МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Методические указания для студентов первого года обучения в магистратуре, обучающихся по программам 270811.68 «Тепломассоперенос и энергосбережения в системах теплоснабжения», 270814.68 «Система обеспечения микроклимата зданий и сооружений»

Казань
2015

УДК 517.5
ББК 22.161
К79

К79 Математическая теория поля: Методические указания для студентов первого года обучения в магистратуре, обучающихся по программам 270811.68 «Тепломассоперенос и энергосбережения в системах теплоснабжения», 270814.68 «Система обеспечения микроклимата зданий и сооружений» / Сост. В.Л. Крепкогорский. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.- строит. ун-та, 2015. – 34 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Теоретический материал предназначен для самостоятельного изучения студентами первого курса дневного отделения в рамках программы для магистрантов. В конце каждого раздела приведены практические задания для самостоятельной проработки теоретического материала.

Рецензент
Доктор технических наук,
доцент кафедры теплоснабжения и вентиляции
Р.Г.Сафиуллин

УДК 517.3
ББК 22.161

1. Скалярное поле

Пусть каждой точке пространственной области Ω по некоторому правилу поставлено в соответствие некоторое число. В этом случае говорят, что на Ω задано *скалярное поле* $u = u(M)$, $M \in \Omega$. Величина $u(M)$ может меняться со временем. Если это не так, то поле называют *стационарным* или *установившимся*. В этом разделе мы будем рассматривать только стационарные поля.

Производная по направлению. Дана точка $M \in \Omega$ и луч l, выходящий из точки M. Выберем на луче точку M_1, пусть $|MM_1| = d$. *Производной по направлению* l в точке M называется величина

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{d \to 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{d}.$$

Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный вдоль луча l. Тогда $\vec{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, где α, β, γ – углы между лучом l и осями координат. Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ может быть найдена по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Градиент скалярного поля. *Градиентом* скалярного поля называется вектор:

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Производную по направлению можно найти как скалярное произведение:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{n} \cdot grad\, u = |grad\, u| \cos\varphi = \text{пр}_{\vec{n}}\, grad\, u,$$

где φ – угол между лучом l и вектором $grad\, u$.

$$\max_{l} \frac{\partial u}{\partial l}(M) = |grad\, u|.$$

Максимальное значение производной $\frac{\partial u}{\partial l}(M)$ получается, если $\vec{n} \parallel grad\, u$ и оба вектора направлены в одну сторону.

Пусть поверхность L задана уравнением $F(x, y, z) = 0$. Тогда $\vec{N} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ – нормальный вектор поверхности L.

<u>Пример 1</u>. Найти производную $\frac{\partial u}{\partial l}$ от функции $u = 3x^2 - 2y^2 + 5z$

в точке $M(1,1,1)$ в направлении заданном вектором $\overrightarrow{MA} = (1;2;2)$.

Решение. Нам нужно найти вектор единичной длины $\vec{n}$, направленный также как вектор $\overrightarrow{MA}$

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{MA}}{|\overrightarrow{MA}|} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}.$$

Можно считать, что $\frac{1}{3} = \cos\alpha, \frac{2}{3} = \cos\beta$, $\frac{2}{3} = \cos\gamma$. Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -4y$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 5$. Значения производных в точке M: $\frac{\partial u}{\partial x}(M) = 6$; $\frac{\partial u}{\partial y}(M) = -4$; $\frac{\partial u}{\partial z}(M) = 5$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot (-4) +$ $+\frac{2}{3} \cdot 5 = 2\frac{2}{3}$.

Пример 2. Найти наибольшее значение производной по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ от скалярного поля $u = xy + z^2$ в точке $M(4;2;2)$.

Решение. Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z \Rightarrow$ $grad\, u = y\vec{i} + x\vec{j} + 2z\vec{k}$, $grad\, u(M) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$,

$$\max_l \frac{\partial u}{\partial l}(M) = |grad\, u(M)| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6.$$

Пример 3. Найти градиент потенциала электростатического поля $v = \frac{e}{|\vec{r}|}$.

Решение. e=const, $\vec{r} = (x;y;z)$ – радиус-вектор точки $(x;y;z)$, $|\vec{r}| =$ $= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найдем частные производные: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-e}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$ $= \frac{-ex}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{-ex}{|\vec{r}|^3}$. Аналогично, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-ey}{|\vec{r}|^3}$ и $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{-ez}{|\vec{r}|^3}$. Тогда

$$grad\, v = \frac{-ex\vec{i}}{|\vec{r}|^3} + \frac{-ey\vec{j}}{|\vec{r}|^3} + \frac{-ez\vec{k}}{|\vec{r}|^3} = \frac{-e(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{|\vec{r}|^3} = \frac{-e\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

Задание

1.1. $z = 4 - x^2 - y^2$. Построить линии уровней и $grad\, z$ в точке $A(1,2)$.

1.2. Найти производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $(1;1;1)$ в направлении $\vec{l} = (\cos 45^\circ; \cos 60^\circ; \cos 60^\circ)$ и найти $grad\, u$ в той же точке и его длину. Построить поверхность уровня.

1.3. Найти нормальный вектор к поверхности $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 0$ в точке $(4; 3; 0)$. Построить в первом октанте поверхность и нормальный вектор.

1.4. $u = xyz$. Найти производную $\frac{\partial u}{\partial l}$ в направлении, составляющим с осями координат равные углы, в любой точке и в точке (1;2;1).

1.5. Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точке $(6;\ 4; \ln 100)$.

1.6. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M(3; 1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $(6; 5)$.

1.7. Найти производную скалярного поля $u = 1/|r|$ по направлению его градиента, где $|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.8. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания поля $u = xyz$ в точке $P_0(1; 2; 2)$.

1.9. Найти нормальный вектор к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точке $(1; 2 - 1)$.

1.10. Найти нормальный вектор к поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ в точке $(3; 4 - 7)$.

1.11. Найти нормальный вектор к поверхности $z = 2x^3 - 4y^2$ в точке $(2; 1; 4)$.

1.12. $u = 5x^2y - 3xy^2 + y^4$. Найти градиент поля.

1.13. Найти производную поля $u = xy^2 + z^3 - xyz$ в точке $M(1; 1; 2)$ в направлении, образующим с осями координат углы, соответственно, в $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

1.14. Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z = x^y$ в точке $(2; 2; 4)$.

1.15. Найти производную поля $z = \operatorname{arctg} xy$ в точке $(1; 1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

2. Векторное поле. Поверхностный интеграл первого рода

Пусть D – область в пространстве двух, трех или n измерений. Если каждой точке $P \in D$ поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(P)$, то говорят, что в области D задано *векторное поле*.

Векторной линией называется линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление соответствующего вектора поля. Векторные линии для векторного поля $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x(x,y,z)} = \frac{dy}{a_y(x,y,z)} = \frac{dz}{a_z(x,y,z)}.$$

Пример 1. Материальная точка $M(x,y,z)$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz. В этом случае вектор скорости:

$$\vec{v} = \omega(-y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}).$$

Найти векторные линии поля $\vec{v}$.

Пример 2. Определить векторные линии магнитного поля, образованного электрическим током с силой I, текущим по бесконечно длинному прямолинейному проводу. Если принять провод за ось Oz, то вектор напряженности искомого магнитного поля $\vec{H}$ выражается формулой

$$\vec{H} = \frac{2I}{\rho^2}(-yi + xj),$$

где ρ – расстояние от данной точки до провода.

Векторы $\vec{v}$ и $\vec{H}$ отличаются только постоянными множителями и размерностью. Поэтому векторные линии в обоих случаях одинаковые. Решим задачу для вектора $\vec{H}$. Уравнения векторных линий будут иметь вид:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

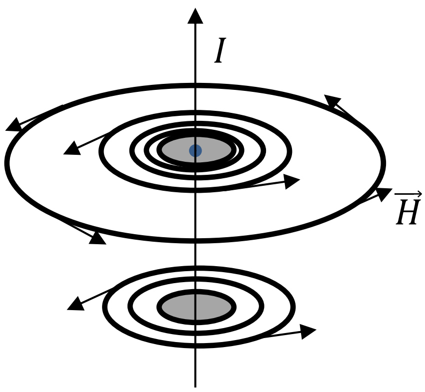

Рис. 2.1

Последнее равенство означает, что $\frac{dz}{0} \neq \infty \Rightarrow dz = 0 \Rightarrow z = C$. Решим первое уравнение $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x\,dx = -y\,dy \Rightarrow x^2 = = -y^2 + C \Rightarrow x^2 + y^2 = C$. Это значит, что векторные линии представляют собой окружности, лежащие в горизонтальной плоскости с центрами на оси Oz (рис. 2.1).

