n-m} \quad ,$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[m-1])}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}$ – число сочетаний из m элементов в n.

Пример. $C_{90}^3 = \frac{90\cdot 89\cdot 88}{1\cdot 2\cdot 3} = 117480;\ C_{10}^1 = 10/1;\ C_{100}^4 = \frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};$

$C_n^m = C_n^{n-m};\ C_n^0 = C_n^n = 1;\ C_n^1 = n;\ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1},\ 0 < m < n.$

Вероятность $P_n^1(A)$ того, что в результате n независимых опытов событие A произойдет хотя бы один раз (может и больше): $P_n(A) = 1 - q^n$, где q – вероятность непоявления события A в первом испытании; q^n – вероятность того, что A не произойдет ни разу; $1 - q^n$ – вероятность того, что A произойдет один раз или два раза ... или все n раз.

Пример. Событие A – разрушение здания в сейсмическом районе, p = 0,1 – вероятность разрушения его в течение первого года. Тогда $q = 1 - p$ – вероятность неразрушения в течение первого. Тогда $P_2(A)=1-0.9^2=0.19$, $P_3(A)=1-0.9^3=0.271$, $P_{10}(A)=1-0.9^{10}=0.651$, $P_{20}(A)=1-0.9^{20}=0.878$, $P_{50}(A)=1-0.9^{50}=0.995$, где $P_n(A)$ – вероятности разрушения здания за n лет.

Таким образом, функция надежности (зависимость вероятности неразрушения от пройденного количества лет) от значения 1 асимптотически приближается к OX. (1 – P(A)) – вероятность неразрушения.

3. Основные характеристики случайных величин. Квантили вероятности P(x)

Математическое ожидание с.в. *X* :

– дискретной: $M(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$,

при этом $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ **(*M(x)* – случайна при n≠∞);**

– непрерывной: $\overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx.$

Математическое ожидание $\overline{X}$ **– достоверная величина,** так как вероятность того, что при $n=\infty$ испытаний мы получим среднее арифметическое $M(X)=\overline{X}$, равное 1.

$M(c)=c$, $M(cx) = cM(x)$, где c – неслучайное число.

Для независимых с.в. X_1 и X_2:

$$M(x_1+x_2)=M(x_1)+M(x_2),\ M(x_1x_2)=M(x_1)M(x_2),\ M(x^2)=[M(x)]^2+D(x).$$

К математическому ожиданию стремится среднее арифметическое наблюдаемых значений с.в. при количестве испытаний $n\to\infty$. **Геометрически м.о. – это абсцисса ц. т. площади под кривой плотности распределения. Размерность м.о. совпадает с размерностью с.в.**

Дисперсия с.в. X **– м.о. квадрата отклонения с.в. *X* от ее м.о. (центра распределения):**

$$D(x)=M[x-M(x)]^2=M(x^2)-M^2(x),$$

так как $M[x-M(x)]^2=M[x^2-2xM(x)+M^2(x)]=M(x^2)-2M^2(x)+M^2(x)$,

$M[2xM(x)]=2M^2(x)$ и $M[M(x)]=M(x)$.

Дисперсия дискретной с.в. X:

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(x))^2 p_i$$

случайна при n≠∞.

Дисперсия непрерывной с.в. *X*:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\overline{X})^2 p(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 p(x)dx-\overline{x}^2$$

(дисперсия непрерывной с.в. – достоверна).

$D(x)=M[(x-\overline{X})^2]$, при $\overline{X}=0$ $D(x)=M(\overline{X}^2)$, $\overline{X}$ – математическое ожидание.

Дисперсия характеризует разброс с.в. вокруг ее среднего значения (математического ожидания).

$D(c)=0$,

$D(cx)=c^2D(x)$,

$D(c+x)=D(x)$.

Для независимых с.в. X_1 и X_2 $D(x_1\pm x_2)=D(x_1)+D(x_2)$.

Геометрически дисперсия – это центральный момент инерции площади под кривой плотности распределения. Размерность дисперсии – квадрат размерности с.в.

Среднеквадратическое отклонение (стандарт): $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$.

Асимметрия непрерывной с.в. *X*:

$$A(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\overline{X})^3 p(x)dx\ .$$

Если с.в. *X* распределена симметрично относительно своего м.о., то $A(x)=0$.

Коэффициент изменчивости (вариации) с.в. *X* – отношение стандарта к м.о.:

$$V(x)=\sigma(x)/\overline{X}<1,$$

где $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$ – стандартное отклонение X.

Кванти́ль (или *квантиль порядка* α) – числовая характеристика закона распределения случайной величины; это такое число, что данная случайная величина попадает левее его с вероятностью, не превосходящей α. Квантиль первого порядка P(x) – обратная функция зависимости x от P(x).

4. Понятие надежности сооружения. Резерв прочности. Характеристика безопасности. Коэффициент запаса прочности

Общее условие непревышения предельного состояния может быть представлено в виде:

$$\psi(F_p,R_p,\gamma_n,\gamma_a,\gamma_c,c)\geq 0.$$

Входящие в это условие факторы можно условно разделить на две группы. Первая группа факторов зависит от свойств самой конструкции, вторая – от внешних воздействий. Это разделение возможно из-за отсутствия в большинстве случаев функциональных и корреляционных связей. Тогда это условие можно представить в виде:

$$\begin{cases} \gamma_n \psi_q(F_p, \gamma_a, \gamma_c) \le \psi_r(R_p) \\ \gamma_n \psi(F_p, R_p, \gamma_a, \gamma_c) \le c \end{cases} .$$

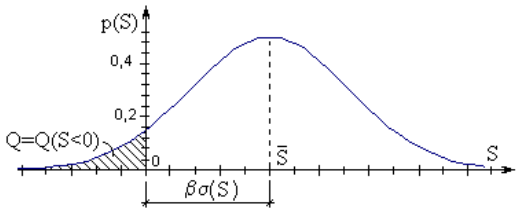
Условие непревышения границы области допустимых состояний конструкций может определяться как

$$R–F>0,$$

где с.в. R – обобщенная прочность конструкции (несущая способность);
F – обобщенная нагрузка, или иначе

$$S = R–F ,$$

где F – наибольшее значение усилия (или напряжения) в конструкции, выраженное через внешнюю нагрузку (т.е. задача определения напряженного состояния предполагается решенной);



R – несущая способность, выраженная в тех же единицах и отвечающая предельному состоянию конструкции по прочности (предел текучести, предел прочности и т.д.);
S – резерв прочности.

Вероятность неразрушения конструкции или надежность N – это вероятность непревышения случайной величины, характеризующей предельное состояние. Если кривая распределения этой величины каким-то образом определена, то по интегральной кривой распределения вероятности P_S можно найти квантиль вероятности N того, что реализация случайной величины S будет меньше этого квантиля, отсекая на кривой ординату P_S = N.

Вероятность разрушения конструкции:

$$Q = \int_{-\infty}^{0} p_s(S)dS = P_s(0) \cdot$$

При любых законах распределения с.в. R и F м.о. и дисперсия резерва прочности S:

$$\overline{S} = \overline{R} - \overline{F}; \ \sigma(S) = \sqrt{\sigma^2(R) + \sigma^2(F)} \ .$$

Для удобства вводят характеристику безопасности (при независимых R и F)

$$\beta = \frac{\overline{S}}{\sigma(S)} = \frac{\overline{R} - \overline{F}}{\sqrt{\sigma^2(R) + \sigma^2(F)}} \ .$$

β показывает число стандартов $\sigma(S)$, укладывающихся в интервале от S до $S = \overline{S}$ (рисунок).

Из определения вариативности с.в. следует:

$$\beta = \frac{1}{V(S)} \ ,$$

где $V(S)$ – коэффициент вариации (изменчивости) с.в. S (резерва прочности).

Иногда вместо резерва прочности вводят случайный коэффициент запаса:

$$K=R/F,$$

здесь *K, R, F* – случайные величины.

Тогда вероятность разрушения:

$$Q = Q(K < 1) = P_K(1),$$

где $P_k(1)$ – функция распределения коэффициента запаса при аргументе K=1.

Вероятность неразрушения:

$$P=P(K>1).$$

М.о. коэффициента запаса (коэффициент детерминированный)

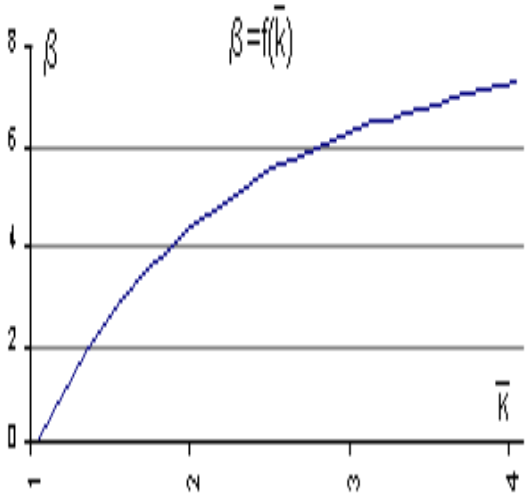
$$\overline{K} = \overline{R} / \overline{F}.$$

Разделим числитель и знаменатель правой части выражения β на $\overline{F}$ и получим характеристику безопасности:

$$\beta = \frac{\overline{K} - 1}{\sqrt{\frac{\sigma^2(F)}{\overline{F}^2} + \frac{\sigma^2(R)}{\overline{F}^2}}} = \frac{\overline{K} - 1}{\sqrt{V^2(F) + \overline{K}^2 V^2(R)}},$$

где $V(F) = \sigma(F)/\overline{F}$, $V(R) = \sigma(R)/\overline{R}$ – коэффициенты вариации усилия и несущей способности.

Использование значений *V(F)* и *V(R)* имеет то преимущество, что они могут быть сравнительно легко оценены с достаточной точностью даже при отсутствии полных статистических данных относительно с.в. *R* и *F*. Кроме того, при изменении значения нагрузки (например, в результате увеличения площади, с которой она собирается), равно как при изменении прочности несущих элементов (например, вследствие увеличения размеров поперечных сечений), коэффициенты вариации *V(F)* и *V(R)* остаются постоянными.



Из выражения β при делении на $\overline{K}$ числителя и знаменателя видно, что при $\overline{K} \to \infty$ $\beta \to 1/V(R)$, при $\overline{K} = 1 \to \beta = 0$. Можно доказать, что при увеличении $\overline{K}$ от 1 до ∞ β монотонно изменяется от 0 до $1/V(R)$.

Нижний предел ожидаемого значения коэффициента запаса:

$$\overline{K} \geq 1 / \left[1 - V(K) \sqrt{\frac{1-Q}{Q}} \right],$$

где $V(K) = \sigma(K)/\overline{K}$ – коэффициент вариации коэффициента запаса.

Приближенно

$$V(K) \approx \frac{\sqrt{V^2(R) + V^2(F)}}{1 + V^2(F)}.$$

Можно вывести приближенную формулу, связывающую характеристику безопасности β и коэффициент запаса:

$$\overline{K} \approx 1 + \beta\sqrt{V^2(R) + V^2(F)} \quad .$$

Это выражение используется при небольших значениях *V(R)* и *V(F)*, иначе

$$\overline{K} = \frac{1 + \sqrt{\beta^2 V^2(R) + \beta^2 V^2(F) - \beta^4 V^2(R) V^2(F)}}{1 - \beta^2 V^2(R)}$$

получено из выражения β.

В большинстве случаев корреляционная связь между нагрузкой и прочностью отсутствует или мала. Положительная корреляционная связь нагрузки с прочностью имеет место, когда для более прочных элементов с бо′льшей вероятностью можно ожидать относительно бо′льших нагрузок. Отчасти это относится к статически неопределимым конструкциям, в которых бо′льшую прочность отдельных элементов можно считать связанной с их бо′льшей жесткостью, а, следовательно, и с бо′льшими воспринимаемыми усилиями.

Коэффициент однородности (k_o) представляет собой отношение расчетного значения прочности к нормативной прочности $k_o = R / \overline{R}$.

Коэффициент перегрузки ($k_п$) представляет собой отношение расчетного значения нагрузки к нормативной нагрузке $k_п = F / \overline{F}$.

Если принять за нормативные значения м.о. случайной выборки при заданном законе распределения (в СНиП это соблюдается нестрого), а расчетным значениям приписать величины, соответствующие характеристике безопасности β:

$$R = (\overline{R} - \beta\sigma(R)) / \overline{R}, \quad F = (\overline{F} + \beta\sigma(F)) / \overline{F},$$

k_o и $k_п$ можно определить по формулам:

$$k_o = 1 - \beta V(R), \text{ аналогично, } \quad k_п = 1 + \beta V(F),$$

где $V(F) = \sigma(F)/\overline{F}$, $V(R) = \sigma(R)/\overline{R}$ – коэффициенты вариации усилия и несущей способности можно выразить обратно через k_o и $k_п$, и тогда выражение *K* примет вид:

$$\overline{K} = \frac{1 + \sqrt{1 - k_0 k_п (2 - k_0)(2 - k_П)}}{[k_0(2 - k_0)]} \quad .$$

5. Сочетания прочностных свойств
Метод статистической линеаризации

При оценке несущей способности сооружений и отдельных их частей часто приходится иметь дело с многокомпонентными сложными сочетаниями материалов, совместная прочность которых не просто суммируется, а является сложной нелинейной функцией их прочностных свойств. Для примера прочность сечения железобетонной балки, определяемая в СНиП предельным моментом, воспринимаемым сечением:

$$M = R_a f_a [h_0 - R_a f_a / (2bR_{пр})],$$

где М – нелинейная функция случайных аргументов в балках и плитах: R_a – предел прочности арматуры, $R_{пр}$ – призменная прочность бетона, h_0 – глубина закладки арматуры от поверхности (в балках и плитах можно считать случайной по технологическим причинам); f_a – площадь сечения арматуры; b – ширина балки.

Сущность *метода статистической линеаризации* заключается в том, что производится замена нелинейно связанных случайных функций статистически эквивалентной линейной зависимостью. Чаще всего для практических целей статистическая эквивалентность понимается для таких с.в., которые имеют одинаковые характеристики при том же законе распределения аргумента [3]. Обычно считают, что распределение подчиняется нормальному закону. Иногда к этому имеются определенные основания, но чаще их нет, однако условно принимают закон нормальным и производят приближенный расчет [4].

Приближенно нелинейную случайную $\tilde{M}$ можно представить, отбросив нелинейные члены разложения в ряд Тейлора. В окрестности центра распределения такое допущение достаточно обоснованно даже при больших отклонениях случайных аргументов: R_a, $R_{пр}$ и h_0.

$$\tilde{M} = M(\tilde{R}_a, \tilde{R}_{пр}, \tilde{h}_0) \approx M_0 + A(\tilde{R}_a - \bar{R}_a) + B(\tilde{R}_{пр} - \bar{R}_{пр}) + C(\tilde{h}_0 - \bar{h}_0),$$

где *A, B и C – частные производные выражения M по* R_a, $R_{пр}$ и h_0 – соответственно, в центрах распределения случайных аргументов:

$$A = f_a \bar{h}_0 - \bar{R}_a f_a^2 / (b\bar{R}_{пр}),\ B = \bar{R}_a^2 f_a^2 / (2b\bar{R}_{пр}^2),\ C = \bar{R}_a f_a,$$

а $M_0 = \bar{R}_a f_a [\bar{h}_0 - \bar{R}_a f_a / (2b\bar{R}_{пр})]$.

Тогда приближенные характеристики нелинейной функции случайных аргументов:

$\bar{M} \approx M_0$ – математическое ожидание (центр распределения);

$\tilde{M} \approx A^2 \tilde{R}_a + B^2 \tilde{R}_{пр} + C^2 \tilde{h}_0$ – дисперсия;

$V_M = \sqrt{\tilde{M}} / M_0$. – изменчивость.

6. Повторные нагружения. Определение расчетной нагрузки при многократном действии

Если некоторая нагрузка многократно повторяется, то при каждом следующем повторении вероятность того, что нагрузка дважды окажется меньше некоторого ***e*** случайного значения x, равна $P_q^2(x)$, где $P_q(x)$ – вероятность для нагрузки быть меньше x в каждом случае нагружения. Вероятность же превышения x хотя бы один раз будет $1 - P_q^2(x)$.

Для n-кратного повторения интегральная кривая распределения $P_q(x)$, соответственно, возводится в n-ю степень $P_q^n(x)$, а плотность распределения вероятности будет производной от этой степенной функции:

$$p_{qn} = \frac{d}{dx} P_q^n(x) = nP_q^{n-1}(x) p_q,$$

где p_q – кривая распределения однократной случайной нагрузки.

Таким образом, для заданного уровня вероятности непревышения определенной величины q1, являющейся квантилем при однократном приложении нагрузки, квантиль qn будет увеличиваться путем переноса точки интегральной кривой распределения однократной нагрузки вправо на величину $\beta \ln n$. Здесь β – характеристика безопасности (показывает число стандартов $\sigma(S)$, укладывающихся в интервале от S до $S = \overline{S}$).

Принимая интегральную кривую распределения вероятности в виде двойного экспоненциального закона Гумбеля:

$$P_q = \exp\left[-\exp\left(\frac{a-q}{\beta}\right)\right].,$$

для n-кратного повторения интегральная кривая распределения $P_q^n(x)$ может быть получена в виде:

$$P_q^n = \exp\left[-n\exp\left(\frac{a-q}{\beta}\right)\right] = \exp\left[-\exp\left(\ln n + \frac{a-q}{\beta}\right)\right] = \exp\left[-\exp\left(\frac{a-q+\beta\ln n}{\beta}\right)\right].$$

При этом очевидно, что стандарт $\sigma(q) = .\sqrt{D(q)}$ не изменяется, и для сохранения той же обеспеченности вероятности следует расчетное значение нагрузки увеличить на $\beta \ln n$.

Из решения, расчетное значение нагрузки при однократном ее действии, обеспечивающее заданную P_q, будет:

$$q = a - \beta\ln(-\ln P_q) = q1$$

оно является квантилью двойного экспоненциального закона распределения Гумбеля.

Для n-кратного повторения нагрузки ее расчетное значение будет:

$$\text{qn} = a - \beta\ln(-\ln P_q) + \beta\ln n = a - \beta\ln\left[(-\ln P_q)/n\right].$$

7. Определение ресурса статически определимой системы при заданных параметрах случайных величин (КР)

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

1. Основанием для выполнения КР служит индивидуальная карточка-задание, выдаваемая преподавателем. Индивидуальная карточка наклеивается на титульный лист расчетно-пояснительной записки.

