РОССИЯ ФЕДЕРАЦИЯСЕНЕҢ МӘГАРИФ ҺӘМ ФӘН МИНИСТРЛЫГЫ

КАЗАН ДӘҮЛӘТ АРХИТЕКТУРА-ТӨЗЕЛЕШ УНИВЕРСИТЕТЫ

Югары математика кафедрасы

«Векторлар алгебрасы һәм сызыкча алгебра. Аналитик геометрия» темалары буенча практик дәресләргә биремнәр

270800.62 Төзелешкә әзерләү юнәлешләренең көндезге бүлегендә укучы беренче курс студентлары өчен

1 семестр

Казан
2013

УДК 512.9:516
ББК 22.151.5
З-18

З-18 Методические указания к практическим заданиям по теме «Векторная алгебра и линейная алгебра. Аналитическая геометрия» (на татарском языке) / Сост.: М.И. Закиев, Р.Р. Шарипов = «Векторлар алгебрасы һәм сызыкча алгебра. Аналитик геометрия» темалары буенча гамәли дәресләргә биремнәр. 270800.62 Төзелешкә әзерләү юнәлешләренең көндезге бүлегендә укучы беренче курс студентлары өчен. 1 семестр.– Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2013. – 38 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Гамәли дәресләр өчен биремнәр инженер-төзүче белгечлеге (бакалавриат) буенча белем алучы 1 курс студентлары өчен математика курсына туры китереп төзелгән, кирәкле биремнәрне һәм җавапларны үз эченә ала.

Рецензент
К.ф.-м.н, доцент
Ф.Г. Габбасов

УДК 512.9: 516
ББК 22.151.5

1 *дәрес*. 2-нче һәм 3-нче тәртип билгеләгечләр . Комплекслы саннар. Комплекслы саннар өстендә гамәлләр

<u>Икенче, өченче тәртип билгеләгечләр</u>

Дүрт $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}.$ саннары бирелсен: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$ *формуласы белән бирелгән сан икенче тәртип билгеләгеч дип атала.* Билгеләгечнең тамгасы сул якта язылган.

Тугыз сан бирелсен: $a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33}.$ *Өченче тәртип билгеләгеч дип түбәндәге сан атала:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Биредә сул якта өченче тәртип билгеләгечнең тамгасы китерелә. $a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33}$ саннары билгеләгечнең *элементлары дип атала,* аларны $a_{ij},$ дип тамгалыйбыз. Биредә i – элементның юл номеры; j – багана номеры.

Өченче тәртип билгеләгечтә a_{ij} элементы торган i юлын һәм j баганасын сызып ташласак, калган элементлардан торган икенче тәртип билгеләгечне M_{ij} дип тамгалыйлар һәм аны a_{ij} элементына туры килгән *минор* дип атыйлар.

A_{ij} саны a_{ij} элементының *алгебраик өстәмәсе* дип атала. Ул сан түбәндәге формула буенча исәпләнә: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$. Әгәр $i+j$ саны җөп сан булса, алгебраик өстәмә M_{ij}-ка тигез була, әгәр i+j так сан булса, ул $-M_{ij}$ була. Мәсәлән, биредә

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Шулай итеп, өченче тәртип билгеләгече мондый рәвеш ала:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Димәк, *өченче тәртип билгеләгеч беренче юлдагы элементларны аларның алгебраик өстәмәләренә тапкырлап һәм аларны кушып табыла. Билгеләгечне өченче юл элементлары буенча таркатканда:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Комплекслы саннар һәм алар өстендә гамәлләр

Комплекслы сан дип түбәндәге аңлатма атала:

$$z = x + iy,$$

монда x һәм y – реаль саннар, i – түбәндәге тигезлекләрдән ачыклана торган уйланма берәмлек:

$$i = \sqrt{-1} \ , \qquad\qquad i^2 = -1.$$

x санын z санының *реаль өлеше*, ә y санын *уйланма өлеше* дип атыйлар һәм $x = \mathrm{Re}\, z,\ \ y = \mathrm{Im}\, z.$ дип билгелиләр.

Әгәр $z_1 = x_1 + iy_1$ һәм $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекслы саннарында $x_1 = x_2,\ \ y_1 = y_2.$ булса, алар үзара тигез булалар $(z_1 = z_2),.$ $z = x + iy = 0,$ булса, $x = 0$ һәм $y = 0.$ Уйланма өлешләре бер-берсеннән тамгалары белән генә аерылган комплекслы $z = x + iy$ һәм $\overline{z} = x - iy$ саннары *иярешле саннар* дип аталалар.

Сумма һәм аерма. $z_1 = x_1 + iy_1$ һәм $z_2 = x_2 + iy_2.$ комплекслы саннары бирелсә,

$$z_1 + z_2 = \left(x_1 + x_2\right) + i\left(y_1 + y_2\right),\ z_1 - z_2 = \left(x_1 - x_2\right) + i\left(y_1 - y_2\right).$$

рәвешендә бирелгән комплекс саннар аларның суммасы һәм аермасы була.

$z_1 \cdot z_2$ *тапкырчыгышы* – бу саннарны алгебра законнары буенча икебуын рәвешендә тапкырлап табылган комплекс сан:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(x_1 + iy_1\right) \cdot \left(x_2 + iy_2\right) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2 y_1y_2\,,$$

яки

$$z_1 \cdot z_2 = \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) + i\left(x_1y_2 + y_1x_2\right).$$

$z_2 = x_2 + iy_2$ һәм $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$ иярешле саннары өчен $z_2 \cdot \overline{z}_2 = (x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2) = x_2{}^2 - (iy_2)^2$ яки $z_2 \cdot \overline{z_2} = x_2{}^2 + y_2{}^2$.

Бүлү. z_1 санын z_2 гә бүлү өчен, z_1/z_2 вакланмасының санаучысын һәм ваклаучысын санаучыга иярешле булган $\overline{z_2}$, комплексны санына тапкырлыйбыз. Бүлү нәтиҗәсе:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2 - i^2 y_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2}$$

яки

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2}.$$

Мисал. $z_1 = 1 + 2i,\ \ z_2 = 3 - 4i.$ булсын. Шул чакта:

$$z_1 + z_2 = (1+3) + i(2-4) = 4 - 2i,\ \ z_1 - z_2 = (1-3) + i\big(2 - (-4)\big) = -2 + 6i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1+2i)\cdot(3-4i) = 3 - 4i + 6i - 8i^2 = (3+8) + i(6-4) = 11 + 2i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)} = \frac{3+4i+6i+8i^2}{3^2+4^2} = \frac{(3-8)+i(4+6)}{25} =$$

$$= -\frac{5}{25} + i\frac{10}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Аудитор биремнәр

1. Билгеләгечләрне хисапларгә:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$.

Җаваплар: 1) 18; 2) 0; 3) 0; 4) 0.

2. Тигезләгез чишәргә:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$.

Җаваплар: 1) x=12; 2) x_1=–1, x_2=–4; 3) Чилеше юк.

3. Билгеләгечләрне хисапларга:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

Җаваплар: 1) –12; 2) 87; 3) –29.

4. $z_1 = -3 + i$, $z_2 = 6 - 5i$. Табарга: 1) $z_1 \pm z_2$; 2) z_1z_2; 3) z_1^2; 4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Җаваплар: 1) $3-4i$; $-9+6i$; 2) $-13+21i$; 3) $8-6i$; 4) $-\frac{23}{61}-\frac{9}{61}i$.

5. ± 1, $-2i$, $-1+i$, $2-3i$ комплекслы саннарын чагылдыручы нокталарны төзергә.

6. Тигезләмәләрне чишәргә:

1) $x^2+25=0$; 2) $x^2-2x+5=0$; 3) $x^2-4x+13=0$.

Җаваплар: 1) $\pm 5i$; 2) $1\pm 2i$; 3) $2\pm 3i$.

Өй эше

1. Билгеләгечләрне хисапларга:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2. Тигезләмәләрне чишәргә:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix}=0$; 2) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix}=\frac{3}{2}$; 3) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix}=0$;

4) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}=0$.

3. Тигезсезлекләрне чишәргә:

1) $\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix}<0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix}<14$.

4. Билгеләгечләрне хисапларга:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$.

5. Тигезләмәне чишәргә:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

6. Тигезсезлекне чишәргә:

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix}>0.$$

7. ± 2, $\pm 3i$, $3+2i$, $3-2i$ комплекс саннарын чагылдыручы нокталарны төзергә.

8. 1) $z_1=-4+2i$, $z_2=3-i$. Табарга: $z_1\pm z_2$; 2) $z_1 z_2$; 3) z_1^2; 4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Өй эшенә җаваплар:

1. 1) 10; 2) –50; 3) x_2-x_1; 4) 1.

2. 1) $x=2$; 2) $x_1=-\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{3}{2}$; 3) $x=2$; 4) $x=\frac{\pi(2n+1)}{6}$.

3. 1) $x\in(-10;\infty)$; 2) $x\in(-1;7)$.

4. 1) 29; 2) 0; 3) $2a^3$.

5. $x_1=-10,\ x_2=2$.

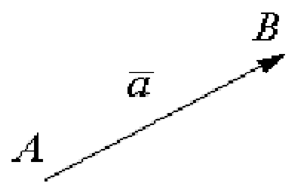
6. $x\in(-6;-4)$.

8. 1) $-1+i,\ -7+3i$; 2) $-10+10i$; 3) $12-16i$; 4) $-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$.

2 дәрес. Векторлар белән турысызыклы гамәлләр. Ике векторның скалярча тапкырчыгышы

Үзенең санча кыйммәте белән тулысынча билгеләнгән зурлык *скаляр зурлык* дип атала. Әйтик, күләм V, мәйдан S , вакыт t − скаляр зурлыклар.