Аналогичную картину мы получим для векторного поля скоростей вращающегося тела. Разницу между обоими полями заключается в следующем: в магнитном поле векторные линии сгущаются у провода, а в поле скоростей вращающегося тела, наоборот, векторные линии должны проводиться чаще по мере удаления от оси вращения, ибо напряженность магнитного поля и линейная скорость вращения изменяются, соответственно, обратно и прямо пропорционально расстоянию от провода и оси вращения.

Поверхностный интеграл первого рода. Пусть D – кусочно-гладкая поверхность, $u(P)$ – заданное на D скалярное поле. Допустим, что поверхность задана уравнением $z = z(x, y)$, D_{xy} – проекция поверхности D на плоскость xOy. Тогда поверхностный интеграл первого рода можно вычислить по формуле:

$$\iint_D u(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} u(x,y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

<u>Пример</u>. Вычислить интеграл:

$$\iint_D z\,d\sigma,$$

где D – полусфера: $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z \geq 0)$.

<u>Решение</u>. Выразим z из уравнения полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = -\frac{y}{z}$. Откуда

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} = \frac{R}{z}.$$

Следовательно,

$$\iint_D z\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} z\,\frac{R}{z}\,dx\,dy = R\iint_{D_{xy}} dx\,dy = R\,S\left(D_{xy}\right) = \pi R^3.$$

Так как в данном случае D_{xy}– круг радиуса R и его площадь $S\left(D_{xy}\right) = \pi R^2$.

Задание Найти векторные линии следующих полей.

2.1. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$. 2.2. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. 2.3. $\vec{a} = \frac{\vec{i}}{x} + \frac{\vec{j}}{y} + \frac{\vec{k}}{z}$.

2.4. Найти векторную линию поля $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}$, проходящую через точку $P(1; 0; 0)$.

2.5. $\iint_G x^2yz\,d\sigma$, где G – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

2.6. $\iint_G \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, где G – часть поверхности конуса $x^2+y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1$.

2.7. $\iint_G (x^2+y^2+z^2)\ d\sigma,$ где G – сфера $x^2+y^2+z^2=1.$

2.8. $\iint_G (x+y+z)\ d\sigma,$ где G – часть сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, лежащая в первом октанте.

2.9. Найти массу сферы, если поверхностная плотность в каждой точке равна квадрату расстояния от некоторого фиксированного диаметра сферы.

Найти векторные линии следующих полей.

2.10. $\vec{a}=y\vec{\imath}-x\vec{\jmath}.$ 2.11. $\vec{a}=y\vec{\imath}+\vec{\jmath}.$

2.12. Найти векторную линию поля $\vec{a}=x^2\vec{\imath}-y^3\vec{\jmath}+z^2\vec{k}$, проходящую через точку $P(1/2;1/2;1)$.

2.13. $\iint_S \left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\ d\sigma,$ где S – часть плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1,$ лежащая в первом октанте.

2.14. $\iint_S xyz\,d\sigma,$ где S – часть плоскости $x+y+z=1,$ лежащая в первом октанте.

2.15. $\iint_S x\,d\sigma,$ где S – часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2,$ лежащая в первом октанте.

3. Поверхностный интеграл второго рода. Поток векторного поля через поверхность

Гладкая поверхность G в трехмерном пространстве называется двусторонней, если нормаль к поверхности при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности G и не имеющему общих точек с ее границей, возвращается в первоначальное положение.

Пусть на двусторонней поверхности задана векторная функция $\vec{a}=a_x(x,y,z)\vec{\imath}+a_y(x,y,z)\vec{\jmath}+a_z(x,y,z)\vec{k}.$ Выбираем одну из сторон. В дальнейшем будем считать, что единичный вектор нормали $\vec{n}$ направлен в эту сторону.

Рассмотрим поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_G a_n d\sigma.$$

Здесь a_n – проекция вектора $\vec{a}$ на нормаль к поверхности. Такой интеграл будет называться *поверхностным интегралом второго рода* или *потоком* *вектора* $\vec{a}$ через поверхность G. Для вычисления могут использоваться формулы:

$$\iint_G a_n d\sigma = \iint_G \vec{a}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iint_G \left(a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma\right) d\sigma,$$

где $n = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ – единичный вектор нормали, или

$$\iint_G a_n d\sigma = \pm\iint_{G_{yz}} a_x(x(y,z),y,z)dy\,dz \pm$$

$$\pm\iint_{G_{xz}} a_y(x,y(x,z),z)dx\,dz \pm \iint_{G_{xy}} a_z(x,y,z(x,y))dx\,dy, \qquad (3.1)$$

где G_{yz}, G_{xz}, G_{xy} – проекции поверхности G на соответствующие координатные плоскости. В первом интеграле мы выбираем знак (+), если нормальный вектор $\vec{n}$ образует с осью Ox острый угол и минус если тупой. Для второго интеграла выбираем (+), если угол между $\vec{n}$ и осью Oy острый, в третьем слагаемом (+), если угол между $\vec{n}$ и осью Oz острый.

Поток изменит свой знак, если мы выберем другую сторону поверхности. Пусть $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ – скорость движения газа или жидкости. Тогда поток вектора скорости через поверхность равен количеству газа или жидкости, протекающего за единицу времени в заданном направлении через поверхность.

Важный частный случай, когда поверхностный интеграл берется через замкнутую поверхность. В этом случае для него используют специальное обозначение:

$$\oiint_G a_n\, d\sigma.$$

Во многих случаях поток через замкнутую поверхность равен нулю. Если он больше нуля, то говорят, что в области, ограниченной данной поверхностью имеются *источники*, если же он меньше нуля, то *– стоки* .

Пример. Найти поток вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали (рис 3.1).

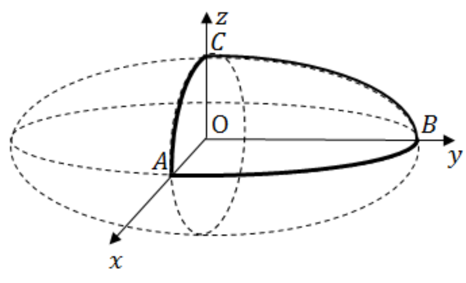

Рис. 3.1

В нашем случае нормаль к поверхности ABC образует острые углы с осями координат. Поэтому все интегралы в формуле (3.1) берем со знаком (+).

При этом проекция ABC на плоскость Oyz совпадает с COB, на плоскость Oxz – с COA, на плоскость Oxy с AOB.

$$\iint_G r_n d\sigma = \iint_{COB} x\,dy\,dz + \iint_{AOC} y\,dx\,dz + \iint_{AOB} z\,dx\,dy.$$

Каждый из этих интегралов соответствует интегралу в формуле объема цилиндрического тела. В данном случае это объем ОАВС. Объем эллипсоида равен πabc. Объем ОАВС равен одной восьмой от объема эллипсоида. Поэтому

$$\iint_G r_n d\sigma = \frac{3}{8}\pi abc.$$

Задание

В задачах 3.1–3.3 вычислить поверхностные интегралы второго рода.

3.1. $\iint_G y\,dx\,dz$, где G – верхняя сторона части плоскости $x+y+$ $+z=a$, лежащей в первом октанте.

3.2. $\iint_G \frac{dx\,dy}{z}$, где G – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

3.3. $\iint_G x^2\,dy\,dz$, где G – внешняя сторона части поверхности параболоида $z=\frac{H}{R^2}(x^2+y^2), x\geq 0, y\geq 0, z\leq H$.

