ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ф.Г. Шигабутдинов, А.Ф. Шигабутдинов

КРАТКИЙ КУРС

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Часть 1. СТАТИКА

Учебное пособие

Рекомендовано Научно-методическим советом по теоретической механике при Министерстве образования и науки России в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Строительство»

Казань 2009

УДК 531.8
ББК 538.0
Ш 55

Ф.Г. Шигабутдинов, А.Ф. Шигабутдинов

Ш 55 Краткий курс теоретической механики. Часть 1. СТАТИКА : Учебное пособие. - Казань: КГАСУ , - 2009.-171 с.

ISBN 978-5-7829-0227-8

Печатается по решению редакционного - издательского совета Казанского государственного архитектурно – строительного университета

Учебное пособие предназначено для студентов инженерных вузов, изучающих теоретическую механику в объеме 200-250 часов . В пособии достаточно полно изложена первая часть курса - статика . Теоретическое изложение материала сопровождается разбором большого числа задач. Приведены задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. В конце пособия приведены сведения из математики, необходимые для решения задач.
Илл. 235, таб. 11, библ. 10 наим.

Рецензенты:

Руководитель городского семинара кафедр теоретической механики г. Казани, профессор кафедры теоретической механики КГТУ им А.Н. Туполева, доктор физико-математических наук

Г.В. Голубев

Заведующий кафедрой сопротивления материалов и основ теории упругости Казанского государственного архитектурно-строительного университета, доктор физико-математических наук, профессор

Р. А. Каюмов

ISBN 978-5-7829-0227-8

9 785782 902278

УДК 531.8
ББК 538.0

© КГАСУ , 2009
© Шигабутдинов Ф.Г., Шигабутдинов А.Ф., 2009

От авторов

Характерным явлением современного высшего образования является появление в технических учебных заведениях большого числа направлений подготовки дипломированных специалистов и форм подготовки специалистов с высшим образованием. Роль инженерной составляющей в подготовке таких специалистов и ее основы – теоретической механики, как предмета, дающего не только основы научного технического мышления, методы и принципы решения новых технических задач, но и как предмета, упорядочивающего логическое мышление будущего специалиста и формирующего материалистическое понимание природы, к счастью, осознается. В предлагаемом пособии излагается материал первого раздела курса теоретической механики – Статики. Авторы попытались учесть те изменения, которые произошли в области планирования и проведения учебного процесса в высшей школе, реальное сокращение аудиторных занятий, расширение заочных форм обучения, появление людей, получающих «второе» высшее образование, развитие дистанционных форм образования. Пособие насыщено большим числом примеров, иллюстрирующих теоретический материал, дано большое число задач, помогающих выработать навыки в применении теории на практике. В пособии приведены вопросы для самоконтроля, которые могут служить и программой для освоения предмета. Пособие поддерживается видеокурсом на пяти DVD дисках, на которых сняты реальные аудиторные занятия, посвященные разбору курсовой работы по статике, предусмотренной программой.

Типовые задачи составлены самими авторами. Есть задачи, взятые из различных проверенных в российской высшей школе источников, чтобы не нарушать сложившиеся и годами проверенные ″стандарты″ требований к знаниям обучающихся

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам пособия д. ф.- м. н., проф. Голубеву Г.В. и д. ф.- м. н., проф. Каюмову Р.А. за ряд ценных замечаний по содержанию пособия Авторы сознают, что в пособии есть недостатки, возможны и описки. Мы будем благодарны всем, кто отметит положительные стороны пособия и его недостатки и пришлет свои замечания и пожелания, направленные на улучшение пособия. Наш адрес: 420043, Казань-43, ул. Зеленая д.1. Казанский государственный архитектурно-строительный университет. Кафедра теоретической механики. E-mail: shigabutdinov@ksaba.ru

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В этой главе много новых понятий и определений. Простота их кажущаяся. Это – язык науки. Их нужно внимательнейшим образом прочитать и заучить. Без этого понять что-либо в дальнейшем будет невозможно.

§ 1.1. Статика. Тела статики

1.1. Статикой называется раздел механики, в котором изучается теория сил и условия равновесия абсолютно твердых тел и систем тел под действием сил.

Имея в виду технические приложения статики, всюду в дальнейшем будем предполагать, что силы приложены к телам. Как известно, тела бывают твердые, жидкие и газообразные. В статике принята модель абсолютно твердого тела. Другие тела нами здесь не рассматриваются.

1.2. Абсолютно твердым телом называется такое тело, расстояние между двумя точками которого не изменяется в процессе взаимодействия его с другими телами.

Твердые тела ограничены. Чисто геометрически граница тела может быть ограничена поверхностями, плоскостями, линиями. В механике приходится принимать во внимание не только геометрические свойства границы, но и её механические свойства. Например, «шероховатость» границы.

1.3.Если поверхность тела не препятствует свободному перемещению (скольжению) по ней других тел, то поверхность называется гладкой, идеальной или идеально гладкой.

Из определения следует, что любое тело на идеально гладкой поверхности является «ограниченно свободным». Оно может свободно скользить по поверхности, но не может проникнуть через поверхность во внутреннюю область тела.

1.4. Если поверхность тела препятствует свободному перемещению (скольжению) по ней других тел, то поверхность называется шероховатой поверхностью или поверхностью с трением.

Все выводы статики касаются, в конечном счете, свободных тел. Реальные тела в большинстве своем закреплены. Способов крепления бесконечное множество. Их просто невозможно все рассмотреть и теоретически описать. Поэтому в статике основной моделью тела является модель свободного тела, а реальные тела со связями (с креплениями) методами, описанными чуть ниже, приводятся к телам свободным.

1.5. Свободным абсолютно твердым телом называется такое тело, которому можно сообщить из занимаемого им положения любое

перемещение в пространстве. В противном случае тело является несвободным.

Тела могут находиться в состоянии (относительного) покоя или движения.

1.6. Под термином «механическое состояние» всюду в дальнейшем будем понимать только два состояния тела – покой и движение.

Механическое состояние какого-либо тела может быть определено только по отношению к какому-нибудь другому телу.

1.7. Тело, по отношению к которому устанавливается механическое состояние другого тела, называется телом отсчета.

В качестве тела отсчета в зависимости от решаемой проблемы или задачи может быть выбрано любое тело. В качестве неподвижного тела отсчета с достаточной для практических приложений точностью выбирается Земля или любое другое тело, жестко с Землей связанное.

1.8. Тело отсчета и жестко связанная с ним система координат называются системой отсчета.

1.9. Движением тела называется изменение с течением времени пространственного положения этого тела по отношению к выбранному телу отсчета.

1.10. Если с течением времени пространственное положение тела по отношению к выбранному телу отсчета не меняется, то тело находится в состоянии покоя по отношению к выбранному телу отсчета.

Из определений 1.9, 1.10 видно, что состояния покоя и движения носят относительный характер. Относительно одного тела отсчета тело может находиться в состоянии покоя, а относительно другого – в движении. Например, пассажир автобуса находится в состоянии покоя относительно своего сидения, но движется относительно Земли.

1.11.Если тело находится в состоянии покоя по отношению к Земле или любому другому телу, жестко с Землей связанному, то покой тела будем называть абсолютным покоем.

1.12. Под равновесием тела в прикладной статике понимается состояние покоя тела по отношению к неподвижному телу отсчета. Другими словами, под равновесием тела понимается состояние абсолютного покоя тела.

Часто равновесие нескольких взаимодействующих между собой тел приходится рассматривать совместно. В этом случае вводится понятие системы тел.

1.13. Системой тел называется совокупность конечного числа тел, равновесие которых рассматривается совместно.

Отметим, что выводы и методы статики универсальны и не зависят от области приложения.

§ 1.2. Сосредоточенная сила. Системы сосредоточенных сил

Одним из важнейших достижений механики является то, что она научилась измерять взаимодействие абсолютно твердых тел между собой.

Изучение взаимодействия двух тел показывает, что оно должно быть определено:

1) по направлению взаимодействия;

2) по месту взаимодействия;

3) по величине этого взаимодействия.

Поэтому механическую величину, определяющую в точке действие одного тела на другое, математически можно представить в виде вектора.

1.14. Векторная величина $\overline{F}$, являющаяся мерой механического взаимодействия в точке двух тел между собой, называется сосредоточенной силой (или просто силой).

Графически сила изображается в виде вектора $\overline{F}$, приложенного своим началом (или концом) в точке действия одного тела на другое. Допустимо применение и других букв для обозначения векторов сил.

1.15. Точкой приложения силы называется та материальная точка А тела, к которой приложен вектор силы (в этой точке тела взаимодействуют между собой, на рисунке обозначена кружком).

Так как статика базируется на модели абсолютно твердого тела и не учитывает способности реальных тел менять свою форму и размеры при взаимодействии с другими телами, модель сосредоточенной силы в теоретической механике является точной моделью взаимодействия тел в точке.

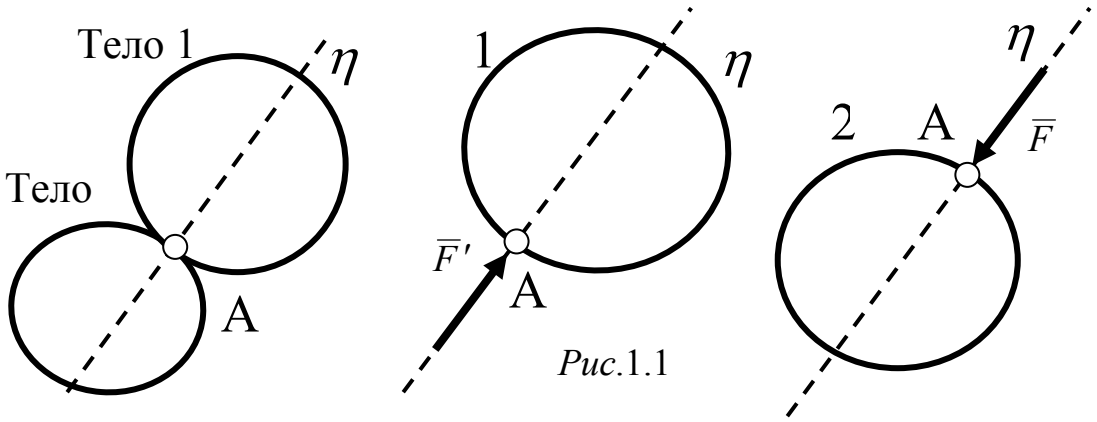


*Рис.*1.1

1.16. Линией действия силы η называется прямая, по которой сила стремится перемещать точку своего приложения (рис.1.1).

1.17. Величиной силы называется длина вектора $\overline{F}$*, т.е. его модуль* $\left|\overline{F}\right|$*. Модуль вектора силы часто обозначают просто буквой* F *без черточки над буквой.*

Если сила изображена на рисунке вектором или, как говорят, задана геометрически, то линия действия силы и точка приложения определяются непосредственно по рисунку, а для определения модуля силы нужно дополнительно указать масштаб, в котором выполнен рисунок силы.

Величину силы находят путем сравнения величины данной силы с величиной силы, принятой за единицу. С 1961 года в России действует Международная система единиц (СИ), в которой основной единицей измерения силы является *1 Ньютон (Н)*. Под силой в *1Н* понимается такая сила, которая, будучи приложенной к точке с массой в *1кг,* придает ей ускорение *1 м/с*^{2}. Если к телу приложена сила с $\left|\overline{F}\right| = 100H$, то это надо понимать так, что она производит такое же механическое действие над телом, как 100 сил с $\left|\overline{F}\right| = 1H$, приложенных вместе в той же точке и в том же направлении. Часто используются и более крупные единицы измерения силы: килоНьютон *(1кН=10*^{3}*Н)* и мегаНьютон *(1мН=10*^{6}*Н)*. В технике еще встречается единица силы в *1кг*. Сила в *1кг*=9,8*Н* или *1Н=0,102кг.*

Продолжая разговор о силе, отметим, что тела могут подвергаться различным воздействиям, способным изменить их состояние покоя или движения. Следовательно, и силы, как меры этих воздействий, по своей природе бывают разными. Из физики известно, что есть сила тяжести, сила всемирного тяготения, силы электромагнитного происхождения и т.д. Введение силы $\overline{F}$ *как вектора позволяет оставить в стороне все конкретные причины возникновения сил и обратиться лишь к их участию в равновесии тел, к которым они приложены. В статике две силы, независимо от их природы, считаются тождественными, если они производят одинаковое механическое действие.*

Как правило, в одно и то же время тела взаимодействуют с несколькими другими телами. Иначе говоря, на них одновременно действует несколько сил.

1.18. Любая совокупность сил, действующих на твердое тело или систему твердых тел, называется системой сил (СС). Система сил обозначается $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$*. В скобках перечисляются все силы системы.*

1.19. Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, то система сил называется плоской системой сил. В противном случае, система сил называется пространственной..

Плоские и пространственные системы сил, в свою очередь, делятся на сходящиеся, параллельные и произвольные системы сил.

1.20. Если линии действия сил системы пересекаются в одной точке, то система сил называется сходящейся системой сил.

1.21. Если линии действия сил параллельны, то система сил называется параллельной системой сил.

1.22. Если система сил не является сходящейся или параллельной, то она называется произвольной системой сил.

1.23. Любые две системы сил называются эквивалентными, если они взаимозаменяемы. Другими словами, замена некоторой системы сил на ей эквивалентную не нарушает механического состояния тела или системы тел. Эквивалентность двух систем сил записывается так (в общем случае $n \neq m$):

$$\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right) \sim \left(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \overline{\Phi}_3, ..., \overline{\Phi}_m\right).$$

1.24. Система сил называется уравновешенной или эквивалентной нулю, если под действием этой системы сил тело находится в равновесии (в покое). Уравновешенную систему сил обозначают так:

$$\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right) \sim 0.$$

1.25. Если одна сила $\overline{R}^*$ эквивалентна некоторой системе сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$, то есть

$$\overline{R}^* \sim \left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right),$$

то она называется равнодействующей силой (или просто равнодействующей) данной системы сил (Рис.1.2).

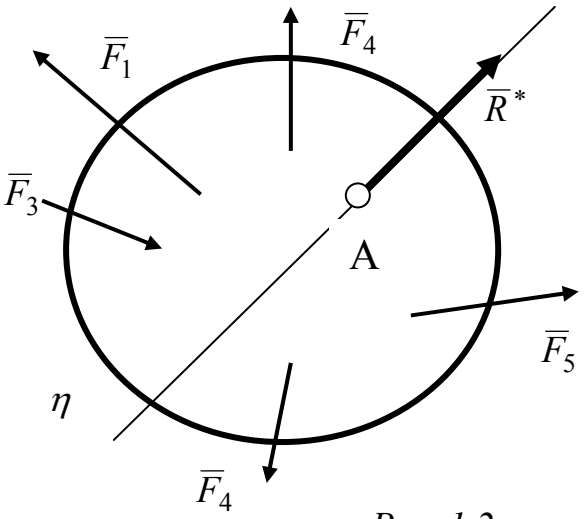


Рис. 1.2

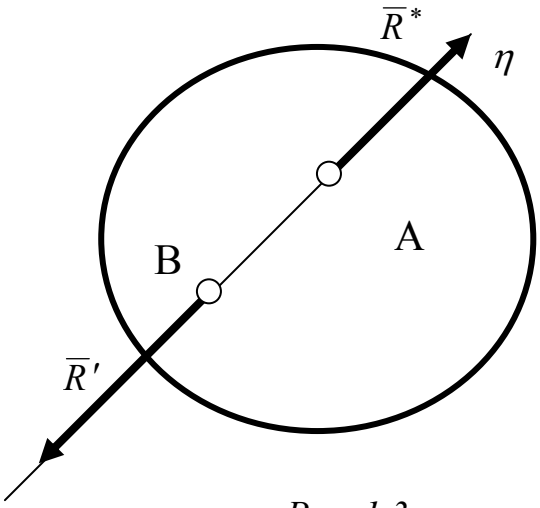


Рис. 1.3

1.26. Уравновешивающей силой $\overline{R}'$ для некоторой системы сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$ называется сила, действующая по линии действия равнодействующей $\overline{R}^*$, равная равнодействующей по модулю и прямо противоположная ей по направлению, то есть $\overline{R}' = -\overline{R}^*$ (Рис.1.3)

Пусть имеется система (совокупность) тел, равновесие которых изучается совместно.