Фәзадагы ике ноктаны тоташтырган һәм юнәлеше билгеле булган туры кисемтәсе *вектор* дип атала. A векторның башы, ә B векторның ахыры булса, ул $\overrightarrow{AB}$ яки $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ дип тамгалана.



Векторның башын һәм ахырын тоташтырган кисемтәнең озынлыгы аның модуле (озынлыгы) дип атала. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ векторының озынлыгы $\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB$ яки $|\vec{a}|=a.$ дип тамгалана. Әгәр дә векторның башы ахыры белән тәңгәл килсә, андый вектор нуль-вектор дип атала һәм $\overline{O}$ дип тамгалана.

Әгәр $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бер турыда яки параллель турыларда ятсалар, алар *коллинеар векторлар* дип атала.

$\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары *тигез* ($\vec{a}=\vec{b}$) булсын өчен:

аларның озынлыклары тигез ($|a|=|b|$);

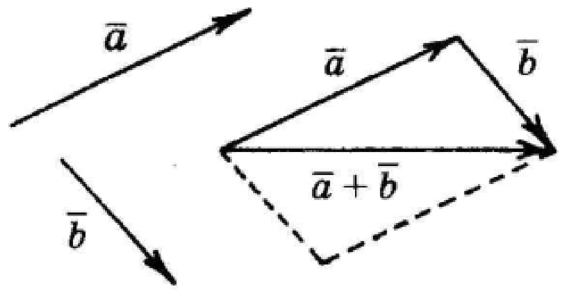
алар коллинеар;

юнәлешләре бер булырга тиеш.

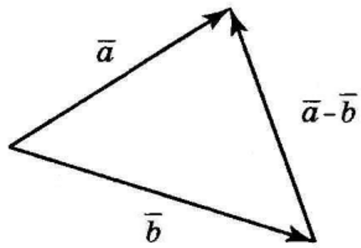
<u>Векторларны кушу</u>

$\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бирелсен. $\vec{b}$ векторын үзенә паралель күчереп, башын $\vec{a}$ векторының ахырына туры китерик. Бу очракта $\vec{a}$ векторының башы белән $\vec{b}$ векторының ахыры тоташтырган вектор $\vec{a}$ *һәм* $\vec{b}$ векторларының суммасы дип атала һәм болай языла: $\vec{a}+\vec{b}$.

Бу сумманы башкача да табып була. Моның өчен $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларының башлангычларын бер ноктага китереп, векторларны параллелограммның яклары итеп параллелограмм төзиләр. Бу очракта параллелограммның уртак түбәсеннән чыккан диагонале ике векторның суммасын бирә.



Векторлар аермасы. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының башларын бер ноктага туры китерик. Ул вакытта алучы $\vec{b}$ векторының очын алынучы $\vec{a}$, векторының очы белән тоташтырган вектор $\vec{a}$ белән $\vec{b}$ арасындагы аерманы билгели һәм болай языла: $\vec{a}-\vec{b}$. Рәсемнән күренгәнчә, $\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$:



Векторны даими санга тапкырлау. $\vec{a}$ векторы һәм λ саны бирелсен. $\vec{a}$ *векторының* λ санына тапкырчыгышы дип $\vec{c}=\lambda\,\vec{a}\ =\vec{a}\,\lambda$ зурлыгы атала. Бу векторның мондый үзлекләре бар:

ул $\vec{a}$ векторына коллинеар;

озынлыгы $|\vec{c}\,| = |\,\lambda\,|\cdot|\,\vec{a}\,|$;

юнәлеше $\lambda > 0$ булганда $\vec{a}$ векторыныкы кебек үк, $\lambda < 0$ булганда – капма-каршы.

Тапкырчыгышның төп үзлекләре:

$$(\lambda+\mu)\cdot\vec{a} = \lambda\cdot\vec{a} + \mu\cdot\vec{a};$$

$$\lambda\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\cdot\vec{a} + \lambda\cdot\vec{b};$$

$$(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})=\mu\cdot(\lambda\cdot\vec{a}).$$

$\vec{a}$ векторы бирелсен. Шул ук юнәлештә озынлыгы 1-гә тигез итеп алынган $\overrightarrow{a^0}$ векторы *берәмлек вектор* дип атала һәм $|\overrightarrow{a^0}| = 1$ дип языла.

$\vec{a}$ векторының озынлыгы:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Мисал:. *Oxyz* фәзасында А һәм В нокталары $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ координаталары белән бирелгән. Алар арасындагы ераклыкны табарга.

А һәм В нокталары арасындагы ераклык:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Скаляр тапкырчыгыш. $\vec{a}$ *һәм* $\vec{b}$ векторлары бирелсен. Ике векторның озынлыклары тапкырчыгышын алар арасындагы почмакның косинусына тапкырлап килеп чыккан сан бу ике векторның скаляр тапкырчыгышы дип атала. Димәк, билгеләмә буенча, скаляр тапкырчыгыш түбәндәгечә языла:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi\,.$$

Скаляр тапкырчыгышны $\overline{(a,b)}$ (яки $\vec{a}\,\vec{b}$) рәвешендә язалар.

Скаляр тапкырчыгыш түбәндәге үзлекләргә ия:

$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;

$(\lambda\,\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda\ (\vec{a}, \vec{b})$, биредә λ – скаляр тапкырлаучы;

$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$.

Скаляр тапкырчыгыш:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z\,.$$

Ике вектор арасындагы почмакны табу:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\ .$$

$\cos\varphi$-ны белсәк, φ, $0 \le \varphi \le \pi$ интервалында φ почмагын таба алабыз.

Ике векторның ортогональлек (перпендикулярлык) шарты:

$$a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z = 0.$$

Аудитор биремнәр

1. Бирелгән нокталарны декарт системасында күрсәтергә

A(3; 4; 6), B(–5; 3; 1), C(1; –3; –5), D(0; –3; 5), E(–3; –5; 0), F(–1, –5; –3).

2. A(1; –2; –3), B(2; –3; 0), C(3; 1; –9), D(–1; 1; 12) нокталары бирелгән. 1) A һәм C; 2) B һәм D; 3) C һәм D нокталары арасындагы озынлыкны табарга.

Җаваплар: 1) 7; 2) 13; 3) 5.

3. A(3; –1; 2) һәм B(–1; 2; 1) нокталары бирелгән. $\overline{AB}$ һәм $\overline{BA}$ векторларының координаталарын табарга.

Җавап: $\overline{AB}$=(–4; 3; –1); $\overline{BA}$=(4; –3; 1).

4. $\bar{a}$=(3; –2; 6) һәм $\bar{b}$=(–2; 1; 0) векторлары бирелгән.Түбәндәге векторларның координат күчәрләренә проекцияләрен билгеләргә:

1) $\bar{a}+\bar{b}$; 2) $\bar{a}-\bar{b}$; 3) $2\bar{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\bar{b}$; 5) $2\bar{a}+3\bar{b}$; 6) $\frac{1}{3}\bar{a}-\bar{b}$.

Җаваплар: 1) (1; –1; 6); 2) (5; –3; 6); 3) (6; –4; 12); 4) (1; $\frac{1}{2}$; 0); 5) (0; –2; 12); 6) (3; $-\frac{5}{3}$; 2).

5. A(–1; 5; –10), B(5; –7; 8), C(2; 2; –7), D(5; –4; 2) нокталары бирелгән. $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ векторларын коллинеарлыкка тикшерергә. Аларның кайсы озынрак һәм ничә тапкыр, юнәлешләрен ачыкларга.

Җавап: $\overline{AB}$ $\overline{CD}$ га караганда 2 тапкыр озынрак, юнәлешләре бер.

1) $\bar{a}$ һәм $\bar{b}$ векторлары $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ почмагы хасил итәләр; $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$ булганын исәптә тотып, 1) ($\bar{a}$, $\bar{b}$); 2) ($\bar{a}+\bar{b}$,$\bar{a}+\bar{b}$) зурлыкларын табарга.

Җавап: 1) –6; 2) 13.

6. $|\bar{a}|$=3, $|\bar{b}|$=5 бирелгән. α нинди кыйммәт алганда $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ һәм $\bar{a}-\alpha\bar{b}$ векторлары бер-берсенә перпендикуляр булуын билгеләргә.

Җавап: $\alpha=\pm\frac{3}{5}$.

7. $\bar{a}$=(4; –2; –4), $\bar{b}$=(6; –3; 2) векторлары бирелгән.Исәпләргә:

1) ($\bar{a}$, $\bar{b}$); 2) $\sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$; 3) ($2\bar{a}-3\bar{b}$, $\bar{a}+2\bar{b}$).

Җаваплар: 1) 22; 2) 6; 3) –200.

8. $\bar{f}$=(3; –2; –5) көче куелган нокта турысызыклы хәрәкәт итеп A(2; –3; 5) ноктасыннан B(3; –2; –1) ноктасына күчкәндә нинди эш башкаруын табарга.

Җавап: 31.

9. $\bar{a}$=(2; –4; 4) һәм $\bar{b}$=(–3; 2; 6) векторларыннан хасил булган почмакның косинусын табарга.

Җавап: cos $\varphi=\frac{5}{21}$.