3.4. Найти поток вектора $\vec{a}=2x\vec{\imath}-y\vec{\jmath}$ через часть поверхности цилиндра $x^2+y^2=R^2, x\geq 0, y\geq 0,\ 0\leq z\leq H,$ в направлении внешней нормали.

3.5. Найти поток вектора $\vec{a}=x^2\vec{\imath}+y^2\vec{\jmath}+z\vec{k}$ через всю поверхность тела $\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq H$ (перевернутый конус с крышкой) в направлении внешней нормали.

3.6. Найти поток радиуса-вектора $\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ через прямой цилиндр, если начало координат лежит в центре нижнего основания цилиндра. Размеры цилиндра: R – радиус основания цилиндра, H – высота его.

3.7. Вычислить поток вектора скорости жидкости, вращающейся вокруг оси Oz с угловой скоростью ω, через площадку D в плоскости Oxz D: $a\leq x\leq b, 1\leq z\leq 4$. Вращение происходит в положительную сторону, выбрана сторона D, примыкающая к первому октанту. Вектор скорости $\vec{v}=\omega(-y\vec{\imath}+x\vec{\jmath})$.

3.8. Определить поток напряженности магнитного поля, образованного электрическим током с силой I, текущим по бесконечно длинному прямолинейному проводу (оси Oz) через поверхность $D: 1 \leq x \leq 4, 0 \leq$ $\leq z \leq 3, y = 0$. Вектор напряженности $\vec{H} = \frac{2I}{\rho^2}(-yi + xj)$, ρ – расстояние от точки до оси Oz.

3.9. Найти поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$ через всю поверхность куба $|x| \leq a, |y| \leq a, |z| \leq a$ в направлении внешней нормали.

3.10. Найти поток вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность $\frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H$ (перевернутый конус с крышкой).

3.11. Найти поток вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность G: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4, z = 5$ в сторону увеличения переменной z.

4. Дивергенция векторного поля и теорема Гаусса – Остроградского

Дивергенция. Дивергенция векторного поля – это скалярная величина, которая характеризует плотность источников и стоков в окрестности данной точки. Обозначается $div\,\vec{a}$. В трехмерном пространстве выражается следующей формулой:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Свойства дивергенции

$$\operatorname{div}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}.$$

$$\operatorname{div}(v\vec{a}) = v \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot grad\ v,$$

где v – скалярная функция x, y, z.

Векторные поля, у которых $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, называются *соленоидальными*.

Пример. Найти дивергенцию поля линейных скоростей вращающейся жидкости.

Решение. Вектор линейной скорости имеет вид $\vec{v} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, поле линейных скоростей вращающейся жидкости – соленоидальное.

Теорема Гаусса – Остроградского. *Поток вектора $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S равняется интегралу от $div\,\vec{a}$, взятому по объему V, ограниченному поверхностью S*:

$$\oiint_S \vec{a}_n d\sigma = \iiint_V div\,\vec{a}\,dV.$$

<u>Пример</u>. Решить задачу 3.6 с помощью теоремы Гаусса – Остроградского.

Требуется найти поток радиуса-вектора $\vec{r}(x,y,z)$ через замкнутую поверхность прямого кругового цилиндра высотой H и радиусом основания R.

Найдем дивергенцию вектора $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

$$div\,r = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

По теореме Гаусса – Остроградского

$$\oiint_S \vec{r}_n d\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{r}\,dV = 3\iiint_V dV\,.$$

Тройной интеграл от единичной функции равен объему области интегрирования. В нашем случае объем цилиндра равен $\pi R^2 H$. Поэтому

$$\oiint_S \vec{r}_n d\sigma = 3\ \pi R^2 H.$$

Цилиндрическая и сферическая системы координат

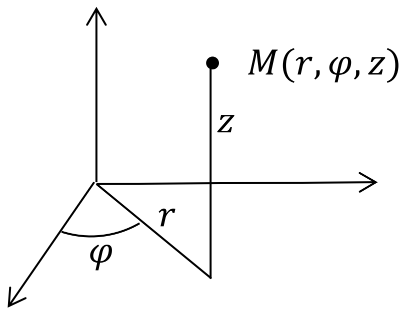

Рис. 4.1

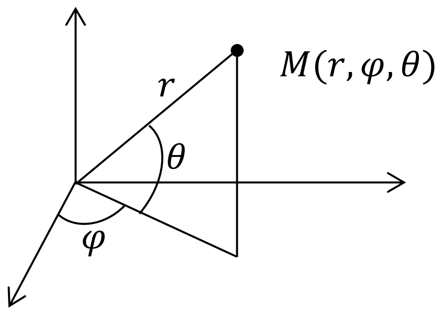

Рис. 4.2

Цилиндрическая система координат (рис. 4.1):

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z,\ \ dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Сферическая система координат (рис. 4.2):

$$x = r\cos\varphi\cos\theta,\ \ y = r\sin\varphi\cos\theta,\ \ z = r\sin\theta,$$

$$dx\,dy\,dz = r^2\cos\theta\ d\,r\ d\varphi\ d\theta.$$

Плоский случай. В случае кривой, лежащей в плоскости Oxy и вектора $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}$ поток вектора через линию L определяется криволинейным интегралом $\int_L\ a_x dy - a_y dx$.

Теорема Гаусса – Остроградского для плоского случая. *Поток вектора $\vec{a}$ через замкнутый контур L равняется интегралу от $div\,\vec{a}$, взятому по плоской области G, ограниченной контуром L*:

$$\oint_L\ a_x dy - a_y dx = \iint_G\ \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Пример. Вычислить поток вектора $\vec{a} = C\vec{r} = Cx\vec{\imath} + Cy\vec{\jmath}$ через окружность $x^2 + y^2 = R^2$ по определению потока и по формуле Гаусса – Остроградского.

Решение. $a_x = Cx, a_y = Cy$. Пусть $x = R\cos t,\ y = R\sin t,$ $dx = -R\sin t\,dt,\ \ dy = R\cos t\ \ dt,\ \ 0 \le t \le 2\pi$.

$$\oint_L\ a_x dy - a_y dx = \int_0^{2\pi} CR\cos t\,R\cos t\ \ dt - CR\sin t\,(-R\sin t\,dt) =$$

$$= CR^2\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = 2\pi CR^2.$$

Вычислим по формуле Гаусса-Остроградского.

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = C, \qquad \frac{\partial a_y}{\partial y} = C.$$

Следовательно,

$$\oint_L\ a_x dy - a_y dx = \iint_G\ 2C\ dx\,dy = 2CS(G),$$

где $S(G)$ – площадь области G. В данном случае $2CS(G) = 2C\pi R^2$.

Задание

4.1. Найти div $\left(xy\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} + xz\vec{k}\right)$.

4.2. Найти div $\frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$.

4.3. Вектор напряженности магнитного поля, созданного электрическим током силы I, текущим по оси Oz равен $\vec{H} = 2I\frac{-y\vec{\imath}+x\vec{\jmath}}{x^2+y^2}$. Вычислить $\operatorname{div}\vec{H}$.

4.4. Найти поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{\imath} + y^3\vec{\jmath} - z^3\vec{k}$ через всю поверхность куба $0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a$ в направлении внешней нормали.

4.5. Найти с помощью теоремы Гаусса – Остроградского поток вектора $\vec{a} = x^2y\vec{\imath} + xy^2\vec{\jmath} + xyz\vec{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ в направлении внешней нормали.

4.6. Найти поток вектора $\vec{a} = x^2y\vec{\imath} - xy^2\vec{\jmath} + (x^2 + y^2)z\vec{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le H$ в направлении внешней нормали.

4.7. Решить задачу 3.6 с помощью теоремы Гаусса – Остроградского.

4.8. Вычислить поток постоянного вектора $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}$ через произвольную плоскую замкнутую кривую L.

4.9. Вычислить поток вектора $\vec{a} = (x^3 - y)\vec{\imath} + (y^3 + x)\vec{\jmath}$ через окружность радиуса R с центром в начале координат.

———

4.10. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = x^2y\vec{\imath} + xy^2\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$ в точке $P(1; 2; -1)$.

4.11. Найти дивергенцию градиента скалярного поля $u = x^3y^2z$ в точке $P(1; -1; 1)$.