2. Курсовая работа выполняется в виде расчетно-пояснительной записки на листах чертежной бумаги (формат 210х297 мм), соединенных в брошюру-альбом. Оформление КР (текст, чертежи) проводится с соблюдением требований ЕСКД (Единой системы конструкторской документации, ГОСТ 2.105-68) и стандарта предприятия «Дипломные и курсовые проекты. Требования к оформлению пояснительной записки и чертежей», КИСИ, 1990.

3. Сроки выполнения КР устанавливаются учебными планами в соответствии с утвержденными рабочими программами. Текущий контроль выполнения задач и консультации по ним ведутся преподавателями кафедры.

4. Прием КР ведется индивидуально с проверкой разделов теоретических знаний и выдачей тестовых задач.

5. Компьютеры и программное обеспечение используются для самоконтроля, приобретения навыков исследовательской работы, более глубокого понимания изучаемых методов; необходимость их использования определяется преподавателем.

Рассматриваемые вопросы или этапы выполнения работы

1. Расчет ресурса отдельного элемента сооружения.
2. Распределение прочности статически определимой системы.
3. Вычисление ресурса и коэффициентов запаса.

Работа выполняется как продолжение **РГР** по теме: «Расчет статически определимых систем на случайные постоянную и подвижную нагрузки». Для справки приводим перечень параметров случайных величин, порядок и пример их получения в соответствии с методическими указаниями [7] (см. приложение 1).

Порядок выполнения РГР «Расчет статически определимых систем на случайные постоянную и подвижную нагрузки»

1. Провести кинематический анализ и построить поэтажную схему заданной системы.
2. Построить линии влияния (Л.В.) внутренних усилий *M, Q* в заданном сечении ***к*** (соответствует К в Приложении 1).
3. Используя нормальный закон распределения, смоделировать случайные величины в Excel-таблицах для всех заданных нагрузок (постоянных и временных) в заданных пределах их изменения.
4. Вычислить характеристики распределения случайных нагрузок и доверительные интервалы обнаружения их М.О. с вероятностью 0.95–0.99 в Excel-таблицах.
5. Определить расчетные сочетания нагрузок.
6. Для невыгоднейших сочетаний постоянной и временных нагрузок определить диапазоны изменения внутренних усилий *M, Q* в заданном сечении по Л.В..
7. Используя нормальный закон распределения, смоделировать случайные величины в Excel-таблицах для *M, Q* в полученных пределах их изменения.
8. Вычислить характеристики распределения случайных *M, Q* и доверительные интервалы обнаружения их М.О. с вероятностью 0.95– 0.99 в Excel-таблицах.
9. Подобрать параметры сечения по найденным значениям М.О. *M, Q*.
10. Для заданных диапазонов пределов прочности бетона, стали и глубины закладки арматуры определить вероятностные характеристики распределения предельных *M, Q* с вероятностью 0.95–0.99 в Excel-таблицах.
11. Определить характеристики резерва и коэффициенты запаса прочности.

Результаты расчета от действия случайных подвижных и постоянных нагрузок используются как исходные данные для расчета на повторные статические случайные нагрузки с полученными статистическими параметрами.

Резерв прочности в сечении *k:* $\bar{S} = \bar{R} - \bar{F}$ (***k*** соответствует К в приложении 1) по моменту $\bar{S}_M =$ **19964 - 17669,73 = 2294кНм** и по поперечной силе $\bar{S}_Q$ =**3412 - 2236,947 =1175кН** (приложение 1 п.11)

Дальнейшие расчеты ресурса проводятся как определение числа повторных нагружений до исчерпания полученного резерва прочности с заданной надежностью неразрушения статически определимой системы. В работах [8] и [9] на основе положений [3] приводятся алгоритмы решения этой задачи.

Дальнейшие расчеты проводятся в следующем порядке:

12. Для невыгоднейшего сочетания постоянной и временных нагрузок в условиях повторных нагружений определить зависимость и построить график изменения характеристики безопасности β(N) от числа повторений при сохранении доверительной вероятности 0.99 обнаружения максимальных M и Q в сечении *к* (по результатам пункта 8 и таблиц 6,7 в Excel-таблицах RGR 15,04,2015.xlsx (стр. 8 и 9).

При однократном приложении случайных нагрузок доверительный интервал при доверительной вероятности 0.99 обнаружения максимальных M и Q в сечении *к* (по результатам пункта 8 и таблиц 6,7 в Excel-таблицах RGR 15,04,2015.xlsx (стр. 8 и 9) получается при нормальном распределении с помощью таблиц функции Лапласа (приложение 2) как значение β(1) = x аргумента Φ(x) = 0.99 – 0.5 = 0.49 и равно 2.33.

При повторных приложениях этих же нагрузок для сохранения доверительной вероятности 0.99 доверительный интервал увеличивается и значение β(N) должно определяться при вероятности:

$$P = \sqrt[N]{0.99} = \sqrt[N]{1-0.01} \approx 1 - 0.01/N.$$

Полагая Φ(β) = P – 0.5 = 0.5 – 0.01/N, по таблицам функции Лапласа (приложение 2) получаем β(N) для N = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000.

N	1	10	100	1000	10000	100000
$\Phi(\beta)$	0.49	0.499	0.4999	0.49999	0.499999	0.4999999
$\beta(N)$	2.33	3.15	3.77	4.15	5.00	5.00

Значения $\beta(N)$ для произвольных значений можно получить и в Excel-таблицах [11] Определение ресурса статически определимой системы3.xlsx .

Характеристика безопасности для данного числа повторений

N	1	10	100	1000	10000	100000
Ф(β)	0,49	0,499	0,4999	0,5	0,5	0,5
β(N)	2,326	3,09	3,719	4,265	4,753	5,199
lq(N)	0	1	2	3	4	5

Представим в виде графика $\beta(\lg N)$ (рис. 1).

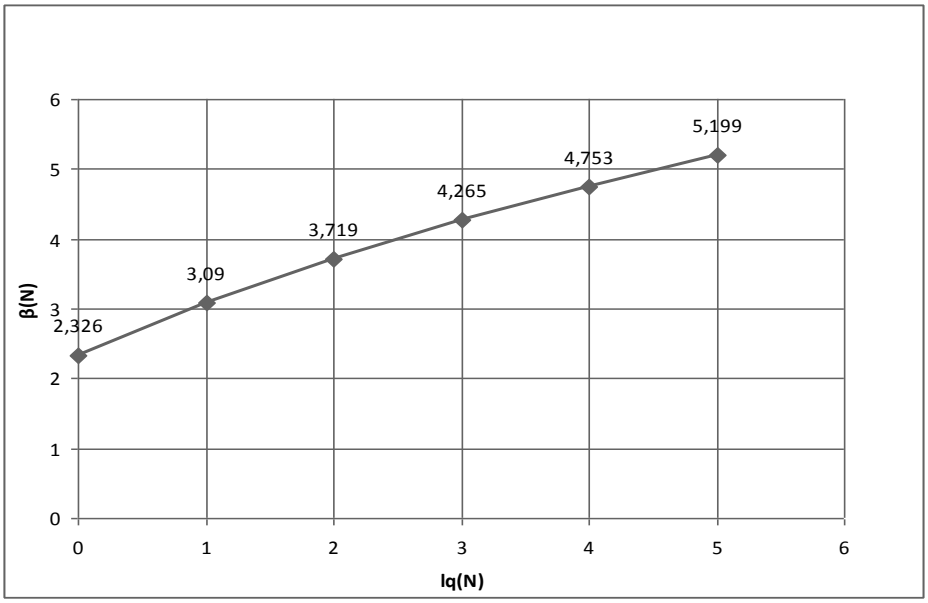


Рис. 1. Характеристика безопасности для данного числа повторений

13. Определить M(N) и Q(N) в сечении *к* и построить их графики при повторении нагрузки от *lgN = 1,2,3,4,5.*

$M_{k\max}(\mathrm{N}) = \overline{M}_k + \beta(N)\sigma_{Mk}/\sqrt{n}$, $Q_{k\max}(\mathrm{N}) = \overline{Q}_k + \beta(N)\sigma_{Qk}/\sqrt{n}$, здесь n – число случайных величин при моделировании их в заданных интервалах.

Стандарты σ M и Q в сечении *к* (по результатам пункта 8 и таблиц 6,7 в Excel-таблицах RGR 15,04,2015.xlsx (стр. 8 и 9) при моделировании их в заданных интервалах. Результаты можно получить в Excel-таблицах Определение ресурса статически определимой системы3.xlsx и представить в виде графиков $M_{k\max}(\lg N)$ и $Q_{k\max}(\lg N)$ (рис. 2 и рис. 3).

Расчетные M и Q для данного числа повторений нагрузки

N	1	10	100	1000	10000	100000
Qkmax(N)	2424,6	2486,2	2537	2581	2620,4	2656,4
Mkmax(N)	19460	20047	20531	20952	21327	21670

lq(N)	0	1	2	3	4	5
Mkmax(N)	19460	20047	20531	20952	21327	21670

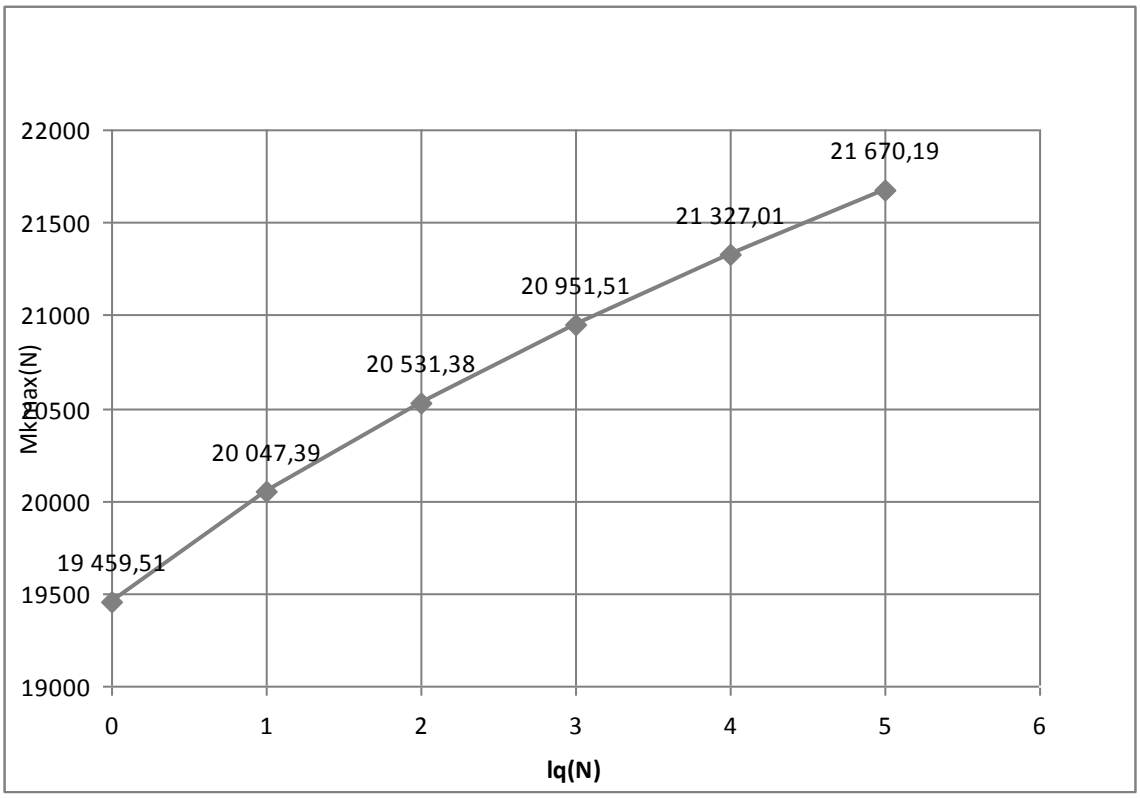


Рис. 2. График $M_{k\max}(\lg N)$

lq(N)	0	1	2	3	4	5
Qkmax(N)	2424,6	2486,2	2537	2581	2620,4	2656,4

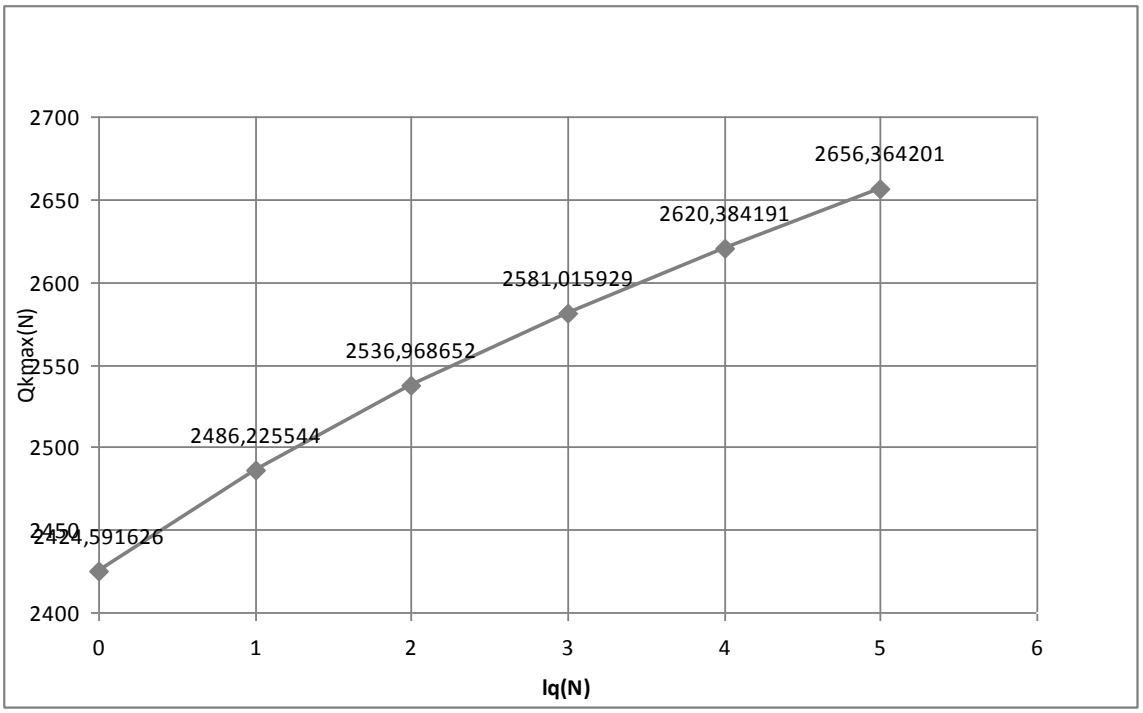


Рис. 3. График $Q_{k\max}(\lg N)$

14. Определить и построить графики изменения коэффициента перегрузки $k_п$ (N) для M и Q в сечении *к* при повторении нагрузки от *lgN = 1,2,3,4,5.*

$k_{пMk}$ (N) = 1+ $\beta(N)V_{Mk}$, $k_{пQk}(N) = 1+\beta(N)V_{QK}$.

Коэффициенты перегрузки

N	1	10	100	1000	10000	100000
kпMk(N)	1,5548	1,737	1,887	2,0173	2,1337	2,2401
kпQk(N)	1,4595	1,6104	1,7346	1,8425	1,9389	2,027

Коэффициенты вариации (изменчивости) ***V*** с.в. (Mk) и (Qk) (по результатам пункта 8):

$V_{Mk} = \sqrt{M_k / \overline{M}_k^{\,2}}$ = $\sigma(Mk)/\overline{M}_k$ = **4214,545/17669,73 = 0,2385**

и, аналогично,

$V_{Qk} = \sqrt{Q_k / \overline{Q}_k^{\,2}}$ = $\sigma(Qk)/\overline{Q}_k$ = **441,8624/2236,947 = 0,1975,**

где σ – стандарт, а $\overline{M}_k$ и $\overline{Q}_k$ – М.О. Mk и Qk.