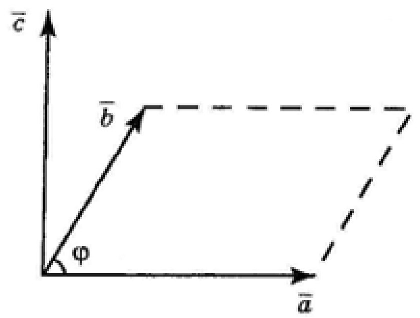
Өй эше

1. Координаталар башы O ноктасыннан A(4; –2; –4), B(–4; 12; 6), C(12; –4; 3); D(12; 16 –15) нокталарына кадәр ераклыкларны табарга.
2. $M_1(3;\ 2;\ -5)$, $M_2(1;\ -4;\ 3)$, $M_3(-3;\ 0;\ 1)$ өчпочмакның түбәләре. Өчпочмак якларының уртасын табарга.
3. Очы $\bar{a}=(3;\ -1;\ 4)$ белән туры килгән N ноктасын билгеләргә. Аның икенче башы M(1; 2; –3) ноктасына туры килүе билгеле.
4. α һәм β нинди кыйммәт алганда, $\bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j}+\beta\bar{k}$ һәм $\bar{b}=\alpha\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}$ векторлары коллинеар булуын билгеләргә.
5. $\bar{a}$ һәм $\bar{b}$ векторлары $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$ почмагын хасил итәләр. $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$, икәнлеген белеп: 1) $(\bar{a},\bar{a})$; 2) $(\bar{b},\bar{b})$; 3) $(3\bar{a}-2\bar{b},\bar{a}+2\bar{b})$; 4) $(\bar{a}-\bar{b},\bar{a}-\bar{b})$ скаляр тапкырчыгышларын табарга.
6. $\bar{a}=(4;\ -2;\ -4)$, $\bar{b}=(6;\ -3;\ 2)$ векторлары бирелгән. Хисапларга:
   1) $\sqrt{(\bar{b},\bar{b})}$; 2) $(\bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}+\bar{b})$; 3) $(\bar{a}-\bar{b},\ \bar{a}-\bar{b})$.
7. өчпочмакның A(–1; –2; 4), B(–4; –2; 0) һәм C(3; –2; 1) түбәләре бирелгән. B түбәсендәге эчке почмакны билгеләргә.

Җаваплар:

1. OA=6; OB=14; OC=13; OD=25.
2. (2; –1; 1); (–1; –2; 2); (0; 1; –2).
3. N(4; 1; 1).
4. $\alpha=4$; $\beta=-1$.
5. 1) 9; 2) 16; 3) –61; 4) 37.
6. 1) 7; 2) 129; 3)41.

3 дәрес. Векторларның векторча тапкырчыгышы



$\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының векторча тапкырчыгышы дип түбәндәге үзлекләргә ия булган вектор атала ($\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ дип тамгалана):

$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, биредә φ – бирелгән векторлар арасындагы почмак,

$|\vec{c}|$ – $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларыннан төзелгән параллелограммның мәйданы;

$\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$, ягъни $\vec{c}$ векторы $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары яткан яссылыкка перпендикуляр;

$\vec{c}$ векторының юнәлеше мондый: $\vec{c}$ векторының очыннан караганда, $\vec{a}$ векторыннан $\vec{b}$ векторына иң кыска борылыш сәгать теле йөрешенә каршы була.

Векторча тапкырчыгыш $\vec{a}\times\vec{b}$: $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ рәвешендә дә язып була.

Векторча тапкырчыгышның түбәндәге үзлекләре бар:

$\vec{a}\times\vec{b}=(-1)[\vec{b}\times\vec{a}]$; $[\lambda\vec{a}\times\vec{b}]=[\vec{a}\times\lambda\vec{b}]=\lambda[\vec{a}\times\vec{b}]$; $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$

Ике векторның векторча тапкырчыгышы түбәндәге формула буенча табыла:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Ике векторның коллинеарлык шарты. Әгәр нульгә тигез булмаган ике $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары өчен $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, шарты үтәлсә, алар коллинеар (параллель) булалар:

$$a_x/b_x=a_y/b_y=a_z/b_z.$$

Соңгы аңлатма – проекцияләре белән бирелгән ике векторның коллинеарлык шарты.

Векторларның катнаш тапкырчыгышы һәм аның геометрик мәгънәсе. Өч векторның компланарлык шарты

$\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$. өч векторы бирелсен. $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларының векторча $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}.$ тапкырчыгышын скалярча $\vec{c}$ векторына тапкырласак, $\left(\vec{d},\vec{c}\right)$ саны барлыкка килә. Аны өч векторның *катнаш (вектор-скаляр) тапкырчыгышы* дип атыйлар һәм ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) рәвешендә язалар. Димәк

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = \left(\vec{d},\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{a}\times\vec{b}\right],\vec{c}\right).$$

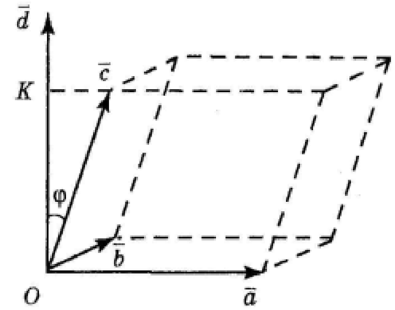
Векторлар үз проекцияләре белән бирелгәндә:

$$\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z),\ \vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z),\ \vec{c}=(c_x,\ c_y,\ c_z)$$

векторча тапкырчыгышны өченче тәртип билгеләгеч рәвешендә язып була:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Катнаш тапкырчыгышның геометрик мәгънәсе. $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторларының башларын бер ноктага туры китереп һәм ул векторларны бер түбәдән чыккан кабыргалар итеп карасак, параллелепипед килеп чыга:



ансат кына тикшереп була $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\pm V$ монда V − параллелепипедның күләме.

Өч векторның компланарлык шарты

Билгеләмә. Бер яссылыкта ятучы векторларны компланар векторлар дип атыйлар.

Әгәр нульгә тигез булмаган өч $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторы өчен

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$ тигезлеге үтәлсә, алар компланар була.

Аудитор биремнәр

1. $\bar{a}$ һәм $\bar{b}$ векторлары $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ почмагын хасил итәләр ; $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=5$ булса , $|[\bar{a},\bar{b}]|$ зурлыгын хисапларга.

   Җавап: 15.

2. $\bar{a}$ һәм $\bar{b}$ векторлары $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$ почмагын хасил итәләр, $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$ булса, 1) $[\bar{a},\bar{b}]^2$, ягъни $([\bar{a},\bar{b}],[\bar{a},\bar{b}])$; 2) $[2\bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}+2\bar{b}]^2$; 3) $[\bar{a}+3\bar{b},\ 3\bar{a}-\bar{b}]^2$ зурлыкларын хисапларга.

   Җаваплар: 1) 3; 2) 27; 3) 300.

3. $\bar{a}$=(3; −1; −2) һәм $\bar{b}$=(1; 2; −1) векторлары бирелгән. Векторча тапкырчыгыш координаталарын табарга:

   1) $[\bar{a},\bar{b}]$; 2) $[2\bar{a}-\bar{b},\ 2\bar{a}+\bar{b}]$.

   Җаваплар: 1) (5; 1; 7); 2) (20; 4; 28).

4. A(1; 2; 0), B(3; 0; −3), C(5; 2; 6) нокталары бирелгән. ABC өчпочмагы мәйданын табарга.

   Җавап: 14 кв. бер.

5. $\overline{a}$=(1; −1; 3), $\overline{b}$=(−2; 2; 1) һәм $\overline{c}$=(3; −2; 5) векторлары бирелгән. $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ зурлыгын табарга.

Җавап: −7.

6. A(1; 2; −1), B(0; 1; 5), C(−1; 2; 1) һәм D(2; 1;3) нокталарының бер яссылыкта ятуын исбатларга.

7. Тетраэдрның түбәләре: A(2; 3; 1), B(4; 1; −2), C(6; 3; 7) һәм D(−5; −4; 8). Тетраэдрның D түбәсеннән төшерелгән биеклек озынлыгын табарга.

Җавап: 11.

Өй эше

1. $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары үзара перпендикуляр, $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$ булса, хисаплап табарга: 1) $|[\overline{a}+\overline{b}, \overline{a}-\overline{b}]|$; 2)$|[3\overline{a}-\overline{b}, \overline{a}-2\overline{b}]|$.

2. $\overline{a}$=(3; −1; −2) һәм $\overline{b}$=(1; 2; −1) векторлары бирелгән. $[2\overline{a}+\overline{b}, \overline{b}]$ векторча тапкырчыгыш координатларын табарга.

3. $\overline{a}$=(2; −1; 2), $\overline{b}$=(1; 2; −3) һәм $\overline{c}$=(3; −4; 7) булса, $\overline{a}$, $\overline{b}$ һәм $\overline{c}$ векторларының компланарлыгын билгеләргә

4. Тетраэдрның күләме V=5, аның өч түбәсе A(2; 1; −1), B(3; 0; 1), C(2; −1; 3) нокталарында урнашкан. Дүртенче, OY күчәрендә яткан D түбәсенең координатларын табарга.

Җаваплар: 1. 1) 24; 2) 60. 2. (10; 2; 14). 3. Компланар. 4. D_1(0; 8; 0), D_2(0; −7; 0).

4 дәрес. «Векторлар алгебрасы» темасы буенча контроль эш. «Векторлар алгебрасы» темасы буенча коллоквиум

5 дәрес. Матрицалар. Алар өстендә гамәлләр. Кире матрица. Сызыкча тигезләмәләр системасын матрицалар аша, Крамер формулалары белән чишү

m юлы, n баганасы булган турыпочмаклы саннар таблицасы *матрица* дип атала һәм

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

рәвешендә тамгалана.

$a_{11}, a_{12}, \ldots$ – матрицаның *элементлары* дип атала. А матрицасын аның гомуми элементы a_{ij} аша $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ дип кыскача язып була. Биредә i – элементның юл номеры, ә j – багана номеры була.

