

Министерство образования и науки Российской Федерации
Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Кафедра высшей математики

**Функции многих переменных.
Неопределённый и определённый интегралы.
Кратные и криволинейные интегралы.**

Варианты контрольных работ № 3 и 4
для студентов I курса заочного отделения
направлений подготовки: 080200 – Менеджмент, 270800 – Строительство.

Казань
2013

УДК 512

Функции многих переменных. Неопределённый и определённый интегралы. Кратные и криволинейные интегралы. Варианты контрольных работ № 3 и 4 для студентов I курса заочного отделения направлений подготовки: 080200 – Менеджмент, 270800 – Строительство. / Сост.: В.П. Деревенский, А.Г. Лабуткин, Р.Р. Шарипов. – Казань: КГАСУ, 2013. – 20 с.

©Казанский государственный
архитектурно-строительный
университет, 2013

Контрольная работа № 3. Функции многих переменных.

Состав контрольной работы

В контрольную работу входит три задания. 1-е задание относится к теме “Частные производные”. 2-е задание посвящено нахождению градиента функции в заданной точке. В 3-м задании необходимо найти производную по направлению. Определение варианта: *ваш вариант N совпадает с двумя последними цифрами номера зачётной книжки.*

Таблица вариантов

<i>N</i>	Номера			<i>N</i>	Номера			<i>N</i>	Номера			<i>N</i>	Номера		
00	1	43	73	25	16	30	62	50	10	43	76	75	12	39	68
01	9	30	82	26	10	48	84	51	5	50	80	76	2	32	75
02	18	52	59	27	4	41	72	52	7	44	67	77	8	46	80
03	2	48	67	28	23	36	61	53	15	50	67	78	9	28	58
04	14	43	57	29	12	39	79	54	9	28	58	79	16	53	59
05	19	31	65	30	20	37	55	55	12	53	82	80	15	49	64
06	21	50	69	31	22	32	54	56	6	46	66	81	21	43	57
07	11	34	60	32	14	42	67	57	25	47	61	82	15	26	72
08	12	29	63	33	15	42	78	58	19	40	78	83	19	28	67
09	21	27	62	34	21	33	71	59	23	34	84	84	4	46	72
10	16	27	84	35	16	29	71	60	3	47	83	85	13	53	60
11	5	35	85	36	17	39	55	61	23	28	76	86	20	36	84
12	8	32	60	37	4	42	69	62	7	53	70	87	5	28	83
13	14	46	75	38	11	36	74	63	12	53	69	88	2	39	84
14	25	28	79	39	22	30	63	64	13	51	66	89	17	49	71
15	19	29	81	40	16	51	65	65	4	46	61	90	21	39	81
16	14	45	68	41	5	45	56	66	14	41	68	91	23	37	76
17	15	42	84	42	18	48	57	67	11	31	66	92	6	53	68
18	3	32	59	43	3	35	55	68	4	50	75	93	6	51	63
19	18	33	84	44	5	48	83	69	1	33	65	94	1	28	59
20	15	34	65	45	19	37	56	70	16	49	58	95	13	49	69
21	11	48	60	46	3	49	78	71	7	28	78	96	7	44	72
22	7	27	59	47	7	36	57	72	5	53	79	97	22	35	65
23	14	45	76	48	21	31	75	73	17	27	59	98	12	52	81
24	11	27	67	49	10	51	61	74	14	46	69	99	7	41	79

Задание 3.1

Дана функция $z = f(x, y)$. Показать, что

$$F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = 0.$$

Номера к заданию 3.1

1. $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}; F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
2. $z = y e^{\frac{x^2}{2y^2}}; F = (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} - xyz.$
3. $z = 2 \cos^2(x - \frac{y}{2}); F = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$
4. $z = e^{\frac{x}{y}}; F = y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}.$
5. $z = \frac{x^2 y^2}{x + y}; F = x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial x}.$
6. $z = \sin(x - 2y) + \cos(x + 2y); F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
7. $z = e^{xy}; F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz.$
8. $z = \ln(x^2 + y^2); F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
9. $z = \sin(x - 3y) + \ln(x + 3y); F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
10. $z = x(x + y) + y \cos(x + y); F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
11. $z = \ln(x + e^{-y}); F = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
12. $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}; F = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - zy^2.$
13. $z = \sin(x + ay); F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