Результаты можно получить и в Excel-таблицах

Определение ресурса статически определимой системы3.xlsx

и представить в виде графиков $k_{пMk}$ $(\lg N)$ и $k_{пQk}$ $(\lg N)$ (рис. 4 и рис. 5).

lq(N)	0	1	2	3	4	5
kпMk(N)	1,5548	1,737	1,887	2,0173	2,1337	2,2401

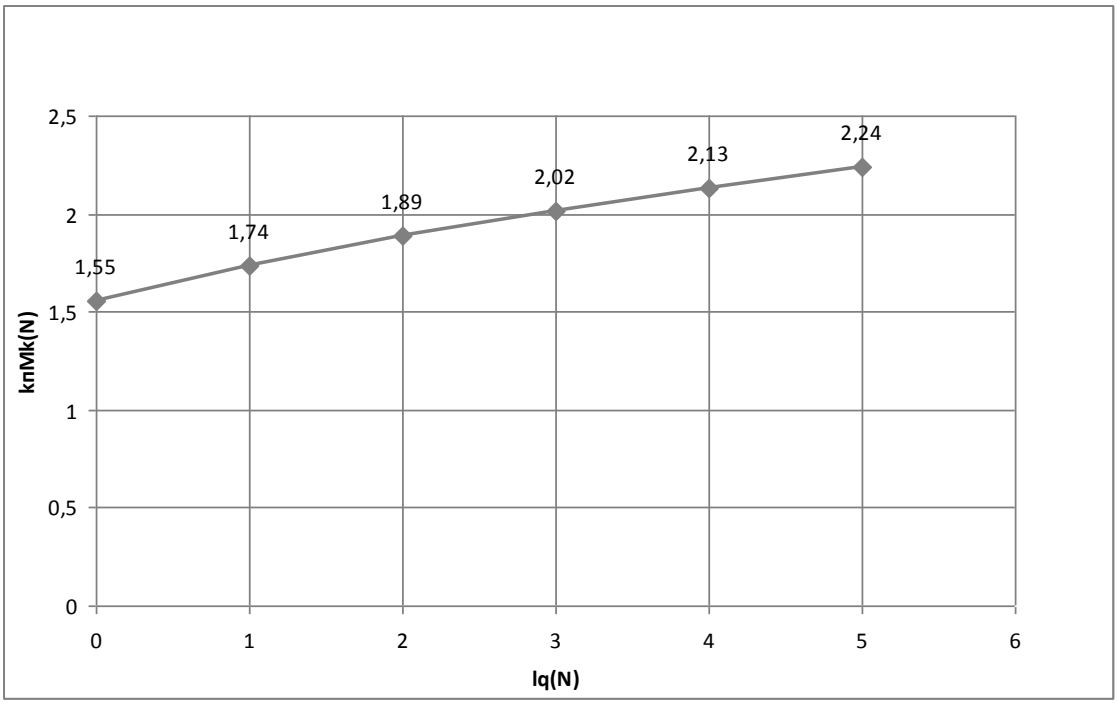


Рис. 4. График $k_{\text{пMk}}$ $(\lg N)$

lq(N)	0	1	2	3	4	5
kпQk(N)	1,4595	1,6104	1,7346	1,8425	1,9389	2,027

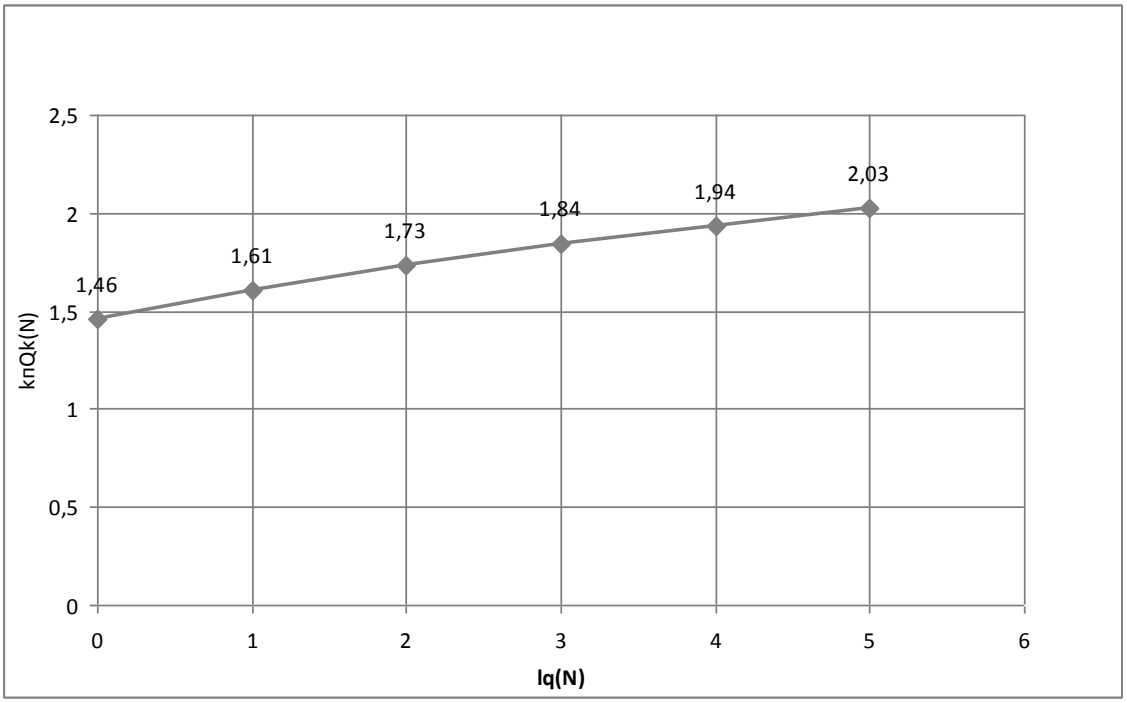


Рис. 5. График $k_{\text{пQk}}$ $(\lg N)$

15. Определить и построить графики резерва прочности $\overline{S} = \overline{R} - \overline{F}$ при повторении нагрузки от *lgN = 1,2,3,4,5* при несущей способности $\overline{M} \approx M_0$ **= 19964кНм** и $Q \le 0{,}6R_{b,cut}bh_d$ **= 3412 кН,** полученной в пункте 11 в Excel-таблицах (стр. 11–13 RGR 15,04,2015.xlsx).

$\bar{S}_{M\,k} = \mathbf{19964} - M_{k\,\max}(\lg N)$,

$\bar{S}_{Q_k} = \mathbf{3412} - Q_{k\,\max}(\lg N)$.

Резервы прочности по Q и M

N	1	10	100	1000	10000	100000
SMk(N)	505,27	-82,61	-566,6	-986,7	-1362	-1705
SQk(N)	987,41	925,77	875,03	830,98	791,62	755,64

Результаты можно получить и в Excel-таблицах

Определение ресурса статически определимой системы3.xlsx

и представить в виде графиков $\bar{S}_{\mathrm{Mk}}\ (\lg N)$ и $\bar{S}_{Qk}\ (\lg N)$ (рис. 6 и рис. 7).

lg(N)	0	1	2	3	4	5
SMk(N)	505,27	**-82,61**	-566,6	-986,7	-1362	-1705

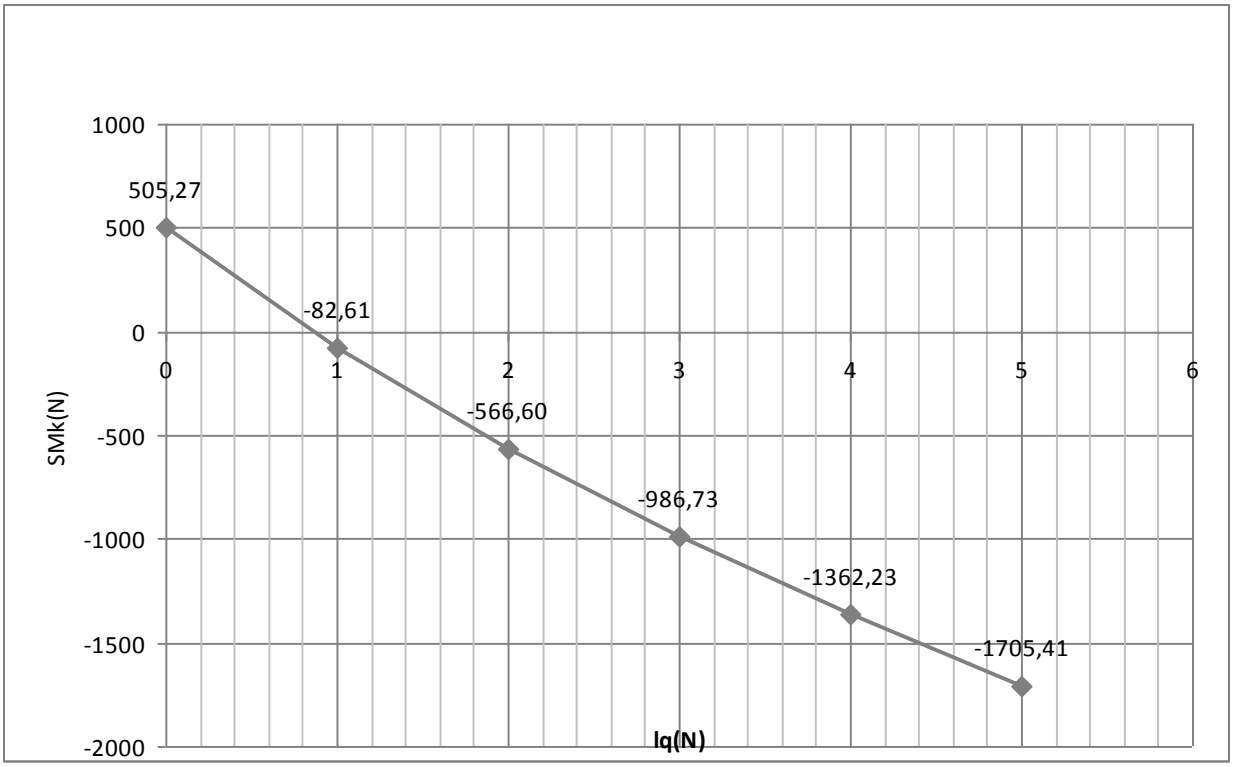


Рис. 6. График $\bar{S}_{\mathrm{Mk}}\ (\lg N)$

lq(N)	0	1	2	3	4	5
k-Qk(N)	1,5845	1,7263	1,8467	1,9529	2,0486	2,1367

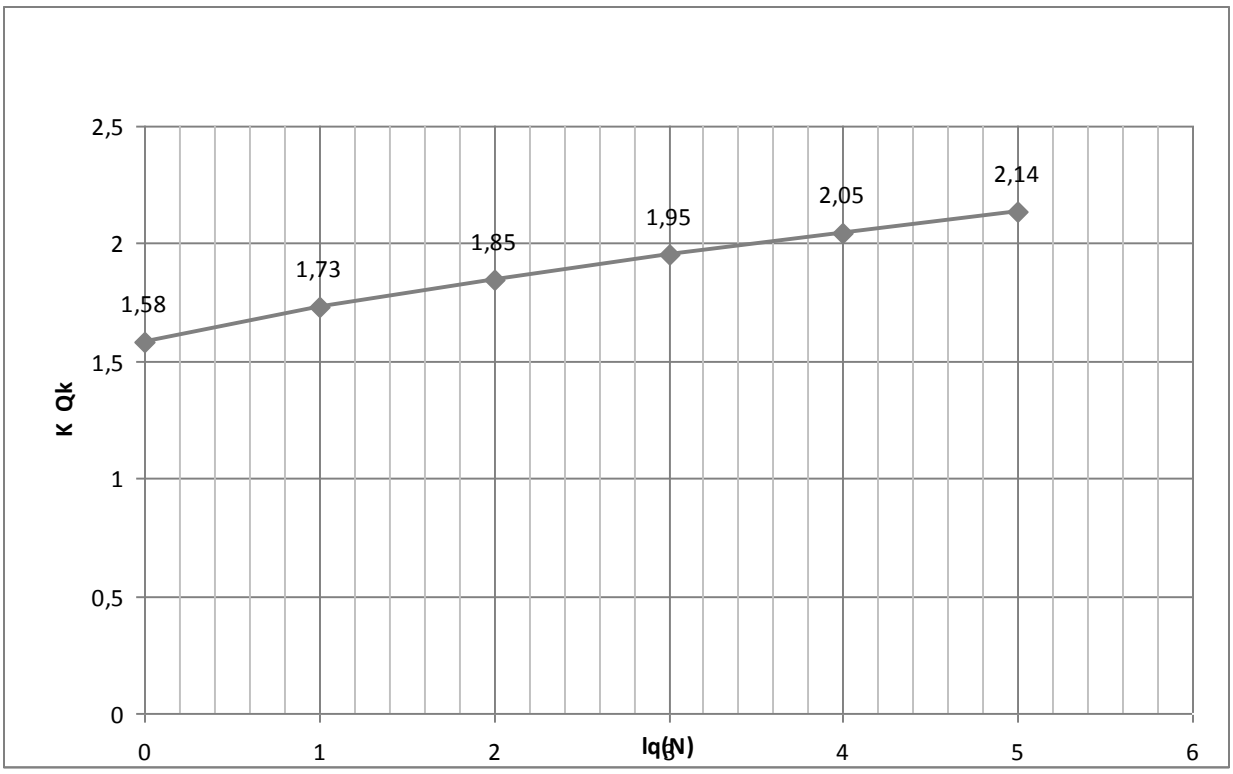


Рис. 7. График $\overline{S}_{Qk}\ (\lg N)$

16. Вычислить значения коэффициента запаса прочности для M и Q в сечении *к*: $\overline{K} = \dfrac{1+\sqrt{1-k_0 k_{\text{п}}(2-k_0)(2-k_{\Pi})}}{[k_0(2-k_0)]}$ при повторении нагрузки от *lgN* = *1,2,3,4,5*, принимая k_0 постоянным, полученным в пункте 11, и построить графики $\overline{K}(\lg N)$ для M и Q в сечении *к*.

Коэффициенты запаса по Q и M

N	1	10	100	1000	10000	100000
k-Mk(N)	1,5561	1,7383	1,8883	2,0185	2,1349	2,2413
k-Qk(N)	1,5845	1,7263	1,8467	1,9529	2,0486	2,1367

Результаты можно получить в Excel-таблицах

Определение ресурса статически определимой системы3.xlsx

и представить в виде графиков $\overline{K}_{\text{Mk}}\ (\lg N)$ и $\overline{K}_{Qk}\ (\lg N)$ (рис. 8 и рис. 9).

lq(N)	0	1	2	3	4	5
k-Mk(N)	1,5561	1,7383	1,8883	2,0185	2,1349	2,2413

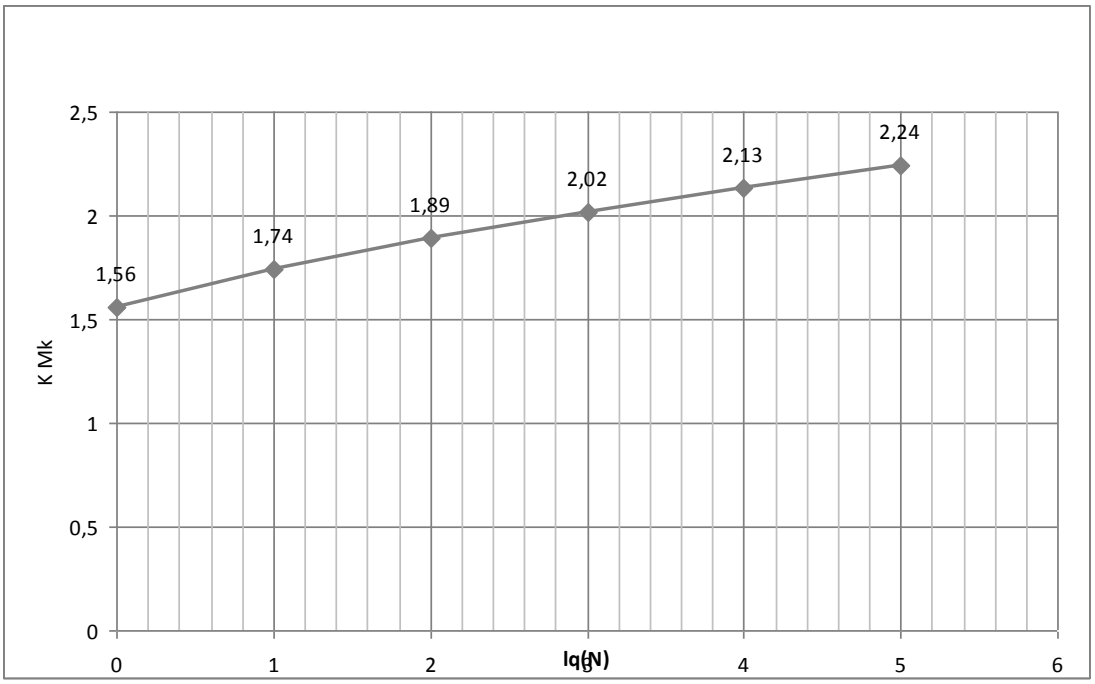


Рис. 8. График $\overline{K}_{\text{Mk}}$ $(\lg N)$

lq(N)	0	1	2	3	4	5
k-Qk(N)	1,5845	1,7263	1,8467	1,9529	2,0486	2,1367

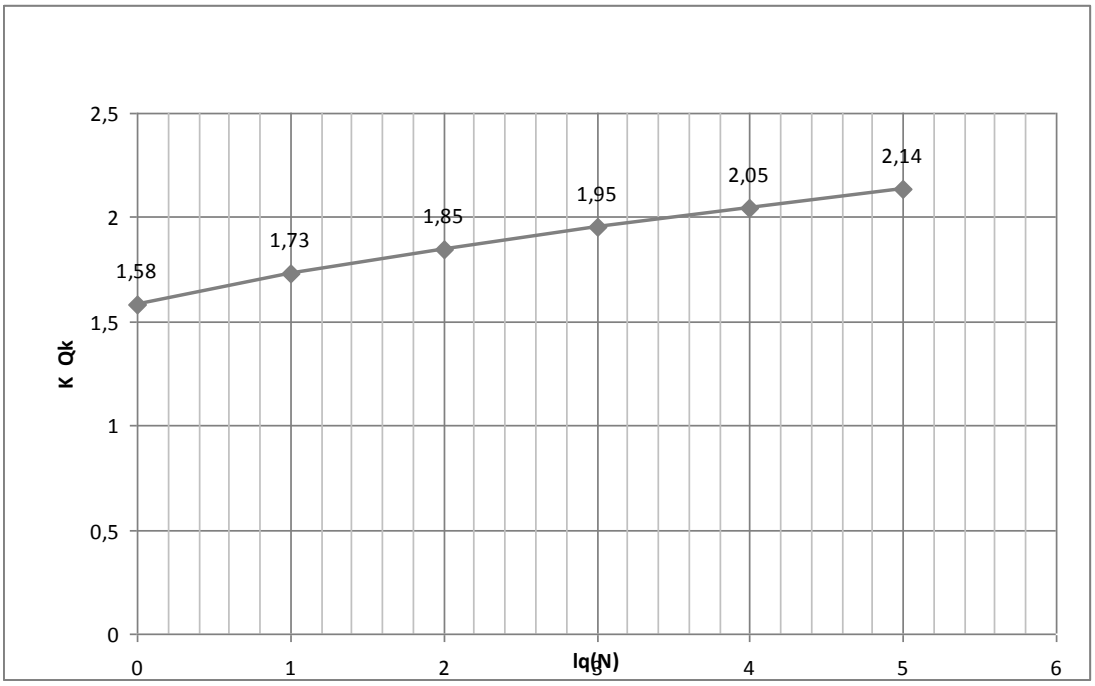


Рис. 9. График $\overline{K}_{Qk}$ $(\lg N)$

17. Считая рассчитываемую систему равнопрочной, определить зависимость и построить график изменения характеристики безопасности β(ns) от числа равнонагруженных элементов по M и Q в опасных сечениях при сохранении доверительной вероятности 0.99 обнаружения предельной несущей способности по M и Q (по результатам пунктов 9, 10 и таблиц 8,9,10 в Excel-

таблицах (стр. 11–13 RGR 15,04,2015.xlsx). Доверительный интервал увеличивается, и значение β(ns) должно определяться при вероятности:

$$P = \sqrt[ns]{0.99} = \sqrt[ns]{1-0.01} \approx 1-0.01/ns.$$

Полагая Φ(β) = P – 0.5 = 0.5 – 0.01/ns, по таблицам функции Лапласа (приложение 2) получаем β(ns) для ns = 1, 5, 10, 15, 20, 25.