Әгәр матрицаның юллары тәртибен саклап, баганалар белән алмаштырсак, А матрицасына *транспонирланган* (күчендерелгән) матрица килеп чыга:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Әгәр А матрицасының юллары саны баганалар санына тигез булса, (m=n), андый матрица *квадрат матрица* дип атала.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадрат матрицасы өчен n саны *матрицаның тәртибе* дип атала. $a_{11},\ a_{22},\ \dots,\ a_{nn}$ элементлары аның *төп диагонален* тәшкил итәләр.

Квадрат матрицага тиңдәш

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

саны *матрицаның билгеләгече* дип атала.

Әгәр матрицаның төп диагонәлендә урнашкан элементлары 1 гә тигез булса, ә калган барлык элементлары нуль булса, андый матрица *берәмлек матрица* дип атала һәм түбәндәгечә билгеләнә:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Әгәр матрица бер юлдан гына торса, аны *юл матрица* дип атыйлар һәм, мәсәлән, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ дип тамгалыйлар. Бер баганадан гына торган матрица *багана матрица* яки *матрица-багана* дип атала. Мәсәлән,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Юллары саны һәм баганалыры саны тиңдәшле рәвештә тигез булган $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ m,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$ матрицалары бирелгән булсын. Әгәр аларның барлык тиңдәш элементлары тигез булса, ягъни i һәм j ның һәртөрле кыйммәтләре өчен $a_{ij} = b_{ij}$ булса, мондый матрицалар *тигез* матрицалар дип атала. Бу очракта $\left(a_{ij}\right)=\left(b_{ij}\right)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$ яки $A=B$ дип язылα .

$C=A+B$ матрицасы A һәм B матрицаларның *суммасы* дип атала, аның элементлары һәртөрле i, j өчен $a_{ij}+ b_{ij}$ ка тигез була, ягъни $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Әлеге кагыйдәне болай да язып була:

$$\left(a_{ij}\right)+\left(b_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$$

Ике матрицаның *аермасы* төшенчәсе охшаш рәвештә кертелә. Әгәр А матрицасын λ санына тапкырласак, мондый матрица килеп чыга:

$$A\lambda = \lambda\left(a_{ij}\right)=\left(\lambda a_{ij}\right)$$

Матрицаларны тапкырлау. $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$ матрицалары бирелсен. А матрицасының m юлы һәм k баганасы, ә В матрицасының k юлы һәм n баганасы булсын. $C=AB$ матрицасы бу матрицаларның тапкырчыгышы дип атала. Аның элементлары болай хисаплана:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj},\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n.$$

Матрицалар тапкырчыгышының үзлекләре. Өч A, B һәм C матрицалары бирелсен. Алар өчен түбәндәге кагыйдәләр үтәлә:

$$A\left(BC\right)=\left(AB\right)C;\ A\left(B+C\right)=AB+AC.\ AE=EA=A.$$

Кире матрица. Квадрат А матрицасы бирелсен:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

һәм аның билгеләгече $\Delta\left(A\right)$ га тигез булсын:

$$\Delta\left(A\right)=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Бу билгеләгеч нульгә тигез булмаса һәм A_{ij} аның a_{ij} элементы өчен алгебраик өстәмә булса,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\Delta\left(A\right)} & \cdots & \dfrac{A_{n1}}{\Delta\left(A\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{A_{1n}}{\Delta\left(A\right)} & \cdots & \dfrac{A_{nn}}{\Delta\left(A\right)} \end{pmatrix}$$

матрицасы А матрицасына *кире матрица* дип атала һәм A^{-1} дип тамгалана.

Димәк, кире A^{-1} матрицасын төзү өчен, түбәндәге гамәлләрне башкарырга кирәк:

1. А матрицасының элементларын аларның алгебраик өстәмәләре белән алыштырырга;
2. Алгебраик өстәмәләрне А матрицасының билгеләгече $\Delta(A)$га бүлеп чыгарга;
3. Табылган матрицаны транспонирларга кирәк.

Моннан күренгәнчә, А матрицасының билгеләгече нульгә тигез булмаганда гына кире (A^{-1}) матрицасын төзеп була.

n билгесезле n сызыкча тигезләмәләр системасы бирелсен:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases},$$

Биредә $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ – эзләнә торган билгесезләр, $a_{11},\ a_{12},\ \dots,\ a_{nn}$ – бирелгән саннар (тигезләмәләр системасының коэффициентлары), $b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n$ – системаның ирекле буыннары, алар да билгеле саннар. $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ табарга кирәк ди. Моның өчен өч матрица кертәбез:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

А матрицасы – системаның *коэффициентлар* матрицасы, X – *билгесезләр матрицасы*, *B -ирекле буыннар матрицасы* дип атала.

Крамер формуласы

Бу формула билгесезләрне хисапларга мөмкинлек бирә:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \cdots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Биредә Δ – системаның билгеләгече ($\Delta \neq 0$ дип исәпләнә). $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \dots,\ \Delta_n$ – Δ билгеләгеченнән 1,2,...,n баганаларын ирекле буыннар баганасына алмаштырып табылган билгеләгечләр:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n\end{vmatrix}.$$

Аудитор биремнәр:

1. A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3\\ 2 & 3 & -2\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$ булса, A+B матрицасын табарга.

   Җавап: A+B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6\\ 2 & 4 & 0\\ 5 & 0 & 7\end{pmatrix}$.

2. A=$\begin{pmatrix} 5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 4 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ булса, 5A–2B матрицасын табарга.

   Җавап: $\begin{pmatrix} 17 & 6\\ 13 & 9\end{pmatrix}$.

3. A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ булса, AB һәм BA матрицаларын табарга.

   Җавап: AB=$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4\\ 16 & 10 & 4\\ 13 & 3 & 5\end{pmatrix}$, BA=$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8\\ -2 & 5 & -4\\ 8 & 11 & 14\end{pmatrix}$.

4. A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 5\end{pmatrix}$ булса, AB ны табарга.

   Җавап: AB=$\begin{pmatrix} 5\\ 7\end{pmatrix}$.

5. A=$\begin{pmatrix} 3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ булса , A^{-1} не табарга.

   Җавап: A^{-1}=$\begin{pmatrix} 0,4 & -0,2\\ -0,1 & 0,3\end{pmatrix}$.

6. A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$ матрицасының киресен табарга.

$$\textit{Җавап}: A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

7. Матрица ысулын һәм Крамер формулаларын кулланып,

1) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ -2x+y+z=-1 \\ 2x-y+4z=-4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-y=8 \\ -2x+y+z=-5 \\ 2x-y+4z=10 \end{cases}$ тигезләмәләр системаларын чишәргә

Җавап: 1) x=1, y=2, z=–1; 2) x=2, y=–2, z=1.

Өй эше:

1. A=$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ булса, A+2B матрицасын табарга.
2. A=$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ булса, $2A^2+AB$ матрицасын табарга.
3. A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ булса, A^{-1} не табарга.
4. Матрица ысулын һәм Крамер формулларын кулланып, түбәндәге тигезләмәләр системасын чишәргә. $\begin{cases} 3x+2y-z=-1 \\ x+3y=-2 \\ y+2z=3 \end{cases}$

Җаваплар:

1) $\begin{pmatrix} 7 & 11 & 3 \\ 12 & -6 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$; 3) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 6/13 & -5/13 & 3/13 \\ -2/13 & 6/13 & -1/13 \\ 1/13 & -3/13 & 7/13 \end{pmatrix}$;

4) x=1, y=–1, z=2.

6 дәрес. Сызыкча алгебраик тигезләмәләрне Гаусс ысулы белән чишү

n билгесез : $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ зурлыкларыннан торган m сызыкча алгебраик тигезләмә бирелсен:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Биредә $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ коэффициентлары һәм ирекле $b_1, b_2, \ldots, b_m$ буыннары – бирелгән саннар.Тигезләмәләр саны билгесезләр санынннан кимрәк яки аңа тигез, ягъни $m \leq n$ булсын ($m > n$ булган очрак аерым тикшерү таләп итә).

Бу системаның чишелеше булырга яки булмаска мөмкин. Әгәр $x_1, x_2, \ldots, x_n$ билгесезәренең нинди дә булса кыйммәтләре югарыдагы системаның барлык тигезләмәләрен канәгатьләндерсә, бу саннар системаның *чишелеше*, ә система *бергәлекле система* дип атала. Әгәр дә системаның чишелеше юк икән, ул вакытта ул *бергәлексез* система дип атала, андый системаларны *тамырдаш* (эквивалент) системалар дип атыйлар.

Әгәр бергәлекле ике тигезләмәләр системаларының барлык чишелешләре бертөрле булса, ягъни бер системаның теләсә нинди чишелеше икенче системаның да чишелеше булса, андый системаларны *тамырдаш* (эквивалент) системалар дип атыйлар.

Бер системаны икенче тамырдаш система белән үзгәртүне *элементар үзгәртү* дип атыйлар .

Элементар үзгәртүләргә түбәндәгеләр керә:

1. Системага кергән тигезләмәләрнең урыннарын алмаштырып кую яки тигезләмәләрдәге кушылучы буыннарның урыннарын алмаштыру.
2. Теләсә кайсы тигезләмәнең ике ягын да нульгә тигез булмаган бер үк санга тапкырлау.
3. Берәр санга тапкырланган тигезләмәне теләсә кайсы тигезләмәгә кушу. Әлбәттә, сул як − сул як белән , уң як − уң як белән кушыла.

Элементар үзгәртүләр кулланганда $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$ тигезләмәсе килеп чыкса, аны теләсә нинди $x_1, x_2, \ldots, x_n$ саннары канәгатьләндерә.