Номера к заданию 3.1 (продолжение)

14. $z = \frac{y^2}{3x} + xy; F = x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2.$

15. $z = \frac{x}{y}; F = y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}.$

16. $z = \frac{xy}{x-y}; F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{2}{x-y}.$

17. $z = x - 3y + \operatorname{tg}(x + 3y); F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

18. $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy); F = x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2.$

19. $z = \frac{x}{y}; F = x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}.$

20. $z = x \ln(x + y) + xy + y^2; F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

21. $z = x e^{\frac{y}{x}}; F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

22. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1); F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

23. $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

24. $z = \cos y + (y - x) \sin y; F = (x - y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}.$

25. $z = x^y; F = y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x}.$

Задание 3.2

Дана функция $z = f(x, y)$ и точка $A(x_0; y_0)$. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке A .

Номера к заданию 3.2

26. $z = 4x^2 + 3xy; A(2; 3).$

27. $z = 2x^4 + x^2y^3; A(2; -1).$

28. $z = \ln(3x^2 + 4y^2); A(1; 3).$

29. $z = \ln(5x^2 + 3y^2); A(1; 1).$

Номера к заданию 3.2 (продолжение)

30. $z = x^3 + xy^2; A(1; 2)$.
31. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2; A(1; 1)$.
32. $z = 2x^2 + 4xy; A(3; 2)$.
33. $z = \ln(5x^2 + 4y^2); A(1; 1)$.
34. $z = e^{x^2+y^2} + 2x; A(1; 2)$.
35. $z = 3x^4 + 2x^2y^3; A(-1; 2)$.
36. $z = \arcsin(x^2/y); A(-1; 2)$.
37. $z = \ln(3x^2 + 2y^2); A(1; 2)$.
38. $z = \ln(2x^2 + 3y^2); A(2; 1)$.
39. $z = 2x^2y^2 + 4xy^2; A(2; 2)$.
40. $z = 3x^2 + 5xy; A(2; 1)$.
41. $z = \arcsin(x^2/y); A(1; 2)$.
42. $z = 2x^2 + 3xy + y^2; A(2; 1)$.
43. $z = \ln(x^2 + 2y^2); A(-2; 1)$.
44. $z = \ln(3x^2 + y^2); A(1; 2)$.
45. $z = 3xy^2 + 2x^2y; A(2; 1)$.
46. $z = \operatorname{arctg}(xy^2); A(2; 3)$.
47. $z = 2x^2 + xy + y^2; A(2; 2)$.
48. $z = x^2 + 2xy + 2y^2; A(3; 2)$.
49. $z = 3x^3 + x^2y^3; A(2; 3)$.
50. $z = \operatorname{arctg}(x^2y); A(1; 2)$.
51. $z = e^{x+5y^2} + 2x; A(1; 0)$.
52. $z = x^2 + xy + y^2; A(1; 1)$.
53. $z = 5x^2 + 6xy; A(2; 1)$.

Задание 3.3

Дана функция $z = f(x, y)$ и вектор $\bar{a} = (a_1; a_2)$. Найти производную в точке A по направлению вектора \bar{a} .

Номера к заданию 3.3

54. $z = \ln(x^2 + 2y^2) + e^x; A(0; 1); \bar{a} = (0; 2)$.
55. $z = x^4 + x^2y^3 - \ln x; A(1; -1); \bar{a} = (3; -2)$.
56. $z = x^4 + 2x^2y^3 - \ln y; A(1; 2); \bar{a} = (4; -3)$.
57. $z = x^2y^2 + 4xy^2 + \ln x; A(3; 1); \bar{a} = (3; 2)$.
58. $z = x^2 + xy + y^2 - 21; A(4; 1); \bar{a} = (2; 1)$.
59. $z = x^2y^2 + 5xy^2 - \ln x; A(2; 2); \bar{a} = (2; 1)$.
60. $z = x^2 + 4xy + 2x - \ln x; A(4; -1); \bar{a} = (1; 3)$.
61. $z = x^3 + x^2y^3 + 5 \ln x; A(3; -1); \bar{a} = (1; 2)$.
62. $z = \arcsin(x^2) + 2y; A(0; 1); \bar{a} = (3; -8)$.
63. $z = \ln(x^2 + 4y^2) - 2x; A(-1; 2); \bar{a} = (2; -1)$.
64. $z = \frac{x^2}{y} + 6y; A(1; -3); \bar{a} = (5; 2)$.