1.27. Силы, возникающие при взаимодействии отдельных тел системы между собой, называются внутренними силами.

1.28. Силы, возникающие при взаимодействии тел системы с другими телами, не вошедшими в рассматриваемую систему, называются внешними силами.

Распределенные силы

Наряду с сосредоточенными силами, в механике рассматриваются и распределенные силы. В технических задачах их называют еще распределенными нагрузками (смотрите еще § 4.3, 7.6)

1.29. Распределенными объемными силами называются силы, действующие на все точки некоторого объема, занятого телом. Единицы измерения объемных сил в системе СИ - Н/м^3, кН/м^3 и т. п.

Примером таких сил служит сила тяжести, силы электромагнитного происхождения. Эти силы действуют на каждую материальную частицу тела.

1.29. Распределенными поверхностными силами называются силы, действующие на все точки некоторого элемента поверхности тела. Единицы измерения поверхностных сил в системе СИ - Н/м^2, кН/м^2 и т.п.

Примерами таких сил служат силы, возникающие от снеговой нагрузки, ветровой нагрузки, от распределенного по плите утеплителя.

1.30. Силами, распределенными по линии (или погонными нагрузками), называются силы, действующие на поверхности тела в каждой точке некоторой линии. Единицы измерения распределенных по линии сил в системе СИ - Н/м, кН/м и т.п.

Примером распределенных по линии сил служат силы, возникающие от давления тяжелого цилиндра (например, дорожного катка) на абсолютно твердую плоскость.

Задачи статики

В теоретических курсах статики, ориентированных на технические приложения, решаются две основные задачи:

1. Упрощение заданной произвольной системы сил, действующей на абсолютно твердое тело или систему тел.

2. Определение условий равновесия абсолютно твердого тела и систем абсолютно твердых тел под действием различных систем сил.

§ 1.3. Примеры к параграфу 1.2.

Пример 1. На рис.1 показаны различные системы сил. Чтобы облегчить пространственное восприятие, лин z ействия сил отнесены к ребрам и диагоналям граней прямоугольного параллелепипеда. Система сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5\right)$- произвольная пространственная система сил (Рис.1). Система сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_5\right)$- произвольная плоская система сил, действующая в плоскости *Oxy*. Система сил $\left(\overline{F}_2, \overline{F}_4, \overline{F}_5\right)$- пространственная система сходящихся сил,

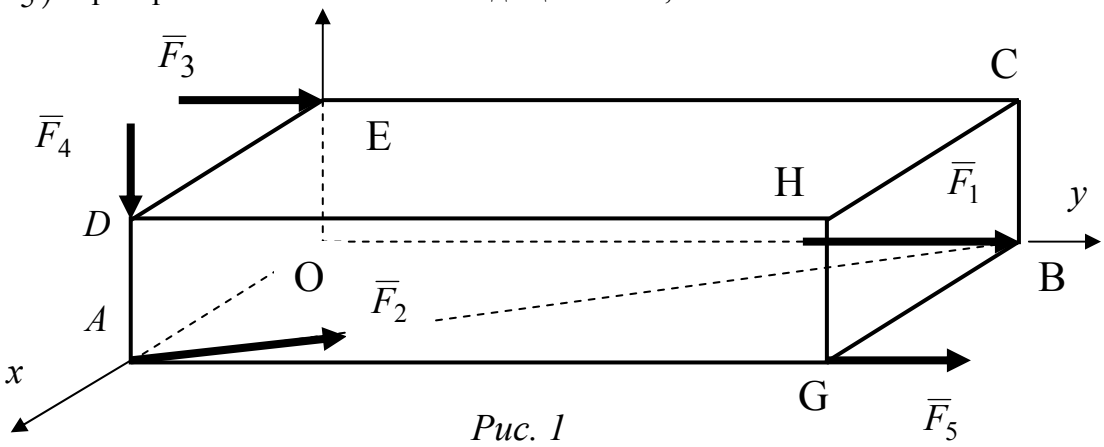


Рис. 1

линии действия которых пересекаются в точке *A*. Система сил $\left(\overline{F}_2, \overline{F}_5\right)$ - плоская сходящаяся система сил (*пл. Oxy*), линии действия которых пересекаются в точке *A,* а система сил $\left(\overline{F}_2, \overline{F}_4\right)$- плоская сходящаяся система сил, лежащая в плоскости *ABCD.* Система сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_3, \overline{F}_5\right)$- пространственная параллельная система сил. Системы сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_5\right)$, $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_3\right)$ - плоские параллельные системы сил (Рис.1). Эти примеры показывают, что в отдельной системе сил могут содержаться более простые системы (подсистемы) сил.

Пример 2. На рис. 2 приведена произвольная пространственная система сил $\left(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \overline{\Phi}_3\right)$, из которой невозможно выделить более простые подсистемы сил.

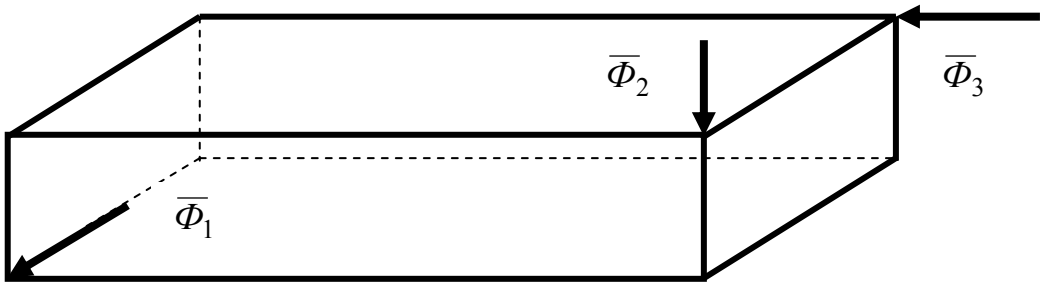


Рис. 2

Системы из двух сил $\left(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2\right)$, $\left(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_3\right)$, $\left(\overline{\Phi}_2, \overline{\Phi}_3\right)$ остаются произвольными пространственными системами сил.

§ 1.4. Аксиомы статики

Под аксиомами статики понимаются основополагающие предпосылки теории, которые не требуют доказательства.

Аксиома 1. *Свободное твердое тело, на которое действуют две силы, находится в состоянии равновесия тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и действуют вдоль одной прямой в противоположных направлениях.*

Эта аксиома содержит необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела под действием двух сил. Это можно записать следующим образом: $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right) \sim 0$ тогда и только тогда, когда $\left|\overline{F}_1\right| = \left|\overline{F}_2\right|$ и $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$. *Запомним, что две силы, о которых идет речь в первой аксиоме, образуют простейшую уравновешенную систему сил. Или, другими словами, образуют систему сил, эквивалентную нулю.*

Аксиома 2. *К любой системе сил, действующих на твердое тело, можно прибавить или отнять уравновешенную систему сил, не изменяя механического состояния твердого тела.*

Например, если к телу, на которое действует произвольная система сил, приложить дополнительно две равные по величине силы, о которых говорится в первой аксиоме, то механическое состояние тела не изменится. Если оно было в покое, то и останется в покое.

Следствие. *Силу, действующую на абсолютно твердое тело, можно переносить вдоль линии ее действия, не изменяя механического состояния твердого тела.*

Доказательство: Пусть сила $\overline{F}$ приложена к телу в точке *A* *(рис.1.4а)*. Докажем, что ее можно перенести в точку *C* на линии действия силы $\overline{F}$. Пользуясь аксиомами 1 и 2, совершим следующие действия.
1) На рис. 1.4а изображено исходное состояние тела с действующей силой $\overline{F}$. 2) В точке *C* *на линии действия силы* $\overline{F}$ приложим две равные по модулю $\left|\overline{F}_1\right| = \left|\overline{F}_2\right| = \left|\overline{F}\right|$ и противоположно направленные силы (рис. 1.4б). Система сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right) \sim 0$ (по аксиоме 1), поэтому состояние тела не нарушается (по аксиоме 2). 3) По построению силы $\overline{F}_2$ и $\overline{F}$ равны по модулю и противоположны по направлению (рис. 1.4б), т.е. система сил $\left(\overline{F}_2, \overline{F}\right) \sim 0$ (по аксиоме 1) и, следовательно, эту систему сил можно отбросить (по аксиоме 2). Остается сила $\overline{F}_1$, приложенная в точке *C*. 4) Силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}$ равны по модулю, действуют в одном направлении.

Заменим силу $\overline{F}_1$ силой $\overline{F}$, приложенной в точке С (рис. 1.4г). 5) Сравнивая рис. 1.4а) и 1.4г), видим, что сила $\overline{F}$ в итоге приложена в точке *С,* лежащей на линии ее действия. 6) В силу произвольности выбора

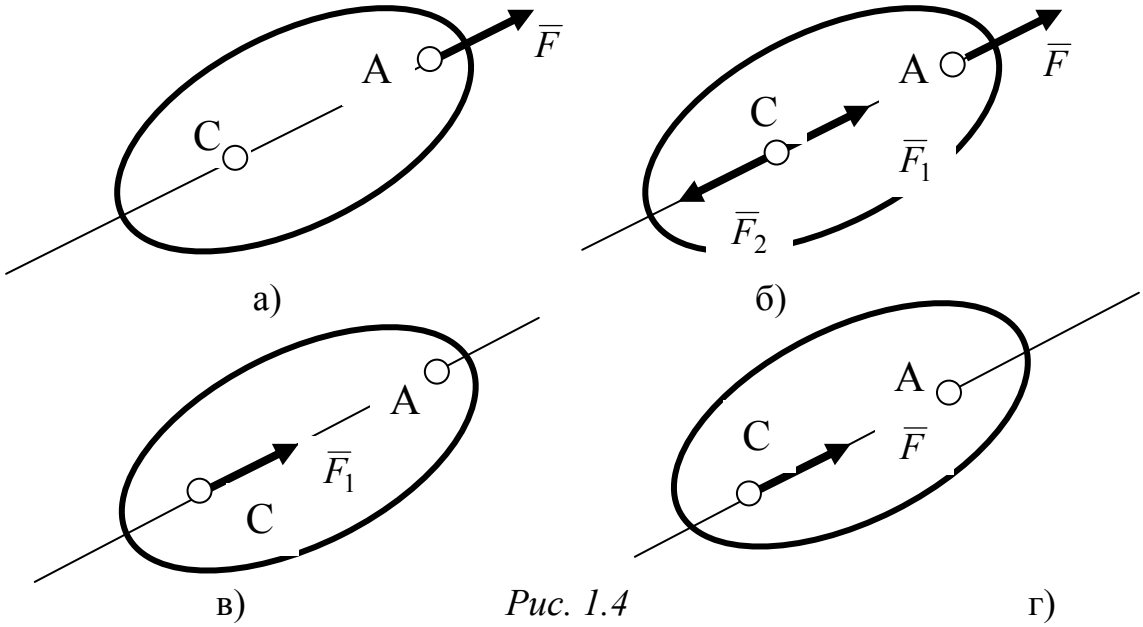


Рис. 1.4

точки *С,* делаем заключение: *силу* $\overline{F}$ *можно переносить в любую точку, лежащую на линии действия силы, и механическое состояние тела при этом не изменится.*

Аксиома 3. *(Закон параллелограмма сил). Две силы* $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, *приложенные в одной точке, имеют равнодействующую* $\overline{R}^*$, *направленную по диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах и приложенную в точке приложения самих сил (смотри приложение).*

Значение этой аксиомы в том, что она позволяет две силы, приложенные в точке, заменить одной, то есть упростить систему сил. Легко догадаться, что если в точке приложены три, четыре или более сил, то, применяя аксиому нужное количество раз, систему сил можно заменить одной силой. Определение равнодействующей с использованием третьей аксиомы называется геометрическим сложением сил.

Аксиома 4. *(Или 3-й закон Ньютона - закон о равенстве действия и противодействия). При всяком взаимодействии двух абсолютно твердых тел они действуют друг на друга вдоль одной прямой силами, равными по модулю и противоположными по направлению.*

Реальные тела деформируемы, т.е. могут менять при действии сил свою форму и размеры. Статика же исходит из гипотезы об абсолютно твердом теле. Следующая аксиома "перекидывает мостик" от идеализированных абсолютно твердых тел статики к реальным телам и позволяет использовать результаты статики в практических расчетах.

Аксиома 5. *(Принцип отвердевания). Пусть деформируемое тело находится в равновесии. Равновесие деформируемого тела не нарушится, если считать его абсолютно твердым.*

§ 1.5. Примеры к параграфу 1.4

Пример 1. Упростить произвольную пространственную систему сил ($\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}, \overline{F}^*$), показанную на рисунке 1, если известно, что $\left|\overline{F}\right| = \left|\overline{F}^*\right|$.

Решение: По рисунку видно, что $\overline{F}$ и $\overline{F}^*$ действуют вдоль одной прямой и в противоположных направлениях. Кроме того, по условию задачи они равны по величине. Тогда, согласно первой аксиоме статики, можно утверждать, что система сил ($\overline{F}, \overline{F}^*$)~0. По второй аксиоме статики такую систему сил можно отбросить. Отбрасывая систему сил ($\overline{F}, \overline{F}^*$)~0, приходим (рис.2) к системе сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3)$, которая эквивалентна исходной системе сил ($\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}, \overline{F}^*$), но проще последней хотя бы тем, что количество сил в ней меньше.

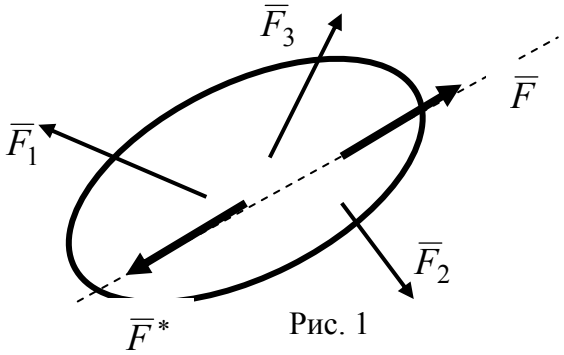


Рис. 1

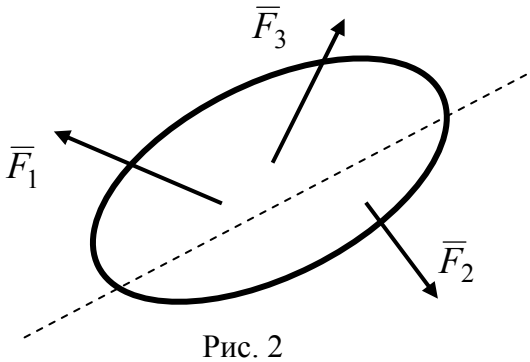


Рис. 2

При этом тела, показанные на рисунках 1 и 2, находятся в одинаковых механических состояниях - исходное состояние тела не изменилось.