Әгәр элементар үзгәртүләр нәтиҗәсендә $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b,\ b \neq 0$ тигезләмәсе килеп чыкса, бу каршылыклы (мөмкин булмаган) тигезләмәләр системасы була.

Хәзер *Гаусс* ысулы белән танышып узыйк.Алда күрсәтелгән системада $a_{11} \neq 0$ булмасын. (Әгәр $a_{11} = 0$ булса, тигезләмәләрнең урыннарын алыштырып, беренче урынга беренче билгесез янындагы коэффициенты нульгә тигез булмаган тигезләмәне куябыз.)

Беренче тигезләмәдән башка барлык калган тигезләмәләрдә x_1 не юкка чыгарабыз. Аның өчен 2 нче тигезләмәгә 1 нче тигезләмәне башта $(-a_{21}/a_{11})$ гә тапкырлап кушабыз. 1 нче тигезлзмзне $(-a_{31}/a_{11})$ гә тапкырлап 3 нче тигезләмәгә кушабыз. Шул тәртиптә барлык m–1 тигезләмәне үзгәртеп язабыз. Алда күрсәтелгән система түбәндәге системага әйләнә:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

$a'_{22} \neq 0$ булсын. (Әгәр $a'_{22} = 0$ булса, тигезләмәләрнең урыннарын алмаштырабыз яки тигезләмәләрдәге кушылучы буыннарның урыннарын алмаштырабыз.) 1 нче һәм 2 нче тигезләмәләрдән башка барлык калган тигезләмәләрдә 2 нче тигезләмәне кулланып, югарыда күрсәтелгән ысул ярдәмендә x_2 кергән буыннарны юкка чыгарабыз.

Әгәр үзгәртүләр нәтиҗәсендә $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b,\ b \neq 0$ рәвешендәге тигезләмә килеп чыкса, система бергәлексез (чишелешсез) була, һәм системаны башка тикшермибез. Әгәр система бергәлекле булса, күрсәтелгән үзгәртү юлын кирәк кадәр кулланып, ике очракның берсенә киләбез.

1. Баскычлы (трапециональ) очрак

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1r}x_r + \ldots + b_{1n}x_n = B_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2r}x_r + \ldots + b_{2n}x_n = B_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{rr}x_r + \ldots + b_{rn}x_n = B_r, \end{cases}$$

Биредә $r < n$.

2. Өчпочмак формасындагы система:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = B_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = B_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{nn}x_n = B_n. \end{cases}$$

Бу очракта m=n.

Башта 2 нче очракны карап узыйк. Системаның соңгы тигезләмәсеннән x_n ны табабыз, соңыннан астан икенче тигезләмәдән x_{n-1} . Шул тәртиптә астан өскә 1 нче тигезләмәдән x_1 табыла һәм чишелешне исәпләү тәгәлләнә.

Хәзер беренче очракны тикшерик. Бу системадагы $x_{r+1},\ x_{r+2},\ \ldots,\ x_n$ билгесезләренә ирекле кыйммәтләр бирсәк , тигезләмәләрнең уң яклары билгеле зурлыклар дип исәпләп була. Ул вакытта , соңгы тигезләмәдән x_r табыла , аннан соң астан 2 нче тигезләмәдән x_{r-1} табыла. Астан өскә таба эзлекле рәвештә $x_{r+1},\ x_{r+2},\ \ldots,\ x_n$ обилгесезләре табыла. $x_{r+1},\ x_{r+2},\ \ldots,\ x_n$ билгесезләре ирекле кыйммәтт алганлыктан соңгы система һәм аңа эквивалент булган системаның чиксез күп чишелеше була.

Аудитор биремнәр

Тигезләмәләр системасын Гаусс ысулы белән чишәргә:.

1. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Җавап: (1; 2; 3).

2. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Җавап: системаның $x_1 = -\frac{11}{4} + 13x_4 - \frac{31}{8}x_5$; $x_2 = -\frac{3}{8} - \frac{27}{16}x_5$; $x_3 = -1 + 5x_4 - \frac{3}{2}x_5$ формулаларына бәйле чиксез күп чишелеше бар, x_4 һәм x_5 – теләсә нинди реаль саннар.

3. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

Җавап: система бергәлексез.

4. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Җавап: (1; 2; 3).

5. Корылма механикасы фәнендә рамны күчешләр ысулы белән хисаплаганда

$$\begin{cases} 7z_1 + z_2 + 0,75z_3 = -0,5 \\ z_1 + 3,5z_2 + 0,75z_3 = 1 \\ 0,75z_1 + 0,75z_2 + 2,625z_3 = 0 \end{cases}$$

тигезләмәләр системасы килеп чыга. Билгесезләрне Гаусс ысулы белән хисапларга.

Җавап: $z_1 = -0,112$, $z_2 = 0,3311$, $z_3 = -0,0626$.

Өй эше:

Тигезләмәләр системасын чишәргә:

1. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

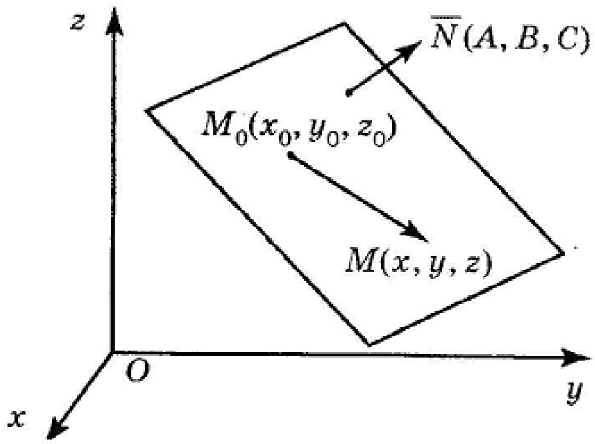
4. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Җаваплар: 1. (1; 2; 3); 2. Системаның $x_1 = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}x_3$; $x_2 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3$; $x_4 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3$ формулаларына бәйле чиксез күп чишелеше бар. x_3 – система теләсә нинди реаль сан. 3. Система бергәлексез; 4. (2; 1; 1).

7 дәрес. Өслек тигезләмәсе. Фәзадагы сызык тигезләмәсе. Икенче тәртип кәкреләр. Икенче тәртип өслекләр

Өслек, яссылыкның гомуми тигезләмәсе.

Өслек урнашкан *Oxyz* координаталар системасында M_0 ноктасының x_0, y_0, z_0 координаталары бирелгән. Яссылыкка перпендикуляр булган $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$ векторы *яссылыкның нормаль векторы* дип атала. Биредә A, B, C – бирелгән саннар.



$M(x, y, z)$ – яссылыкта ирекле рәвештә алынган нокта булсын. $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ векторын төзик. Ул бирелгән яссылыкта ята, шуңа күрә ул нормаль $\vec{N}$ векторына перпендикуляр була, димәк аларның скаляр тапкырчыгышы нульгә тигез, ягъни $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{N}\right) = 0$. Бу тигезлекнең сул ягын векторларның проекцияләре аша күрсәтик. Бу очракта ул болай языла:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Бу тигезләмә *яссылык тигезләмәсе* дип атала.

Яссылыкның гомуми тигезлө

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

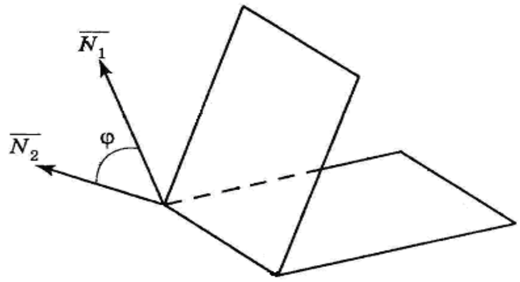
Ике яссылык арасындагы почмак, яссылыкларның параллельлек һәм перпендикулярлык шартлары

Oxyz фәзасында

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

тигезләмәләре белән ике яссылык бирелсен. A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 – бирелгән саннар. $\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ һәм $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$ – яссылыкларның нормаль векторлары.



Бу яссылыклар хасил иткән икекырлы почмакларның берсен ике яссылык арасындагы почмак дип алыйк һәм аны φ дип тамгалыйк. Бу почмак яссылыкларның нормаль векторлары арасындагы почмакка тигез булуы аңлашыла. Билгеле булганча, ике вектор арасындагы почмак бу векторлар арасындагы почмакның косинусы аша табыла:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Коэффициентлар ярдәмендә $\cos\varphi$ не табып була, ә инде аннан φ почмагы табыла.

Әгәр $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$, шартлары үтәлсә, яссылыклар бер-беренә параллель була, чөнки аларның нормаль векторлары бер-беренә параллель. Әгәр $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ була икән, яссылыклар бер-беренә перпендикуляр була, чөнки аларның нормаль векторлары бер-беренә перпендикуляр

<u>Фәзадагы туры сызык һәм аның тигезләмәсе</u>

Фәзадагы туры сызыкның гомуми тигезләмәләре. *Oxyz* фәзасында ике яссылык тигезләмәсе бирелсен:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

Монда $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2$ – билгеле саннар. Бу яссылыклар үзара паралель булмаса, алар туры сызык буенча кисешәләр һәм системага кергән тигезләмәләр туры сызык тигезләмәләре була. Тигезләмәләр системасы *фәзадагы туры сызыкның гомуми тигезләмәләре* дип атала.

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases}$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – туры сызыктагы нокта, $\vec{a} = (m, n, p)$ – юнәлтүче вектор.

Югарыда күрсәтелгән тигезләмәләр системасы *туры сызыкның параметрик тигезләмәләре* дип атала.