Номера к заданию 3.3 (продолжение)

65. $z = \ln(x^2 + 3y^2) + x; A(1; 1); \bar{a} = (-1; 2).$
66. $z = \ln(x^2 + 3y^2) - 4x; A(1; 2); \bar{a} = (3; 2).$
67. $z = x^2 + 3xy - \ln x; A(1; 3); \bar{a} = (4; 2).$
68. $z = \ln(x^2 + y^2) + 5x; A(1; 0); \bar{a} = (3; 1).$
69. $z = \arcsin(y) + x^2 + y^2; A(2; 0); \bar{a} = (5; -1).$
70. $z = x^2 + 3xy + y^2 + \ln y; A(3; 1); \bar{a} = (3; -4).$
71. $z = \ln(x^2 + 4y^2) + 8y - 1; A(-1; 2); \bar{a} = (2; -1).$
72. $z = x^2 + 2xy + \ln y + 1; A(1; 1); \bar{a} = (3; -2).$
73. $z = \operatorname{arctg}(x) - 8x + 3y; A(1; 0); \bar{a} = (4; -3).$
74. $z = 1 + 2x^2y - 3 \ln(y); A(1; 2); \bar{a} = (3; 2).$
75. $z = \frac{x^2}{y} + 2^x - 1; A(1; 1); \bar{a} = (0; 3).$
76. $z = x^2 + xy + 3y - 1; A(-3; -1); \bar{a} = (1; -2).$
77. $z = x^3 + xy - \ln y - 4; A(-1; 1); \bar{a} = (1; 2).$
78. $z = e^y + \frac{5y}{x^2} + 1; A(1; 2); \bar{a} = (-3; 0).$
79. $z = \ln(x^2 + y^2) + y - 2; A(0; 1); \bar{a} = (3; -1).$
80. $z = x + 3xy + y \cdot \ln x + 3; A(2; 1); \bar{a} = (1; -4).$
81. $z = x \cdot \arcsin(y) + x^2 - 1; A(4; 0); \bar{a} = (3; 0).$
82. $z = \ln(x) - xy - 4y^2 + 2; A(1; -1); \bar{a} = (1; 0).$
83. $z = x \cdot \operatorname{arctg}(y^2) - 8^x; A(5; 1); \bar{a} = (0; -3).$
84. $z = \arcsin(x^2) + 2x + y^2 + 1; A(0; 0); \bar{a} = (0; -2).$
85. $z = \operatorname{arcctg}(x^2) + 3yx; A(1; 1); \bar{a} = (4; -3).$

Контрольная работа № 4.
Неопределённые, определённые,
кратные и криволинейные интегралы.

Определение варианта: *ваш вариант N совпадает с двумя последними цифрами номера зачётной книжки.*