Пример 2. Пользуясь аксиомой параллелограмма (аксиома 3), определить равнодействующую двух сил, приложенных в одной точке, как показано на рисунке 3, если $\left|\overline{F}_1\right| = F_1 = 5H$, $\left|\overline{F}_2\right| = F_2 = 10H$.

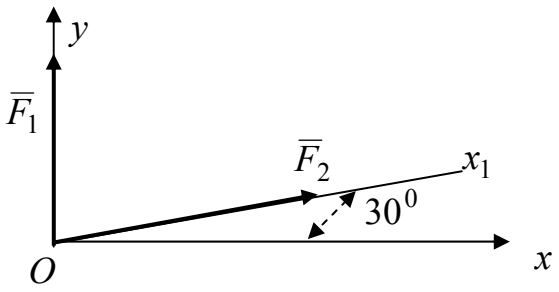


Рис. 3

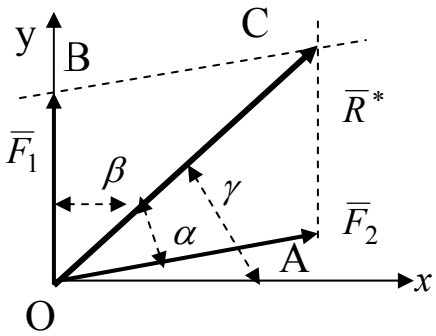


Рис. 4

Решение: Равнодействующей двух сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2$, приложенных в одной точке,

является вектор $\overline{R}^*$, построенный по правилу параллелограмма. Вектор $\overline{R}^*$ будет определен, если будет известен модуль этого вектора $\left|\overline{R}^*\right|$ и его направление на плоскости, в которой лежат заданные силы. Численно направление вектора на плоскости можно определить углом β или γ, который образует линия действия силы с одной из осей. Для определения направления вектора $\overline{R}^*$ будем определять угол $\gamma = \alpha + 30^0$. Задачу можно решить двумя способами.

1-ый способ. (Назовем его графическим). При этом способе рисунок должен выполняться по правилам технического черчения максимально точно. Определим длину равнодействующей $\left|\overline{R}^*\right|$. Для этого совместим вспомогательную ось Ox_1 с направлением силы $\overline{F}_2$ и вдоль этой оси отложим отрезок, который изобразит модуль силы $\left|\overline{F}_2\right|$. Длина этого отрезка, в общем-то, произвольна и ограничена лишь пространством на рисунке. Пусть модуль $\left|\overline{F}_2\right|$ изобразился (рис.4) отрезком длиной *OA = n (см).* Тогда в одном сантиметре длины содержится *K=* $\left|\overline{F}_2\right|$ */ n силы (Н).* Величину *K* называем масштабным коэффициентом. Тогда отрезок, изображающий модуль силы $\left|\overline{F}_1\right|$, будет иметь длину *m=*$\left|\overline{F}_1\right|$ */ K = (*$\left|\overline{F}_1\right|$*/*$\left|\overline{F}_2\right|$*)·* n *= 0,5 n (см.).* В этом примере это было достаточно очевидно – если сила в два раза меньше, то и отрезок, ее изображающий, должен быть в два раза меньше. Если бы отношение модулей сил представлялись дробными числами или сил было бы много, без масштабного коэффициента было бы не обойтись.

Итак, по направлению силы $\overline{F}_1$ откладываем отрезок *OB=*$0{,}5 \cdot$ *OA(см.). По третьей аксиоме статики* на отрезках *OA и OB* строим параллелограмм *OACB* и измеряем линейкой длину его диагонали *OC.* Пусть она оказалась равной *L (см.).* Тогда модуль равнодействующей равен $\left|\overline{R}^*\right| = K \cdot L$ $(Ньютон)$

Чтобы определить направление вектора равнодействующей силы $\overline{R}^*$, надо воспользоваться транспортиром и измерить угол $\gamma = \alpha + 30^0$. В итоге равнодействующая двух сил будет определена как по величине, так и по направлению. Еще раз отметим, что точность решения в этом методе сильно зависит от точности выполнения рисунка к задаче.

2-ой способ. (Назовем его геометрическим). В этом случае рисунки к задаче, как при решении школьных задач по геометрии, будут носить эскизный характер. Точного соблюдения масштаба здесь не требуется. Но все же рисунок не должен обманывать зрение и вызывать ложные ассоциации. Например, в этой задаче не надо изображать вектор $\overline{F}_1$ длиннее вектора $\overline{F}_2$, так как по условию $F_2 = 2 \cdot F_1$. Когда примерный рисунок выполнен, можно приступать к вычислениям. Для того, чтобы найти диагональ параллелограмма *OC*, изображающую модуль равнодействующей $\left|\overline{R}^*\right|$, равный модулю главного вектора $\overline{R}$, воспользуемся теоремой косинусов.

$R^2 = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot Cos\varphi$, где $\varphi = \alpha + \beta = 90^0 - 30^0 = 60^0$.

Отсюда, (смотрите рисунок 4)

$$R = \sqrt{F_2^2 + F_1^2 + F_1 F_2 \cdot Cos60^0} = \sqrt{175} = 13{,}23H .$$

Угол α определим по теореме синусов для треугольника *OAC*.

Так как $\angle AOB = 60^0$, то $\angle OAC = 120^0$. Тогда по теореме синусов имеем:

$$\frac{OC}{Sin120^0} = \frac{AC}{Sin\alpha} \quad \text{или} \quad \frac{R}{Sin120^0} = \frac{F_1}{Sin\alpha};$$

$$Sin\alpha = \frac{F_1}{R} \cdot Sin120^0 = \frac{F_1}{R} \cdot Cos30^0 = \frac{5}{13{,}23} \cdot 0{,}867 = 0{,}329 .$$

По таблице синусов или с помощью калькулятора находим $\alpha = 19{,}2^0$.

§ 1.6. Связи. Реакции связей

В статике рассматриваются связи, реализуемые твердыми телами. Чтобы учесть влияние связи, связь в статике заменяется ее реакцией (т.е. силой). В прикладных задачах статики определение реакций связей и является чаще всего конечной целью решения задачи о равновесии тела.

1.31. Тела, которые ограничивают перемещения данного тела в пространстве, называются связями.

1.32. Сила, с которой связь действует на тело, называется реакцией связи.

1.33. Сила, с которой тело действует на связь, называется силой давления на связь. По закону о равенстве действия и противодействия эти силы равны и противоположно направлены, но приложены к разным телам и, следовательно, не образуют самоуравновешенной системы сил.

1.34. (Принцип освобождаемости от связей). Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно освободиться от связей и заменить их действие реакциями связей Этот принцип позволяет применить выводы теории, полученные для свободного тела, к исследованию задач о равновесии тел со связями.

1.35. Силы, модуль и направление которых известны, в отличие от реакций связей, называются активными силами.

Основные типы связей и их реакции

Подавляющее большинство встречающихся на практике способов крепления тел между собой, а их тысячи, может быть приведено к десяти типовым видам связей. Не рассмотренные нами связи можно будет моделировать, комбинируя типовые связи.

1. Идеально гладкая поверхность (рис.1.5). *Поверхность называется идеально гладкой, когда трением между поверхностью и лежащим на ней телом можно пренебречь. Реакция* $\overline{N}$ *идеально гладкой поверхности приложена в точке касания тела и поверхности и направлена к телу вдоль нормали к поверхности*

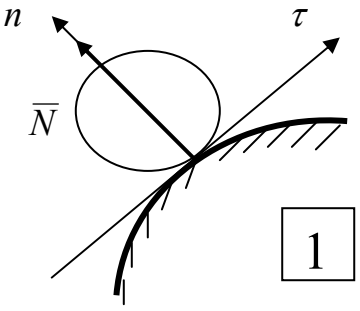


*Рис.*1.5

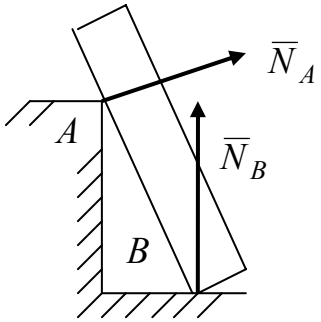


*Рис.*1.6

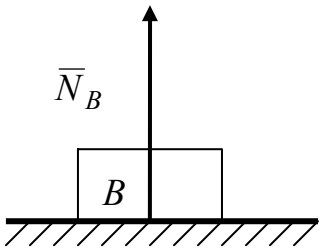


*Рис.*1.7

Идеально гладкая поверхность не препятствует скольжению тела по своей поверхности и отрыву тела от поверхности. Но данная связь препятствует перемещению тела в ту часть пространства, границей которого является. Если поверхность вырождается в точку в месте касания, то реакция направлена по нормали к поверхности тела (рис. 1.6). Если взаимодействие тела и плоскости происходит по площадке, то реакция $\overline{N}$, будучи перпендикулярна к площади взаимодействия, является равнодействующей распределенных сил взаимодействия тела и идеально гладкой плоскости (рис. 1.7).

2. Гибкая нерастяжимая нить (рис.1.8). Эта связь моделирует нити, тросы, цепи и т. п. Все они препятствуют удалению друг от друга сцепленных ими тел, но не препятствуют сближению. *Реакция* $\overline{T}$ *гибкой нити всегда направлена вдоль нити к точке подвеса.*

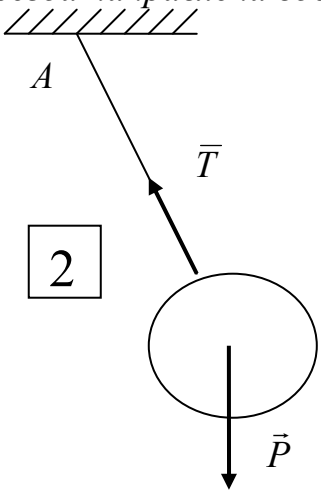


*Рис.*1.8

Рис.1.9

На рисунках 1.9, 1.10 показана поливочная машина «Фрегат» на овощном поле. Радиус её действия - 400-500 метров. Система труб подачи воды подвешена на тросах. На рис.1.11, 1.12 показаны вантовые элементы казанского моста «Миллениум» в момент строительства. На рис 1.13 видны концы «нити» в узле крепления к полотну моста.

Рис.1.10

Рис. 1.11 *Рис. 1.12* *Рис.1.13*

***3. Цилиндрический шарнир* (*рис.1.14*).** *Связь, не ограничивающая взаимных поворотов тел в плоскости, но исключающая удаление тел друг от друга в точке сцепления A, называется цилиндрическим шарниром. Ось Az - это ось шарнира.*

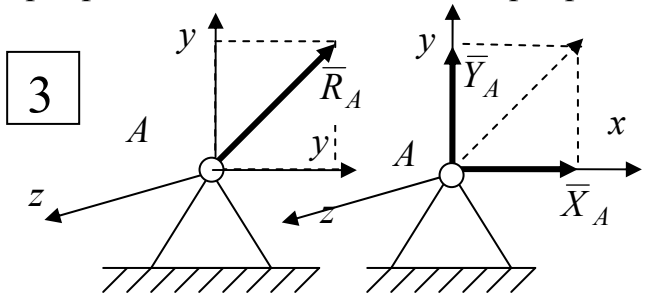


*Рис.*1.14 *Рис.*1.15

Если одно из тел неподвижно, то в точке ***A*** имеем неподвижный цилиндрический шарнир (рис.1.14). В цилиндрическом шарнире одна реакция $\overline{R}_A$, которая может

иметь любое направление в плоскости Axy - в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира (рис. 1.14). На практике $\overline{R}_A$ заменяют её составляющими $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ (рис.1.15). Поэтому говорят, что в неподвижном цилиндрическом шарнире возникают две реакции: $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$. Именно ими пользуются при построении расчетных схем решаемых задач. На рис.1.16 показан шарнир фронтального погрузчика. Чтобы предотвратить преждевременный износ шарнира, он смазан и закрыт заглушкой от грязи.

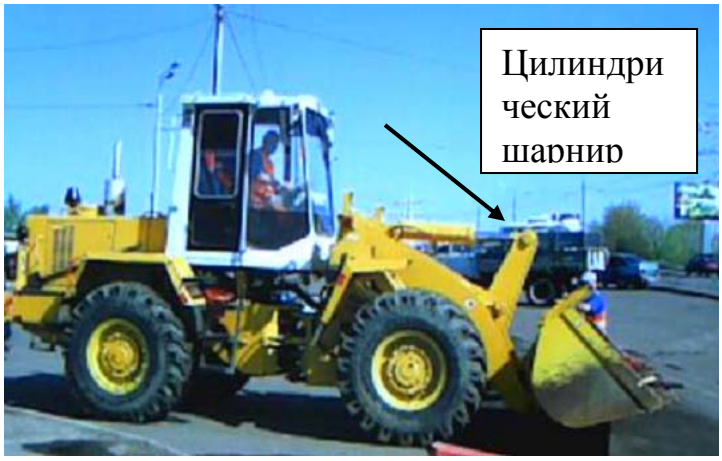


Рис.1.16

На рис.1.17 показана широко распространенная конструкция моста из железобетонных балок. Цилиндрический шарнир достигается возможностью поворотов на опорах (рис.1.18). Продольные перемещения балок исключены из-за больших сил трения.

Рис.1.17

Шарнирный опорный узел железнодорожного моста, изготовленного из металических ферм, состоит из двух частей и показан на рисунке 1.19. Ось шарнира перпендикулярна к плоскости ферм моста. Нижняя часть – это гладкий цилиндр на подставке, связанной с бетонной опорой моста. Верхняя половина шарнира свободно

одета на цилиндр нижней части и свободно поворачивается на нижнем цилиндре.

Рис.1.18

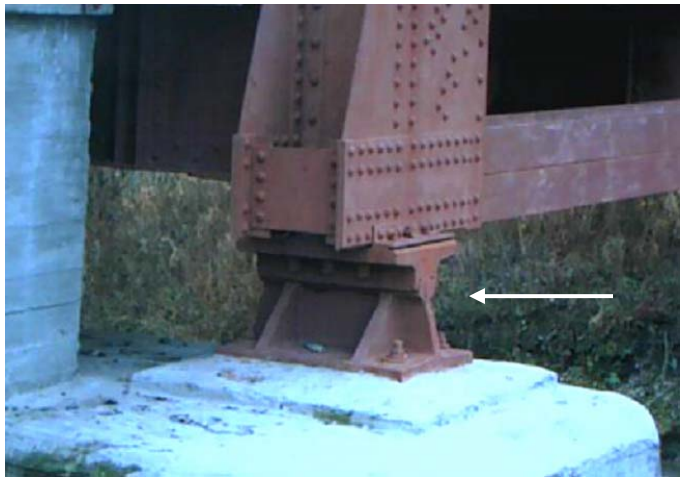


Рис.1.19

Практически по той же классической схеме сконструированы опоры арок Киевского вокзала в Москве (рис.1.20). В вершине две половинки арки тоже соединены с помощью цилиндрического шарнира (рис.1.21).

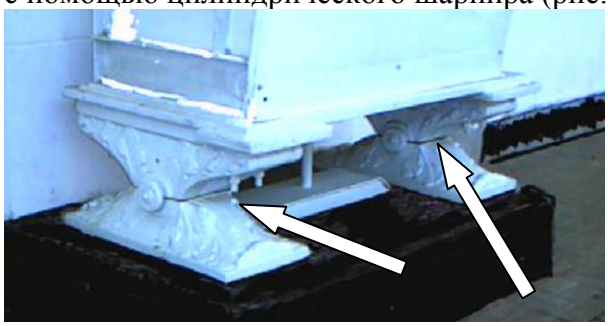


Рис. 1.20

Рис.1.21

Подвижные части механизмов, которым нужно поворачиваться в плоскости в процессе работы, соединяются с помощью цилиндрических шарниров (рис.1.22, 1.23). Так же поступила природа «конструируя» суставы человека и животных.