Характеристика безопасности для данного числа опасных сечений:

Ns	1	5	10	15	20	25
Φ(β)	0,49	0,498	0,499	0,4993	0,4995	0,4996
β(ns)	2,326	2,878	3,09	3,209	3,291	3,353

Значения β(ns) для произвольных значений можно получить в Excel-таблицах Определение ресурса статически определимой системы3.xlsx

β(ns) для ns = 1, 5, 10, 15, 20, n.

ns	1	5	10	15	20	25
$\Phi(\beta)$	0.49	0.498	0.499	0.4993	0.4995	0.4996
$\beta(ns)$	2.33	2.88	3.18	3.2	3.27	3.33

и представить в виде графика β(ns) (рис. 10).

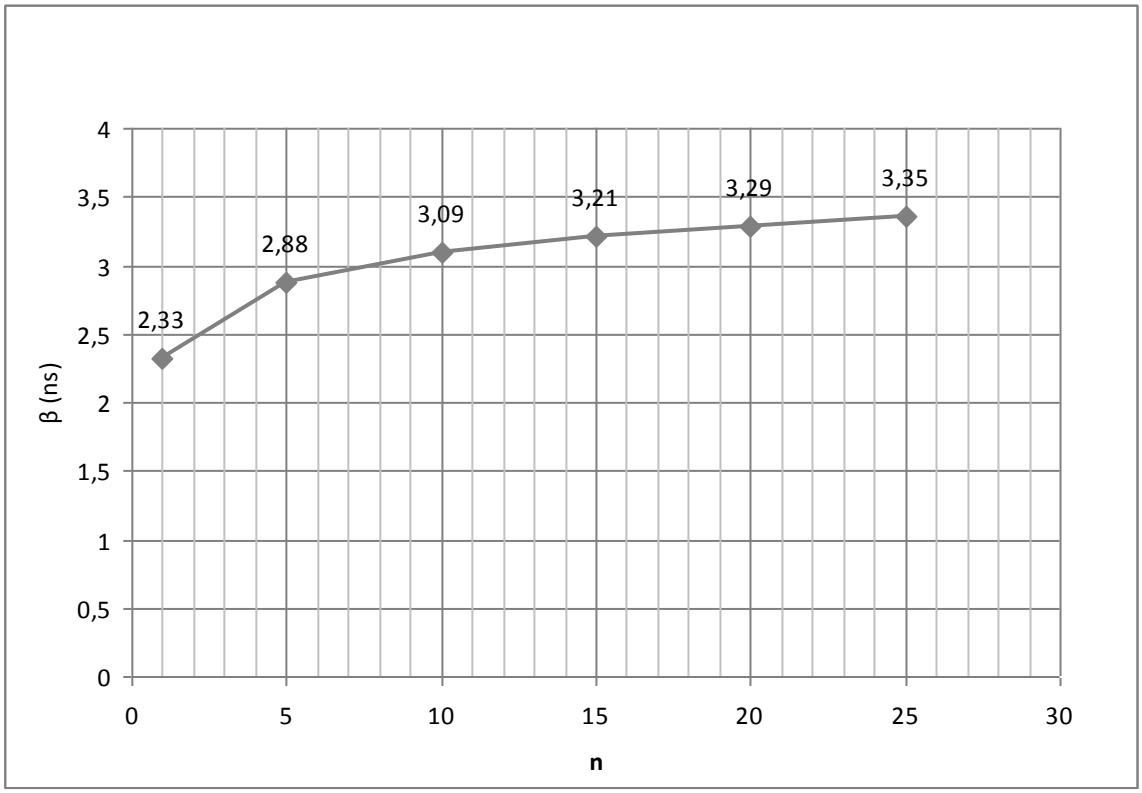


Рис. 10. График β(ns)

18. Определить и построить графики изменения предельной несущей способности по M(ns) и Q(ns) зависимости от числа опасных сечений по рассчитываемой схеме.

При несущей способности $\overline{M} \approx M_0$ **= 19964кНм** и $Q \le 0{,}6R_{b,cut}bh_d$ **= 3412 кН,** полученной в пункте 11 в Excel-таблицах (стр. 11–13 RGR 15,04,2015.xlsx).

Предельная несущая способность по M(ns) и по Q(ns) в зависимости от числа опасных сечений:

M(ns) = $\overline{M} - \beta(ns)\sigma_M / \sqrt{n}$, Q(ns) = $\overline{Q} - \beta(ns)\sigma_Q \big/ \sqrt{n}$,

здесь n – число случайных величин при моделировании их в заданных интервалах.

ns	1	5	10	15	20	25
M(ns)	**18175**	**17750**	17587	17496	17432	17385
Q(ns)	3224,4	3179,8	3162,7	3153,1	3146,5	3141,5

Представим их в виде графиков M(ns) и Q(ns) (рис. 11,12).

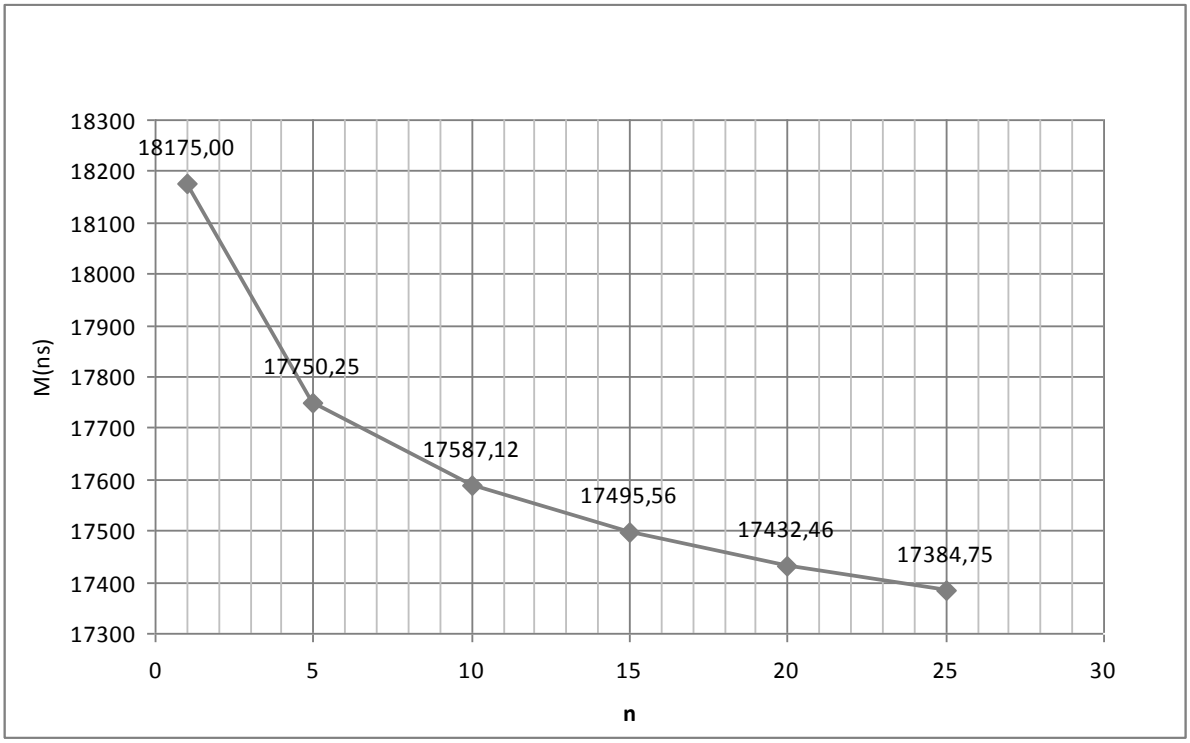


Рис. 11. Предельная несущая способность по M(ns)

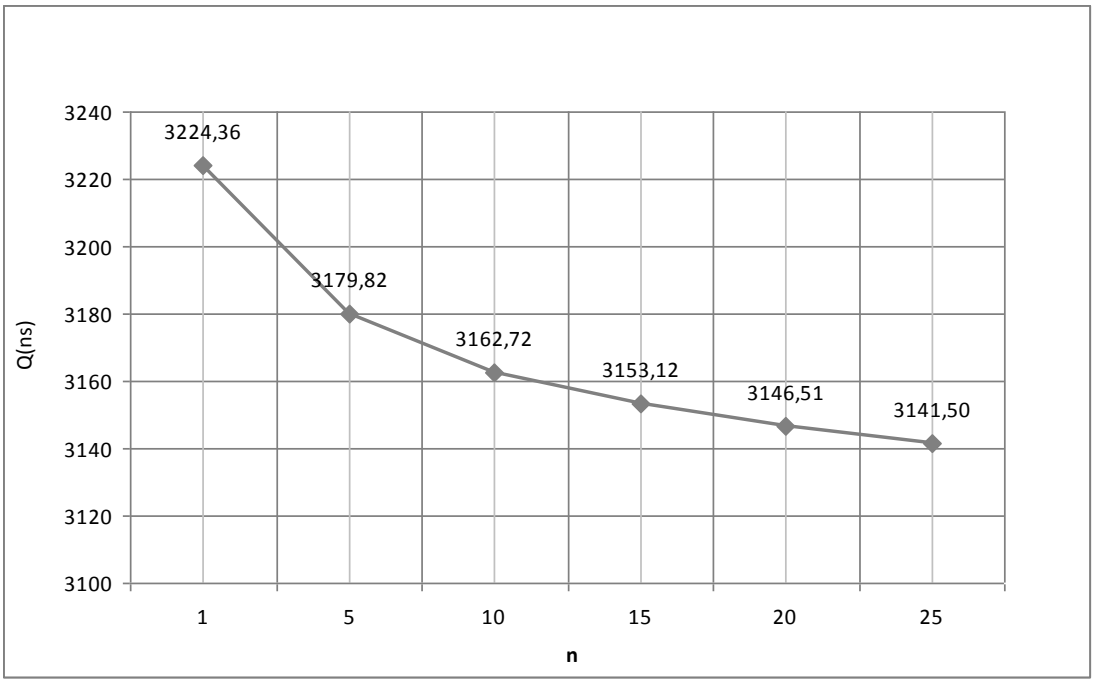


Рис. 12. Предельная несущая способность по Q(ns)

19. Построить графики (рис.13,14) изменения коэффициента однородности k_0M (ns) = $1-\beta(ns)V(M_{k\text{пред}})$, и k_0Q (ns) = $1-\beta(ns)V(Q_{k\text{пред}})$, считая вариативности $V_{M\text{кппре}} = \sqrt{M}/M_{0.}$ и $V(Q_{k\text{пред}}) = \sigma(Q)/\overline{Q}$ (изменчивости, полученные в пункте 11, независимыми от числа сечений).

ns	1	5	10	15	20	25
k_oM	0,9754	0,9696	0,9674	0,9661	0,9652	0,9646
k_oQ	0,772	0,7179	0,6971	0,6854	0,6774	0,6713

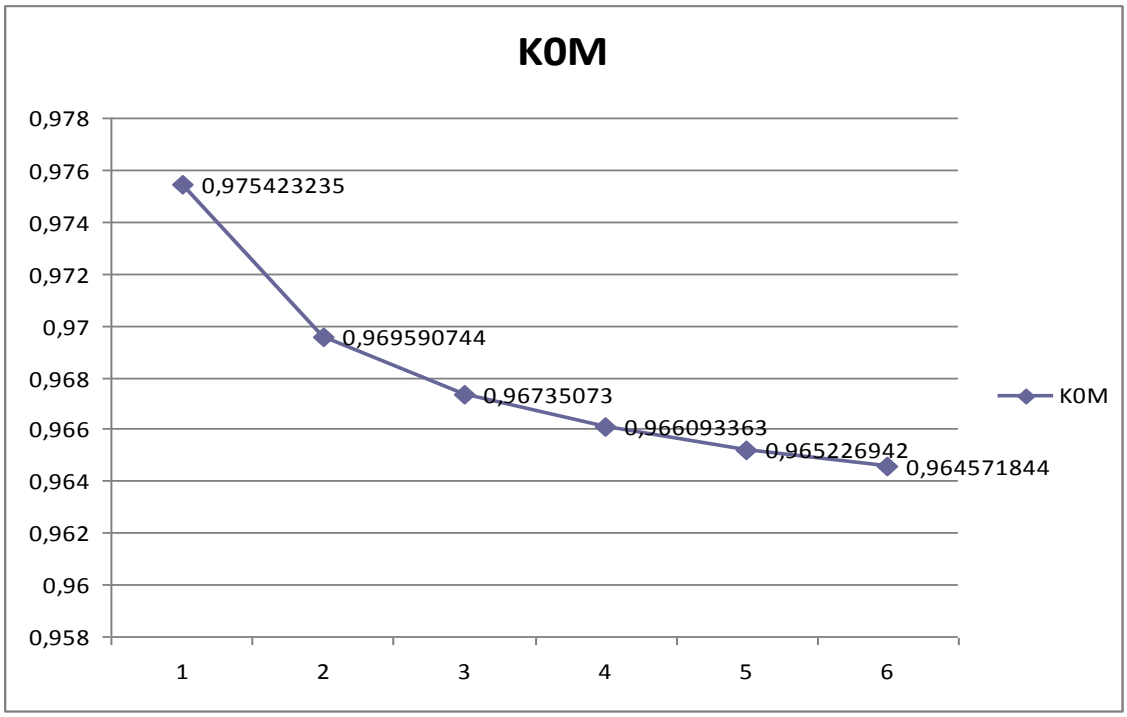


Рис. 13. Коэффициент однородности k_0M (ns)

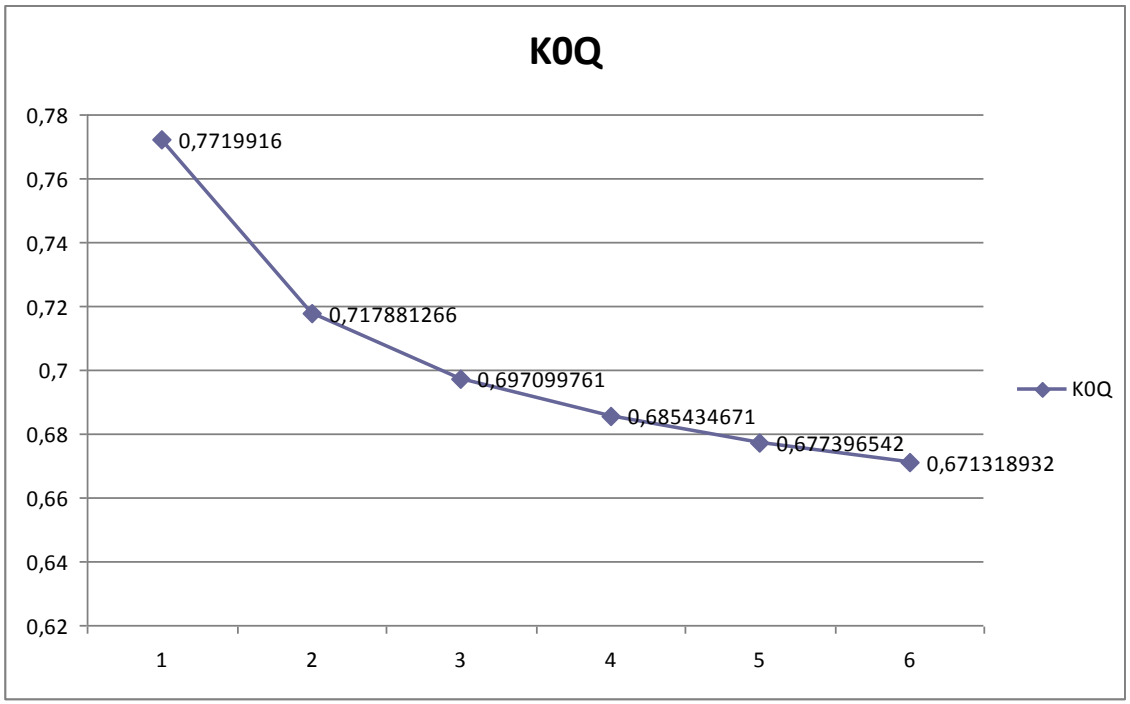


Рис. 14. Коэффициент однородности k_0Q(ns)

20. Построить номограммы резерва прочности для значений, полученных в пункте 15 с учетом изменений предельной несущей способности по M(ns) и Q(ns), полученных в пункте 18.