Таблица вариантов

<i>N</i>	Номера							<i>N</i>	Номера						
<i>00</i>	8	27	93	115	119	147	179	<i>25</i>	5	39	76	108	129	144	192
<i>01</i>	15	53	71	101	120	156	170	<i>26</i>	19	56	77	104	137	140	196
<i>02</i>	12	46	63	108	136	161	170	<i>27</i>	15	35	63	107	119	167	194
<i>03</i>	19	54	85	113	133	151	176	<i>28</i>	3	43	72	108	129	164	196
<i>04</i>	15	37	82	112	123	162	196	<i>29</i>	11	23	59	101	129	156	169
<i>05</i>	7	31	61	101	132	143	191	<i>30</i>	4	46	88	113	121	143	192
<i>06</i>	14	36	65	114	132	148	193	<i>31</i>	16	33	61	102	130	159	171
<i>07</i>	19	48	88	106	135	143	196	<i>32</i>	20	39	98	112	124	147	179
<i>08</i>	9	49	72	115	128	152	194	<i>33</i>	12	53	98	117	125	150	180
<i>09</i>	17	44	92	114	134	147	172	<i>34</i>	2	25	75	114	127	149	184
<i>10</i>	17	42	67	106	125	158	193	<i>35</i>	5	40	80	117	128	161	185
<i>11</i>	17	47	80	106	136	155	195	<i>36</i>	8	56	69	118	128	160	189
<i>12</i>	5	23	97	118	134	165	181	<i>37</i>	2	57	90	113	127	141	169
<i>13</i>	17	36	81	118	125	139	174	<i>38</i>	1	23	84	110	122	153	171
<i>14</i>	6	49	72	111	136	160	170	<i>39</i>	8	37	91	116	129	148	195
<i>15</i>	1	26	96	100	119	166	188	<i>40</i>	12	56	94	105	122	148	183
<i>16</i>	9	32	64	99	129	160	174	<i>41</i>	4	26	66	105	130	143	171
<i>17</i>	20	24	72	104	128	159	185	<i>42</i>	6	47	66	109	124	160	180
<i>18</i>	20	27	80	101	128	153	191	<i>43</i>	1	41	93	107	133	167	196
<i>19</i>	13	27	76	106	120	159	183	<i>44</i>	3	44	80	104	119	166	189
<i>20</i>	19	43	61	117	133	161	176	<i>45</i>	5	49	63	118	132	167	184
<i>21</i>	7	37	60	111	134	152	173	<i>46</i>	11	35	87	110	133	160	186
<i>22</i>	11	45	79	106	127	151	194	<i>47</i>	18	23	59	106	133	162	198
<i>23</i>	1	53	67	110	124	142	190	<i>48</i>	20	27	82	104	126	164	176
<i>24</i>	19	27	82	100	122	147	191	<i>49</i>	14	55	73	116	131	140	175

Таблица вариантов к контрольной работе № 4 (продолжение)

<i>N</i>	Номера							<i>N</i>	Номера						
50	10	43	76	115	119	155	189	75	3	29	70	107	130	141	180
51	3	45	59	115	119	141	171	76	18	55	97	109	135	148	197
52	5	26	73	106	124	150	194	77	15	35	67	116	125	145	194
53	2	44	81	103	133	148	196	78	3	26	93	107	121	157	193
54	4	35	83	106	122	143	170	79	10	46	89	112	122	139	181
55	18	36	60	118	122	166	193	80	17	54	83	107	129	146	186
56	19	46	77	111	129	160	195	81	15	21	77	102	137	146	179
57	8	44	77	117	135	142	185	82	16	32	67	110	129	156	196
58	5	47	82	103	131	167	193	83	5	33	75	108	136	151	183
59	9	44	67	104	124	159	170	84	9	46	90	114	128	166	196
60	10	36	92	104	134	152	197	85	8	56	86	99	133	157	188
61	17	32	91	99	119	147	171	86	12	53	87	102	123	158	184
62	4	52	92	111	134	163	192	87	4	47	83	99	125	139	192
63	11	31	85	117	127	156	188	88	15	37	76	102	130	166	183
64	12	58	89	104	119	153	172	89	8	49	83	111	135	167	192
65	2	27	63	100	132	158	190	90	6	25	81	117	122	144	186
66	13	25	63	110	136	148	170	91	12	25	91	110	132	154	193
67	2	38	76	103	130	147	170	92	19	52	97	103	129	156	195
68	11	41	77	103	132	144	175	93	2	30	60	118	133	146	169
69	6	54	71	111	119	139	169	94	12	27	98	103	136	140	190
70	5	50	97	114	122	140	196	95	17	53	82	117	132	166	177
71	19	30	81	108	126	154	181	96	4	49	80	109	128	151	173
72	10	54	83	111	125	161	169	97	15	55	61	113	132	140	191
73	14	26	74	104	126	162	187	98	5	51	74	118	133	142	186
74	6	53	63	118	125	166	183	99	3	53	85	104	135	168	179

Задание 4.1

Вычислить неопределённые интегралы.

Номера к заданию 4.1

Непосредственное интегрирование.