4.12. Решить задачу 3.10 с помощью теоремы Гаусса – Остроградского.

4.13. Найти поток вектора $\vec{a} = x^2\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$ через всю поверхность призмы $0 \le x \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ в направлении внешней нормали.

4.14. Вычислить поток вектора $\vec{a} = x\vec{\imath} - y\vec{\jmath}$ вдоль произвольной замкнутой кривой L.

5. Криволинейный интеграл второго рода. Формула Грина

Пусть на дуге $\widetilde{AB}$ задано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}) = a_x(x, y, z)\vec{\imath} + {}$ $+a_y(x, y, z)\vec{\jmath} + a_z(x, y, z)\vec{k}$. Криволинейный интеграл второго рода (линейный интеграл) обозначается

$$\int_{\widetilde{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{\widetilde{AB}} a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz.$$

В случае параметрического задания дуги $\widetilde{AB}$: $x = x(t), y = y(t)$, $z = z(t), t_1 \le t \le t_2$, линейный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int_{\widetilde{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{t_1}^{t_2} \Big(a_x\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) \ + a_y\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) +$$

$$+a_z\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\Big)\, dt.$$

Здесь t_1 и t_2 – значения параметра t, отвечающие точкам A и B. Линейные интегралы зависят от направления, по которому мы проходим дугу $\widetilde{AB}$:

$$\int_{\widetilde{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = -\int_{\widetilde{BA}} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

Физический смысл линейного интеграла – работа силового поля $\vec{a}$ при перемещении по кривой $\widetilde{AB}$.

Линейный интеграл от вектора $\vec{a}$ по замкнутому контуру C называется циркуляцией вектора поля по данному контуру и обозначается символом $\oint_C \ \vec{a} \cdot d\vec{r}$. При постановке задачи надо указать направление обхода. Положительным считается обход против часовой стрелки.

Для плоского случая справедлива формула Грина.

Теорема. *Пусть функции a_x и a_y непрерывны вместе с производными $\frac{\partial a_y}{\partial x}$ и $\frac{\partial a_x}{\partial y}$ в замкнутой области $\overline{D} = D \cup C$. Здесь D – область, лежащая внутри контура С. Тогда*

$$\iint_D \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_C \ a_x dx + a_y dy.$$

Направление обхода контура С – положительное.

Условия независимости линейного интеграла от выбора пути

Пусть в области G выполняются условия теоремы и

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y},$$

тогда

а) циркуляция $\oint_C \ \vec{a} \cdot d\vec{r}$ по любому замкнутому контуру, лежащему внутри области G, равна нулю;

б) линейный интеграл по дуге $\widetilde{AB}$ не зависит от выбора пути, соединяющим точки A и B. Предполагается, что эти пути лежат внутри области G.

Пример 1. Найти работу силового поля $\vec{F} = x^2\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$ при перемещении материальной точки вдоль первого витка винтовой линии $x = R\cos t, \ \ y = R\sin t, \ \ z = ht \ \ (0 \le t \le 2\pi)$.

Решение. Работа силового поля $A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

$$A = \int_L x^2dx + y^2dy + z^2dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} (R^2 \cos^2 t \cdot R(-\sin t) + R^2 \sin^2 t \cdot Rcos\, t + h^2t^2)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (R^2 \cos^2 t \cdot Rd(\cos t) + R^2 \sin^2 t \cdot R\, d(\sin t) + h^2t^2dt) =$$

$$= R^3 \left(\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\sin^3 t}{3}\right) + h^2 \frac{t^3}{3}\bigg|_0^{2\pi} = h^2 \frac{(2\pi)^3}{3}.$$

Пример 2. Вычислить $\int_L (1 - x^2)y\, dx + x(1 + y^2)\, dy$, если контуром интегрирования L служит окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Применим формулу Грина:

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} = \big(x(1 + y^2)\big)'_x = 1 + y^2, \qquad \frac{\partial a_x}{\partial y} = \big(y(1 - x^2)\big)'_y = 1 - x^2.$$

Тогда

$$\int_L (1 - x^2)y\, dx + x(1 + y^2)\, dy = \iint_D \big((1 + y^2) - (1 - x^2)\big)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D (y^2 + x^2) dx\, dy.$$

Здесь D – круг $x^2 + y^2 \le R^2$. Перейдем к полярной системе координат: $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ dx\, dy = r\, dr\, d\varphi$.

Тогда

$$\iint_D (y^2 + x^2)dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2\, r\, dr = \varphi\bigg|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^4}{4}\bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Пример 3. Вычислить $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy\, dx + (y - x)\, dy$ вдоль: а) $y = x$; б) $y = x^2$.

Решение: а) $y = x \ \Rightarrow dy = dx$.

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy\, dx + (y - x)\, dy = \int_0^1 x^2dx + 0\, dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3};$$

б) $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$.

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy\,dx + (y-x)\,dy = \int_0^1 x^3dx + (x^2-x)2x\,dx =$$

$$= \int_0^1 (x^3dx + 2x^3 - 2x^2)\,dx = 3\frac{x^4}{4} \quad - \frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}.$$

Хотя начальная и конечная точка пути интегрирования в обоих случаях совпадают, но результат получился разным.

Проверим, выполняются ли условия независимости интеграла от выбора пути: $\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}$. В нашем случае $\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial (y-x)}{\partial x} = -1$, с другой стороны $\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial (yx)}{\partial y} = x \neq -1 = \frac{\partial a_y}{\partial x}$, т.е. условие независимости не выполняется.

Задание

5.1. Вычислить $\int_L \; xy\,dx + x^2dy$ вдоль линии: 1) $y = x$, 2)$y = x^2$, 3) $y = x^3$.

5.2. $\oint_L \; y\,dx - x\,dy$, где L – эллипс $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, пробегаемый в положительном направлении.

5.3. Пользуясь формулой Грина, убедиться, что площадь S плоской области D, ограниченной кусочно-гладким контуром L можно найти с помощью интеграла $S = \frac{1}{2}\oint_L \; x\,dy - y\,dx = \oint_L \; x\,dy$.

5.4. Вычислить $\oint_L \; (x^2+y^2)dy$, где L – контур четырехугольника с вершинами (указанными в порядке обхода) в точках $A(0,0), B(4,0)$, $C(4,4)$, D(0, 4).

5.5. Вычислить $\int_L \; \frac{y^2\,dx - x^2\,dy}{x^2+y^2}$, где L – полуокружность $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

5.6. Вычислить

$$\int_L \; x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\;dz,$$

где L – отрезок прямой от точки (1, 1, 1) до точки (2, 3, 4).

5.7. Проекция силы на оси координат задается формулами $X = 2xy$ и $Y = x^2$. Показать, что работа силы при перемещении точки зависит только от начального ее положения и не зависит от формы пути. Вычислить величины работы при перемещении из точки (1, 0) в точку (0, 3).

5.8.Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz. Вычислить циркуляцию поля линейных скоростей вдоль окружности радиуса R, центр которой лежит на оси вращения, а плоскость окружности перпендикулярна к оси вращения. Вращение происходит в положительном направлении.

5.9. Вычислить $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} y\,dx + x\,dy$. Сначала убедиться, что интеграл не зависит от выбора пути, а затем выбрать путь.

―――

5.9. Вычислить $\int_L (x^2 - y^2)dx$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $(0, 0)$ до точки $(2,\ 4)$.

5.10. Используя формулы, доказанные в задаче 5.3, найти площадь эллипса $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t$.

5.11. Вычислить $\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy\,dx + x^2\,dy$. Сначала убедиться, что интеграл не зависит от выбора пути, а затем выбрать путь.

5.12. В каждой точке плоскости на материальную точку действует сила, имеющая постоянную величину F и направление положительной оси абсцисс. Найти работу, совершаемую этой силой, при движении точки по дуге окружности $x = R\cos t,\ \ y = R\sin t$, лежащей в первом квадранте.

5.13. Применив формулу Грина, вычислить интеграл

$\oint_{(c)} y^2 dx + \ (x+y)^2 dy$ по контуру ΔABC с вершинами $A(a; 0), B(a; a)$ и $C(0; a)$.