Построение области номограмм резерва прочности (рис.15)

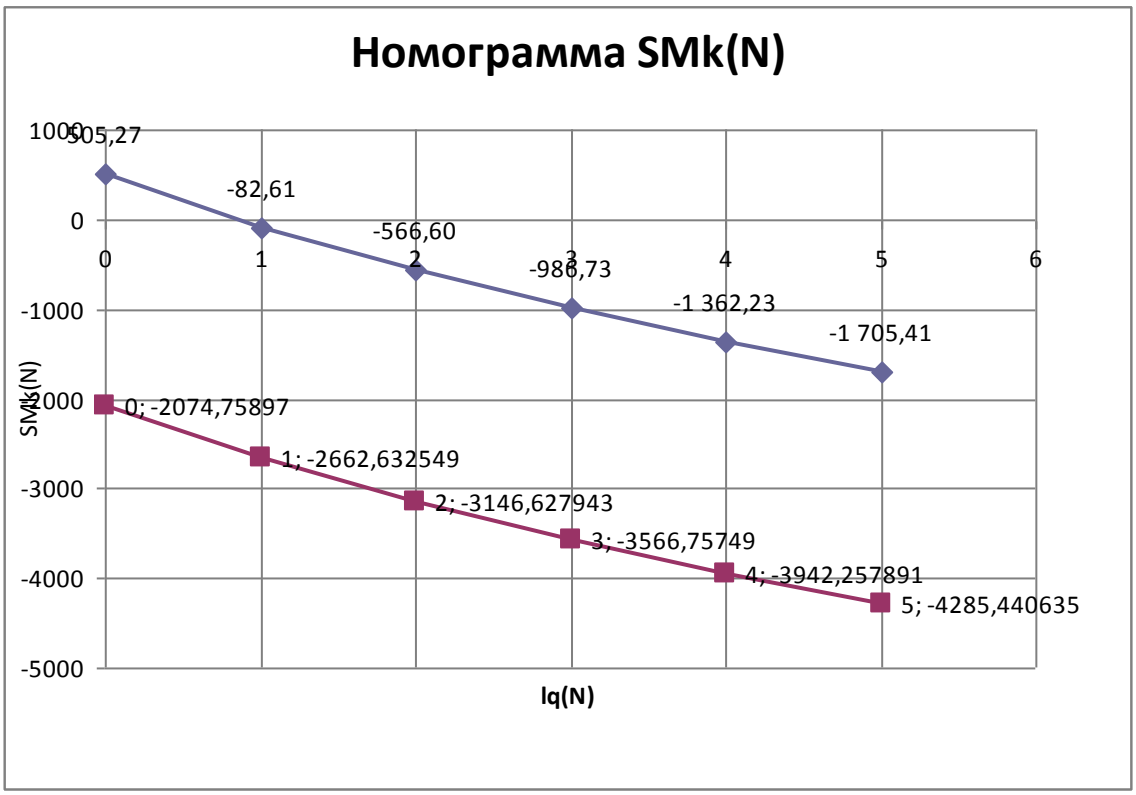
lq(N)	0	1	2	3	4	5
SMk(N), ns=1	**505,27**	-82,61	-566,6	-986,7	-1362	-1705
SMk(N), ns=25	-2075	-2663	-3147	-3567	-3942	-4285
SQk(N), ns=1	987,41	925,77	875,03	830,98	791,62	755,64
SQk(N), ns=25	716,91	655,28	604,54	560,49	521,12	485,14

Сравнивая резерв одного опасного сечения и потерю несущей способности при числе опасных сечений ns=5 по Мк (рис. 11) (18175- 17750 = 425 ≤ **505,27=** SMk(N=1), ns=1), можно сделать вывод, что при SMk(N=1), ns=5 резерв будет положительным (**505,27** – 425 = 80,27). Это означает, что при однократном цикле (N=1) приложения нагрузки (со статистикой n = 30 нормального распределения по Гауссу) с вероятностью 0.99, разрушения не будет, если число опасных сечений не превышает 7.

$$ns = 5 + 80.27/(17750 – 17587)/5 \approx 7.$$

Сравнивая резерв одного опасного сечения SMk(N=1), ns=1 и SMk(N =10), ns=1, можно прогнозировать с вероятностью 0.99 неразрушения

N = 505,27/(505,27 + 82,61)/10 ≈ 8 повторений циклов приложения нагрузки (со статистикой n = 30 нормального распределения по Гауссу).



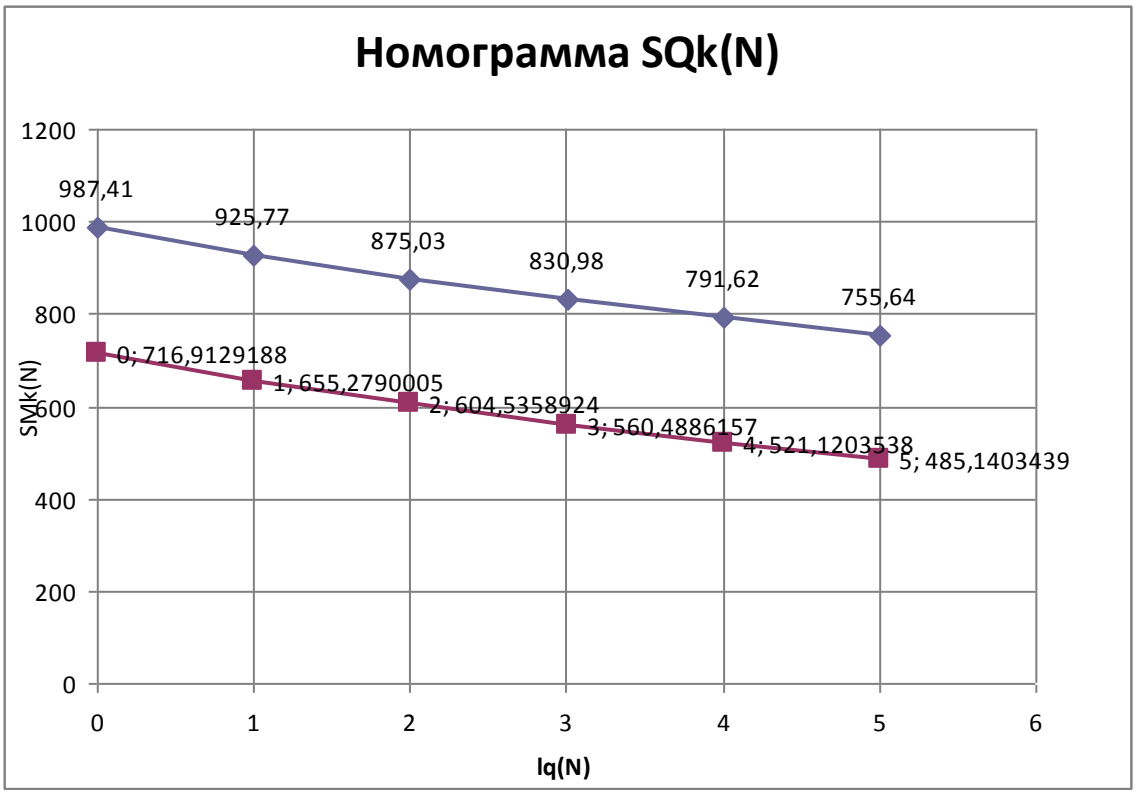


Рис. 15. Области номограмм резерва прочности SMk(N, ns) и SQk(N, ns)

21. Построить номограммы коэффициента запаса прочности для значений, полученных в п. 16 с учетом изменения коэффициентов однородности k_0M(ns) = $1-\beta(ns)V(M_{k\text{пред}})$, и k_0Q(ns) = $1-\beta(ns)V(Q_{k\text{пред}})$, полученных в пункте 19.

$$\overline{K}(ns,\lg N)=\frac{1+\sqrt{1-k_0k_{\text{п}}(2-k_0)(2-k_{\Pi})}}{[k_0(2-k_0)]}$$

Построение номограмм коэффициентов запаса $\overline{K}(ns,\lg N)$

lg(N)	0	1	2	3	4	5
k-Mk(N), ns=1	1,5561	1,7383	1,8883	2,0185	2,1349	2,2413
k-Mk(N), ns=25	1,5575	1,7396	1,8896	2,0198	2,1362	2,2426
k-Qk(N), ns=1	1,5845	1,7263	1,8467	1,9529	2,0486	2,1367
k-Qk(N), ns=25	1,7314	1,8651	1,9818	2,0863	2,1813	2,2692

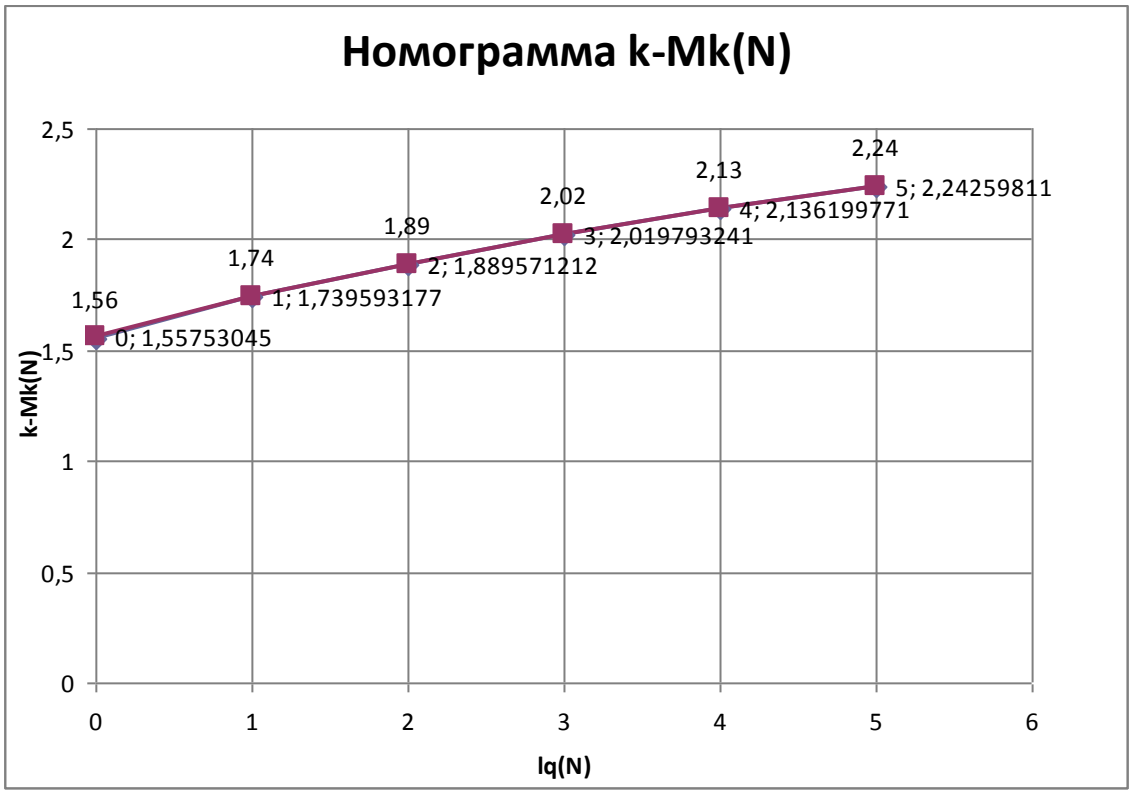


Рис. 16. Номограмма коэффициента запаса k-Mk(lgN, ns = $1\div25$)

Номограммы ns = $1\div25$ практически сливаются из за малой вариативности $V(M_{k\text{пред}})$.

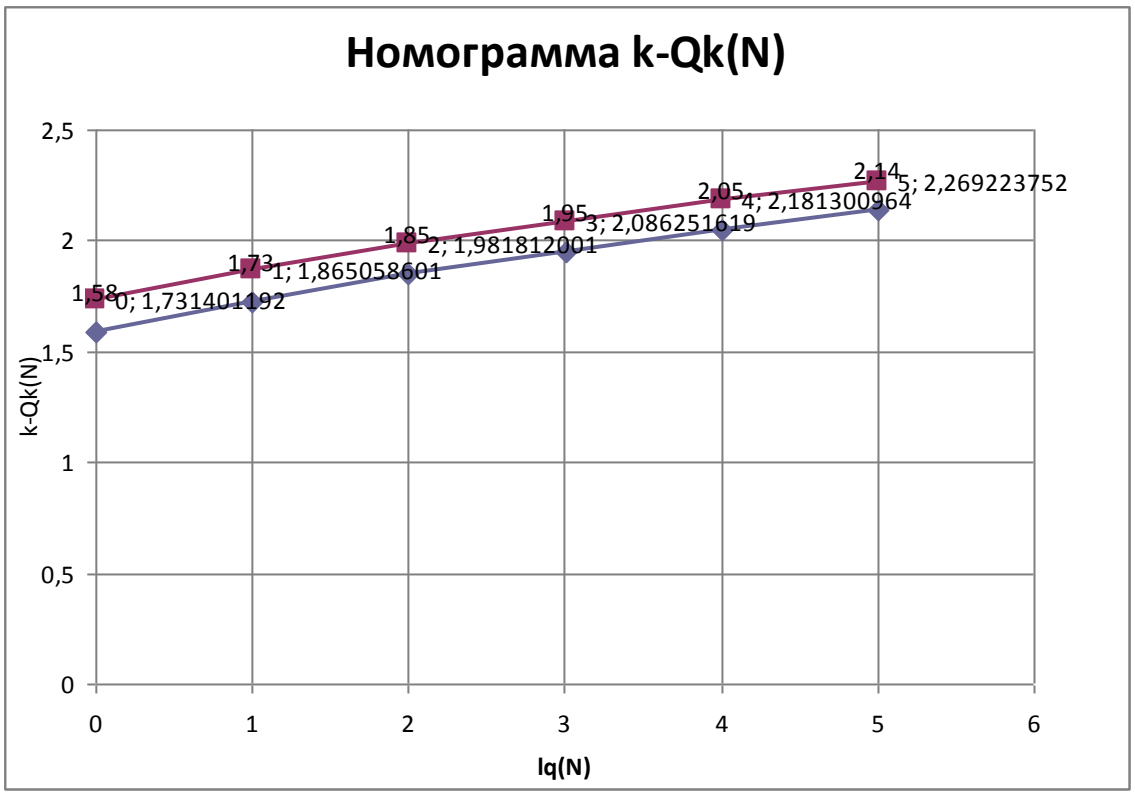


Рис. 17. Номограмма коэффициента запаса k-Qk(lgN, ns==1÷25)

22. Выводы и рекомендации

Для увеличения ресурса конструкции необходимо увеличение резерва прочности сечения по Мк за счет армирования. Увеличение резерва на 1705 кНм обеспечивает 0.99 вероятности неразрушения до 10^5 повторений N.

При полученных значениях коэффициентов перегрузки и однородности для сохранения уровня надежности при прочих равных условиях увеличение коэффициентов запаса прочности сечения по Мк до 2.24 и Qk до 2.27 Qk обеспечивает 0.99 вероятности неразрушения до 10^5 повторений N.

Контрольные вопросы к защите РГР

«Расчет статически определимых систем на случайные постоянную и подвижную нагрузки»

1. Что такое «случайная величина»?
2. Как представляется реализация случайной величины?
3. Какими параметрами характеризуются реализации случайной величиины?
4. Что такое «математическое ожидание»?
5. Что такое «дисперсия случайной величины»?
6. Что показывает кривая распределения плотности вероятности?
7. Квантили вероятности Рх.
8. Что такое «надежность как вероятность»?
9. Как определяется резерв прочности?
10. Что такое «коэффициент однородности»?
11. Что такое «коэффициент перегрузки»?
12. Как влияют сочетания случайных нагрузок и прочностных свойств на коэффициент перегрузки и коэффициент однородности?
13. Метод статистической линеаризации.
14. Корреляционная функция.
15. Что такое «стационарная случайная функция»?
16. Что такое «мера надежности»?
17. Что такое «коэффициент запаса» и «нормативный коэффициент запаса»?

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ НА СЛУЧАЙНЫЕ ПОСТОЯННУЮ И ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКИ

(Пример расчета)

Последовательность расчета подобных систем проследим на примере составной системы (рис. П1):

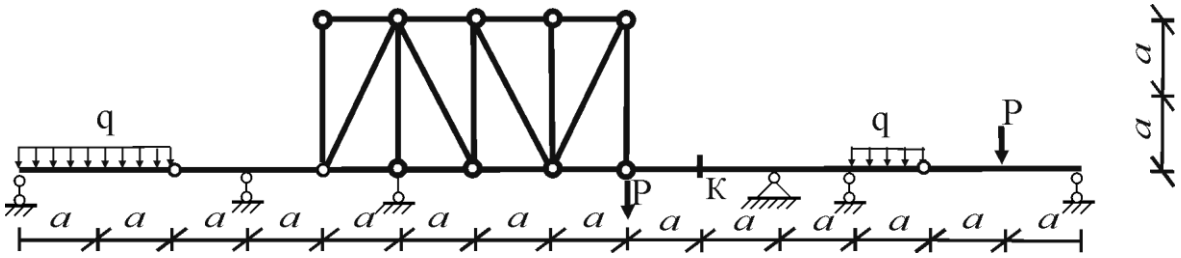


Рис. П1

Исходные данные: *а=10м.*
Нагрузки подвижные (временные).
Случай 1: q +P1 (А-8 qmin = 8кН/м, А-11 qmax = 11кН/м, P1 = 110кН, *в1=1,5м).*
Случай 2: НК – 800 кН тяжелая техника (4*200кН с шагом *в2= 1,2м).*
Случай 3: НК – 600 кН гусеничная техника (600кН на длине *в3=5м).*
Нагрузки неподвижные (постоянные).
Собственный вес (покрытие, конструкция и оборудование):
qпост (от 60кН/м до 70кН/м).

1. Провести кинематический анализ и построить поэтажную схему заданной системы (стр. 16–17).

Кинематический анализ

Система (рис. П1) состоит из фермы, представляющей собой геометрически неизменяемую конструкцию (*Д = 1*), и четырех балок (*Д = 4*), последовательно соединенных четырьмя простыми шарнирами (*Ш = 4*) и опирающихся на одну неподвижную ($C_{оп} = 2$) и пять подвижных ($C_{оп} = 1$) опор.

а) Количественная оценка неизменяемости системы

Определим число степеней свободы *W:*

$$W = 3Д – 2Ш – C_{оп} = 3·5-2·4 – 7 = 0.$$

Необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости выполняется.

б) Качественная оценка неизменяемости системы

Сборку и построение этажной схемы (рис. П2) проводим методом триад, начиная с диска V, последовательно присоединяя к ней диски III, II и присоединяя диск *IV*.

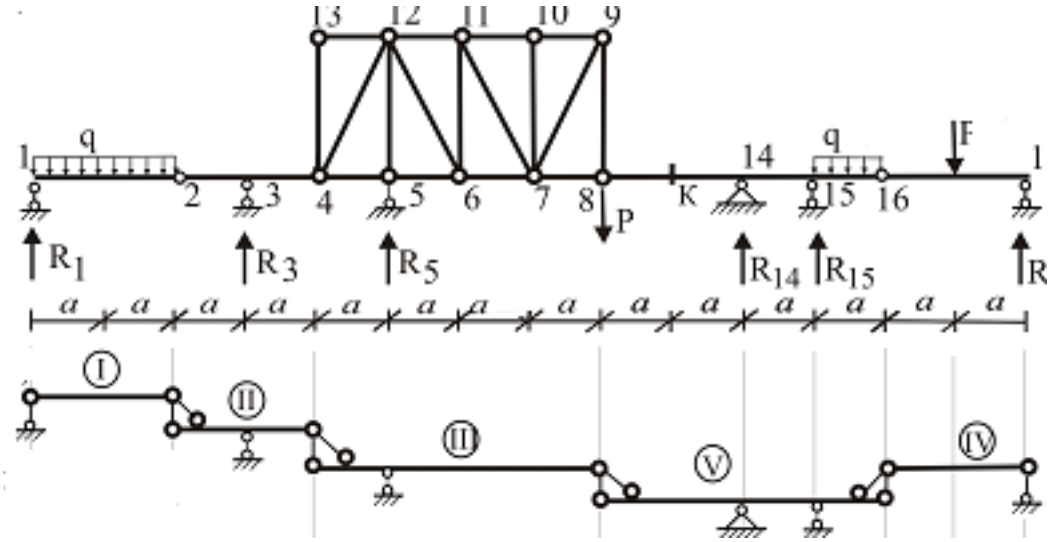


Рис. П2

2. Построить линии влияния (Л.В.) внутренних усилий *M, Q* в заданном сечении *к*.