1. а) $\int (2 - 3^x)^2 dx$

б) $\int \cos(5x - 2) dx$

в) $\int \frac{x^3 dx}{1 - 2x^4}$

3. а) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

б) $\int e^{x^2} x dx$

в) $\int \sqrt{1 - 4x} dx$

5. а) $\int \frac{\sin x dx}{\cos x + 1}$

б) $\int \frac{(2\sqrt{x} + 1)^2}{x^2} dx$

в) $\int (2 \operatorname{tg} x - 3^{x+1}) dx$

7. а) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx$

б) $\int \sin(4x - 1) dx$

в) $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$

9. а) $\int (x + 3)(x - 5)^2 dx$

б) $\int e^x \cos(e^x) dx$

в) $\int \sqrt[3]{5 + 7x} dx$

11. а) $\int (5 - 2x^3)^2 dx$

б) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$

в) $\int \sqrt{x^3 + 2} x^2 dx$

2. а) $\int \frac{x^2 - 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

б) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$

в) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

4. а) $\int 2^{5x-1} dx$

б) $\int x^2 \sin(x^3 + 1) dx$

в) $\int \frac{(x + 4\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$

6. а) $\int \left(\frac{1}{x} + \sqrt[4]{x} + 2 \right) dx$

б) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$

8. а) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$

б) $\int x \cos(x^2 + 1) dx$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x}}$

10. а) $\int \frac{dx}{4x^2 + 3}$

б) $\int \frac{dx}{(2 - 3x)^5}$

в) $\int e^x \left(3 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$

12. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 8x^2}}$

б) $\int \operatorname{ctg}(7x + 11) dx$

в) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Номера к заданию 4.1 (продолжение)

Непосредственное интегрирование.

13. а) $\int \left(5^{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$

б) $\int \frac{x dx}{3x^2 + 2}$

в) $\int \sqrt{4x - 5} dx$

15. а) $\int (e^x + 2)^3 dx$

б) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$

в) $\int (2x - 7)^{12} dx$

17. а) $\int \sin\left(\frac{\pi}{12} + 2x\right) dx$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x}}$

в) $\int \frac{4 + x}{x^2 + 2} dx$

19. а) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1 - 3^{2x}}}$

б) $\int \frac{dx}{2x^2 + 7}$

в) $\int \frac{(2x - 3) dx}{x^2 - 3x + 1}$

14. а) $\int 3^{2x+5} dx$

б) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$

в) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

16. а) $\int x e^{-x^2} dx$

б) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$

в) $\int \frac{(1 + \operatorname{tg} x) dx}{\cos^2 x}$

18. а) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x - 1} \right) dx$

б) $\int x \sqrt{3x^2 + 1} dx$

в) $\int (1 + \ln x)^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x}$

20. а) $\int 5^{-2x+3} dx$

б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^8}}$

в) $\int \sqrt[3]{5x + 1} dx$

Интегрирование по частям.

21. $\int (x - 1)e^x dx$

23. $\int \ln(x^2 + 1) dx$

25. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

27. $\int x \ln(x + 1) dx$

29. $\int x^5 \ln x dx$

31. $\int \ln(x + 2) dx$

33. $\int (x - 2)2^x dx$

35. $\int (2x + 1) \ln x dx$

37. $\int (x + 5)e^{-x} dx$

22. $\int x \cos 2x dx$

24. $\int (x - 4) \sin 3x dx$

26. $\int x e^{-5x} dx$

28. $\int \operatorname{arctg} x dx$

30. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

32. $\int x \operatorname{arctg} x dx$

34. $\int (x + 4)e^{2x-1} dx$

36. $\int (1 - x) \cos \frac{x}{2} dx$

38. $\int \arcsin x dx$

Номера к заданию 4.1 (продолжение)

Интегрирование функций, содержащих квадратный трёхчлен в знаменателе.

$$39. \int \frac{x dx}{x^2 + 6x - 1}$$

$$41. \int \frac{(x + 2)dx}{5 + 2x + x^2}$$

$$43. \int \frac{(2x - 1)dx}{x^2 + 4x - 1}$$

$$45. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}}$$

$$47. \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 8x + 3}}$$

$$49. \int \frac{(x - 1)dx}{7 + 6x - x^2}$$

$$51. \int \frac{x dx}{4x^2 + 4x + 3}$$

$$53. \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x - x^2}}$$

$$55. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 6x - 1}}$$

$$57. \int \frac{(5x - 1)dx}{x^2 - 6x + 3}$$

$$40. \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$$

$$42. \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2 + 3}}$$

$$44. \int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$$

$$46. \int \frac{(3x + 2)dx}{x^2 + 8x - 3}$$

$$48. \int \frac{(x + 4)dx}{x^2 - 2x + 7}$$

$$50. \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 6x - x^2}}$$

$$52. \int \frac{(x + 2)dx}{5 - 4x + x^2}$$

$$54. \int \frac{3x dx}{x^2 + 4x + 29}$$

$$56. \int \frac{(x + 2)dx}{1 + 4x - 4x^2}$$

$$58. \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 10x - x^2}}$$

Интегрирование дробно-рациональных функций.