Туры сызыкның кануни тигезләмәсе. Бирелгән ике нокта аша үткән туры сызык тигезләмәләре

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

аңлатмасы *сызыкның кануни тигезләмәләре* дип атала. Биредә $x_0,\ y_0,\ z_0$ – турыда яткан M_0 ноктасының билгеле координатлары; $x,\ y,\ z$ – үзгәрешле координаталар, ягъни турыдагы теләсә нинди M ноктасы координаталары; $m,\ n,\ p$ – билгеле саннар, алар бирелгән юнәлткеч векторның координаталар күчәрләренә прекцияләре.

Бирелгән ике нокта аша үткән туры сызык тигезләмәләре. Ике $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right),\ M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ нокталары бирелсен. Алар аша үткән туры сызык тигезләмәсе:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Ике туры арасындагы почмак, параллельлек һәм перпендикулярлык шарты

Oxyz фәзасында кануни тигезләмәләр белән ике туры сызык бирелсен:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Биредә $x,\ y,\ z$ – үзгәрешле координатлар, калган зурлыклар – бирелгән саннар; $x_1,\ y_1,\ z_1$ – беренче турыда яткан M_1 ноктасы координаталары; $x_2,\ y_2,\ z_2$ – икенче турыда яткан M_2 ноктасының координаталары; $m_1,\ n_1,\ p_1$ – беренче туры сызыкта бирелгән $\vec{a_1}$ юнәлткеч векторының билгеле проекцияләре; $m_2,\ n_2,\ p_2$ – бирелгән юнәлткеч $\vec{a_2}$ векторы проекцияләре.

$\vec{a_1}$ һәм $\vec{a_2}$ векторлары арасындагы φ почмагын бу почмакның косинусы аша табып була:

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

φ почмагы 0 дән π га кадәр үзгәрә.

Әгәр $m_1/m_2=n_1/n_2=p_1/p_2$ булса , турылар параллель . Әгәр $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ булса, турылар перпендикуляр.

Икенче тәртип кәкреләр. Әйләнә

Үзгәрешле $x,\ y$ координаталары буенча икенче дәрәҗә тигезләмәсе

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

белән билгеләнгән кәкре *икенче тәртип кәкре* дип атала.

Биредә A, B, C, D, E, F – билгеле коэффициентлар, A, B, C коэффициентлары берьюлы нульгә әйләнми дип исәплибез, чөнки $A=B=C=0$ булганда тигезләмә беренче дәрәҗә тигезләмәгә әверелә.

Бу тигезләмәгә кагылышлы аерым очракларны карыйк.

Әйләнә. Радиусы R , ә үзәге $O_1(a,b)$ булган әйләнә тигезләмәсе болай языла:

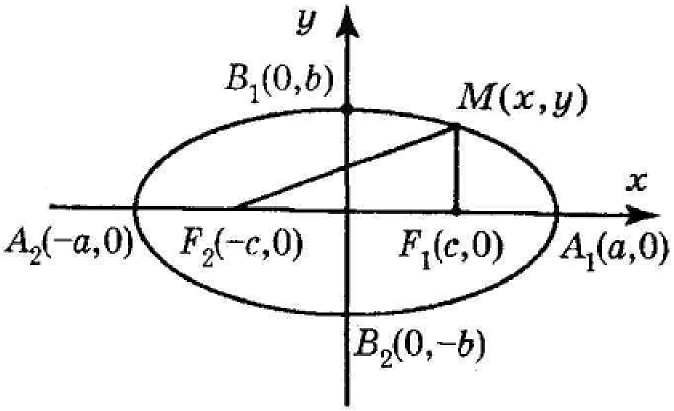
$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Эллипс

Фокуслар дип аталган ике ноктадан ераклыклары суммасы даими зурлыкка ($2a$, $a>0$) тигез булган нокталарның геометрик урыны *эллипс* дип атала.

Фокусларны F_1 һәм F_2 дип тамгалыйк, алар арасындагы ераклык $2c$ га тигез булсын, ягъни $F_1F_2=2c$. Ox күчәрен фокуслар аша үткәрик, ә координатлар башлангычын фокусларны тоташтырган кисемтә уртасында алыйк. Болай сайлап алынган күчәрләр өчен $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ була. $M(x,y)$ – эллипстагы ирекле нокта булса аны фокуслар белән тоташтырыйк. Эллипс билгеләмәсе буенча, M ноктасы өчен F_1MF_2 өчпочмагыннан:

$$F_1M+F_2M=2a.$$



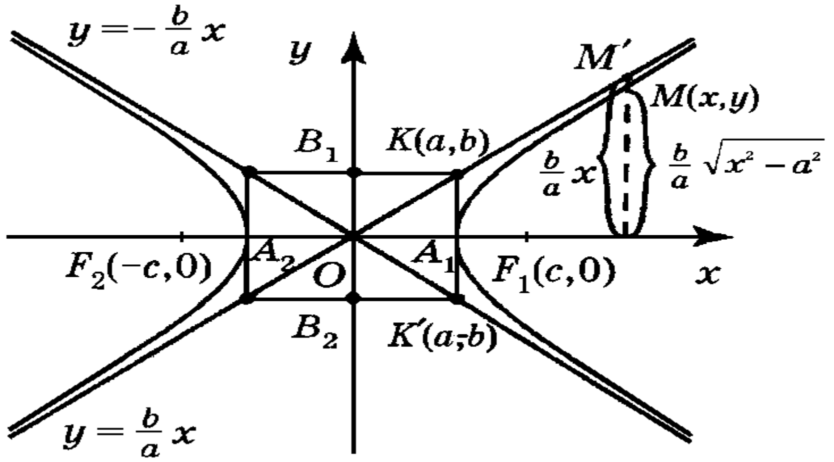
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$ тигезләмәсе эллипсның *кануни* тигезләмәсе дип атала.

$$b^2=a^2-c^2.$$

Гипербола

Бирелгән ике ноктадан ераклыклары аермасы даими *2a (a>0)* санына тигез булган һәм яссылыкта урнашкан нокталарның геометрик урыны *гипербола* дип атала. Бирелгән F_1 и F_2 нокталары фокуслар дип атала. Алар арасындагы ераклык *2c* га тигез булсын, ягъни $F_1F_2 = 2c$. Ox күчәрен фокуслар аша үткәрик, ә ккоординаталар башлангычы итеп F_1F_2 кисемтәсенең уртасын алыйк. Бу очракта фокусларның координаталары $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ була. Билгеләмә буенча, гиперболада ирекле рәвештә алынган $M(x,y)$ ноктасы өчен

$$F_1M - F_2M = \pm 2a.$$



Биредә плюс тамгасы сул яктагы аерма уңай булганда алына. Сул яктагы аерма тискәре булса, уң якта минус тамгасы алына. F_1M һәм F_2M ераклыклары эллипстагы кебек үк табыла:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Килеп чыккан аңлатма гипербола тигезләмәсе була. F_1F_2M өчпочмагыннан күренгәнчә, *2c>2a*, шуңа күрә, $b^2 = c^2 - a^2$, b – нульдән зур булган сан. Тигезләмәне нәкъ эллипс тигезләмәсен гадиләштергән кебек гадиләштереп була, һәм нәтиҗәдә гиперболаның *кануни тигезләмәсе* килеп чыга:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Түбәндәге тигезләмә белән бирелгән турылар гиперболаның *ассимптота*лары дип аталалар:

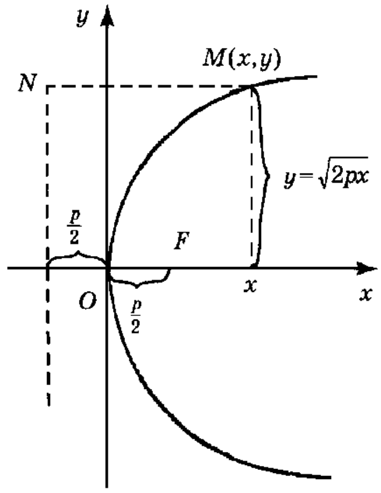
$y = -(b/a)x$.

$y=(b/a)x$

$A_1(a,0)$ һәм $A_2(-a,0)$ нокталары гиперболаның *түбәләре* дип атала (алар гиперболаның симметрия күчәре белән кисешү нокталары). Алар арасындагы $2a = A_1A_2$ ераклыгы – гиперболаның *реаль күчәре* дип, $B_1B_2 = 2b$ − гиперболаның *уйланма күчәре* дип атала.

<u>Парабола</u>

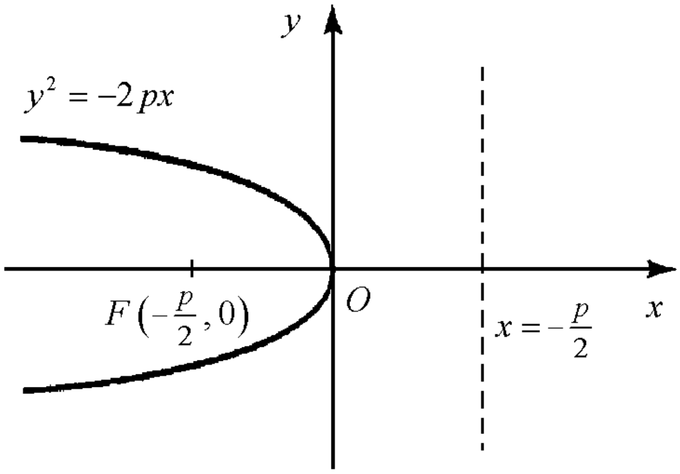
Бирелгән ноктадан һәм бирелгән турыдан тигез ераклыкта урнашкан нокталарның геометрик урыны *парабола* дип атала. Бирелгән F ноктасы – параболаның *фокусы* , ә туры сызык − *директриса*сы дип атала.