Рис. 1.22

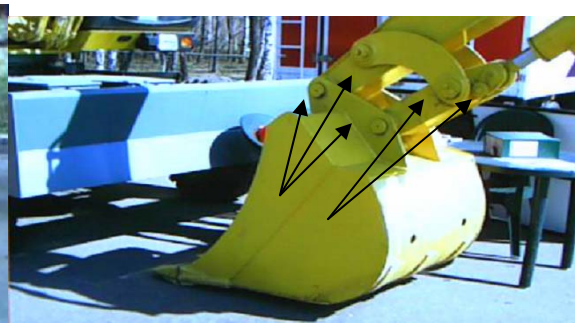


Рис. 1.23

Замечание. Как бы не был реально сконструирован шарнир, в расчетных схемах он всегда будет заменяться силами, показанными на рис.1.15

4. Подвижный цилиндрический шарнир или опора на катках (рис. 1.24). В отличие от неподвижного цилиндрического шарнира, единственная реакция $\overline{R}_A$ всегда направлена от плоскости, по которой подвижный шарнир может совершать качение, и перпендикулярна к ней (рис.1.25). Отметим, что данная связь не препятствует отрыву тела от опоры, т.е. является односторонней. Чтобы создать такую связь, достаточно, например, под тело подложить абсолютно твердый стержень круглого поперечного сечения.

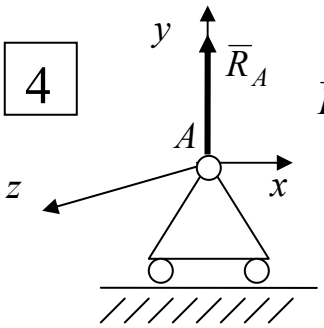


Рис.1.24

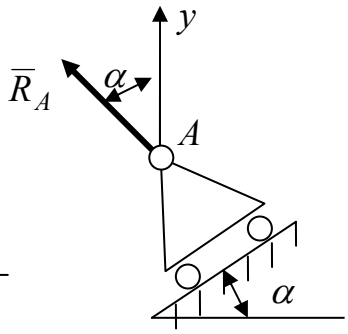


Рис.1.25

5. Сферический шарнир (рис. 1.26, 1.27). Данный вид связи не стесняет поворотов тела относительно осей Ax, Ay, Az, но точка A, совпадающая с центром сферы, неподвижна. Реакция $\overline{R}_A$ сферического шарнира приложена в точке A и может иметь любое направление в пространстве.

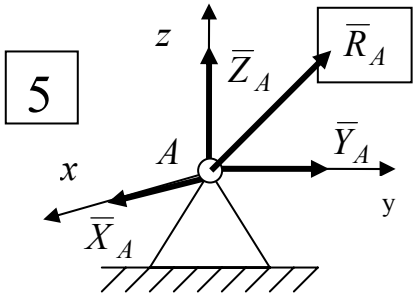


Рис.1.26, *Рис*.1.27

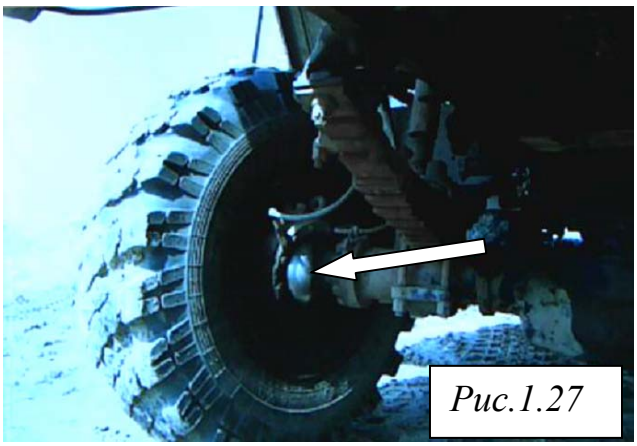


Рис.1.27

При решении задач $\overline{R}_A$ разлагается на свои составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, которые и показаны на рисунке 1.26. Это позволяет говорить, что в сферическом шарнире возникают три реакции.

На рис 1.27 показано шарнирное крепление переднего колеса к оси, реализованное на автомобиле «Урал». Такая связь позволяет колесу при движении поворачиваться в трех взаимно перпендикулярных плоскостях.

6. Подшипник (рис.1.28, точка А). Так в технике называется цилиндрический шарнир, с помощью которого фиксируются оси

вращающихся тел. Эта связь не ограничивает вращения (поворотов) тела относительно оси AB и перемещения вдоль оси AB. Поэтому, как и в цилиндрическом шарнире, в этой опоре возникает одна реакция $\overline{R}_A$, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси подшипника. При решении задач она определяется через свои составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, лежащие в той же плоскости. На рис.1.29 приведен один из примеров подшипника.

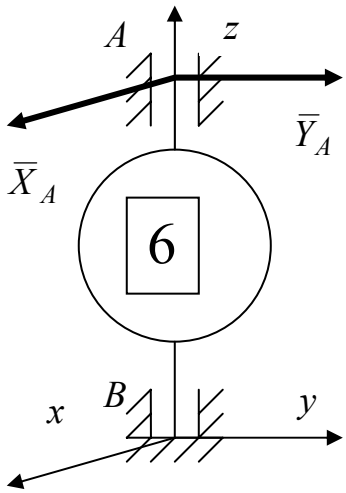


Рис.1.28

Рис.1.29

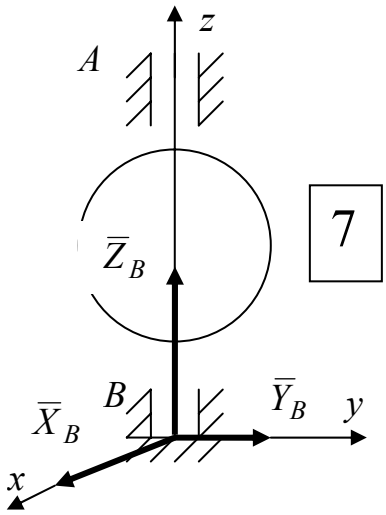


Рис.1.30

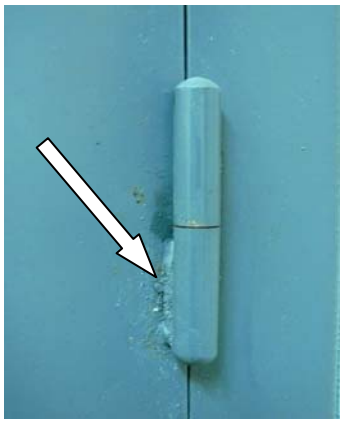


Рис.1.31

***7. Подпятник* (*рис. 1.30 , точка B*).** Это «подшипник с упором», односторонне ограничивающим перемещения тела вдоль оси подшипника. Данная связь используется для фиксирования осей вращающихся тел. В общем случае, реакция подпятника имеет произвольное направление в пространстве и при решении задач заменяется своими составляющими $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, $\overline{Z}_B$, которые и назовём реакциями подпятника.

На рис. 1.31 приведен бытовой пример подпятника, так называемый навес для металлических дверей.

8. Невесомый стержень с шарнирами по концам (рис.1.32). Если весом стержня можно пренебречь по сравнению с воспринимаемой им силой (силой давления на связь), то стержень называют невесомым. Реакция $\overline{N}$ невесомого стержня с шарнирами по концам направлена вдоль линии, проходящей через концы стержня (рис. 1.33). Форма стержней значения не имеет.

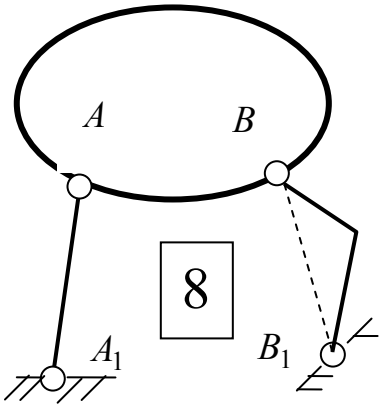


*Рис.*1.32

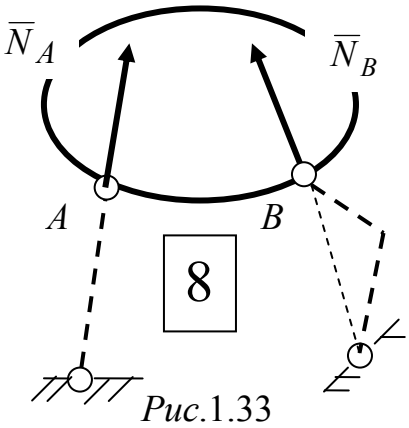


*Рис.*1.33

Гидравлические цилиндры – стержни с шарнирами по концам *Рис.1.34*

На рис.1.34 показано навесное оборудование трактора. Оно приводится в движение стержнями с изменяющейся длиной. На рисунках 1.35, 1.36 показана деревянная стержневая конструкция и отдельное узловое соединение, которое может моделироваться в отдельных случаях как шарнирное соединение

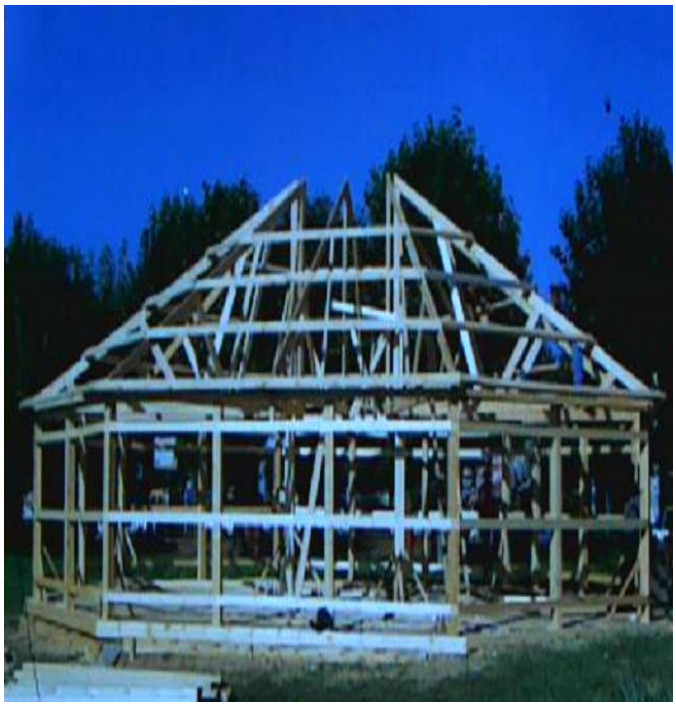


Рис.1.35 *Рис.1.36*

Изучение следующих связей рекомендуется вести после изучения понятия “момент”, но нам хотелось все связи собрать в одном месте.

9. Жёсткая заделка (защемление) в плоскости (рис.1.37). На рисунке показан стержень *AB*, жестко закрепленный в точке *A*. Связь исключает перемещение заделанной точки A в плоскости **П** и повороты прикрепленного тела относительно оси Az, перпендикулярной плоскости **П**. Следовательно, кроме силы $\overline{R}_A$, в заделке возникает реактивная пара с алгебраическим моментом M_A. После разложения силы $\overline{R}_A$ (как в цилиндрическом шарнире) в опорном защемлении возникают три реакции: $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, M_A.

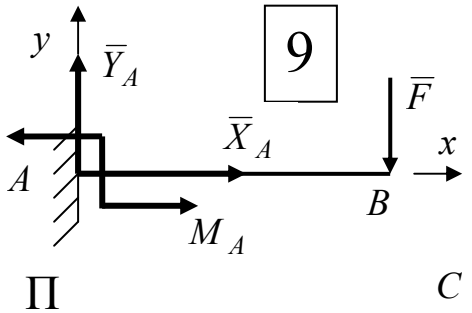


*Рис.*1.37

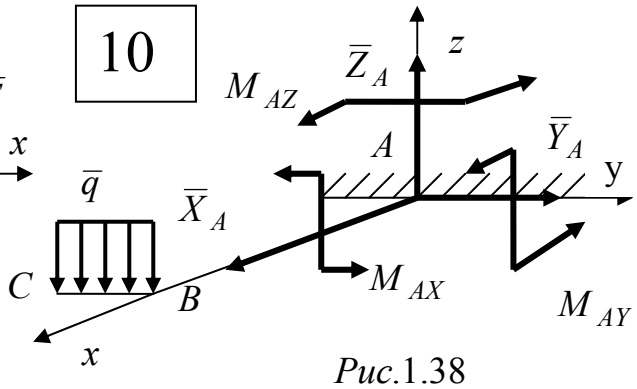


*Рис.*1.38

10. Жесткая заделка (защемление) в пространстве (рис. 1.38). На рисунке показано Г-образное тело, жестко закрепленное в точке *A*.

Данная связь исключает всякие перемещения и повороты тела в точки A (заделанного сечения A) в пространстве. Следовательно, в этой связи (опоре) возникают три реакции: $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$. Сопротивление поворотам относительно трех взаимно перпендикулярных осей приводит дополнительно к возникновению еще трех реактивных моментов: M_{AX}, M_{AY}, M_{AZ} относительно трех осей. Изображение связи и ее реакций показано на рисунке 1.38. Примеры реализации жесткой заделки показаны на рисунках 1.39-1.42.

Рис.1.39

Рис. 1.40

Рис.1.41

Рис.1.42

На рисунке 1.39 показан упавший электрический столб. Заделка, которая была осуществлена бетонированием, оказалась прочнее самого тела. На рисунке 1.40 видим основание рекламного щита. При помощи сварного соединения к колонне приварена массивная пластина. Пластина, в свою очередь, с помощью анкерных болтов прикреплена к массивному основанию. Заделкой пользуется и живая природа. На рисунке 1.41 показана корневая система дерева, не выдержавшего урагана. То, что

при умеренных силах было заделкой, при больших силах стало сферическим шарниром. Наконец, на рисунке 1.42 показано еще одно жесткое соединение. Зубья ковша фронтального погрузчика соединены с самим ковшом болтовыми соединениями. Жесткость достигнута, и зубья легко можно менять при их поломке.

Вопросы для самоконтроля к главе 1

1.Что изучает статика?
2. Какое тело называется абсолютно твердым?
3.Какая поверхность называется идеально гладкой поверхностью?
4. Какая поверхность называется шероховатой поверхностью?
5.Что называется сосредоточенной силой? Чем она характеризуется?
6.Что называется системой сил? Какие системы сил называются эквивалентными системами сил?
7.Что понимается под равновесием твердого тела?
8. Какая система сил называется уравновешенной системой сил?
9. Какая система сил называется эквивалентной нулю?
10.Что называется равнодействующей силой, уравновешивающей силой?
11. Что называется внутренней силой, что называется внешней силой?
12.Сформулируйте две основные задачи статики.
13. Сформулируйте аксиомы статики и принцип отвердевания.
14.Что называется связями, что называется реакцией связи и силой давления на связь?
15. Как формулируется принцип освобождаемости от связей и в чем его значение?
16.Опишите десять типов связей и их реакции:
17.1) гладкая поверхность,
17.2)гибкая нерастяжимая нить,
17.3) цилиндрический шарнир,
17.4) подвижный цилиндрический шарнир (опора на катках),
17.5) неподвижный сферический шарнир,
17.6) подшипник,
17.7) подпятник,
17.8) невесомый стержень с шарнирами по концам,
17.9) жесткая заделка в плоскости,
17.10) жесткая заделка в пространстве.
18. Опишите известные Вам распределенные силы.