Построение линий влияния опорных реакций и усилий M_k, Q_k

Статическим методом строим линии влияния всех опорных реакций и внутренних усилий *M* и *Q* в заданном сечении *К* составной системы (рис. П1).

<u>а) Линии влияния опорных реакций</u>

Начнем с главной балки (балка V на рис. П2).

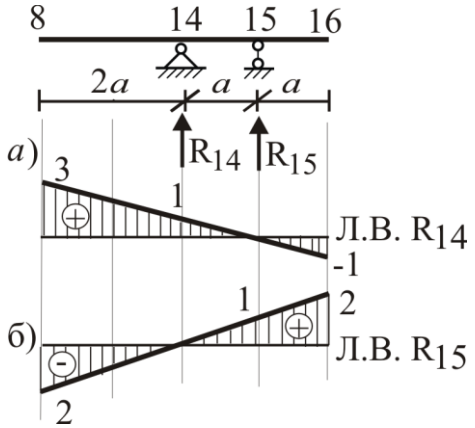


Рис. П3

Линии влияния этой балки показаны на рис. П3а, П3б.

Затем эти результаты переносим на Л.В. R_{14} и R_{15} для всей балки в участке между точками 8–16 и, используя этажную схему (рис. П2), распространяем линии влияния влево и вправо (рис. П5д, П5е). Аналогично строим линии влияния опорных реакций R_1, R_3, R_5, R_{17} (рис. П5б, П5в, п5г, П5ж).

<u>б) Линии влияния M_k, Q_k</u>

По рис. П4*а* имеем:

1) сила *P=1* слева от сечения *К*:

$$\sum m_K^{пр} = -M_K + R_{14} \cdot a + R_{15} \cdot 2a = 0,$$

$$M_K = aR_{14} + 2aR_{15};$$

2) сила *P=1* справа от сечения *К*:

$$\sum m_K^{лев} = M_K = 0, \qquad M_K = 0.$$

$$\sum y^{лев} = -Q_K = 0, \qquad Q_K = 0.$$

$$\sum y^{пр} = Q_K + R_{14} + R_{15} = 0, \quad Q_K = -R_{14} - R_{15};$$

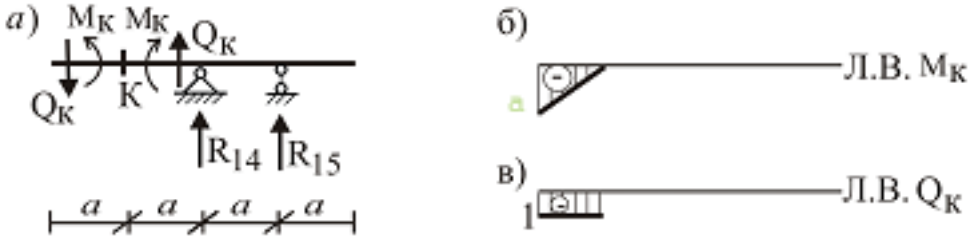


Рис. П4

Используя Л.В. R_{14} и R_{15} (рис. П3*а*,б), по полученным формулам строим Л.В. M_K и Q_K (рис. П4б,в). Затем их переносим на Л.В. составной системы на участок между точками 8–16 и распространяем влево и вправо (рис. П5з,и).

Все линии влияния проверяем кинематическим методом.

Для выполнения последующих вычислений (п/п с 3 по 11 см. **<u>Порядок выполнения</u>**) используется программа RGR 15,04,2015.xlsx типа книга Microsoft [10], каждая страница которой реализует свой пункт вычислений.

Страница 1 **(ЛВ)** – описание линий влияния M_k, и Q_k , построенных при выполнении пункта 2. Производят вычисление площадей $\varpi_i +$ и $\varpi_i -$ на участках ЛВ M_k, и Q_k для равномерно распределенных нагрузок q по заданным отдельно для положительных и отрицательных участков ЛВ описаниям: **характерный размер** – *a* (любое число, кратное длинам всех участков), **количество*** *a* – длина участка, **значение** – максимальное значение на участке ЛВ, **площадь+ , площадь-** соответственно площадь треугольника или трапеции (второй участок на ЛВ Q_k) рис. П5.

Страница 2 (**Постоянная нагрузка**) и страница 3 **(А8-А11).** Производят вычисление диапазона M_k, и Q_k от случайных распределенных нагрузок с доверительной вероятностью 0,99.

Страница 4 (**Р1**), страница 5 (**НК800**) и страница 6 (**НК600**). Производят определение диапазона M_k, и Q_k при невыгоднейших положениях кратковременных сосредоточенных и особых нагрузок.

Страница 7 **(Рез-ты М-ов).** Реализуют пункты 5–6, определяя для невыгоднейших сочетаний всех возможных случаев диапазон M_k, и Q_k

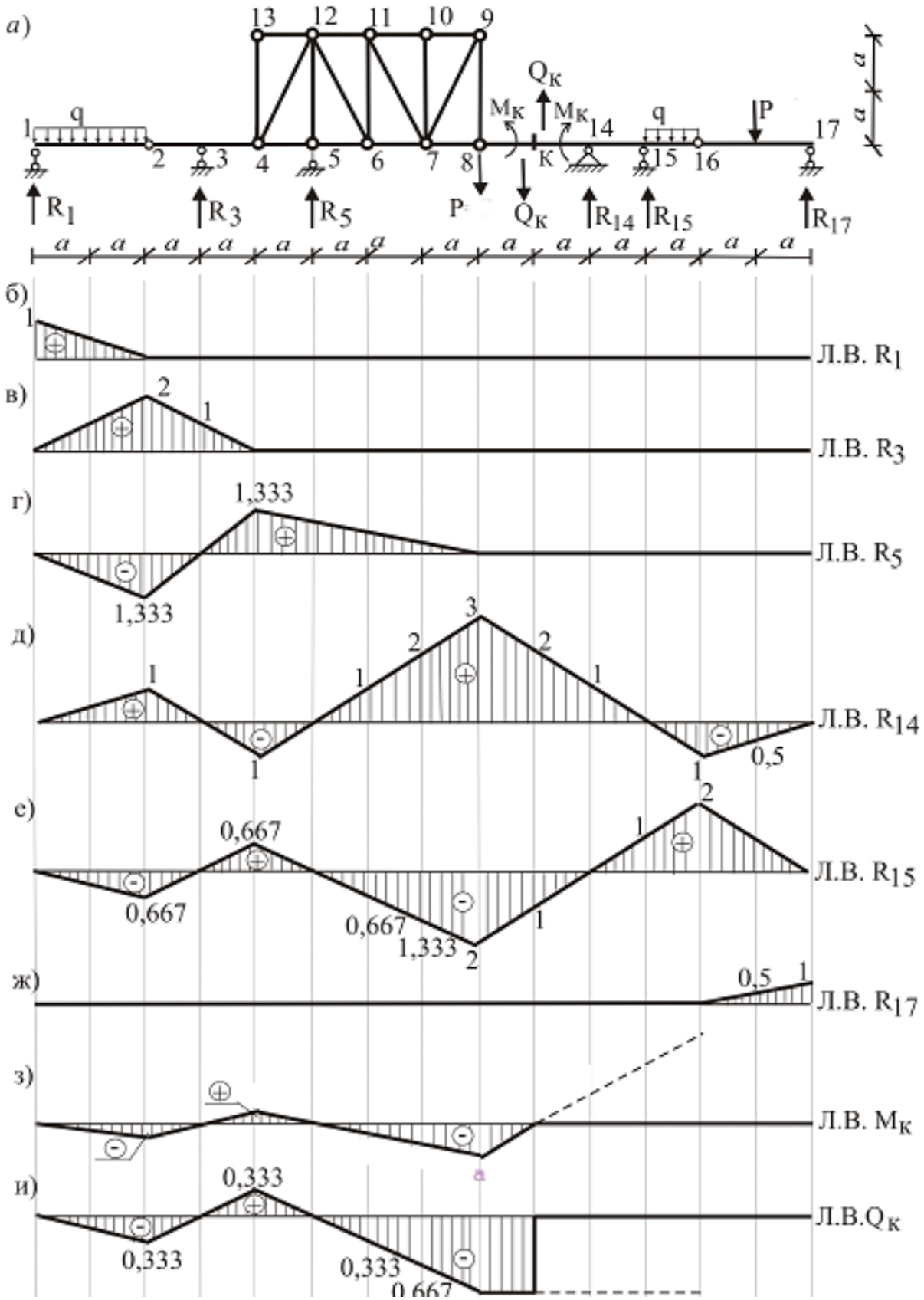

а)
13 12 11 10 9
Qк
Mк Mк 14
q
P
1 2 3 4 5 6 7 8 К 15 16 17
R1 R3 R5 P Qк R14 R15 R17
a a a a a a a a a a a a a a
б)
Л.В. R1
в)
Л.В. R3
г)
1,333
1,333
Л.В. R5
д)
Л.В. R14
0,5
е)
0,667
0,667
0,667
1,333
Л.В. R15
ж)
0,5
Л.В. R17
з)
Л.В. Mк
и)
0,333
0,333
0,333
0,667
Л.В.Qк

Рис. П5

3. Используя нормальный закон распределения, смоделировать случайные величины в Excel-таблицах для всех заданных нагрузок (постоянных и временных) в заданных пределах их изменения.

4. Вычислить характеристики распределения случайных нагрузок и доверительные интервалы обнаружения их М.О. с вероятностью 0.95– 0.99 в Excel-таблицах.

Для подвижных (временных) нагрузок АК

Таблица 1

1,Сформировать статистический ряд значений случайной величины ξ1распределенной равномерно интервале [a,,,b]

a	b
8	11

ξ_1 Случай 1 q - подвижная (А-8 qmin = 8кН/м, А-11 qmax = 11кН/м)

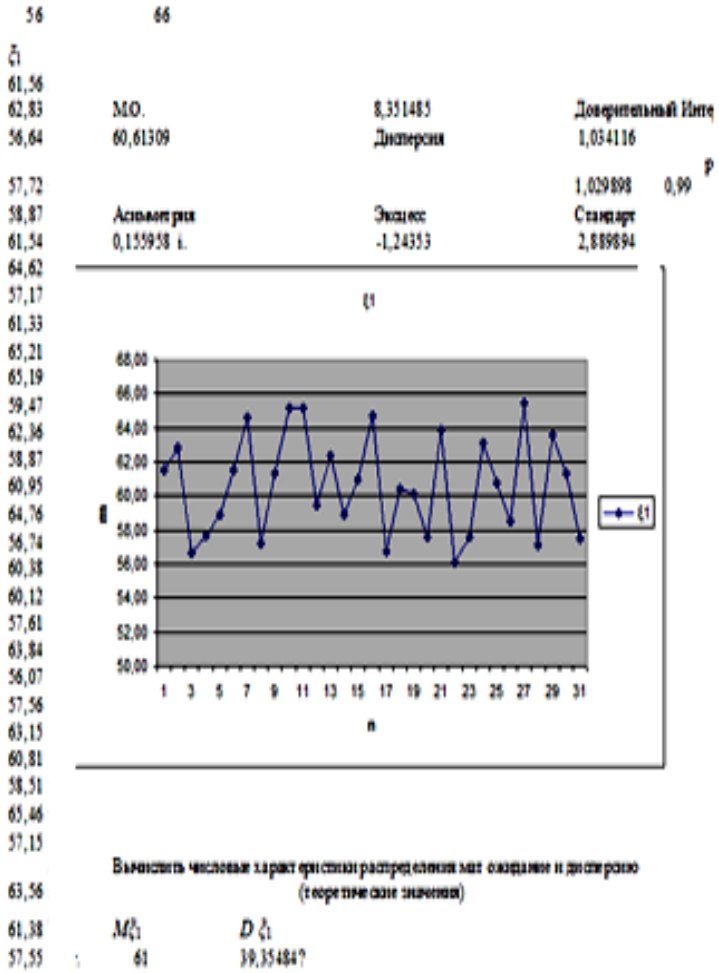
8,91	
10,20	Стандарт
9,30	0,795939
9,89	
9,95	
10,56	М.О.
10,13	9,664881
10,52	
8,88	
9,45	
8,31	0,633518
10,34	Дисперсия
9,79	
9,84	
10,81	С вероятностью 0,95
8,31	Доверительный Интервал
9,46	0,284818
10,64	
10,30	С вероятностью 0,99
9,54	Доверительный Интервал
9,94	0,397041
10,77	
9,93	
8,53	
8,27	
10,64	
8,37	
8,99	
10,67	
9,34	
9,03	

Вычислить числовые характеристики распределения мат ожидание и дисперсию (теоретические значения)

	$M\xi_1$	$D\,\xi_1$
с	9,5	4,75

Для неподвижных (постоянных) нагрузок

Таблица 2



5. Определить расчетные сочетания нагрузок

Расчет конструкций по предельным состояниям первой и второй групп следует выполнять с учетом неблагоприятных сочетаний нагрузок или соответствующих им усилий. Эти сочетания устанавливаются из анализа реальных вариантов одновременного действия различных нагрузок для рассматриваемой стадии работы конструкции. В зависимости от учитываемого состава нагрузок следует различать:

а) основные сочетания нагрузок, состоящие из постоянных, длительных и кратковременных (случай 1);

б) особые сочетания нагрузок, состоящие из постоянных, длительных, кратковременных и одной из особых нагрузок (случаи 2 и 3).

Временные нагрузки с двумя нормативными значениями следует включать в сочетания как длительные – при учете пониженного нормативного значения; как кратковременные – при учете полного нормативного значения.

Если полная нагрузка включает n отдельных случайных, корреляционно не связанных нагрузок, то центр распределения и дисперсия ее равны сумме этих характеристик составляющих нагрузок.

Случай 1: q +P1 (А-8 qmin = 8кН/м, А-11 qmax = 11кН/м, P1 = 110кН, *в1=1,5м*).

Расчетная : М.О.(q) + Доверительный интервал макс(0,95;0,99) = 9,664881 + 0,397041 = 10,062кН/м, P1 = 110кН (в невыгоднейших положениях на Л.В. усилий *M, Q* в заданном сечении *к*) и

М.О.(q пост) + Доверительный интервал макс(0,95;0,99) = 60,61309 + 1,034116 = 61,645кН/м.

Случай 2: НК – 800 кН тяжелая техника (4*200кН с шагом *в2= 1,2м)* (в невыгоднейших положениях на Л.В. усилий *M, Q* в заданном сечении *к)* и М.О.(q пост) + Доверительный интервал макс(0,95;0,99) = 60,61309 + 1,034116 = 61,645кН/м.

Случай 3: НК – 600 кН гусеничная техника (600кН на длине *в3=5м*) (в невыгоднейших положениях на Л.В. усилий *M, Q* в заданном сечении *к*) и М.О.(q пост) + Доверительный интервал макс(0,95;0,99) = 60,61309 + 1,034116 = 61,645кН/м.

Коэффициент вариации (изменчивости) с.в. (полная нагрузка) тогда можно записать так:

$V_Q = \sqrt{\overline{Q/\overline{Q}^2}}$ или

$V_Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 V_{Qi}^2}$, где

$\alpha_i = \overline{Q}_i / \overline{Q}$ – доля i-й нагрузки в общем нагружении, а

$V_{Q_i} = \sqrt{\overline{Q/\overline{Q}_i^2}}$ – вариация (изменчивость) i-й нагрузки.

6. Для невыгоднейших сочетаний постоянной и временных нагрузок определить диапазоны изменения M, Q в заданном сечении *к* по Л.В. для каждого случая.

Случай 1: q +P1 (А-8 qmin = 8кН/м, А-11 qmax = 11кН/м, P1 = 110кН, *в1=1,5м*).

Расчетная: М.О.(q) + Доверительный интервал макс(0,95;0,99) = 9,664881 + 0,397041 = 10,062кН/м, P1 = 110кН (в невыгоднейших положениях на Л.В. усилий *M, Q* в заданном сечении *к*) и М.О. (q пост) + Доверительный интервал макс(0,95;0,99) = 60,61309 + 1,034116 = 61,645кН/м.

$$M_{k\max} = M_k(q\,\text{пост}) + M_k(q+) + M_k(P1+),$$
$$M_{k\min} = M_k(q\,\text{пост}) - M_k(q-) - M_k(P1-),$$
$$Q_{k\max} = Q_k(q\,\text{пост}) + Q_k(q+) + Q_k(P1+),$$
$$Q_{k\min} = Q_k(q\,\text{пост}) - Q_k(q-) - Q_k(P1-).$$

Здесь:

$$M_k(q\,\text{пост}) = \sum_{i=1}^{s}(q\,\text{пост}) \times \omega_i(\text{л.в.}M_k),$$

$$Q_k(q\,\text{пост}) = \sum_{i=1}^{s}(q\,\text{пост}) \times \omega_i(\text{л.в.}Q_k) \quad ,$$

где ω_i – площадь участка i на л.в., а S – число всех участков,

$$M_k(q+) = \sum_{i=1}^{s+}(q) \times \omega_i(\text{л.в.}M_k),$$

$$M_k(q\text{-}) = \sum_{i=1}^{s-}(q) \times \omega_i(\text{л.в.}M_k),$$

$$Q_k(q+) = \sum_{i=1}^{s+}(q) \times \omega_i(\text{л.в.}Q_k),$$

$$Q_k(q\text{-}) = \sum_{i=1}^{s-}(q) \times \omega_i(\text{л.в.}Q_k),$$

S+ – число положительных участков, а S- – число отрицательных участков.

Аналогично,

$$M_k(P1+) = \sum_{i=1}^{s+}(P1) \times y_{i\max}(\text{л.в.}M_k),$$

$$M_k(\text{P1-}) = \sum_{i=1}^{s-}(P1) \times y_{i\min}(\text{л.в.}M_k),$$

$$Q_k(P1+) = \sum_{i=1}^{s+}(P1) \times y_{i\max}(\text{л.в.}Q_k),$$

$$Q_k(\text{P1-}) = \sum_{i=1}^{s-}(P1) \times y_{i\min}(\text{л.в.}Q_k),$$

Расчеты сводятся в табл. 3, 4, 5.