$$59. \int \frac{dx}{x(x - 5)^2}$$

$$61. \int \frac{(2x + 1)dx}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)}$$

$$63. \int \frac{dx}{x(x^2 + 2)}$$

$$65. \int \frac{(8x + 1)dx}{(x + 1)(x^2 + 2)}$$

$$67. \int \frac{(x^2 + 1)dx}{x^2(x - 3)}$$

$$69. \int \frac{2x dx}{1 + x^3}$$

$$71. \int \frac{x^2 dx}{(x - 1)^2(3x + 5)}$$

$$73. \int \frac{x dx}{(x + 2)(x - 2)^2}$$

$$75. \int \frac{(2x + 1)dx}{x(x^2 + 4)}$$

$$77. \int \frac{(x - 2)dx}{(x + 2)^2(2x - 1)}$$

$$60. \int \frac{(3x - 1)dx}{x^2(x - 1)}$$

$$62. \int \frac{(x + 3)dx}{(x - 1)^2(x + 2)}$$

$$64. \int \frac{(6 - x)dx}{x^2(x + 2)}$$

$$66. \int \frac{x dx}{(x - 1)(x + 2)^2}$$

$$68. \int \frac{5 dx}{x^2(2x - 1)}$$

$$70. \int \frac{(3x + 3)dx}{(x - 4)(x + 2)(2x + 1)}$$

$$72. \int \frac{(6 + x)dx}{x^3 - 1}$$

$$74. \int \frac{(x - 5)dx}{(2x + 1)(3x + 1)^2}$$

$$76. \int \frac{x dx}{(x - 2)(x^2 + 2x + 2)}$$

$$78. \int \frac{(x^2 + 4x - 5)dx}{(x + 2)(x - 3)(2x + 1)}$$

Номера к заданию 4.1 (продолжение)

Интегрирование тригонометрических функций.

$$79. \int \cos^2 x \sin^3 x dx$$

$$81. \int \operatorname{tg}^3 x dx$$

$$83. \int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$85. \int \cos^4 x dx$$

$$87. \int \frac{dx}{1 + \sin x}$$

$$89. \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

$$91. \int \frac{dx}{3 \cos x + 2}$$

$$93. \int \sin^4 x dx$$

$$95. \int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$97. \int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$$

$$80. \int \cos^3 x dx$$

$$82. \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$84. \int (1 + \sin x)^2 dx$$

$$86. \int \frac{dx}{1 + \cos x}$$

$$88. \int \sin^5 x dx$$

$$90. \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

$$92. \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x}$$

$$94. \int \operatorname{ctg}^3 x dx$$

$$96. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

$$98. \int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$$

Интегрирование иррациональных функций. Вычисление определённого интеграла.

$$99. \int_2^5 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$101. \int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} dx$$

$$103. \int_0^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$105. \int_{-8}^{-3} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$107. \int_{-1}^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{2x+3}}$$

$$109. \int_1^4 \frac{dx}{x(\sqrt{x}+1)}$$

$$100. \int_1^4 \frac{\sqrt{x} dx}{x+2}$$

$$102. \int_1^8 \frac{2x dx}{\sqrt[3]{x}+1}$$

$$104. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}+1}$$

$$106. \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt[3]{x})}$$

$$108. \int_0^8 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-2} dx$$

$$110. \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$$

Номера к заданию 4.1 (продолжение)

$$111. \int_6^9 \frac{x-1}{\sqrt{x-5}} dx$$

$$112. \int_{-11}^{-3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-2x}}$$