ГЛАВА 2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Приступаем к изучению конкретных систем сил. План изучения всех систем сил в статике один и тот же. 1) Дается определение конкретной системы сил. 2) Определяются способы упрощения этой системы сил. 3) Для упрощенной системы сил формулируются условия равновесия в геометрической и аналитической формах. Все остальное, что будет встречаться, служит выполнению указанного плана.

Система сходящихся сил – это простейшая из изучаемых в статике система сил. Упрощение такой системы сил производится их сложением. При этом используются геометрический и аналитический методы. В связи с этим приходится вспомнить основы векторной алгебры.

Ниже на фото 1 этой главы приведен фрагмент строительной конструкции, при расчете которой придется воспользоваться теорией системы сходящихся сил. Такие примеры (конструкции) встречаются очень часто. Поэтому рассмотрим основные положения этой теории. Основной упор будет сделан на её прикладную сторону.

§ 2.1. Геометрический способ упрощения системы сходящихся сил

2.1. Если линии действия системы сходящихся сил лежат в одной плоскости, то система сходящихся сил называется плоской, в противном случае - пространственной.

И в том, и в другом случаях упрощение системы сходящихся сил производится геометрическим или аналитическим сложением сил. Любая система сходящихся сил может быть перемещением сил вдоль линий их действия приведена к точке пересечения линий действия сил. Поэтому

сходящуюся систему сил можно изображать в виде совокупности сил, приложенных в одной точке.

Сложение двух сил на плоскости

Даны две силы $\overline{F}_1$ *и* $\overline{F}_2$*, приложенные в точке А.* Пусть они известны. Их сумма $\overline{R}$ может быть получена по правилу параллелограмма (рис.2.1). Чтобы определить модуль вектора $\overline{R}$, нужно найти длину диагонали параллелограмма, построенного на векторах сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$.

Обратная задача. Разложение в плоскости данной силы на две силы, действующие по двум заданным направлениям

Дана сила $\overline{R}$*, приложенная в точке В (рис.2.2а).* Разложить её в плоскости на две силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, приложенные в той же точке *В*, и действующие по заданным прямым α и β так, чтобы сила $\overline{R}$ была их равнодействующей.

Решение сводится к построению параллелограмма сил на прямых α и β по известной диагонали (рис.2.2б). Через конец вектора $\overline{R}$ проводят две прямые γ и δ, параллельные линиям α и β, соответственно. Тогда прямая δ отсечет (рис.2.2) на прямой α длину вектора $\overline{F}_2$. Прямая γ отсечет на прямой β длину вектора $\overline{F}_1$. Вектор $\overline{R}$ окажется диагональю параллелограмма, построенного на силах $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, а потому будет их равнодействующей (3-я аксиома).

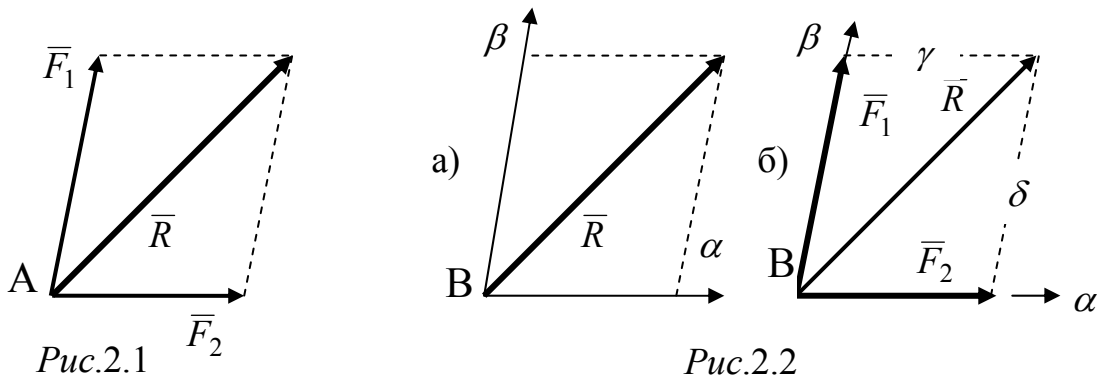


*Рис.*2.1 *Рис.*2.2

Сложение большого числа векторов сил можно произвести по правилу параллелограмма или по правилу векторного многоугольника (по правилу треугольника).

2.2. ***Сложение системы сил*** $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$***, выполненное по правилу параллелограмма или силового многоугольника, называется геометрическим сложением сил и кратко записывается формулой (2.1).***

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \ . \qquad (2.1)$$

Всякий раз, когда будут встречаться выражения типа (2.1), надо помнить, что для определения вектора $\overline{R}$ произведены геометрические построения, описанные ниже.

2.3. Вектор $\overline{R}$*, полученный по формуле (2.1), т.е. геометрическим сложением произвольной системы сил* $\left(\overline{F}_1, ..., \overline{F}_n\right)$*, называется главным вектором системы сил.*

Определение (2.3) справедливо для всех (не только сходящихся) систем сил, изучаемых в статике.

2.4. Многоугольник из векторов сил, построенный для определения главного вектора $\overline{R}$***, называется силовым многоугольником.***

Сложение системы сходящихся сил по правилу параллелограмма

Не нарушая общности рассуждений, рассмотрим только три силы. Пусть дана плоская система сходящихся сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, F_3\right)$, которые действуют на твердое тело. Само тело с действующими силами показывать не будем.

Поступим так: 1) Воспользуемся следствием из 1-ой и 2-ой аксиом статики и перенесем все силы в точку C, которая является точкой пересечения линий действия сил. Механическое состояние тела при этом не изменится (рис. 2.3).

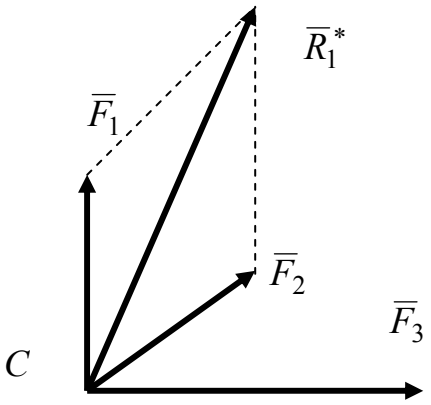


*Рис.*2.3

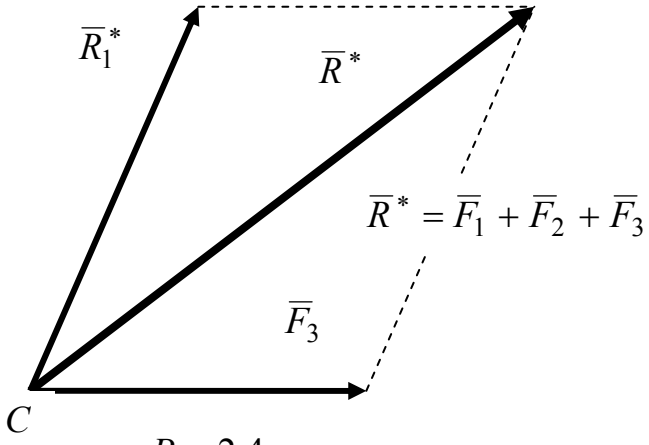


*Рис.*2.4

2) По правилу параллелограмма сложим любые две силы. Например, $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (рис.2.3). Найдем их равнодействующую $\overline{R}_1^*$. Сила $\overline{R}_1^*$ эквивалентна системе сил ($\overline{F}_1, \overline{F}_2$).

3) Отбросим систему сил ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$) и заменим её равнодействующей $\overline{R}_1{}^*$. Механическое состояние тела не изменится (рис. 2.4). Тело теперь оказалось под действием двух сил $\overline{R}_1{}^*$, $\overline{F}_3$, приложенных в той же точке *C*. 4) Сложим силы $\overline{R}_1$ и $\overline{F}_3$ по правилу параллелограмма и получим силу $\overline{R}^*$, показанную на рис.2.4.

$$\overline{R}^* = \overline{R}_1{}^* + \overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = \sum_{k=1}^{3} \overline{F}_k \ . \qquad (2.2)$$

Сила $\overline{R}^*$, полученная геометрическим сложением сходящихся сил (рис.2.4), является по третьей аксиоме статики равнодействующей (и одновременно главным вектором) для исходной системы сходящихся сил, что записывается так: $\overline{R}^* = \overline{R}$.

Совершенно очевидно, что ход решения (геометрических построений) не изменится при сложении любого числа сил.

При использовании правила параллелограмма для сложения большого числа сил выявляется один технический недостаток этого метода – чертежи получаются слишком насыщенными, вектора иногда «наезжают» один на другой. Чтобы избежать этого, в предыдущем примере сделано два рисунка 2.3, 2.4. При сложении большого числа векторов следующий метод более удобен.

Сложение плоской системы сходящихся сил по правилу силового многоугольника

Геометрическое сложение двух векторов сил можно произвести и по правилу треугольника. Это правило непосредственно вытекает из правила параллелограмма. Для большого числа векторов это правило переходит в правило многоугольника. ***Если геометрически складываются векторы сил, то полученный при этом многоугольник называется силовым многоугольником.*** Сложим по правилу многоугольника три силы, рассмотренные в предыдущем пункте (рис.2.5).

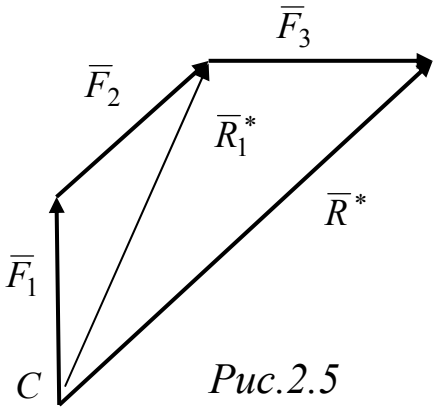


Рис.2.5

1) В точке *C,* в которой пересекаются линии действия сил, параллельно самому себе отложим любой из векторов $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ или $\overline{F}_3$.При этом должна быть сохранена и длина вектора. На рисунке 2.5 сложение начато с вектора $\overline{F}_1$. 2) От конца первого слагаемого вектора - вектора $\overline{F}_1$ откладывается любой

следующий вектор параллельно самому себе. На рисунке 2.5 таким вектором оказался вектор $\overline{F}_2$. 3) От конца вектора $\overline{F}_2$ откладывается третий вектор $\overline{F}_3$ параллельно самому себе. 4) Сумма всех трех векторов изображается вектором $\overline{R}^*$, который замыкает плоскую «ломаную» линию, составленную из суммируемых векторов $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ (рис. 2.5). Он направлен из начала первого слагаемого вектора к концу последнего. ***Складывать вектора можно в любой последовательности.*** При большем количестве векторов-слагаемых построения нужно продолжить по описанному правилу. Отметим, что если построен полный силовой многоугольник для какой - либо системы сил, то из него легко определить сумму любого числа первых слагаемых. Например, на рис.2.5 вектор

$$\overline{R}_1^* = \overline{F}_1 + \overline{F}_2, \quad \text{а вектор} \qquad \overline{R}^* = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3.$$

Сложение трех сил, не лежащих в одной плоскости

Вектор суммы трех сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости (то есть пространственной системы сходящихся сил), представляется диагональю косого параллелепипеда, построенного на этих силах (рис.2.6). Чтобы убедиться в этом, достаточно помнить, что через две прямые в пространстве всегда можно провести плоскость. Тогда две любые силы из трех можно сложить, пользуясь аксиомой параллелограмма.

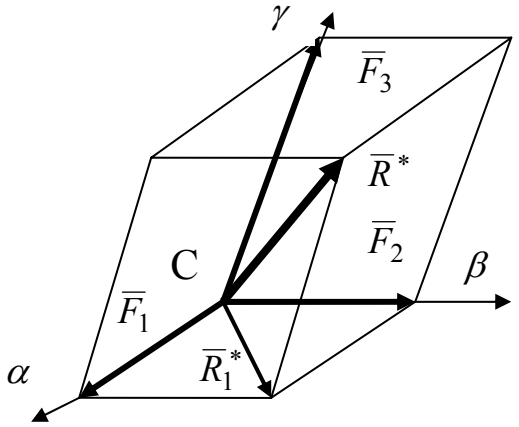


*Рис.*2.6

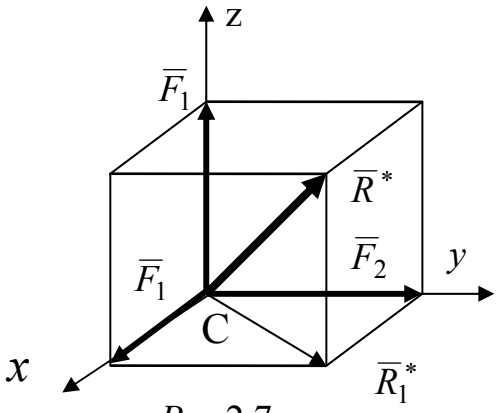


*Рис.*2.7

Тем самым определяется их равнодействующая $\overline{R}_1^* = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$. Далее, как это делалось для плоской системы сил, отбрасываются силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и заменяются их равнодействующей $\overline{R}_1^*$. Теперь можно сложить силы

$\overline{R}_1^*$, $\overline{F}_3$ и получить равнодействующую трех сходящихся в пространстве сил $\overline{R}^* = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$, приложенную в той же точке *C* и направленную по диагонали косого параллелепипеда, построенного на силах $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$. В частном случае, если векторы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ взаимно перпендикулярны, построенный параллелепипед будет прямым (рис. 2.7).

Сложение пространственной системы сходящихся сил построением силового многоугольника

Пусть на тело действует система сходящихся сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$,…, $\overline{F}_n$. Линии действия сил пересекаются в одной точке *C*. Сложение сил в точке *C* можно проводить и по правилу параллелограмма, как сделано выше для трех сил. Но чертежи окажутся очень насыщенными. Лучше это сделать построением силового многоугольника. В последнем случае, в отличие от плоского случая, показанного на рис.2.5, ломаный многоугольник будет расположен в пространстве. Символически определение главного вектора сходящейся системы сил по-прежнему записывается в виде формулы (2.3), как и для плоской системы сил:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \ . \qquad (2.3)$$

Как уже отмечали, всякий раз, когда встречается формул типа (2.3), надо видеть (представить себе) рисунки, изображающие или несколько раз примененное правило параллелограмма, или пространственный силовой многоугольник. На рис. 2.8 показана исходная пространственная система сходящихся сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, которые должны быть просуммированы по формуле (2.3). Все действия по построению теперь

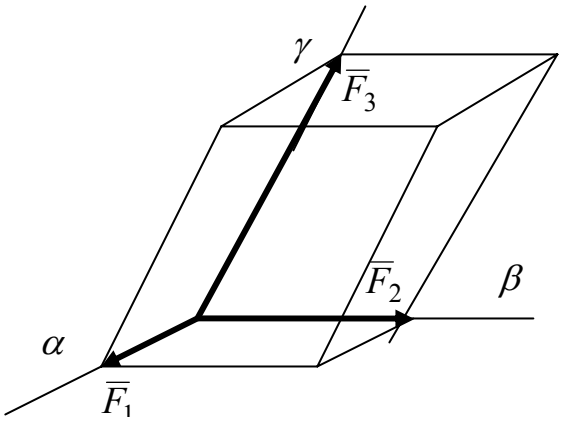


Рис. 2.8

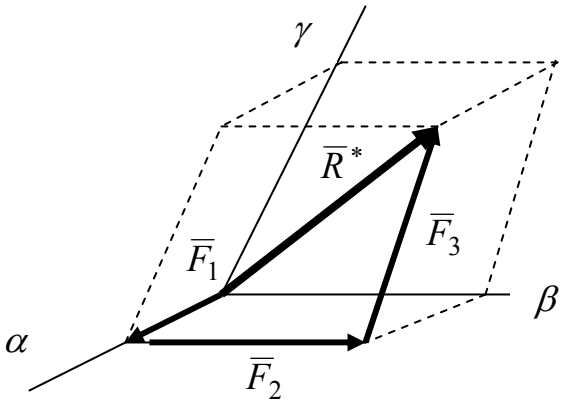


Рис. 2.9

уже пространственного силового многоугольника такие же, как и в плоском случае. Результат сложения показан на рисунке 2.9. Обратите еще раз внимание на то, что вектора сил не лежат в одной плоскости.