Случай 1

(*a= 10м*, q пост = 61,645кН/м, q = 10,062кН/м, P1 = 110кН)

Таблица 3

$Mk\backslash\omega_i$ (л.в.M_k)	$\omega 1 =$ -50	$\omega 2 = 33{,}3$	$\omega 3 =$ -200	$\omega 4 = 0$	$\omega 5 = 0$	$\Sigma =$ -216,7
$M_k(q\,\text{пост})$	-3082,25	2054,83	-12390	0	0	-13358,5
$M_k(q+)$		335,07				335,07
$M_k(P1+)$		366,67				366,67
$M_{k\max}$						**-12856,8**
$M_k(q-)$	-503,1		-2012,4			-2515,5
$M_k(P1-)$	-366,67		-1100			-1466,67
$M_{k\min}$						**-17341,67**

$Qk\backslash\omega_i$ (л.в.Q_k)	$\omega1=$-5	$\omega2=3{,}33$	$\omega3=$-30	$\omega4=0$	$\omega5=0$	$\Sigma=$-31,67
Q_k (q пост)	-308,225	205,483	-1849,35	0	0	-1952,09
Q_k ($q+$)		33,32				33,32
Q_k ($P1+$)		36,67				36,67
$Q_{k\,max}$						**-1882,1**
Q_k ($q-$)	-50,31		-301,86			-352,17
Q_k ($P1-$)	-33,32		-110			-143,32
$Q_{k\,min}$						**-2447,58**

Случай 2

(*а= 10м*, q пост = 61,645кН/м, НК800 = 800кН)

Таблица 4

$Mk\backslash\omega_i$ (л.в.M_k)	$\omega1=$-50	$\omega2=33{,}3$	$\omega3=$-200	$\omega4=0$	$\omega5=0$	$\Sigma=$-216,7
M_k (q пост)	-3082,25	2054,83	-12390	0	0	-13358,5
M_k (НК800+)		2666,67				2666,67
$M_{k\,max}$						**-10691,83**
M_k ($НК800-$)	-2666,67		-8000			-10666,67
$M_{k\,min}$						**-24025,17**

$Qk\backslash\omega_i$ (л.в.Q_k)	$\omega1=$-5	$\omega2=3{,}33$	$\omega3=$-30	$\omega4=0$	$\omega5=0$	$\Sigma=$-31,67
Q_k (q пост)	-308,225	205,483	-1849,35	0	0	-1952,09
Q_k (НК800+)		266,67				266,67
$Q_{k\,max}$						**-1585,42**
Q_k ($НК800-$)	-266,67		-800			-1066,67
$Q_{k\,min}$						**-3018,76**

Случай 3

(*а= 10м*, q пост = 61,645кН/м, НК600 = 600кН)

Таблица 5

$Mk\backslash\omega_i$ (л.в.M_k)	$\omega1=$-50	$\omega2=33{,}3$	$\omega3=$-200	$\omega4=0$	$\omega5=0$	$\Sigma=$-216,7
M_k (q пост)	-3082,25	2054,83	-12390	0	0	-13358,5
M_k (НК600+)		2000				2000
$M_{k\,max}$						**-11358,5**
M_k ($НК600-$)	-2000		-6000			-8000
$M_{k\,min}$						**-21358,5**

$Qk \backslash \omega_i$ (л.в.Q_k)	$\omega 1 =$ -5	$\omega 2 =$ 3,33	$\omega 3 =$ -30	$\omega 4 = 0$	$\omega 5 = 0$	$\Sigma =$ -31,67
Q_k (q пост)	-308,225	205,483	-1849,35	0	0	-1952,09
Q_k (НК600+)		200				200
$Q_{k\,\max}$						**-1752,09**
Q_k ($НК600-$)	-200		-600			-800
$Q_{k\,\min}$						**-2752,09**

7. Используя нормальный закон распределения, смоделировать случайные величины в Excel-таблицах для M, Q в полученных пределах их изменения.

$M_{k\,\max}$ = **-10691,83** $M_{k\,\min}$ = **-24025,17**

$Q_{k\,\max}$ = **-1585,42** $Q_{k\,\min}$ = **-3018,76** .

8. Вычислить характеристики распределения случайных M, Q и доверительные интервалы обнаружения их М.О. с вероятностью 0.95– 0.99 в Excel-таблицах RGR 15,04,2015.xlsx (страницы 8 и 9).

Коэффициенты вариации (изменчивости) с.в. (Mk) и (Qk) можно записать так :

$V_{Mk} = \sqrt{M_k / \overline{M}_k^{\,2}}$ = $\sigma(Mk)/\overline{M}_k$ = **4214,545/17669,73 = 0,2385** и, аналогично,

$V_{Qk} = \sqrt{Q_k / \overline{Q}_k^2}$ = $\sigma(Qk)/\overline{Q}_k$ = **441,8624/2236,947 = 0,1975,**

где σ – стандарт , а $\overline{M}_k$ и $\overline{Q}_k$ – М.О. Mk и Qk .

Если принять за нормативные значения М.О. случайной выборки при заданном законе распределения (в СНиП это соблюдается нестрого), а расчетным значениям приписать величины, соответствующие характеристике безопасности β с вероятностью p = 0,99: $P = 0.5 + \Phi(\beta) = 0.99 \rightarrow$ характеристика безопасности β =2,33.

Расчеты сводятся в табл. 6, 7.

Таблица 6

1,Сформировать статистический ряд значений случайной величины ξ1распределенной равномерно интервале [a,,,b]

a	b			
10691,83	24025,17			
ξ1				
(Ммакс)	*(Ммин)*			
19249,21			Стандарт	Доверительный Интервал
23523,47	С р=0,95		3946,95	1412,372
18660,55	С р=0,99	4214,545		**1982,016**
15918,05			М.О.	
23031,80	С р=0,95		16854,73	
17992,38	С р=0,99		**17669,73**	
13617,68			Дисперсия	
18901,36	С р=0,95		15578410	
12422,99	С р=0,99		17762387	
12673,02				
21850,74				
23134,75				
20137,06				
12974,94				
14220,19				
13485,12				
13644,74				
14195,65				
12728,53				
13698,87				
13684,40				
14368,25				
11531,86				
22448,38				
23185,25				
19348,13				
10780,12				
14077,25				
20571,00				
18501,35				
17939,49				

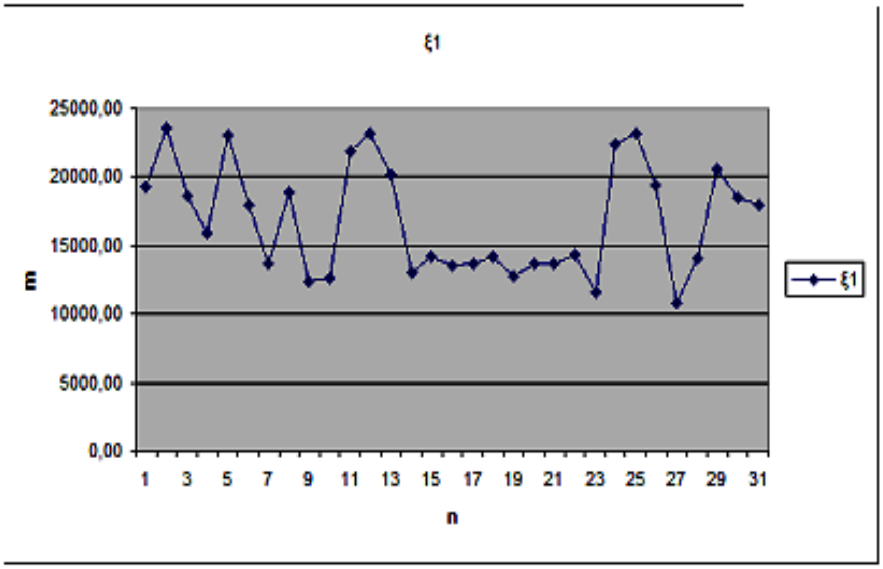
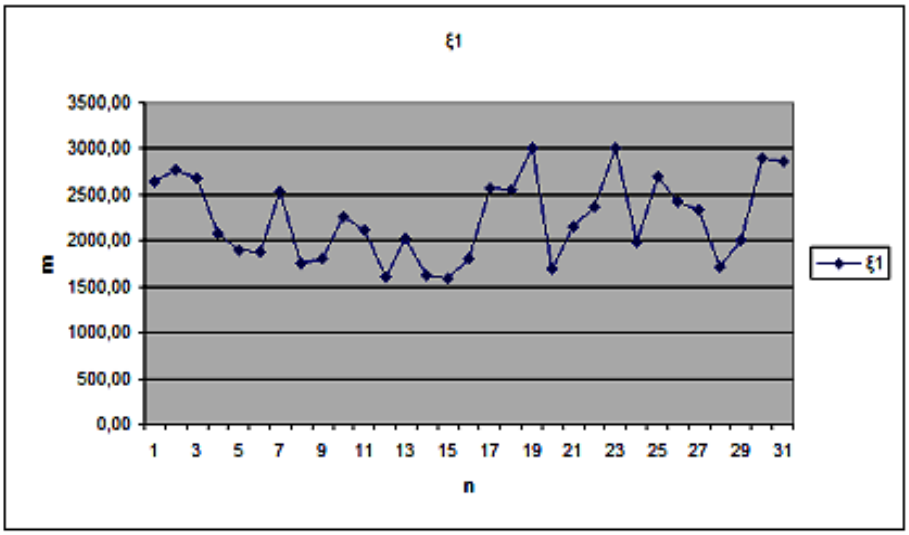


Таблица 7

1.Сформировать статистический ряд значений случайной величины ξ1распределенной равномерно интервале [a,..b]

a		b		
1585,42		3018,76		
ξ1				
(Qmax)		(Qmin)		
2635,13			Стандарт	Доверительный Интервал
		C		
2772,41	γ=0,99		441,8624	**207,799**
2678,58				
2083,43			M.O.	
		C		
1901,02	γ=0,99		**2236,947**	
1883,97				
		C		
2529,80	γ=0,99		195242,3	
1750,62			Дисперсия	
1807,48				
2264,31				
2118,50				
1601,84				
2022,81				
1621,28				
1591,79				
1808,68				
2564,89				
2559,92				
3000,45				
1690,97				
2152,50				
2376,28				
3002,07				
1981,47				
2694,79				
2430,92				
2331,42				
1716,15				
1997,08				
2904,36				
2870,43				



Расчетное Мк равно максимуму его М.О. при полученном доверительном интервале – **(17669,73 + 1982,016 = 19651,75) кН/м.**

Расчетное Qk равно максимуму его М.О. при полученном доверительном интервале – **(2236,947 + 207,799 = 2444,75)кН.**

$\overline{K} = \dfrac{1+\sqrt{1-k_0 k_п (2-k_0)(2-k_П)}}{[k_0(2-k_0)]}$ – коэффициент запаса, где

$k_п = 1+\beta V(M_k) =$ 1 + 2,33*0,2385 = **1,556** – коэффициент перегрузки относительно расчетной нагрузки в сечении k **по Мк**,

$k_п = 1+\beta V(Q_k)$ = 1 + 2,33*0,1975 = **1,460** – коэффициент перегрузки относительно расчетной нагрузки в сечении k **по Qk**.

Определим далее

$k_0 = 1-\beta V(R)$ – коэффициент однородности относительно несущей способности конструкции в сечении k (предельных значений Мк и Qk) .

9. Подобрать параметры сечения по найденным значениям М.О. Мк и Qk.

Прочность сечения железобетонной балки, определяемая в СНиП **предельным моментом, воспринимаемым сечением:**

$$M = R_a f_a [h_0 - R_a f_a /(2bR_{\text{пр}})],$$

нелинейная функция случайных аргументов в балках и плитах :

R_a – предел прочности арматуры, $R_{\text{пр}}$ – призменная прочность бетона, h_0 – глубина закладки арматуры от поверхности (в балках и плитах можно считать случайной по технологическим причинам).

f_a – площадь сечения арматуры, b – ширина балки.

$$f_a = \gamma_f \frac{M_{\text{расч}}}{\text{R}_\text{a}(h_d - h_f/2)} = 1{,}1 * \mathbf{19651{,}75*1000/235*1000000(1{,}65 - 0{,}15)} =$$

$\mathbf{0.0613}\,\text{м}^2 = \mathbf{613}\,см^2$**,**

b = 2,2м – ширина унифицированных балок для пролетов до 40*м.*

10. Для заданных диапазонов прочности бетона, стали и глубины закладки арматуры определить вероятностные характеристики распределения предельных M, Q с вероятностью p = 0.99 в Excel-таблицах (стр. 11–13 RGR 15,04,2015.xlsx).

Расчеты сводятся в табл. 8, 9, 10.

Таблица 8

1,Сформировать статистический ряд значений случайной величины ξ1распределенной равномерно на интервале [a,,,b]

a b

210 240

$\xi_1 R_{a\,min}$ $R_{a\,max}$

223,91 Стандарт М.О. 63,55042 x

216,57 7,971852 224,6052 Дисперсия

216,79

213,51

229,28 Доверительный интервал

225,07 xxiv. 3,749002

216,24

226,88

214,81

224,48

237,86

210,11

228,99

224,40

230,43

229,33

228,39

216,01

227,76

236,37

222,74

239,83

232,27

221,50

215,70

238,78

221,47

216,61

221,06

219,46

236,15

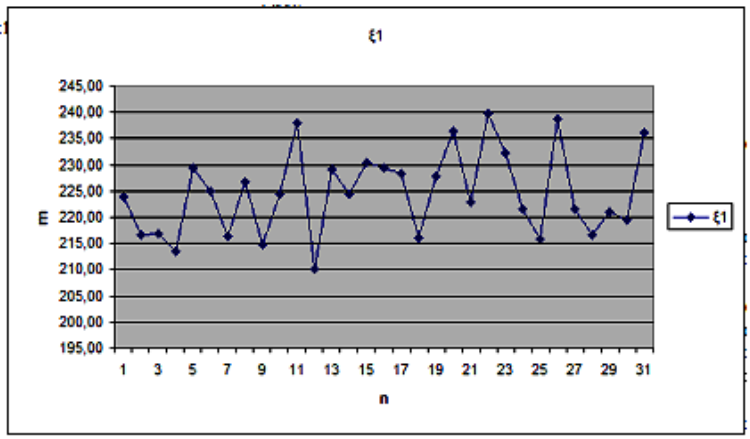


Таблица 9

1,Сформировать статистический ряд значений случайной величины ξ1распределенной равномерно на интервале [a,,,b]

a b

xiv. 10 xv. 17,5

$\xi_1 R_{np} = R_{b\,min}$ $R_{np} = R_{b\,max}$

12,95 Стандарт М.О. 3,408351

16,48 1,846172 13,96313 Дисперсия

17,17

12,50

Доверительный

10,75 Интервал

13,84 0,868218

13,82

11,12

15,24

15,86 cxxxix.

15,56

11,66

15,46

14,26

11,07

15,62

11,62

15,28

12,46

13,53

12,11

15,96

13,04

15,80

13,31

13,13

11,34

15,22

14,45

15,68

16,56

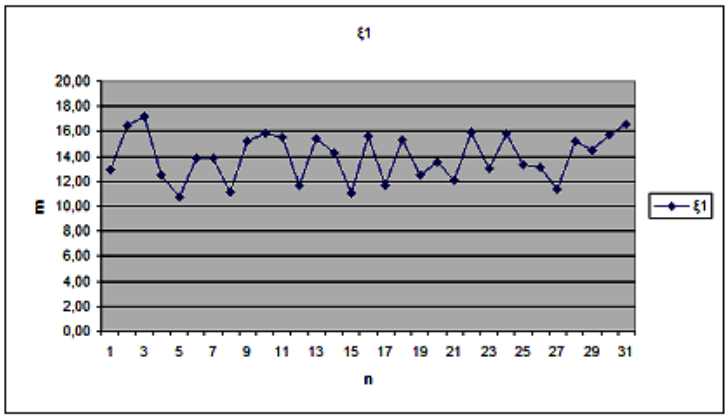
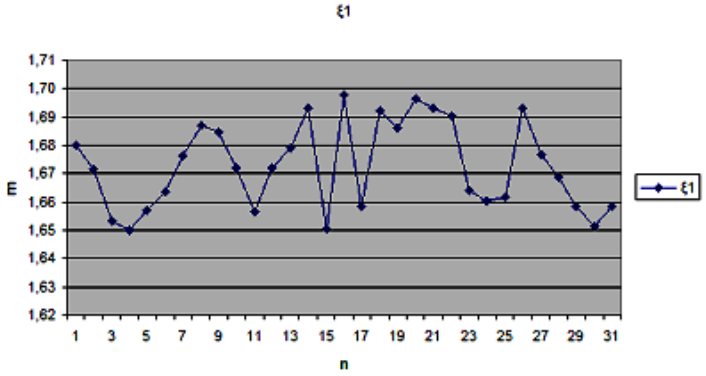


Таблица 10

Сформировать статистический ряд значений случайной величины ξ1 распределенной равномерно на интервале [a,,,b]

a	b			
1,65	xv.	1,7		
$\xi 1\ h_{0\,min}$	$h_{0\,max}$			
1,68	Стандарт		М.О.	0,000232
1,67			1,672723	Дисперсия
1,65				
	Доверительный			
1,65	тервал			
1,66	0,007162			
1,66				
1,68				
1,69				
1,68				
1,67				
1,66				
1,67				

1,68
1,69
1,65
1,70
1,66
1,69
1,69
1,70
1,69
1,69
1,66
1,66
1,66
1,69
1,68
1,67
1,66
1,65
1,66



11. Определить характеристики резерва и коэффициенты запаса прочности (стр.10 в Excel-таблицах RGR 15,04,2015.xlsx).