6. Ротор векторного поля и формула Стокса

Ротором векторного поля $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ называют вектор:

$$rot\ \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}\,.$$

Для запоминания используется символическая формула:

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Поле, для которого ротор всюду равен нулю, называется *безвихревым*.

Теорема Стокса. Циркуляция вектора $\vec{a}$ по замкнутой линии L равна потоку его ротора через произвольную поверхность G, лежащую в векторном поле и имеющую своей границей линию L:

$$\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \oint_C a_x dx + a_y dy + a_z dz = \iint_G rot\,\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma.$$

При этом единичный вектор $\vec{n}$ нормали к поверхности G направлен в такую сторону, чтобы обход контура L происходил в положительном по отношению к $\vec{n}$ направлении.

Пример 1. Найти $rot\ a = rot(z\vec{i} + xj + y\vec{k})$.

Решение.

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Пример 2. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ по окружности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = R$ в положительным направлении относительно орта $\vec{k}$.

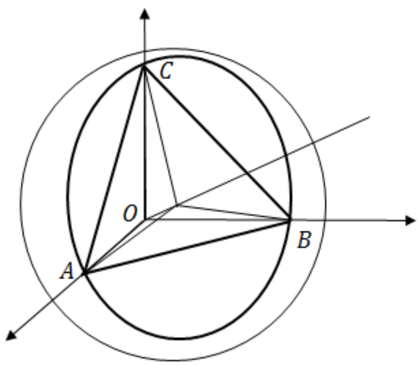

Рис. 6.1

Решение. Сечение сферы плоскостью – это окружность (обозначим ее L). Точки $A(R,0,0)$, $B(0,R,0)$, $C(0,0,R)$ лежат как на сфере, так и на плоскости. Следовательно, они лежат на окружности L. Найдем стороны треугольника ABC: $|AC| = |AB| = |CB| = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$.

Окружность L описана вокруг равнобедренного треугольника со стороной $R\sqrt{2}$. По справочнику радиус окружности, описанной вокруг правильного треугольника со стороной a, равен $a/\sqrt{3}$. Поэтому радиус окружности L равен $\sqrt{\frac{2}{3}}\,R$. Чтобы воспользоваться формулой Стокса нужно выбрать поверхность, натянутую на окружность L. Пусть это будет круг, лежащий в плоскости $x+y+z=R$. Нормальный вектор $\vec{N}=(1,1,1)$. Его длина равна $\sqrt{3}$. Единичный вектор $\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Скалярное произведение $rot\,\vec{a}\cdot\vec{n}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$. Следовательно, поток вектора $\vec{a}$ через круг будет равен площади круга умноженной на $\sqrt{3}$.

$$\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint_G rot\,\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\sqrt{3}\,\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,R\right)^2=\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}.$$

Задание

6.1. Найти $rot(\vec{r})$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

6.2. Найти $rot\,xyz(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$.

6.3. Показать, что напряженность магнитного поля $\vec{H}$ (задача 4.3) образует в своей области определения безвихревое поле.

6.4. Жидкая среда вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+$ $+\omega_z\vec{k}$ вокруг оси, проходящей через начало координат. Найти ротор вектора линейной скорости $\vec{v}$. Указание. Линейная скорость равна $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$.

6.5. Интеграл $\oint_L (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+\,(x^2+y^2)\,dz$, взятый по некоторому замкнутому контуру, преобразовать с помощью формулы Стокса в интеграл по поверхности, «натянутой» на этот контур.

6.6. Вычислить интеграл $\oint_L x^2y^3dx+dy+z\,dz$, где контур L – окружность $x^2+y^2=R^2, z=0$: а) непосредственно; б) используя формулу Стокса, взяв в качестве поверхности полусферу $z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Интегрирование по окружности в плоскости xOy ведется в положительном направлении.

6.7. При помощи теоремы Стокса найти циркуляцию вектора $\vec{a}=z^2\vec{i}+\,x^2\vec{j}+y^2\vec{k}$ по сечению сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=$ $=R$ в положительным направлении относительно орта $\vec{k}$.

6.8. Найти работу, которую совершит сила $\vec{F}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ при движении по пути, описанном в предыдущей задаче.

―――

6.9. Найти ротор вектора $\vec{a}=(z+x)\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}$.

6.10. Найти ротор вектора $\vec{a}=(2x+y)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+\vec{k}$.

6.11. При помощи теоремы Стокса найти циркуляцию вектора $\vec{a}=$ $=z^2\vec{i}+\,x^2\vec{j}+y^2\vec{k}$ по контуру треугольника ABC, $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$.

6.12. Вычислить с помощью теоремы Стокса циркуляцию $\oint_L yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ по контуру ΔOAB с вершинами $O(0,0,0)$, $A(1,1,0)$ и $B(1,1,1)$.

7. Потенциальное векторное поле

Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ называется *потенциальным*, если вектор поля $\vec{a}$ является градиентом некоторой скалярной функции $u = u(P)$:

$$\vec{a}(\vec{r}) = grad\, u(P).$$

Функцию $u(P)$ в этом случае называют потенциалом векторного поля. Необходимым и достаточным условием потенциальности дважды дифференцируемого в односвязной области поля является равенство нулю ротора этого поля:

$$rot\, \vec{a} \equiv 0.$$

Потенциальное поле обладает следующими свойствами.

1. В области непрерывности потенциала поля любой линейный интеграл от вектора поля, взятый между двумя точками поля, не зависит от пути интегрирования и равен разности значений потенциала поля в конце и начале пути интегрирования

$$\int_A^B (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_A^B (grad\, u, d\vec{r}) = \int_A^B du = u(B) - u(A).$$

2. Циркуляция вектора поля по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области непрерывности поля, равна нулю.

3. Если поле $\vec{a}$ потенциально, то потенциал поля $u(P)$ в произвольной точке P может быть вычислен по формуле

$$u(P) = \int_A^P (a, dr) + C.$$

Для вычисления интеграла можно выбрать любой путь – проще всего в качестве такого пути выбрать ломаную со звеньями, параллельными осям координат, соединяющую точки A и P. За точку A удобно принимать начало координат (если оно лежит в области непрерывности поля).

Пример. Найти потенциал поля $\vec{a} = 2xy\vec{\imath} + (x^2 - 2yz)\vec{\jmath} - y^2\vec{k}$.

Решение. Проверим, что поле потенциально:

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & (x^2-2yz) & -y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= i(-2y+2y) - j(0-0) + k(2x-2x) = 0$$

За путь интегрирования примем ломаную $OABP$, где $O(0,0,0), A(X,0,0)$, $B(X,Y,0), P(X,Y,Z)$. Находим:

$$u(X,Y,Z) = \int_{OABP} (\vec{a}, d\vec{r}) + C = \int_0^A (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_A^B (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_B^P (\vec{a}, d\vec{r}) + C,$$

$$(\vec{a},\ d\vec{r}) = 2xy\,dx + (x^2-2yz)\,dy - y^2\,dz$$

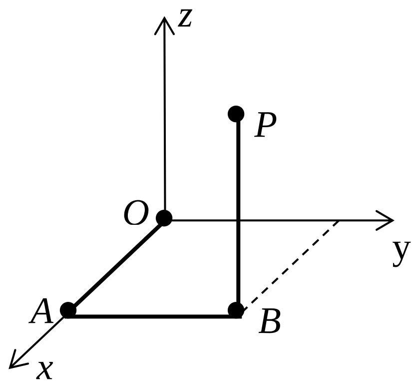

Рис.7.1

Так как на отрезке OA имеем
$y = z = 0, \quad dy = dz = 0, 0 \le x \le X,$
то

$$\int_0^A (\vec{a}, d\vec{r}) = 0.$$

Аналогично на отрезке AB имеем
$x = X, dx = 0, 0 \le y \le Y \quad = 0, z = 0$
$dz = 0,$ поэтому

$$\int_A^B (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_0^Y X^2 dy = X^2Y.$$

На отрезке BP имеем $x = X, y = Y, dx = dy = 0, 0 \le z \le Z$, значит,

$$\int_B^P (\vec{a}, d\vec{r}) = -\int_0^Z Y^2\,dz = -Y^2Z.$$

Таким образом, $u(X,Y,Z) = X^2Y - Y^2Z + C.$ Возвращаясь к переменным

$x, y, z,$ получаем

$$u(P) = x^2y - y^2z + C.$$

Если в плоском потенциальном поле есть точки, в которых поле не является непрерывным (так называемые особые точки), то циркуляция по замкнутому контуру, окружающую такую точку, может быть отлична от нуля. В этом случае циркуляция по контуру, обходящему данную особую точку один раз в положительном направлении, не зависит от формы контура и называется *циклической постоянной* относительно данной особой точки.