Совершенно очевидно, что и в этом случае система сил будет приведена к одной силе-главному вектору $\overline{R}$, равному равнодействующей этих трех сил $\overline{R}^*$.

Теорема о главном векторе системы сходящихся сил

Теорема. Главный вектор $\overline{R}$ системы сходящихся сил $(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n)$, построенный геометрическим сложением сил, равен равнодействующей $\overline{R}^*$ этой системы сил и приложен в точке C, в которой пересекаются линий действия сил системы.

Теорема справедлива и для плоской, и для пространственной систем сходящихся сил.

Доказательство: Пусть требуется сложить пространственную систему сходящихся сил. Будем складывать их по правилу параллелограмма. После сложения двух сил и замены этих сил их равнодействующей, получается новая система сил, эквивалентная предыдущей, но содержащей на одну силу меньше. При числе сил, равном *n,* процесс сложения сил для определения главного вектора $\overline{R}$ будет повторяться *n-1* раз. В итоге система сил заменится одной силой $\overline{R}$ - главным вектором. Следовательно, главный вектор $\overline{R}$ некоторой сходящейся системы сил является одновременно равнодействующей этой системы сил, и для сходящейся системы сил можно записать $\overline{R}=\overline{R}^*$, где $\overline{R}^*\sim(\overline{F}_1,\overline{F}_2,...,\overline{F}_n)$. Что и требовалось доказать.

Разложение вектора силы по трем заданным направлениям α, β, γ

Решим обратную задачу. В точке C пространства задан вектор силы. Чтобы воспользоваться рисунками 2.6, 2.7, обозначим его $\overline{R}^*$. Через точку C проведены три направления α, β, γ, не лежащие в одной плоскости. Требуется найти такие три силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, *приложенные в той же точке C и действующие по направлениям* α, β, γ, так что заданная сила $\overline{R}^*$ была бы их равнодействующей. Итак, в итоге должно быть:

$$\overline{R}^*=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3. \qquad (*)$$

Задача имеет единственное решение, если заданные направления α, β и γ не лежат в одной плоскости. Обратимся к рисунку 2.6, но теперь считаем, что известен вектор $\overline{R}^*$ и направления α , β , γ . Через конец вектора $\overline{R}^*$ проведем три плоскости, параллельные плоскостям $\beta C\gamma$, $\alpha C\gamma$ и $\alpha C\beta$. Эти плоскости отсекут на заданных прямых α , β , γ отрезки, равные модулям искомых сил F_1, F_2, F_3, соответственно. При этом, обратным сложением сил легко доказать выполнение условия *(*)*. Если направления α , β , γ взаимно перпендикулярны, то параллелепипед будет прямым (рис.2.7).

§ 2.2. Аналитический способ определения и сложения сил

В этом параграфе временно отвлечемся от системы сходящихся сил и вспомним аналитический способ работы с векторами любой природы на примере вектора силы. *При этом вводимые ниже понятия и определения будут справедливы при преобразованиях любых систем сил.*

Геометрический способ преобразования векторов очень удобен в теоретических исследованиях. Его преимущество - наглядность и краткость, если рисунки носят просто эскизный характер. Но этот способ станет громоздким и мало пригодным для вычислений, если все геометрические построения выполнять точно. Потребуется миллиметровка, чертежные приборы, знания из области геометрии и тригонометрии. Поэтому в практической вычислительной деятельности используются аналитические методы.

Сила-это вектор. Когда говорят об аналитическом способе работы с векторами сил, имеют в виду работу с их проекциями на координатные оси. В механике используется правая прямоугольная система координат.

2.5. Аналитически задать (определить) силу- это значит задать силу через ее проекции на координатные оси. При этом возникают три следующие задачи.

а) *Прямая задача.* Дан вектор силы $\overline{F}$. Найти его проекции на оси выбранной системы координат. б) *Обратная задача.* Даны проекции вектора силы F_x, F_y, F_z. По известным проекциям вектора восстановить сам вектор $\overline{F}$. в) *Даны проекции n векторов сил* F_{kx}, F_{ky} F_{kz} *на одни и те же оси.* Найти проекции главного вектора R_x, R_y, R_z на те же оси и аналитически построить вектор $\overline{R}$.

2.6. Проекцией вектора $\overline{F}$ на ось Ox называется алгебраическая величина F_x, равная произведению модуля вектора $|\overline{F}|$ на косинус угла между направлением вектора и положительным направлением оси (рис.2.10).

$$F_x = |\overline{F}| \cdot \cos\alpha . \qquad (2.4)$$

В этой формуле значок F говорит о том, что проецируется сила $\overline{F}$. Индекс x указывает ось, на которую проецируется сила $\overline{F}$. Если проецируется сила $\overline{G}$, например, на ось y, то проекция была бы обозначена как G_y. Из формулы (2.4) следуют свойства проекции силы на ось. Проекция вектора силы на ось может быть положительной, отрицательной и равной нулю.

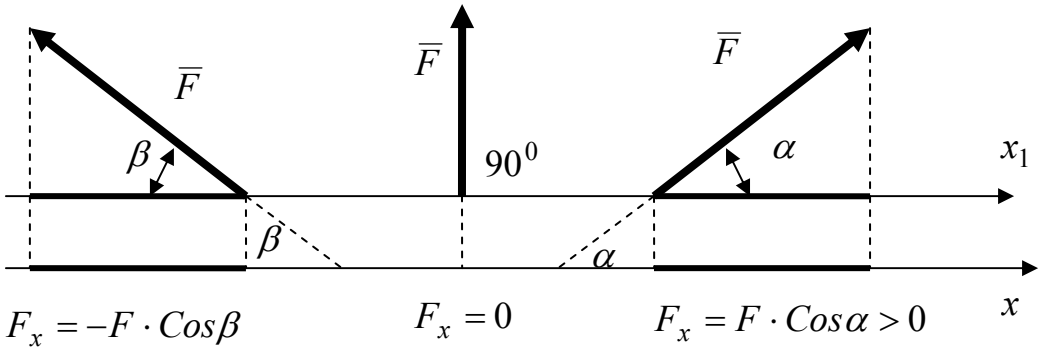


*Рис.*2.10

2.6 а). Проекция вектора силы на ось будет положительной, если вектор силы образует острый угол с положительным направлением оси (рис. 2.10). С геометрической стороны - сила и ось отклоняются от вертикали в одну сторону, они «сонаправлены».

2.6 б). Проекция вектора силы на ось будет равна нулю, если сила перпендикулярна к оси (рис.2.10).

2.6 в). Проекция вектора силы на ось будет отрицательной, если вектор силы образует тупой угол с положительным направлением оси (рис.2.10). С геометрической стороны - сила и ось отклоняются от вертикали в разные стороны, они «не сонаправлены».

2.6 г).Проекции вектора $\overline{F}$ на параллельные оси равны.

Обращаем внимание на то, что по определению 2.6 проекция силы $\overline{F}$ на какую – либо ось находится в тех случаях, когда линия действия силы и сама ось лежат в одной плоскости, то есть линия действия силы и ось координат пересекаются в пространстве. Если сила и ось лежат в разных плоскостях, то есть линия действия силы и ось координат скрещиваются в пространстве, придется сначала спроецировать

вектор силы на какую-либо плоскость, в которой лежит ось координат.

2.7. Проекцией вектора $\overline{F}$ на координатную плоскость Oxy называется вектор $\overline{F}_{xy}$, лежащий в плоскости Oxy между проекциями на эту плоскость точек начала и конца вектора $\overline{F}$ (рис.2.11, 2.12).

$$\left|\overline{F}_{xy}\right| = \left|\overline{F}\right| \cdot \cos\varphi . \qquad \textbf{(2.5)}$$

Аналогично определяется проекция вектора на любую плоскость.

Определение 2.7 проиллюстрировано на рис.2.11, 2.12. Вектор $\overline{F}$ приложен в произвольной точке A пространства, в котором введена система координат $Oxyz$. Чтобы определить проекцию силы на плоскость Oxy, мысленно или реально через точку A проведем плоскость $П$, параллельную координатной плоскости Oxy (рис.2.12). Угол, образованный вектором $\overline{F}$ и плоскостью П, обозначим φ. Вектор $\overline{F}_{xy}$ будет определен, если опустить на плоскость П перпендикуляр с конца вектора $\overline{F}$ (рис. 2.12).

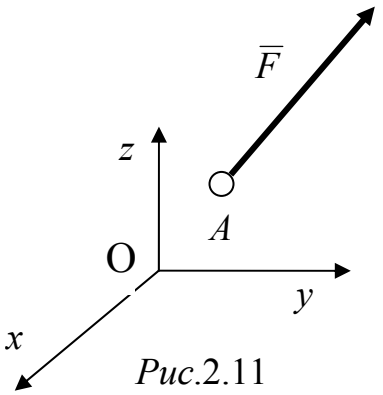


*Рис.*2.11

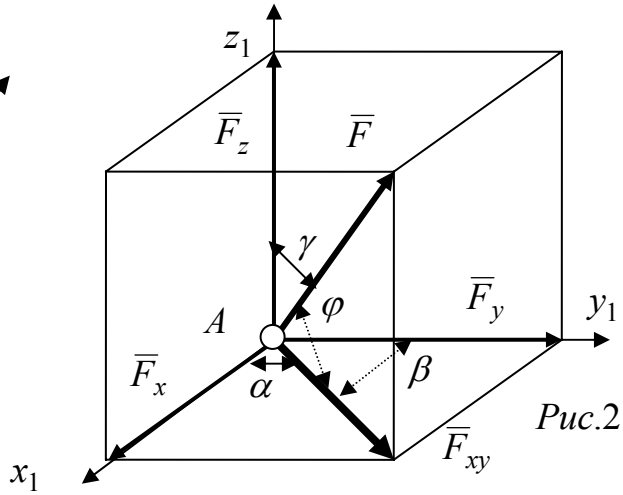


*Рис.*2.12

2.8. Проекции вектора $\overline{F}$ на параллельные плоскости равны.

2.9. Проекция вектора $\overline{F}$ на плоскость Oxy будет равна нулю, если вектор силы перпендикулярен к этой плоскости.

Геометрически это означает, что вектор силы $\overline{F}$ проецируется на плоскость Oxy в виде точки – начало и конец вектора силы проецируются на плоскость в одну и ту же точку. Модуль силы $\overline{F}_{xy}$ в этом случае оказывается равным нулю ($\left|\overline{F}_{xy}\right| = 0$). Смотрите примеры.

Определение проекции силы на ось методом двойного проецирования

Этот метод позволяет определить проекцию силы на ось в тех случаях, когда непосредственное определение угла между линией действия силы и осью затруднительно. Метод поясним на примере.

Пусть в пространстве задана некоторая система координат $Oxyz$ (рис. 2.11), а в точке A приложена сила $\overline{F}$. Требуется определить проекции F_x, F_y, F_z силы $\overline{F}$ на оси заданной системы координат. Рекомендуется действовать следующим способом: А) В точке A построить вспомогательную систему координат $Ax_1y_1z_1$ с осями, параллельными осям заданной системы координат $Oxyz$ (рис.2.12).

Б) Пользуясь определением 2.6, вычислить проекцию силы $\overline{F}$ на ось Oz.

$$F_z = F_{z_1} = \left|\overline{F}\right| \cdot Cos(90^0 - \varphi) = \left|F\right| \cdot Sin\varphi .$$

В) Пользуясь определением 2.7, спроецировать силу $\overline{F}$ на плоскость Ax_1y_1 или, что то же самое, на плоскость Oxy и найти модуль этой проекции $\left|\overline{F}_{xy}\right| = \left|\overline{F}_{x_1y_1}\right|$, чтобы в дальнейшем определить проекции F_x, F_y.

$$\left|\overline{F}_{xy}\right| = \left|\overline{F}_{x_1y_1}\right| = \left|\overline{F}\right| \cdot Cos\varphi . \qquad (*)$$

Г) Наконец, в плоскости Ax_1y_1 или, что то же самое, в параллельной ей плоскости Oxy, определить проекции силы на оси F_x, F_y. По определению 2.6 и с учетом $(*)$ будем иметь:

$$F_x = \left|\overline{F}_{xy}\right| \cdot Cos\alpha = \left|\overline{F}\right| \cdot Cos\varphi \cdot Cos\alpha ;$$

$$F_y = \left|\overline{F}_{xy}\right| \cdot Cos\beta = \left|\overline{F}\right| \cdot Cos\varphi \cdot Cos\beta = \left|\overline{F}\right| \cdot Cos\varphi \cdot Sin\alpha .$$

Итак, при применении метода двойного проецирования заданная **сила $\overline{F}$ первоначально проецируется на плоскость**, в которой лежит нужная ось координат, например, Ox и находится сила $\overline{F}_{xy}$. Затем в **плоскости производится проецирование силы $\overline{F}_{xy}$ на ось.** Отметим, что построение вспомогательных осей $Ax_1y_1z_1$ вовсе не обязательно.

Примеры на определение проекций силы приведены в параграфе 2.4.

§ 2.3. Построение вектора силы по его проекциям

Зная проекции силы на оси F_x, F_y, F_z, построить вектор $\overline{F}$, то есть определить модуль силы $|\overline{F}|$ и направление вектора силы в пространстве. Решение задачи дается по формулам:

$$|\overline{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ ;$$

$$\cos\alpha = F_x / |\overline{F}|\ ; \quad \cos\beta = F_y / |\overline{F}|\ ; \quad \cos\gamma = F_z / |\overline{F}|\ . \qquad (2.6)$$

Здесь α, β, γ - углы между найденным вектором силы $\overline{F}$ и соответствующими осями координат. Если вектор силы лежит в одной из координатных плоскостей, например, *Oxy*, то в (2.6) надо положить $F_z = 0$. Этот случай показан на рис. 2.13. Косинусы углов из (2.6) называются направляющими косинусами вектора $\overline{F}$.

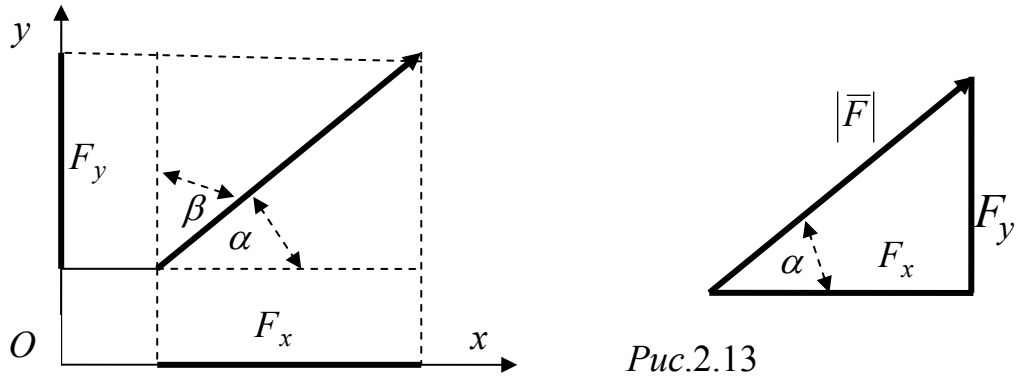


*Рис.*2.13

Определение главного вектора $\overline{R}$ любой системы сил по известным проекциям на оси координат отдельных сил

Нужно построить $\overline{R}$. Метод силового многоугольника не подходит, так как известны не вектора сил, а их проекции F_{kx}, F_{ky}, F_{ky} на оси координат. Это просто числа. Задача решается с помощью теоремы векторной алгебры.