$$113. \int_{-3}^0 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{1-x}}$$

$$114. \int_0^{3/2} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$$

$$115. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x}+1}$$

$$116. \int_1^{16} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1} dx$$

$$117. \int_1^9 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+2} dx$$

$$118. \int_4^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$$

Задание 4.2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

Номера к заданию 4.2

$$119. y = 3x^2 + 1, y = 3x + 7$$

$$120. x + y = 2, y = x^3, y = 0$$

$$121. y = 4 - x^2, y = 2x + 1$$

$$122. y^2 = 2x, x + y = 4, y = 0$$

$$123. y = x^2 - 2x, y = \frac{x}{2}$$

$$124. y^2 = 8x, y = 2x$$

$$125. y = x^2 - 3x, y = 9 - 3x$$

$$126. y^2 = 1 - x, x + 3 = 0$$

$$127. y = x^2, x + y = 6, y = 0$$

$$128. y = 4x - x^2, y = x$$

Найти длину указанной кривой.

$$129. y = \ln x, \sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{15}$$

$$130. x = t^2/2, y = t^3/3, 1 \leq t \leq 3$$

$$131. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$132. y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$133. y = \ln(\cos x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями.

$$134. y = x^2, y = \sqrt{x}$$

$$135. xy = 1, y = x, x = 2$$

$$136. y^2 = 1 - x, y - x = 1, y = 0$$

$$137. y^2 = 2(x - 1), y = x - 1$$

$$138. y = x^2, y = 2 - x$$

Задание 4.3

Изменить порядок интегрирования, сделать чертеж.

Номера к заданию 4.3

$$139. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy.$$

$$140. \int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x, y) dy.$$

$$141. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$142. \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$143. \int_0^1 dx \int_{2\sqrt{x}}^{3-x} f(x, y) dy.$$

$$144. \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x+6} f(x, y) dy.$$

$$145. \int_0^{\frac{3}{2}} dy \int_{2y^2}^{3+y} f(x, y) dx.$$

$$146. \int_0^3 dy \int_{\sqrt{3y}}^{\sqrt{18-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$147. \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy.$$

$$148. \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy.$$

$$149. \int_{-2}^0 dx \int_0^{2+x} f(x, y) dy + \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} f(x, y) dy.$$

$$150. \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{8-x^2} f(x, y) dy.$$

$$151. \int_{-2}^0 dx \int_0^{\sqrt{2+x}} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{2+x}} f(x, y) dy.$$

$$152. \int_{-\frac{3}{2}}^0 dx \int_{x^2}^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy.$$

$$153. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$154. \int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^0 f(x, y) dx.$$

$$155. \int_0^1 dy \int_{2y+1}^{4-y^2} f(x, y) dx.$$

$$156. \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy.$$

$$157. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy.$$

$$158. \int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+2} f(x, y) dx.$$

Номера к заданию 4.3 (продолжение)

$$159. \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$160. \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{y^2} f(x, y) dx.$$

$$161. \int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+6} f(x, y) dy.$$

$$162. \int_0^2 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{8-y}} f(x, y) dx.$$

$$163. \int_0^1 dx \int_0^{3x} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_0^{4-x} f(x, y) dy.$$

$$164. \int_0^1 dx \int_{3x}^{4-x} f(x, y) dy.$$

$$165. \int_{-\sqrt{2}}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$166. \int_0^2 dy \int_y^{\sqrt{y+2}} f(x, y) dx.$$

$$167. \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} dx \int_{-x}^0 f(x, y) dy + \int_{\frac{3}{\sqrt{2}}}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 f(x, y) dy.$$

$$168. \int_0^3 dx \int_{\frac{x-1}{2}}^{\sqrt{4-x}} f(x, y) dy.$$

Задание 4.4

Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L (в случае замкнутой кривой обход в положительном направлении).

Номера к заданию 4.4

$$169. \oint_L (x^2 - y^2)dx - (x - y^2)dy,$$

где L - окружность $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$170. \oint_L (x + y)dx - (x - y)dy,$$

где L - контур треугольника OAB , где $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(4, 5)$.

$$171. \oint_L y dx - x dy, \text{ где } L \text{ - контур треугольника } ABC, \text{ причём } A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1).$$

$$172. \int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy,$$

где L - дуга параболы $y = x^2$, от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$.

$$173. \int_L (x^2y - 3x)dx + (y^2x + 2y)dy,$$

где L - часть эллипса $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

$$174. \int_L (x^2y + y^2)dx - (y^2 + x)dy,$$

где L - ломаная ABC , причём $A(1, 2), B(1, 5), C(3, 5)$.