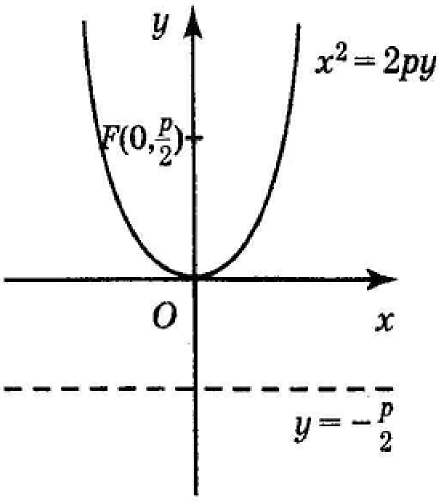
Биредә p – *параболаның параметры* дип атала. N – перпендикуляр нигезе.

Параболаның билгеләмәсе буенча, теләсә нинди M ноктасы өчен $MN = FM$.

Параболаның *кануни тигезләмәсе* : $y^2 = 2px$.

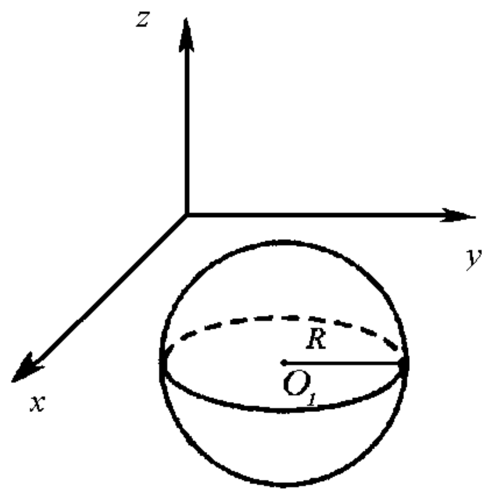


Бу очракта парабола тигезләмәсе $y^2 = -2px$. Әгәр Оу күчәрен, фокус аша директрисага перпендикуляр итеп, директрисадан фокуска таба юнәлештә үткәрсәк, парабола тигезләмәсе мондый рәвеш ала : $x^2 = 2py$.



Сфера

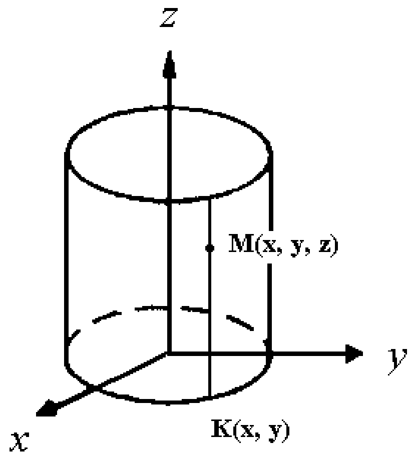
Радиусы R һәм үзәге $O_1(x_0, y_0, z_0)$ ноктасында булган сфера тигезләмәсе: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, биредә, x_0, y_0, z_0, R – билгеле саннар.



Цилиндрик өслекләр

Бирелгән L сызыгын кискән үзара паралель турылардан төзелгән өслек − *цилиндрик өслек* дип атала. L сызыгы – цилиндрик өслекнең *юнәлдерүчесе* дип, ә бу өслекне төзүче турылар − өслекнең *төзүчеләре* дип атала..

Мәсәлән, цилиндрик өслекнең төзүчеләре Oz күчәренә паралель һәм Oxy яссылыгында $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ тигезләмәсе белән бирелсә, аның юнәлдерүчесе эллипс була.

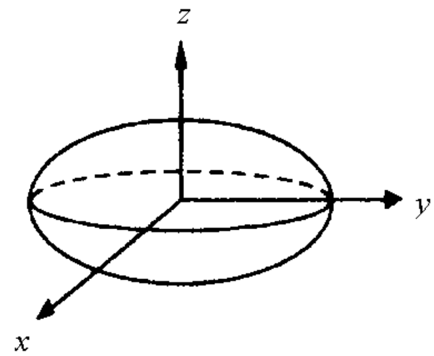


Бу өслек эллипссыман цилиндр дип атала. $M(x,y,z)$ – цилиндрда алынган ирекле нокта, ә $K(x,y)$ ноктасы – М ноктасының Oxy яссылыгына проекциясе.

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

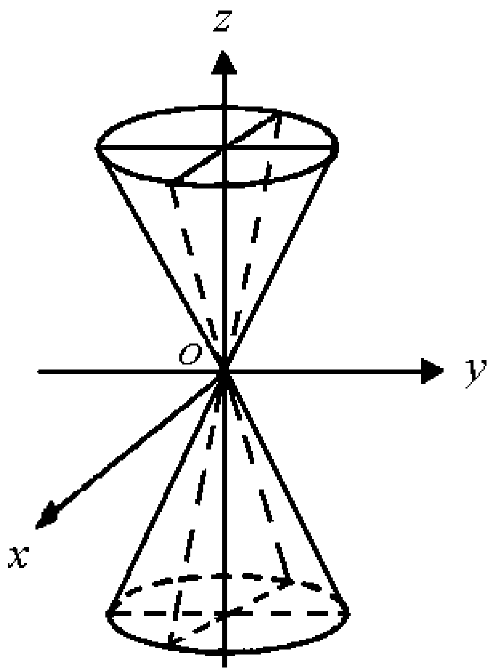
тигезләмәсе белән бирелгән өслек *эллипсоид* дип атала. Биредә a, b, c – бирелгән уңай саннар.



Конус өслек

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

тигезләмәсе белән бирелгән өслек конус өслек дип атала. Биредә a, b, c – бирелгән уңай саннар.

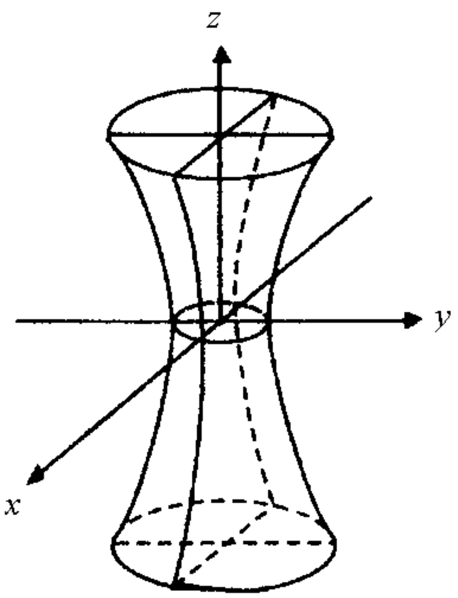


$a=b$ булса, *әйләнү конусы*н табабыз (Oz күчәре тирәли).

Беркуышлы һәм икекуышлы гиперболоидлар

$$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1,$$

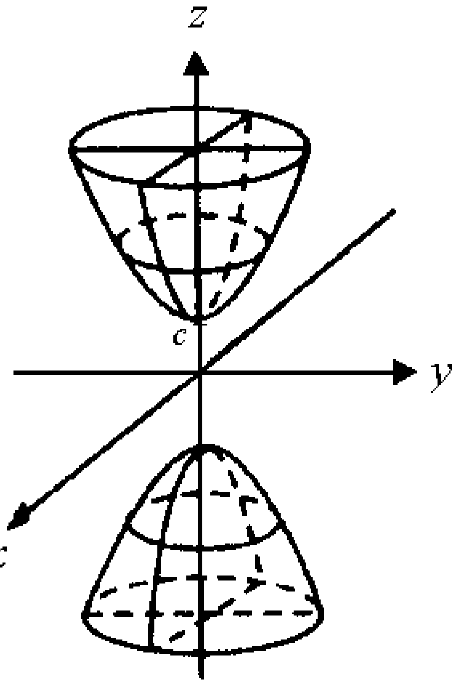
тигезләмәсе белән билгеләнгән өслек *беркуышлы гиперболоид* дип атала. Биредә a, b, c – бирелгән уңай саннар. Бу өслекнең формасын тикшерик.



$a=b$ булса, *беркуышлы әйләнү гиперболоид*ы килеп чыга. (Oz – әйләнү күчәре):

$$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=-1,$$

тигезләмәсе белән бирелгән өслек *икекуышлы гиперболоид* дип атала. Биредә $a,\ b,\ c$ – бирелгән уңай саннар.

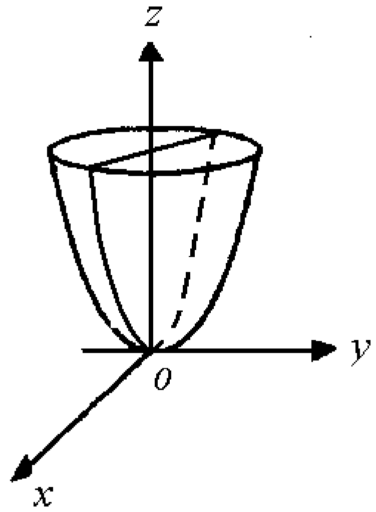


$a=b$ булса, тигезләмә *икекуышлы әйләнү гиперболоид*ын билгели. (Oz – әйләнү күчәре).

Эллиптик һәм гиперболик параболоидлар

$$x^2/p+y^2/q=2z,$$

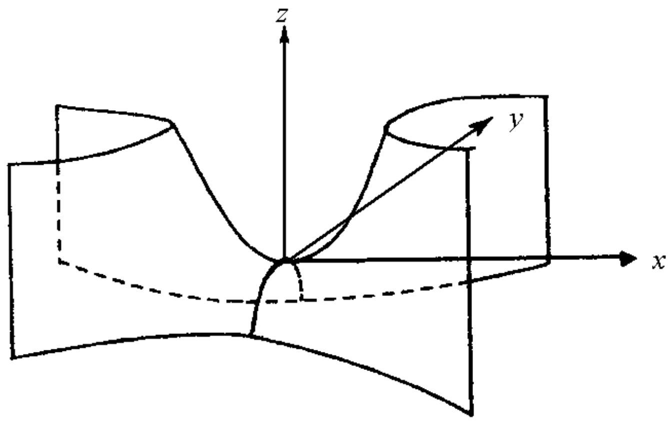
тигезләмәсе белән бирелгән өслек *эллиптик параболоид* дип атала. Биредә p һәм q – бирелгән уңай саннар.