Теорема. Пусть некоторый вектор $\overline{R}$ является геометрической суммой векторов. Тогда проекция вектора $\overline{R}$ на любую ось координат равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось координат. То есть:

Если $$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k ,$$

то $$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} ; \qquad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} ; \qquad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} . \qquad (2.7)$$

На основании теоремы по известным проекциям сил F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} главный вектор $\overline{R}$ строиться по формулам:

$$\cos\alpha_1 = R_x / \left|\overline{R}\right| ; \qquad \cos\beta_1 = R_y / \left|\overline{R}\right| ; \quad \cos\gamma_1 = R_z / \left|\overline{R}\right| . \qquad (2.8)$$

$$\left|\overline{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2} . \qquad (2.9)$$

Формулы (2.8) определяют косинусы углов между главным вектором и положительными направлениями соответствующих координатных осей. Они называются направляющими косинусами вектора $\overline{R}$. Для двух векторов, лежащих в плоскости Oxy $(F_{1z} = 0,\ F_{2z} = 0,\ R_z = 0)$,теорема проиллюстрирована на рис.2.14.

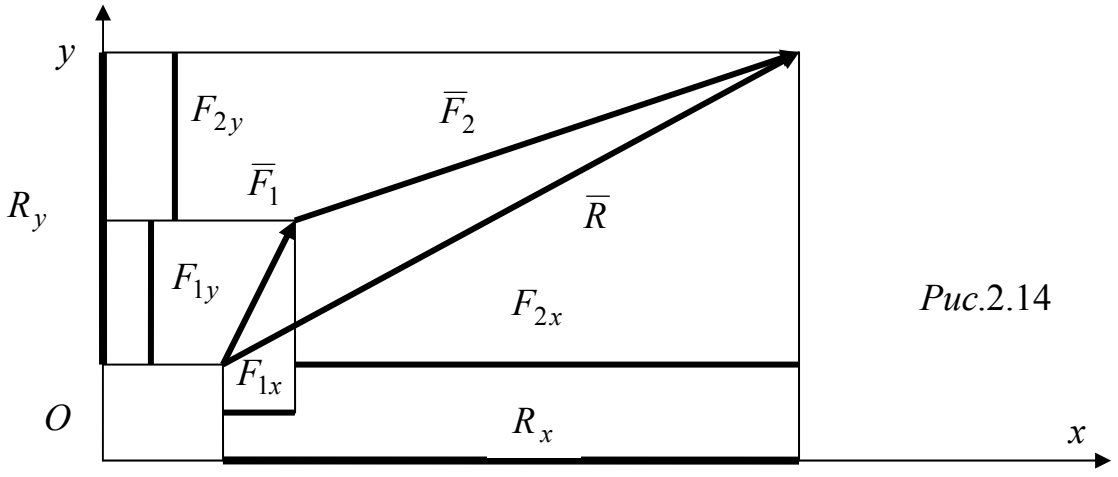


*Рис.*2.14

§ 2.4. Примеры к параграфам 2.2, 2.3

Пример 1. На абсолютно твердую плоскую прямоугольную раму *ABCD*, заделанную в точках *A* и *D*, действуют силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5$, линии действия которых лежат в плоскости рамы (рис. 1). При этом $\left|\overline{F}_1\right| = 5$ кН; $\left|\overline{F}_2\right| = 10$ кН;

$\left|\overline{F}_3\right| = 8$ кН; $\left|\overline{F}_4\right| = 12$ кН; $\left|\overline{F}_5\right| = 16$ кН. Углы $\alpha = 45^0$; $\beta = 30^0$; $\gamma = 60^0$.
Определить проекции сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5$ на оси координат *Axy*, показанные на рисунке 1.

Решение: Линии действия всех сил и сами оси координат лежат в одной плоскости – в плоскости рисунка. Поэтому можно непосредственно воспользоваться определением проекции силы на ось *2.6.* Так как проекции вектора на параллельные оси равны, то для облегчения пространственного восприятия рисунка будем систему координат Axy последовательно переносить параллельно самой себе в точки приложения сил, проекции которых в данный момент вычисляются. Тогда для сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ будем иметь рис.2:

$$F_{1x} = -\left|\overline{F}_1\right| \cdot Cos(90^0 - \alpha) = -\left|\overline{F}_1\right| \cdot Sin\alpha = -5 \cdot 0{,}707 = -3{,}535\,кН;$$

$$F_{1y} = \left|\overline{F}_1\right| \cdot Cos\alpha = 5 \cdot 0{,}707 = 3{,}535\,кН; \quad F_{2x} = \left|\overline{F}_2\right| = 10кН; \quad F_{2y} = 0.$$

$F_{2y} = 0$, потому что вектор $\overline{F}_2$ перпендикулярен оси *Cy*. Знак минус перед проекцией F_{1x} объясняется тем, что ось Cx и сила $\overline{F}_1$ «не сонаправлены». С осью *Cy* вектор $\overline{F}_1$ «сонаправлен». Рассмотрим точку E. Она показана на рис.3.

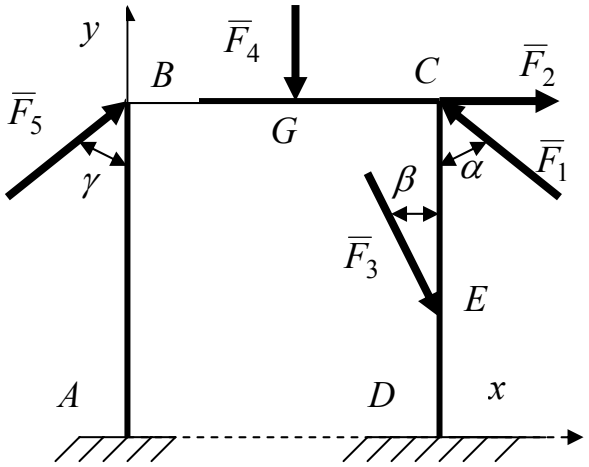


Рис.1

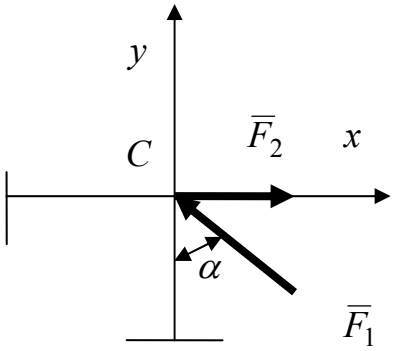


Рис. 2

$$F_{3x} = +\left|\overline{F}_3\right| \cdot Cos(90^0 - \beta) = \left|\overline{F}_3\right| \cdot Sin\beta = 8 \cdot 0{,}5 = 4кН;$$

$$F_{3y} = -\left|\overline{F}_3\right| \cdot Cos\beta = -8 \cdot 0{,}866 = -6{,}928кН.$$

И здесь знак минус перед проекцией F_{3y} появился из-за того, что вектор силы $\overline{F}_3$ отклонен вниз, а ось *Ey,* параллельная оси *Ay,* направлена вверх, сила и ось опять «не сонаправлены».

$F_{4x} = 0$, так как вектор силы $\overline{F}_4$ перпендикулярен оси *Gx (рис. 4).*

$F_{4y} = -\left|\overline{F}_4\right| = -12кН$ (рис.4). Ось координат направлена вверх, сила - вниз.

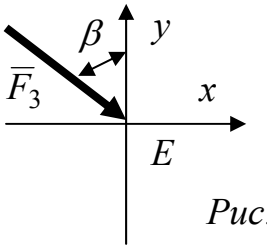


Рис.3

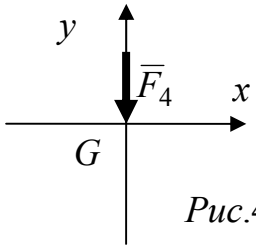


Рис.4

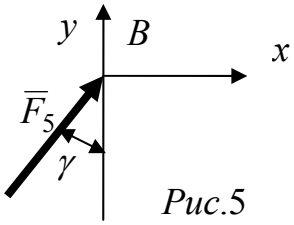


Рис.5

$F_{5x} = +\left|\overline{F}_5\right| \cdot Cos(90^0 - \gamma) = \left|\overline{F}_5\right| \cdot Sin\gamma = 16 \cdot 0{,}707 = 11{,}312кН$ (рис.5).

$F_{5y} = \left|\overline{F}_5\right| \cdot Cos\gamma = 16 \cdot 0{,}5 = 8кН$ (рис. 5).

Ответ: $F_{1x} = -3{,}535кН$; $F_{1y} = 3{,}535кН$; $F_{2x} = 10кН$, $F_{2y} = 0$; $F_{3x} = 4кН$, $F_{3y} = -6{,}928кН$; $F_{4x} = 0$; $F_{4y} = -12кН$; $F_{5x} = 11{,}312кН$; $F_{5y} = 8кН$.

Пример 2. На тело в форме прямоугольного параллелепипеда (рис.6) действуют силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$, линии действия которых совпадают или с ребрами параллелепипеда, или с его диагоналями. Модули сил равны: $F_1 = 20кН; F_2 = 30кН;\ F_3 = 40кН; F_4 = 50кН$. Определить проекции сил на оси Ox, Oy, Oz, если $OA = 0{,}5м$; $OC = 2м$; $OO_1 = 1м$.

Замечание. Для модулей сил здесь используются обозначения - значок силы без черты. Эти обозначения тоже широко распространены в литературе.

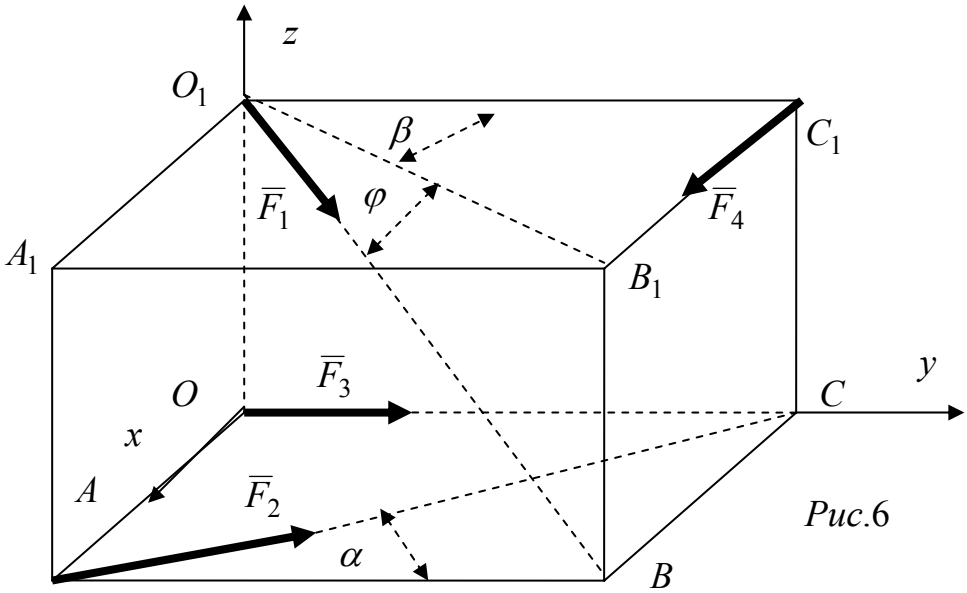


Рис.6

Решение: Если линия действия силы перпендикулярна к оси, то проекция силы на эту ось равна нулю (см. определение 2.6). Поэтому проекции сил, действующих в некоторой плоскости, на ось, перпендикулярную к этой плоскости, равны нулю.

Тогда можно записать: $F_{2z} = 0$, $F_{3z} = 0$ так как ось Oz перпендикулярна к плоскости *OABC,* в которой действуют силы $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$. Проекция силы $F_{3x} = 0$, так как сила $\overline{F}_3$ перпендикулярна к оси Ox. $F_{4y} = F_{4z} = 0$, так как сила $\overline{F}_4$ действует

по линии пересечения плоскостей BB_1C_1C и $O_1A_1B_1C_1$. К первой из них перпендикулярна ось Oy, а ко второй – ось Oz. Определим остальные проекции.

В горизонтальной плоскости *OABC* (рис 7) легко вычисляются проекции силы $\overline{F}_2$: $F_{2x} = -F_2 \cdot Sin\alpha$; $F_{2y} = F_2 \cdot Cos\alpha$. В этой же плоскости легко определяется проекция силы $\overline{F}_3$: $F_{3y} = F_3$. Далее, если, как это делалось в предыдущем примере, мысленно перенести ось Ox на ребро B_1C_1, то увидим, что $F_{4x} = F_4$ (рис. 8). Наконец, можно вычислить проекции силы $\overline{F}_1$. Проекция $F_{1z} = -F_1 \cdot Sin\varphi$. Еще две проекции F_{1x}, F_{1y} найдем методом двойного проецирования. Спроецируем для начала силу $\overline{F}_1$ на плоскость, параллельную плоскости *Oxy*. Тогда получим силу $\overline{F}_{xy}$, модуль которой $F_{xy} = F_1 \cdot Cos\varphi$.