$$175. \int_L y dx + \frac{x}{y}dy,$$

где L - дуга параболы $x = y^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(25, 5)$.

$$176. \int_L (y^2 + 1)dx - x dy,$$

где L - отрезок прямой от точки $A(1, 2)$ до точки $B(2, 4)$.

$$177. \int_L (xy - x^2)dx + x dy,$$

где L - дуга гиперболы $xy = 4$ от точки $A(1, 4)$ до точки $B(4, 1)$.

$$178. \oint_L y^2 dx + 2xy dy,$$

где L - окружность $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$179. \oint_L (x^2 - y)dx + y dy,$$

где L - контур треугольника ABC , причём $A(0, 2), B(1, 2), C(3, 0)$.

$$180. \oint_L y^2 dx + x^2 dy,$$

где L - эллипс $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$181. \int_L (6 - y)dx + x dy,$$

где L - кривая $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$182. \int_L (x^2 - 2xy)dx - (xy + 2y^2)dy,$$

где L - кривая $y = \sqrt[3]{x}$, $1 \leq x \leq 8$.

$$183. \int_L 2xy dx - x^2 dy,$$

где L - кривая $x = \sqrt[3]{y}$, $1 \leq x \leq 2$.

$$184. \int_L (x + y)dx - x dy,$$

где L - кривая $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq 2$.

$$185. \int_L y dx - (y + x^2)dy,$$

где L - кривая $y = 2x - x^2$, $0 \leq x \leq 2$.

$$186. \int_L 2xy dx - x^2 dy,$$

где L - кривая $y = \frac{x^2}{4}$, $0 \leq x \leq 2$

$$187. \oint_L x^2 y dx + x dy,$$

где L - контур треугольника ABC , причём $A(1, 2)$, $B(1, 0)$, $C(2, 3)$.

$$188. \int_L (x + y)dx - x^2 dy,$$

где L - кривая $y^2 = x + 1$, $3 \leq x \leq 8$.

$$189. \oint_L yx^2 dx - (x + y)dy,$$

где L - контур прямоугольника $ABCD$, причём $A(1, 2)$, $B(3, 2)$, $C(3, 5)$, $D(1, 5)$.

$$190. \int_L xy dx + (y - x)dy,$$

где L - четверть окружности $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 5 \sin t, \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

$$191. \int_L (2x - y)dx + 3y dy,$$

где L - дуга кривой $xy = 4$ от точки $A(2, 2)$ до точки $B(4, 1)$.

$$192. \int_L (x - 3y)dx + (x + y)dy,$$

где L - дуга кривой $y^2 = x^3$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.

$$193. \oint_L (3y - 2)dx + (x + 2y)dy,$$

где L - контур треугольника ABC , причём $A(-2, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 0)$.

$$194. \oint_L (x^2 - 2xy)dx + x dy,$$

где L - контур четырёхугольника $ABCD$, причём $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 3)$, $D(2, 3)$.

$$195. \int_L (xy - 1)dx + y dy,$$

где L - дуга кривой $y = x^2 + 3x$, $-1 \leq x \leq 2$.

$$196. \oint_L (x + y)dx - (2y - x)dy,$$

где L - эллипс $x = 5 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$197. \oint_L (3x + y + 1)dx - x dy,$$

где L - контур треугольника ABC , причём $A(1, 3)$, $B(2, 5)$, $C(-1, 1)$.

$$198. \int_L (x^2y + 3)dx + \left(\frac{y}{x} - 1\right)dy,$$

где L - дуга кривой $y - 3 = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

**Функции многих переменных.
Неопределённый и определённый интегралы.
Кратные и криволинейные интегралы.**

Варианты контрольных работ № 3, 4
для студентов I курса заочного отделения
направлений подготовки: 080200 – Менеджмент, 270800 – Строительство.

Составители:

Деревенский Владислав Павлович,
Лабуткин Александр Георгиевич,
Шарипов Руслан Рашатович

Редактор: Н.Х.Михайлова

Издательство Казанского государственного архитектурно–строительного университета

Лицензия ЛР № 020379 от 22.01.92 г.

Печатно–множительный отдел КГАСУ

Лицензия № 03/380 от 16.10.95 г.

420043, Казань, Зелёная, 1.