Применяя метод статистической линеаризации:

$$\tilde{M} = M(\tilde{R}_a, \tilde{R}_{пр}, \tilde{h}_0) \approx M_0 + A(\tilde{R}_a - \bar{R}_a) + B(\tilde{R}_{пр} - \bar{R}_{пр}) + C(\tilde{h}_0 - \bar{h}_0),$$ где

A, B и C частные производные выражения M по R_a, $R_{пр}$ и h_0 – соответственно в центрах распределения случайных аргументов:

$A = f_a \bar{h}_0 - \bar{R}_a f_a^2 /(b\bar{R}_{пр}) =$ 0,0613***1,672723** - **224,6052***0,0613*0,0613/2,2***13,96313** = **0,075**,

$B = \bar{R}_a^2 f_a^2 /(2b\bar{R}_{пр}^2) =$ **224,6052*224,6052*** 0,0613*0,0613/4,4***13,96313*13,96313 = 0.221**,

$C = \bar{R}_a f_a =$ **224,6052*1000***0,0613 = **13768** , а

$M_0 = \bar{R}_a f_a [\bar{h}_0 - \bar{R}_a f_a /(2b\bar{R}_{пр})] =$ **224,6052*1000***0,0613(**1,672723 - 224,6052***0,0613/4,4***13,96313)**

= 19964 кНм .

Тогда приближенные характеристики нелинейной функции случайных аргументов:

предельный момент, воспринимаемый сечением:

$\overline{M} \approx M_0$ **= 19964кНм** – математическое ожидание (центр распределения),

$\overset{)}{M} \approx A^2 \overset{)}{R}_a + B^2 \overset{)}{R}_{пр} + C^2 \overset{)}{h}_0$ =**0,075*0,075* 63,55042*1000 + 0.221*0.221*3,408351*1000 + 13768* 13768*0,000232 = 44500** – (дисперсия $M_{k пред}$),

$V_{Mкппре} = \sqrt{\overset{)}{M}} / M_{0.}$ = **0,0106** – (изменчивость $M_{k пред}$).

k_0 = $1 - \beta V(M_{k пред})$= **1 – 2,33*0,0106= 0,975 – коэффициент однородности относительно несущей способности конструкции в сечении k предельного значения Мк и,**

k_0 = $1 - \beta V(Q_{k пред})$ – **коэффициент однородности относительно не-сущей способности конструкции в сечении k предельного значения Qk.**

Предельная поперечная сила, воспринимаемая сечением, определяется:

$Q \le 0{,}6 R_{b,cut} b h_d$ = 0,6***1,396313*2,2*1,65*1000 = 3412 кН** , где $R_{b,cut}$ – случайная величина для бетонов В20 – В35 изменяется от 1,0 МПа до 1,75 МПа, b = 2,2 м, h_d = 1,65м.

$\overline{Q}$ и $\sigma(Q)$ соответствуют вероятностным характеристикам R_b и $R_{b,cut}$, а

$V(Q_{k пред})$ = $\sigma(Q)/\overline{Q}$ = $\sigma(R_b)/\overline{R}_b$ = 0,**1846172/1,396313 = 0,132** .

k_0 = $1 - \beta V(Q_{k пред})$= 1- 2.33*0,132 = **0,692.**

Резерв прочности в сечении *k* $\overline{S} = \overline{R} - \overline{F}$.

По моменту $\overline{S}_M$ = **19964 - 17669,73 = 2294кНм**

$\overline{K} = \dfrac{1 + \sqrt{1 - k_0 k_п (2 - k_0)(2 - k_П)}}{[k_0(2 - k_0)]}$ – **коэффициент запаса,** где

$k_п$ =$1 + \beta V(M_k)$= 1 + 2,33*0,2385 = **1,556** – коэффициент перегрузки относительно расчетной нагрузки в сечении k **по Мк,**

k_0 = $1 - \beta V(M_{k пред})$= **1 – 2,33*0,0106= 0,975 – коэффициент однородности относительно несущей способности конструкции в сечении k предельного значения Мк.**

$\overline{K}_{Mk} = 1 + (\sqrt{(1 - 0{,}975 * 1{,}556(2 - 0{,}975)(2 - 1{,}556)}) / 0{,}975(2 - 0{,}975))$ **= 1,557.**

По поперечной силе $\overline{S}_Q$ =3412 - **2236,947 =1175кН.**

$\overline{K} = \dfrac{1 + \sqrt{1 - k_0 k_п (2 - k_0)(2 - k_П)}}{[k_0(2 - k_0)]}$ – **коэффициент запаса,** где

$k_п$ =$1 + \beta V(Q_k)$= 1 + 2,33*0,1975 = **1,460** – коэффициент перегрузки относительно расчетной нагрузки в сечении k **по Qk,**

k_0 = $1 - \beta V(Q_{k пред})$= 1- 2.33*0,132 = **0,692 – коэффициент однородности относительно несущей способности конструкции в сечении k предельного значения Qk.**

$\overline{K}_{Qk} = 1 + (\sqrt{(1 - 0{,}692 * 1{,}460(2 - 0{,}692)(2 - 1{,}460)}) / 0{,}692(2 - 0{,}692))$ = **1,590.**

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица. Интеграл вероятностей (нормированная функция Лапласа).

$$\Phi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^U e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} erf\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right)$$ *

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02892	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	89435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49422	49506	49520
6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
9	49813	49819	49825	49831	49336	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865									
3,5	4997674									
4,0	4999683									
4,5	4999966									
5,0	4999997133									

Нормальное распределение

	0.00	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учебник. – 10-е изд., стер. – СПб: Лань, 2005. – 656 с.

2. Райзер В.Д. Расчет и нормирование надежности строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1995. – 352 с.

3. Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат, 1978. – 240 с.

4. Манапов А.З. Расчет надежности и ресурса строительных конструкций методом статистического моделирования: Учеб. пособие. – Казань: КГАСУ, 2010. – 132 с.

5. Лукашенко В.И., Абитов Р.Н., Вильданов И.Э. Использование вычислительного комплекса АРС ЭРА ПК-2000 в решении задач строительной механики: учеб. пособие. – Казань: КГАСУ, 2011. – 73 с.

6. Лившиц Я.Д., Онищенко М.М., Шкуратовский А.А. Примеры расчета железобетонных мостов. – Киев: Вища шк., Головное изд-во, 1986. – 263 с.

7. Лукашенко В.И., Минсагиров М.Ф. Расчет статически определимых систем на случайные постоянную и подвижную нагрузки: методические указания к выполнению расчетно-графической работы – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2015. – 23 с.

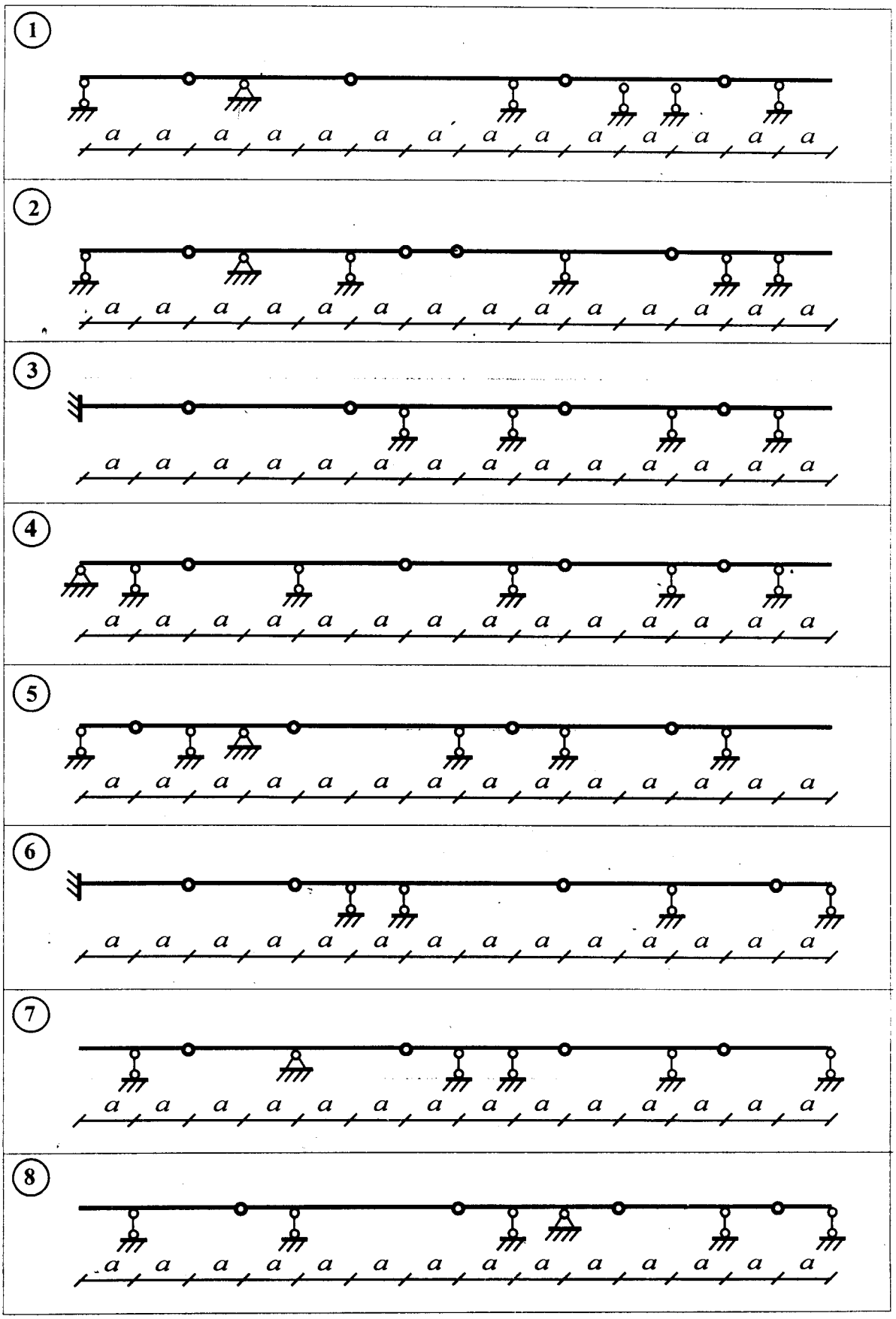
8. Лукашенко В.И. Курс лекций по дисциплине «Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций»: Учебное пособие. – Казань: Изд-во КГАСУ, 2015. – 71 с.

9. Лукашенко В.И. Курс лекций по дисциплине «Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций»: Учебное пособие. – Казань: Изд-во КГАСУ, 2016. – 219 с.

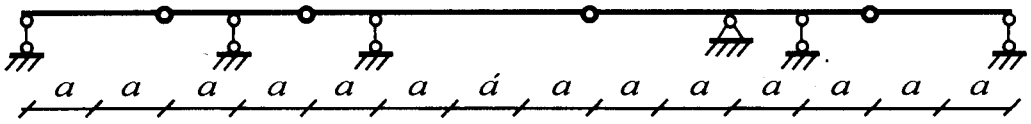
10. Лукашенко В.И., Минсагиров М.Ф. – Программа RGR 15,04,2015.xlsx типа книга Microsoft, класс ПЭВМ каф. механики, КГАСУ, 2015. – 52КБ.

11. Лукашенко В.И., Ахметзянов Р. И., Минсагиров М.Ф. – Программа типа книга Microsoft Определение ресурса статически определимой системы3.xlsx, лист 1, класс ПЭВМ каф. механики, КГАСУ, 2017. – 49 КБ.

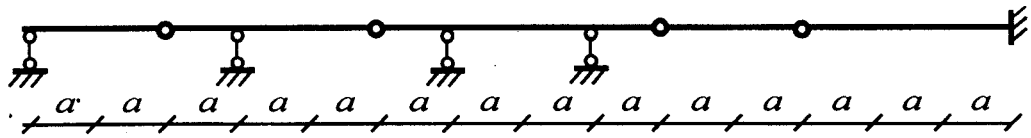
Схемы к РГР № 1



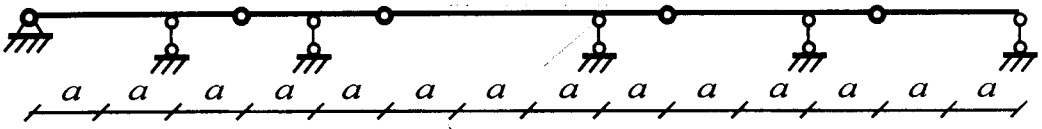
9



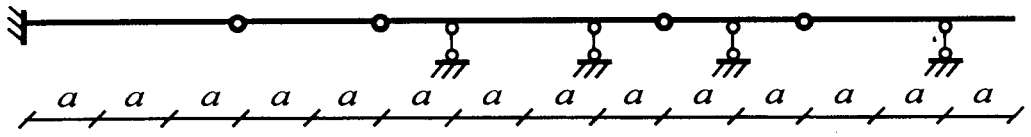
10



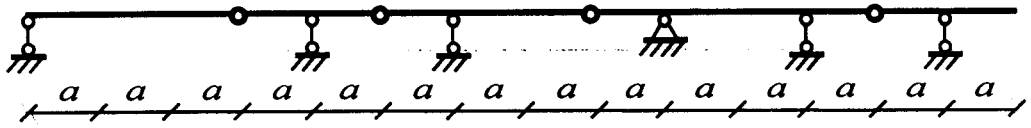
11



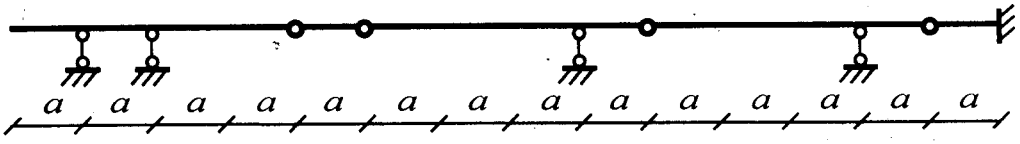
12



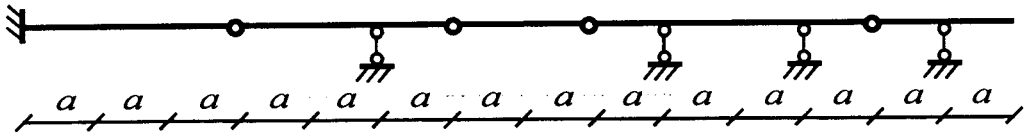
13



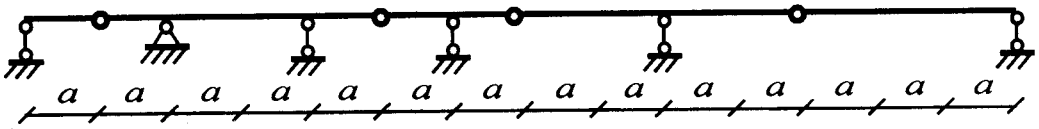
14



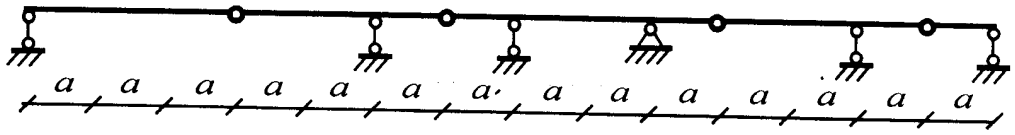
15



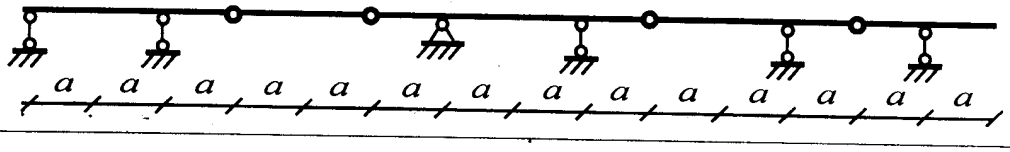
16



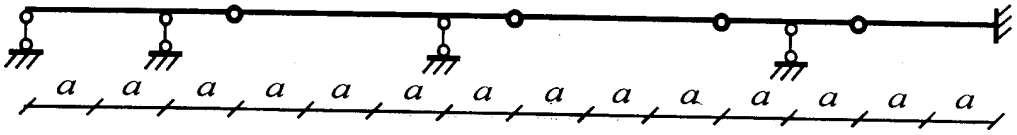
17



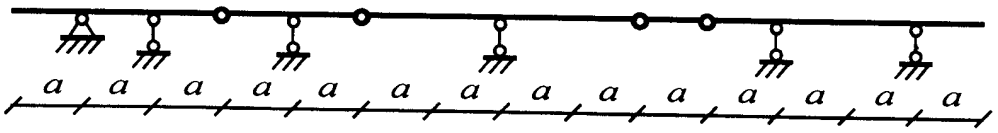
18



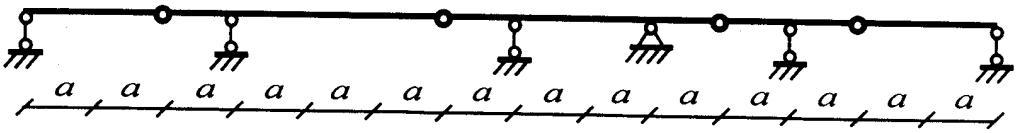
19



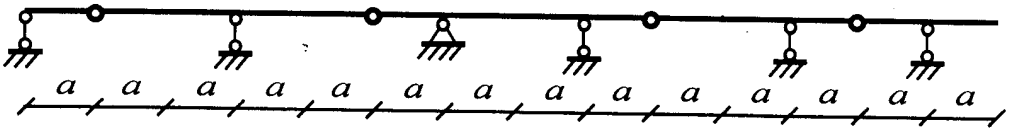
20



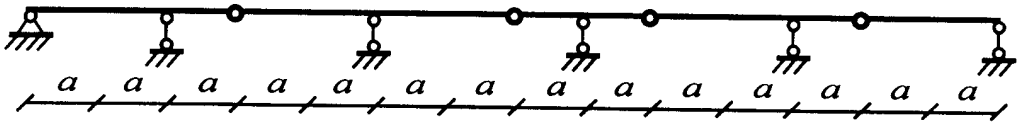
21



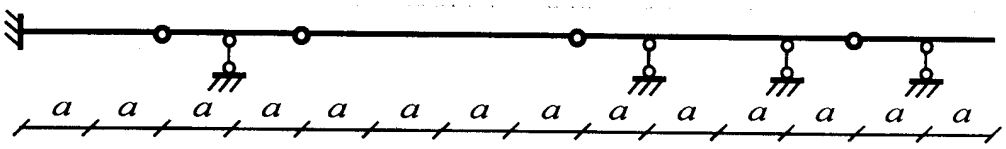
22



23



24



СОДЕРЖАНИЕ

Лукашенко Виктор Иванович,
Ахметзянов Рустем Илдарович,
Минсагиров Мухамед Фархатович

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРАХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Учебно-методическое пособие