Задание Найти потенциалы следующих плоских и трехмерных полей:

7.1. $\vec{a} = (3x^2y - y^3)\,\vec{\imath} + (x^3 - 3xy^2)\vec{\jmath}$.

7.2. $\vec{a} = (yz - xy)\vec{\imath} + \left(xz - \frac{x^2}{2} + yz^2\right)\vec{\jmath} + (xy + y^2z)\,\vec{k}$.

7.3. Векторное поле образовано постоянным вектором $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$. Убедится, что это поле имеет потенциал, и найти его.

7.4. Векторное поле образовано силой, пропорциональной расстоянию от точки приложения до начала координат и направленной к началу координат. Показать, что поле потенциально, и найти его потенциал.

7.5. Убедиться в потенциальности поля $\vec{a} = \frac{x\vec{\jmath} - y\vec{\imath}}{x^2+y^2}$. Определить его особую точку и ее циклическую постоянную.

Найти потенциалы:

7.6. $\vec{a} = (2xy^3 - 5x^4)\,\vec{\imath} + (3x^2y^2)\vec{\jmath}$.

7.7. $\vec{a} = (z^2 + 2xy^2 + 3x^2y)\vec{\imath} + (2x^2y + x^3)\vec{\jmath} + 2xz\vec{k}$.

7.8. $\vec{a} = (yz + 2)\vec{\imath} + (xz + 3)\vec{\jmath} + (xy + 6)\vec{k}$.

7.9. $\vec{a} = (2z + y)\vec{\imath} + (3z + x)\vec{\jmath} + (3y + 2x + 6)\vec{k}$.

8. Соленоидальные и гармонические поля

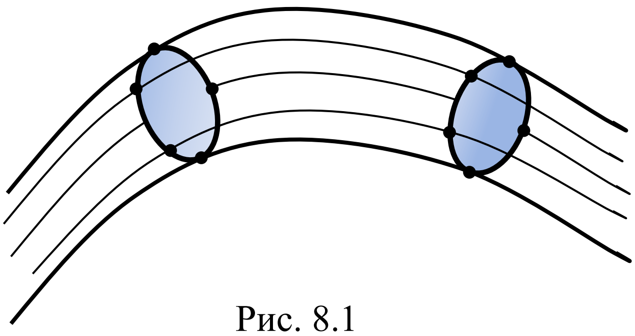

Рис. 8.1

Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ называется *соленоидальным*, если дивергенция этого поля равна нулю: div $\vec{a} \equiv 0$.

Для трехмерного поля это условие можно переписать в виде

$$div\ a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv 0.$$

В таком поле в силу теоремы Гаусса – Остроградского поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Если провести все векторные линии, проходящие через точки некоторого участка поверхности S, то их совокупность даст *векторную трубку* (рис. 8.1).

Задание Проверить соленоидальность следующих полей.

8.1. $\vec{a} = (x^2y + y^3)\vec{i} + (x^3 - xy^2)\vec{j}$.

8.2. $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} - (x^2 + y^2)z\vec{k}$.

8.3. $\vec{a} = \frac{x}{yz}\vec{i} + \frac{x}{yz}\vec{j} - \frac{(x^2+y^2)\ln z}{(xy)}\vec{k}$.

8.4. Доказать, что в соленоидальном поле поток вектора через любые поперечные сечения векторной трубки одинаков (рис. 8.1).

8.5. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz. Вектор линейной скорости $\vec{v} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$. Доказать соленоидальность поля $\vec{v}$.

8.6. Постоянный ток I течет по бесконечному проводнику, совпадающему с осью Oz. Он создает магнитное поле с напряженностью

$$\vec{H} = -2I\frac{y}{\rho^2}\vec{i} + 2I\frac{x}{\rho^2}\vec{j}.$$

Доказать, что поле $\vec{H}$ соленоидально.

Гармоническое поле. Векторное поле называется *лапласовым* (или *гармоническим*), если оно одновременно и потенциальное и соленоидальное, т.е. если

$$\operatorname{rot}\vec{a} \equiv 0 \quad \text{и} \operatorname{div}\vec{a} \equiv 0.$$

8.7. Проверить является ли поле $\vec{a} = (2Ax + 2By)\vec{i} + (2Bx - 2Ay)\vec{J}$ гармоническим.

8.8. Показать, что поле сил тяготения $\vec{F} = -\frac{k\vec{r}}{|r|^3}$, созданное точечной массой, является гармоническим.

Гармонические функции. Функция $u = u(x, y, z)$ называется гармонической, если оператор Лапласа от нее равен нулю, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Проверить являются ли гармоническими следующие функции.

8.9. $u = Ax + By + Cz + D$.

8.10. $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8.11. $u = r - x = \sqrt{x^2 + y^2} - x$.

8.12. $u = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

8.13. $u = Ax^3 + 3Bx^{2y} + 3Cxy^2 + Dy^3$.

9. Оператор Гамильтона и его применение

Все операции векторного анализа можно выразить при помощи оператора Гамильтона – символического вектора $\vec{\nabla}$ (читается – набла), определяемого равенством

$$\vec{\nabla} = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Умножим вектор $\vec{\nabla}$ на скалярную функцию $u(x, y, z)$:

$$\mathrm{grad}\, u = \vec{\imath}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \vec{\nabla} u.$$

Скалярное умножение $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{a}$:

$$\mathrm{div}\, \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (\vec{\nabla}, \vec{a}).$$

Векторное произведение $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{a}$:

$$rot\ \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{a}.$$

Задание Выразить через оператор набла следующие дифференциальные операции второго порядка.

9.1. $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, u$.

9.2. rot grad u.

9.3. grad div $\vec{a}$.

9.4. div rot $\vec{a}$.

9.5. rot rot $\vec{a}$.

Получить выражения для

9.6. div grad u;

через производные скалярного и векторного полей.

9.7. Найти grad div $\vec{a}$, если $\vec{a} = x^3\vec{\imath} + y^3\vec{\jmath} + z^3\vec{k}$.

9.8. Найти rot rot $\vec{a}$, если $a = xy^2\vec{\imath} + yz^2\vec{\jmath} + zx^2\vec{k}$.

9.9. Найти $\nabla^2\vec{a}$, если $\vec{a} = (y^2 + z^2)x\vec{\imath} + (x^2 + z^2)y\,\vec{\jmath} + (x^2 + y^2)z\,\vec{k}$, где $\nabla^2\vec{a} = \Delta a_x\vec{\imath} + \Delta a_y\vec{\jmath} + \Delta a_z\vec{k}$, Δ – оператор Лапласа.

10. Течение жидкости

Линия тока. *Линией тока* называется кривая, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной к кривой. При установившемся движении линия тока совпадает с траекторией движения частицы, а при неустановившемся – обычно от нее отличается. Линия тока – это частный случай векторной линии, которая рассматривалась в разделе «Векторное поле».

Уравнение векторной линии, т.е. в данном случае линии тока

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

Расходом жидкости через заданную поверхность S называется количество жидкости, протекающей через нее в единицу времени:

$$Q = \int_S v_n\,dS.$$

В случае идеальной несжимаемой жидкости уравнение неразрывности имеет вид:

$$div\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

следовательно, поле скоростей является *соленоидальным*.

Плоское течение. В этом случае вектор скорости имеет вид $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Рассмотрим функцию $\psi(x, y, t)$ такую, что $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$. Эта функция называется *функцией тока*. Рассмотрим, как ведет себя функция Ψ на линии тока. Уравнение линии тока

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow v_y dx - v_y dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy = 0.$$

Выражение в левой части этого равенства является полным дифференциалом функции ψ. Это значит, что на линии тока $d\psi = 0$, т.е. функция ψ – постоянная.