$p=q$ булса, ул *әйләнү параболоиды* була (Oz – әйләнү күчәре).

$$x^2/p-y^2/q=2z,$$

тигезләмәсе белән бирелгән өслек *гиперболик параболоид* дип атала. Биредә p һәм q – бирелгән уңай саннар.



Аудитор биремнәр:

1. $M_1(3; -1; 2)$ һәм $M_2(4; -2; -1)$ нокталары бирелгән. M_1 ноктасы аша үткән $\overline{M_1M_2}$ векторына перпендикуляр булган яссылык тигезләмәсен төзергә.

   Җавап: x–y–3z+2=0.

2. l һәм m нинди кыйммәтләр алганда 2x+ly+3z–5=0, mx–6y–6z+2=0 тигезләмәләре параллель яссылыкларны хасил итәләр ?

Җавап: l=3; m=–4.

3. 2x–3y+6z–12=0 яссылыгы һәм координат яссылыклары белән чикләнгән пирамиданың күләмен хисапларга.

Җавап: 8 куб. берәмлек.

4. 1) $\bar{a}$=(2; –3; 5) векторына; 2) $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ турысына M(2; 0; –3) ноктасы аша параллель үткән турының кануни тигезләмәсен язарга.

Җаваплар: 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$.

5. (3; –1; 2), (2; 1; 1) нокталары аша үткән турының параметрик тигезләмәсен төзергә

Җаваплар: x=t+2; y=–2t+1; z=t+1.

6.

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$$

турысының кануни тигезләмәсен төзергә.

Җавап: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$ ($z_0=0$ дип алырга).

7. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ турысының һәм $2x+3y+z-1=0$

Җавап: (2; –3; 6).

8. A(2; 6) ноктасы аша узган һәм үзәге C(–1; 2) ноктасына туры килгән әйләнә тигезләмәсен төзергә.

Җавап: $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

9. Түбәндәге тигезләмәләрнең кайсысы әйләнәне бигели? Аларның һәрберсенең C үзәген һәм R радиусын табарга: 1) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$; 3) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

Җавап: 1) C(5; –2), R=5; 2) (5; –2) ноктасы; 3) C(1; –2), R=5 .

10. Фокуслары координат күчәрләренә симметрик булып: 1Җ) ярымкүчәрләре 5 һәм 2; 2) кечкенә күчәре 24, ә фокуслар арасы 2c =10; 3) зур күчәре 20гә , эксцентриситеты $\varepsilon=\frac{3}{5}$ булган эллипс тигезләмәсен төзергә.

Җавап: 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; 3) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

11. Фокуслары абцисса күчәрендә координатлар башлангычына симметрик урнашкан:

1) күчәрләре 2a=10 и 2b=8;

2) фокуслар арасында ераклык 2c=6 һәм эксцентриситеты $\varepsilon=\frac{3}{2}$;

3) ассимптота тигезләмәсе $y = \pm\frac{4}{3}x$ һәм фокуслар арасындагы ераклык 2с=20 икәне билгеле булса гипербола тигезләмәсен төзергә.

Җаваплар: 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 3) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

12. Түбәсе координаталар башлангычында һәм өске ярымөслектә OY күчәренә симметрик яткан, параметры р=$\frac{1}{4}$ булган парабола тигезләмәсен төзергә.

Җавап: 1) $x^2=\frac{1}{2}y$.

13. Икенче тәртип кәкреләрен төзергә. Аларның параметрларын табарга:
 1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$,
 2) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$.

Җавап: 1) эллипс, С(3; –1) – эллипс үзәге, ярымкүчәрләр 3 һәм $\sqrt{5}$, $\varepsilon = \frac{2}{3}$, 2) гипербола, С(2;-3) − гипербола үзәге, а=3, b=4,

14. Түбәндәге тигезләмәләрнең һәрберсенең дә парабола тигезләмәсен хасил иткәнен һәм А түбәсенең координатын, р параметрын билгеләргә $x=2y^2-12y+14$; 2) $x=-y^2+2y-1$.

Җавап: 1) A(–4; 3), р=$\frac{1}{4}$; 2) A(0; 1), р=$\frac{1}{2}$.

Өй эше

1. Коооодинатлар башлангычыннан үткән һәм нормаль векторы $\bar{n}$=(5; 0; –3) булган өслек тигезләмәсен төзергә.
2. 7x–2y–z=0 һәм x+y–3z–1=0 тигезләмәләренең кайчан перпендикуляр яссылык хасил итүләрен билгеләргә.
3. OYZ яссылыгына паралель үткән M(–5; 2; –1) ноктасының яссылык тигезләмәсен төзергә.
4. OZ күчәренә паралель Q_1(3; –2; 5) һәм Q_2(2; 3; 1) ноктасы аша үткән яссылык тигезләмәсен төзергә.
5. OXY координат почмагының 5x–6y+3z+120=0 яссылыгын кисеп үткән өчпочмак мәйданын табарга

Җаваплар:

1. 5x–3z=0;
2. $-\frac{1}{7}$;
3. x+5=0;
4. 5x+y–13=0;
5. 240 кв. берәмлек.

6. Түбәндәге ике нокта аша үткән турыларның кануни тигезләмәләрен төзергә: 1) (1; –2; 1), (3; 1; –1)
7. (0; 0; 1), (0; 1; –2). Нокталары аша үткән турының параметрик тигезләмәләрен төзергә.
8. Түбәндәге турыларның перпендикулярлыгын исбатларга:

$$\begin{aligned} x &= 2t+1 \\ y &= 3t-2 \\ z &= -6t+1 \end{aligned} \qquad \text{һәм} \qquad \begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$$

9. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$ турысына перпендикуляр $M_0(1; -1; -1)$ ноктасы аша үткән яссылык тигезләмәсен төзергә.

Җаваплар:

6. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$;

7. x=0; y=t; z=–3t+1.

9. 2x–3y+4z–1=0.

10. Әйләнә тигезләмәсен төзергә:

Әгәр A(3; 2) һәм B(–1; 6) нокталары әйләнә диаметрының кырый нокталары булса.

11. Түбәндәге тигезләмәләрнең кайсылары әйләнәне билгелиләр? Һәрберсе өчен C үзәген һәм R радиусын табарга:

1) $(x+2)^2+y^2=64$; 2) $x^2+(y-5)^2=5$; 3) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$.

12. $4x^2+9y^2=25$ эллипсның ярымкүчәрләрен билгеләргә.
13. Фокуслар арасы ераклыгы 2c=10 һәм 2b=8 булса, гипербола тигезләмәсен төзергә.
14. 1) Парабола уң ярымөслектә OX күчәренә карата симметрик рәвештә урнашкан, аның параметры p=3;

2) парабола сул ярымөслектә OX күчәренә карата симметрик рәвештә урнашкан, аның параметры p=0,5 булса, түбәсе координатлар башында урнашкан парабола тигезләмәсен төзергә.

15. $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$ тигезләмәсенең эллипсны билгеләгәнен ачыкларга, аның үзәге булган C ноктасының, ярымкүчәренең координатларын табарга.
16. $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$ тигезләмәсенең гиперболаны билгеләгәнен ачыкларга. Аның үзәге булган C ноктасының, ярымкүчәренең координатларын табарга.
17. $x=-\frac{1}{4}y^2+y$ тигезләмәсенең параболаны билгеләгәнен ачыкларга.

Аның түбәсе булган A ноктасының координатларын, p параметрының зурлыгын табарга.

18. $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$ тигезләмәсе белән билгеләнгән сызыкны табарга.

Җаваплар:

1. $(x-1)^2+(y-4)^2=8$;
2. 1) $C(-2;\ 0)$, $R=8$; 2) $C(0;\ 5)$, $R=\sqrt{5}$; 3) тигезләмә яссылыкта бернәрсә дә хасил итми;
3. $\frac{5}{2}$ и $\frac{5}{3}$;
4. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;
5. 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-x$;
6. $C(-1;\ 2)$, ярымкүчәрләре 5 һәм 4.
7. $C(-5;\ 1)$, $a=8$, $b=6$.
8. $A(1;\ 2)$, $p=2$;
9. $y-7=0$ турысы өстендә урнашкан $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-7)^2}{9} = -1$ парболасының өлеше;
10. Гиперболик тигезләмә; кисешкән $2x-y+1=0$ һәм $2x+y+3=0$ турыларын билгели.

***8 дәрес*. «Сызыкча тигезләмәләр системасын чишү. 2-нче тәртип кәкреләр» темалары буенча контроль эш**

Файдаланылган әдәбият

1. Сәлимов Р.Б., Туктамышов Н.К. Математика: Югары техник уку йортлары өчен д-лек. – Казан: Мәгариф, 2000. – 487б.: рәс. б-н.
2. Салимов Р.Б. Математика для инженеров и технологов. – М.: Физматлит, 2009. − 484 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим заданиям по теме «Векторная алгебра и линейная алгебра. Аналитическая геометрия» (на татарском языке)
270800.62 Төзелешкә әзерләү юнәлешләренең көндезге бүлегендә укучы беренче курс студентлары өчен

1 семестр

Составители: Закиев М.И., Шарипов Р.Р.