В плоском случае любые две линии тока образуют границы векторной трубки.

Расход жидкости через линию AB:

$$Q = \int_A^B d\,\psi = \psi_{\text{В}} - \psi_{\text{А}}$$

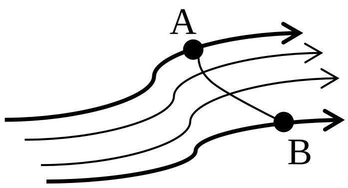

Рис. 10.1

Таким образом, расход не зависит от формы кривой и от выбора точек *A* и *B* на соответствующих линиях тока.

Безвихревые течения. Потенциал скорости. *Безвихревым* называется движение, при котором вращение жидких частиц отсутствует, а угловая скорость вращения и вихрь скорости равны нулю: $2\vec{\omega} = rot\,\vec{v} = 0$. Как известно, условие $rot\,\vec{v} = 0$ означает потенциальность поля скоростей. Это значит, что найдется такая скалярная функция $\varphi(x, y, z)$, что $\vec{v} = grad\,\varphi$. Функция φ называется *потенциалом скорости* $\vec{v}$.

Таким образом, поле скоростей безвихревого движения является потенциальным, но выше говорилось, что оно соленоидально. Это означает, что $div\,(grad\,\varphi) = 0$. Но $div\,(grad\,\varphi) = (\varphi'_x)'_x + \left(\varphi'_y\right)'_y + (\varphi'_z)'_z = \Delta\varphi =$

$= 0.$ Следовательно, потенциал φ является гармонической функцией всюду за исключением особых точек (если они есть).

В плоском случае $rot\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}$. Учитывая, что $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ и $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ получаем, что $rot\,\vec{v} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \Delta\psi$. Поэтому из условия $rot\,\vec{v} = 0$ следует $\Delta\psi = 0$ т.е. функция ψ также является гармонической.

Графически поле потенциала скорости плоского течения можно изобразить линиями равного потенциала (эквипотенциалями). Вектор скорости в любой точке направлен по касательной к линии тока и по нормали к эквипотенциали.

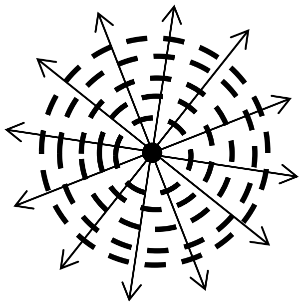

Рис. 10.2

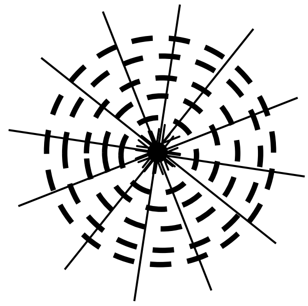

Рис. 10.3

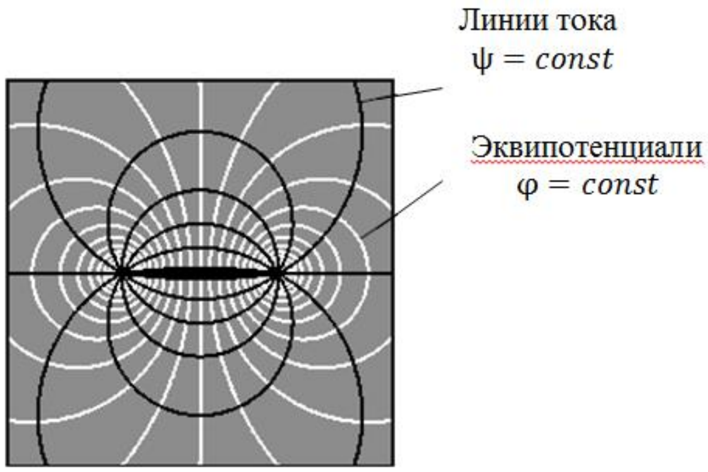

Рис. 10.4

На рис. 10.2 изображены линии тока и эквипотенциали в окрестности особой точки типа источник, на рис. 10.3 – в окрестности особой точки типа сток. Эквипотенциали изображены пунктирными линиями. На рис. 10.4 изображены две особые точки – источник и сток.

Пример. Пусть скорость течения имеет вид $\vec{v} = \frac{a\vec{r}}{|r|^2} = \frac{ax\vec{\imath}}{x^2+y^2} + \frac{ay\vec{\jmath}}{x^2+y^2}$. Найти: 1) потенциал скорости в точке, взяв в качестве начальной точки $(x_0, y_0) = (1, 0)$; 2) линии тока , 3) эквипотенциали; 4) функцию тока; 5) расход жидкости через отрезок AB, где $A(1,0), B(0,1)$.

Решение. 1) Проверим, что поле $\vec{v}$ потенциально. Для плоского случая $rot\ v = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$. В данном случае

$$v_x = \frac{ax}{x^2+y^2}, \quad v_y = \frac{ay}{x^2+y^2}.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{ay}{x^2+y^2}\right)}{\partial x} = \frac{-ay \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\ ;$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{ax}{x^2+y^2}\right)}{\partial y} = \frac{-ax \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Очевидно, $rot\ v = 0$, следовательно, поле скоростей потенциально.
Вычислим потенциал с помощью линейного интеграла:

$$\varphi(x_1, y_1) = \int_{AB} v_x dx + v_y dy = \int_{(1,0)}^{(x_1,y_1)} \frac{ax}{x^2+y^2}\, dx + \frac{ay}{x^2+y^2} dy$$

Соединим точки $(1,0)$ и (x_1, y_1) ломанной ACB (рис 10.5).

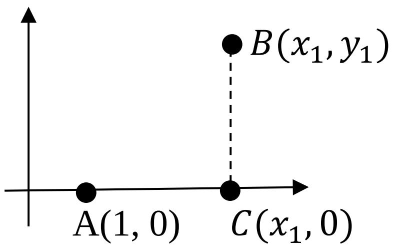

Рис. 10.5

На AC: $y = 0,\ dy = 0$

$$\int_{(1,0)}^{(x_1,0)} \frac{ax}{x^2+y^2}\, dx + \frac{ay}{x^2+y^2} dy =$$

$$= \int_1^{x_1} \frac{ax}{x^2+0}\, dx = \int_1^{x_1} \frac{ax}{x^2}\, dx = a \ln x\Big|_1^{x_1} =$$

$= a \ln x_1$.

На CB: $x = x_1, dx = 0 \Rightarrow \int_{(x_1,0)}^{(x_1,y_1)} \frac{ax}{x^2+y^2}\, dx + \frac{ay}{x^2+y^2} dy = \int_0^{y_1} \frac{ay}{x_1^2+y^2} dy =$

$$= \frac{a}{2} \ln(x_1^2 + y^2)\Big|_0^{y_1} = \frac{a}{2} \ln(x_1^2 + y_1^2) - \frac{a}{2} \ln x_1^2 = \frac{a}{2} \ln(x_1^2 + y_1^2) - \frac{2a}{2} \ln x_1$$

Складывая интегралы по AC и CB, получим равенство:

$$\varphi(x_1, y_1) = \frac{a}{2}\ln(x_1^2 + y_1^2)$$

или

$$\varphi(x, y) = \frac{a}{2}\ln(x^2 + y^2) = a\ln\sqrt{x^2 + y^2} = a\ln r.$$

2) Найдем эквипотенциали. Их уравнения $\varphi(x, y) = const.$ В данном случае $\frac{a}{2}\ln(x^2 + y^2) = const \Rightarrow x^2 + y^2 = C.$ Мы получили систему окружностей с общим центром в начале координат.

3) Найдем линии тока. Их уравнения

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow \frac{(x^2 + y^2)dx}{ax} = \frac{(x^2 + y^2)dy}{ay} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя получаем $\ln x + \ln C = \ln y \Rightarrow y = Cx.$ Мы имеем систему прямых, проходящих через начало координат. При этом саму точку O мы должны исключить, так как в ней функция $\varphi(x, y)$ не определена и при приближении к ней стремится к $-\infty$. Поэтому лучше говорить о лучах, выходящих из начала координат (рис.10.2).

4) Вычислим функцию тока $\psi(x, y)$. Так как $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ и $v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$, то функцию тока можно вычислить с помощью линейного интеграла

$$\psi(x_1, y_1) = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy = \int_{(1,0)}^{(x_1,y_1)} -\frac{ay}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{ax}{x^2 + y^2} dy.$$

Выберем такой же путь ACB как при вычислении функции $\varphi(x_1, y_1)$. Тогда на AC $y = 0, dy = 0.$

$$\int_{AC} -v_y dx + v_x dy = \int_1^{x_1} -\frac{a \cdot 0}{x^2 + y^2} dx = 0.$$

На CB $x = x_1 = const,\ dx = 0.$

$$\int_{CB} -v_y dx + v_x dy = \int_0^{y_1} \frac{ax_1}{x_1^2 + y^2} dy = \frac{ax_1}{x_1} arctg \frac{y}{x_1}\Big|_0^{y_1} = a\, arctg \frac{y_1}{x_1}.$$

Следовательно,

$$\psi(x, y) = a\, arctg \frac{y}{x}.$$

5) Найдем расход жидкости через отрезок AB, где $A(1, 0), B(0, 1)$. По формуле:

$$Q = \int_A^B d\,\psi = \psi_B - \psi_A = a\left(arctg\,\frac{1}{0} - arctg\frac{0}{1}\right) = a\frac{\pi}{2}.$$

Задание

По известному потенциалу скорости найти скорость движения жидкости, линии уровня (эквипотенциали), линии тока, функцию тока и расход жидкости через линию AB, где $A(1,0), B(0,1)$.

10.1. Потенциал $\varphi(x,y) = ax + by$.

10.2. Потенциал $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$.

10.3. В трехмерном случае потенциал $\varphi(x,y,z) = \frac{a}{|r|}$. Найти вектор скорости, линии уровня (эквипотенциали), линии тока.

ОТВЕТЫ

К главе 1.

1.1. $grad\, u = -2x\vec{i} - 2y\vec{j}$. **1.2**. $\frac{\partial u}{\partial l} = 2 + \sqrt{2}$; $grad\, u = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$; $|grad\, u| = 2\sqrt{3}$. **1.3**. $\vec{N} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 10\vec{k}$. **1.4**. $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{yz+xz+xy}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$. **1.5**. $\operatorname{tg}\varphi \approx 0{,}432$. **1.6**. 0. **1.7**. $\frac{1}{|r|^2}$. **1.8**. $\frac{\partial u}{\partial n} = 2\sqrt{6}$, $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$. **1.9**. $\vec{N} = (1; 11; 5)$. **1.10**. $\vec{N} = \left(\frac{17}{5}; \frac{11}{5}; 1\right)$. **1.11**. $\vec{N} = (-4; 8; 1)$.
1.12. $(10xy - 3y^3; 5x^2 - 9xy^2 + 4y^3)$. **1.13**. 5. **1.14**. $\operatorname{tg}\varphi \approx 4{,}87$; $\varphi \approx 78^\circ 24'$. **1.15**. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

К главе 2

2.1. Гиперболы $xy = C$ (при $C = 0$ – совокупность координатных осей). **2.2**. Прямые $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$. **2.3**. Линии пересечения гиперболических цилиндров $y^2 - x^2 = C_1$ с такими же цилиндрами $z^2 - x^2 = C_2$.
2.4. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = bt$. **2.5**. $\frac{\sqrt{3}}{360}$. **2.6**. $2\sqrt{2}\frac{\pi}{3}$. **2.7**. 4π. **2.8**. $\frac{3}{2}\pi a^3$. **2.9**. $\frac{8}{3}\pi R^4$. **2.10**. Окружности $x^2 + y^2 = C^2$. **2.11**. Параболы $y^2 = 2(x + C)$. **2.12**. $\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = 1$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y^2} = 4$. **2.13**. $4\sqrt{61}$. **2.14**. $\frac{\sqrt{3}}{120}$. **2.15**. $\frac{\pi R^3}{4}$.

К главе 3

3.1. $a^3/6$. **3.2**. $2\pi a$. **3.3**. $4HR^3/15$. **3.4**. $\pi R^2 H/4$. **3.5**. $\pi R^2 H/3$.
3.6. $3\pi R^2 H$. **3.7**. $\frac{3\omega}{2}(b^2 - a^2)$. **3.8**. $3\ln 4$. **3.9**. 0. **3.10**. πHR^2. **3.11**. 20.

К главе 4

4.1. $x + y + z$. **4.2**. $-2/(x + y + z)^{\frac{5}{3}}$. **4.3**. 0. **4.4**. a^5. **4.5**. $\frac{R^5}{3}$. **4.6**. $\frac{\pi R^4 H}{2}$. **4.7**. $3\pi R^2 H$. **4.8**. 14. **4.9**. 1. **4.10**. πHR^2. **4.11**. 1,5 . **4.13**. 1,25. **4.14**. 0.

К главе 5

5.1. Во всех трех случаях интеграл равен 1. **5.2**. $-2\pi ab$. **5.4**. 64. **5.5**. $-4a/3$. **5.6.** 13. **5.7**. 0. **5.8**. $2\pi\omega R^2$. **5.9**. 8. **5.10.** –56/15. **5.11**. πab. **5.12**. 1. **5.13**. $-|F|R$. **5.14**. $\frac{2}{3}a^3$.

К главе 6

6.1. 0. **6.2.** $x(z^2-y^2)\vec{i}+y(x^2-z^2)\vec{j}+z(y^2-x^2)\vec{k}$. **6.4**. $rot\, v=2\omega$. **6.5.** $2\iint_S\,(x-y)dx\,dy+(y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dx\,dz$. **6.6**. $-\pi R^6/_8$. **6.7**. $\frac{4}{3}\pi R^3$. **6.8**. 0. **6.9**. $rot\,\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. **6.10**. 0. **6.11**. 4. **6.12**. 0.

К главе 7

7.1. x^3y-xy^3+C. **7.2**. $xyz-\frac{x^2y}{2}+\frac{y^2z^2}{2}+C$. **7.3**. $(a,\vec{r})+C$. **7.4**. $u=-\frac{1}{2}\,k(x^2+y^2+z^2)+C$. **7.5**.Особая точка $O(0,0)$, циклическая постоянная равна 2π. **7.6**. $x^2y^3-x^5+C$. **7.7**. $x^2y^2+x^3y+xz^2+C$.
7.8. $2x+3y++6z+xyz+C$.

К главе 9

9.1. $\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. **9.2**. $\nabla\times\nabla u=0$.
9.3. $\nabla(\nabla,\vec{a})$. **9.4**. $(\nabla,\nabla\times\vec{a})=0$. **9.5.** $\nabla\times\nabla\times\vec{a}$. **9.6.** Δu. **9.7**. $6\vec{r}=$ $=6(x\vec{i}+y\vec{j}+zk)$. **9.8**. 0. **9.9**. $4\vec{r}=4\big(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\big)$.

К главе 10

10.1. $\vec{v}=(a,b)$; $ax+by=C$ – эквипотенциали, $y=\frac{b}{a}x+C$ – линии тока, $\psi(x,y)=-bx+ay$ – функция тока, $Q=a+b$ – расход жидкости.
10.2. $\vec{v}=(2x,-2y)$, $x^2-y^2=C$ – эквипотенциали, $y=\frac{C}{x}$ – линии тока, функция тока $\psi(x,y)=2xy$, расход $Q=0$. **10.3**. $\vec{v}=\frac{-a\vec{r}}{|r^3|}=-a\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ линии тока – лучи, выходящие из начала координат, эквипотенциали – сферы с центром в начале координат.

Литература

1. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 – 484 с.
2. Болгов В.А., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа: учеб. пособ. – М.: Наука, 1986 – 336 с.

3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособ. — М.: Наука, 1985 – 448 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. II. – М.: Наука, 1976 – 672 с.
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – 14-е изд.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 – 336 с.
6. Горская Т.Ю. Математическая теория поля: Курс лекций. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2013 – 31с.

СОДЕРЖАНИЕ