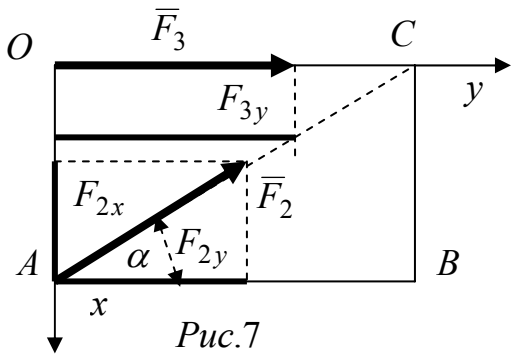


*Рис.*7

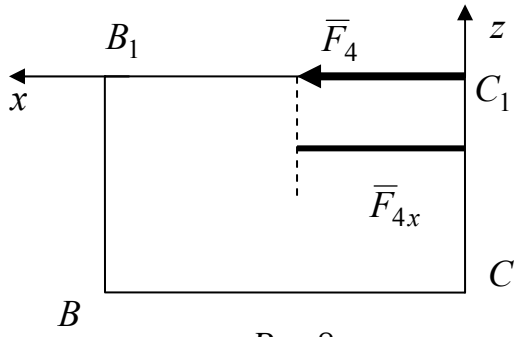


*Рис.*8

Проецируя теперь силу $\overline{F}_{xy}$ на оси Ox и Oy в плоскости $O_1A_1B_1C_1$ (рис. 10), будем иметь:

$$F_{1x} = F_1 \cdot Cos\varphi \cdot Sin\beta; \qquad F_{1y} = F_1 Cos\varphi \cdot Cos\beta.$$

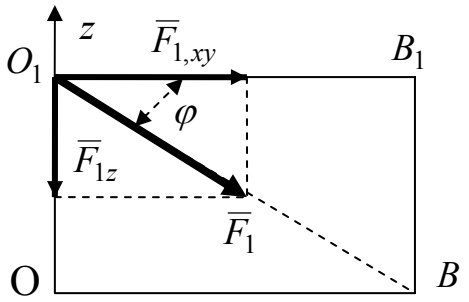


*Рис.*9

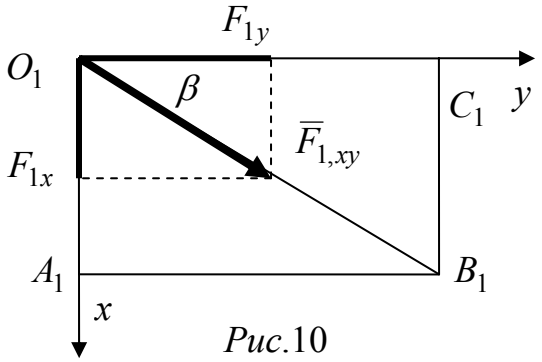


*Рис.*10

Для получения числовых значений в этом примере надо вычислить значения тригонометрических функций по известным размерам параллелепипеда. Рассмотрим основание параллелепипеда $OABC$ (рис. 7):

$$Sin\alpha = BC / AC; \qquad Cos\alpha = AB / AC.$$

По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Отсюда, подставляя значения AB, BC, получим:

$$AC = \sqrt{4{,}25} = 2{,}062м\ ; \qquad Sin\alpha = 0{,}242; \qquad Cos\alpha = 0{,}970.$$

Желательно проверить правильность определения найденных значений. Это можно сделать, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством. Итак, должно быть:

$$Sin^2\alpha + Cos^2\alpha = 1.$$

Подставляя сюда найденные значения функций, получим:

$$0{,}242^2 + 0{,}970^2 = 0{,}0587 + 0{,}9408 = 0{,}99936.$$

Другими словами, с точностью до погрешностей округления, функции найдены правильно. Переходим к углу β и рассмотрим верхнее основание параллелепипеда $O_1A_1B_1C_1$ (рис.10). Зная свойства прямоугольных параллелепипедов, легко увидеть, что угол $\beta = \alpha$. Тогда $Sin\beta = 0{,}242$; $Cos\beta = 0{,}970$. Переходим к углу φ и рассмотрим диагональное сечение параллелепипеда (рис. 9):

$$Sin\varphi = BB_1 / BO_1; \quad Cos\varphi = B_1O_1 / BO_1; \quad BB_1 = OO_1 = 1м;$$

$$B_1O_1 = \sqrt{O_1C_1{}^2 + B_1C_1{}^2} = \sqrt{4 + 0{,}25} = 2{,}062м; \quad BO_1 = \sqrt{B_1O_1{}^2 + BB_1{}^2}$$

или

$$BO_1 = \sqrt{O_1C_1{}^2 + B_1C_1{}^2 + BB_1{}^2} = \sqrt{4 + 0{,}25 + 1} = 2{,}291м.$$

$$Sin\varphi = BB_1 / BO_1 = 1/2{,}291 = 0{,}436;$$

$$Cos\varphi = B_1O_1 / BO_1 = 2{,}062/2{,}291 = 0{,}9.$$

Ответ: $F_{1x} = F_1 \cdot Cos\varphi \cdot Sin\beta = 20 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}242 = 4{,}356кН$;

$$F_{1y} = F_1 Cos\varphi \cdot Cos\beta = 20 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}97 = 17{,}46кН;$$

$$F_{1z} = -F_1 \cdot Sin\varphi = -20 \cdot 0{,}242 = -4{,}84кН;$$

$$F_{2x} = -F_2 \cdot Sin\alpha = -30 \cdot 0{,}242 = -7{,}26кН;$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot Cos\alpha = 30 \cdot 0{,}97 = 29{,}1кН; \quad F_{2z} = 0;$$

$$F_{3x} = 0; \qquad F_{3y} = F_3 = 40кН; \quad F_{3z} = 0;$$

$$F_{4x} = F_4 = 50кН; \quad F_{4y} = F_{4z} = 0.$$

§ 2.5. Условия равновесия системы сходящихся сил

Теперь снова вернемся к системе сходящихся сил и попытаемся ответить на вопрос: «Когда твердое тело под действием пространственной системы сходящихся сил будет находиться в состоянии покоя?». Или перефразируя: «Какая система

сходящихся сил будет эквивалентна нулю?» Выше было дано два способа преобразования сил - геометрический и аналитический. Поэтому и условия равновесия формулируются двумя способами.

а) Геометрическое условие равновесия

Было показано, что сходящаяся система сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$ приводится к одной силе - главному вектору $\overline{R}$, являющемуся одновременно равнодействующей. Следовательно (смотри 1-ую аксиому):

2.10. Для равновесия пространственной сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор данной системы сил был равен нулю. Или:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0 . \qquad (2.10)$$

Условие (2.10) называется геометрическим условием равновесия сходящейся системы сил, так как относится к сумме векторов сил. Выполнение условия (2.10) геометрически означает, что в силовом многоугольнике конец последней силы совпадает с началом первой, т.е. ломаная линия, составленная только из слагаемых сил $\overline{F}_k$, окажется замкнутой.

б) Аналитические условия равновесия сходящейся системы сил

Найдем выражение условий равновесия через проекции сил. Из условия (2.10) следует, что в состоянии равновесия $\left|\overline{R}\right| = 0$ (по определению вектора, равного нулю). Но по (2.9)

$$\left|\overline{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} . \qquad (2.11)$$

Модуль $\left|\overline{R}\right| = 0$ тогда и только тогда, когда $R_x = R_y = R_z = 0$ одновременно. Учитывая, что

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} ; \qquad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} ; \qquad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} .$$

в состоянии равновесия будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 ; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 ; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 . \qquad (2.12)$$

2.11. Другими словами, для равновесия пространственной сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат были равны нулю.

Теорема о трех силах

Теорема. Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, действующих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Доказательство*: Тело находится в равновесии под действием трех сил. Следовательно,* $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3)$*~0. По условию теоремы, линии действия сил не параллельны и лежат в одной плоскости. Тогда линии действия хотя бы двух сил пересекаются в одной точке. (Геометрические построения показаны на рисунке 2.15). Пусть это линии действия сил* $\overline{F}_1$ *и* $\overline{F}_2$.

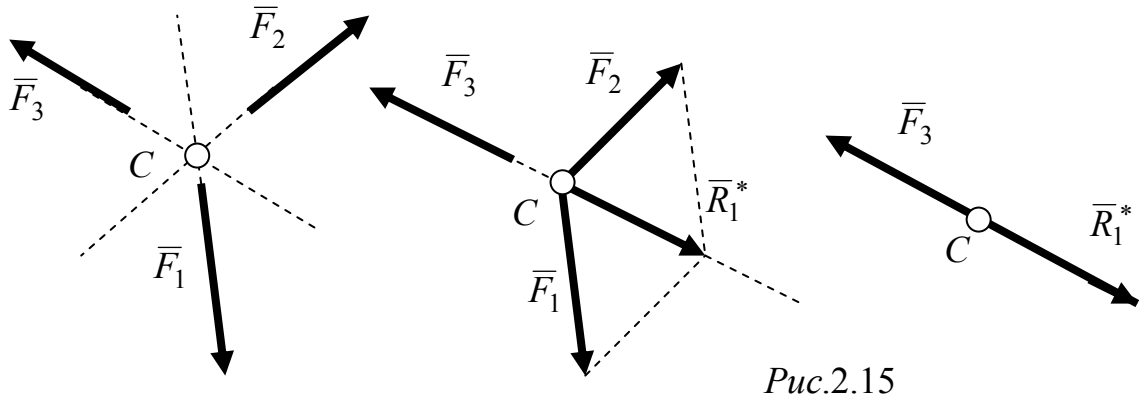


*Рис.*2.15

Их равнодействующая $\overline{R}_1^* = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$ определяется по правилу параллелограмма. Заменяя силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ их равнодействующей $\overline{R}_1^*$, получим систему сил $(\overline{F}_3, \overline{R}_1^*)$, которая эквивалентна исходной системе сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3) \sim (\overline{F}_3, R)$. Следовательно, и полученная система сил $(\overline{F}_3, \overline{R}_1^*) \sim 0$, а тело по-прежнему находится в состоянии равновесия.

Но по аксиоме 1, тело под действием двух сил может находиться в состоянии равновесия тогда и только тогда, когда линии действия сил $\overline{F}_3$ и $\overline{R}_1^*$ совпадают. Следовательно, линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке. Что и требовалось доказать.

Вопросы для самоконтроля к главе 2

На все вопросы, если хотите что-то выучить, при самостоятельной работе давайте точные письменные ответы. Сравнивайте свои ответы с нашим изложением. При неточностях в ответах, возвращайтесь к теории. В конце попробуйте все объяснить своими словами, хотя это и будет длиннее.

1. Какие системы сил называются сходящимися системами сил?
2. Что означает «плоская» и что означает «пространственная» системы сходящихся сил?
3. Что означает «геометрический способ» работы с векторами?
4. Как геометрически сложить два вектора?
5. Сформулируйте правило параллелограмма для сложения двух векторов сил.
6. Опишите правило треугольника сложения двух векторов сил.
7. Опишите правило силового многоугольника для сложения системы сходящихся сил.
8. Обоснуйте правило силового многоугольника сложения системы сходящихся сил, пользуясь правилом треугольника для сложения двух сил, приложенных в одной точке.
9. Каким преимуществом обладает (если обладает) метод силового многоугольника перед методом параллелограмма при сложении большого числа векторов сил?
10. Объясните графический метод сложения векторов сил.
11. Объясните геометрический метод сложения векторов сил.
12. Что называется главным вектором системы сил?
13. Как разложить на плоскости силу по двум заданным направлениям?
14. Что называется составляющими заданной силы?
15. Можно ли единственным образом разложить силу на плоскости по трем направлениям (прямым), лежащим в этой плоскости?
16. Как разложить силу по трем заданным направлениям, не лежащим в одной плоскости?
17. Можно ли единственным образом разложить вектор силы по четырем и более направлениям, не лежащим в одной плоскости?
18. К чему приводится система сходящихся сил при упрощении?
19. Чему равна равнодействующая системы сходящихся сил?
20. Что Вы понимаете под термином «система сходящихся сил, эквивалентная нулю»?
21. Какой вид будет иметь силовой многоугольник для пространственной системы сходящихся сил эквивалентной нулю?

22. Какой вид будет иметь силовой многоугольник для плоской системы сходящихся сил, эквивалентной нулю?
23. Сформулируйте геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.
24. Какой вид имеет силовой многоугольник, построенный для системы сходящихся сил, не эквивалентной нулю?
25. Сформулируйте теорему косинусов (смотрите приложение).
26. Сформулируйте теорему синусов (смотрите приложение).
27. В каком состоянии находится твердое тело, если на него действует система сходящихся сил, эквивалентная нулю?
28. Что понимается под аналитическим способом определения вектора силы?
29. Дайте определение проекции вектора силы на ось.
30. Сформулируйте свойства проекции вектора силы на ось.
31. Когда проекция вектора силы на ось равна нулю?
32. Пусть вектор силы на плоскости задан геометрически, то есть известен модуль силы и известно направление вектора на плоскости в принятой системе координат. Определите вектор силы аналитически.
33. Что называется направляющими косинусами вектора?
34. Запишите формулы для определения направляющих косинусов вектора силы.
35. Пусть вектор силы на плоскости определен аналитически. То есть, заданы его проекции на оси какой-либо прямоугольной системы координат. Постройте вектор силы.
36. Определите аналитически главный вектор системы сходящихся сил, если силы системы тоже заданы аналитически.
37. Сформулируйте аналитические условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости.
38. Сформулируйте аналитические условия равновесия системы сходящихся сил в пространстве.
39. Сколько неизвестных реакций связей можно определить из аналитических уравнений равновесия системы сходящихся сил на плоскости?
40. Сколько неизвестных реакций связей можно определить из аналитических уравнений равновесия системы сходящихся сил в пространстве?

ГЛАВА 3. МОМЕНТ СИЛЫ. ПАРА СИЛ. ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ К ЦЕНТРУ

В этой главе рассматривается «поворотное действие силы», действующей на свободное абсолютно твердое тело. Но предварительно нужно рассмотреть несвободные тела

§ 3.1. Условия равновесия простейшего рычага

Освежим известные из школьного курса физики знания и рассмотрим «поворотное» или «вращательное» действие силы на тело.

1. ***Детская забава – качели***. Рассмотрим качели, которые представляют собой твердое тело, обычно брус с прямолинейной осью, закрепленное с помощью цилиндрического шарнира *C*. Шарнир расположен так, что без действия внешних сил брус остается в равновесии (рис. 3.1 и фото). Если взрослый человек весом P захочет покачаться с ребенком весом G ($P > G$), то расположение сил тяжестей на качелях будет таким, как показано на рисунке. Если же взрослый человек разместится на конце бруса, то он просто перевесит. На фото «правая» девочка тяжелее и к тому же сидит дальше от оси вращения качелей

Систему сил, действующих на качели, с очень малой погрешностью можно здесь считать плоской системой сил. *Для нас сейчас важно то, что силы разной величины вызывают одинаковое механическое действие – одинаковые повороты качелей, правда, в разные стороны* Качели – это рычаг, условие равновесия которого было известно еще Архимеду (287-212 гг. до нашей эры). Это условие дается в школьных курсах физики и имеет вид:

$$P \cdot h_1 = G \cdot h_2 . \qquad (*)$$

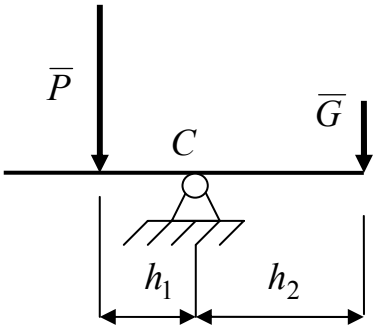


*Рис.*3.1

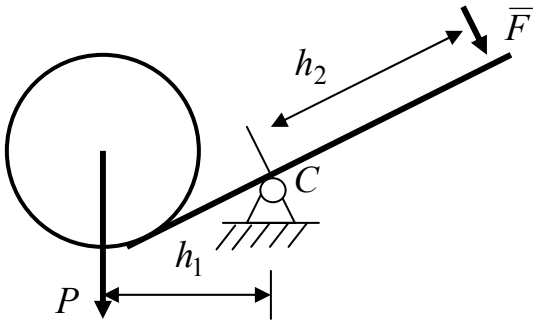


*Рис.*3.2

2. *Подъем и перемещение тяжестей с помощью рычага.* Когда в быту говорят о рычаге, чаще всего имеют в виду твердое тело с прямолинейной осью (рис. 3.2), например, «лом», который подкладывают одним концом под тело, которое хотят сдвинуть. При этом в точке C надо обеспечить шарнирное закрепление – подложить под рычаг твердое тело, на котором рычаг мог бы поворачиваться. Человек прикладывает силу $\overline{F}$ на другом конце рычага. Плоская система сил, действующая на рычаг, показана на рисунке 3.2. В момент времени, непосредственно предшествующий отрыву тела от Земли, можно записать условие равновесия рычага. Оно будет иметь вид:

$$P \cdot h_1 = F \cdot h_2 . \qquad (**)$$

Если же стоит задача приподнять (или перевернуть) тело, условие $(**)$ надо нарушить. Это можно сделать, увеличивая модуль силы давления на рычаг $\overline{F}$ или увеличив длину h_2 (например, на конец «лома» можно одеть трубу).

Таким образом, «поворотное действие» силы зависит не только от ее величины. Существенным оказывается расположение силы относительно точки С. Относительно этой точки или происходит, или возможен поворот рычага.

Попутно отметим, что форма рычага (то есть форма тела) не имеет значения. По современной терминологии каждую из длин h_1, h_2 называют плечом соответствующей силы относительно точки *C*. Произведения, стоящие в формулах $(*)$, $(**)$, называются модулями алгебраических моментов сил $\overline{P}, \overline{G}, \overline{F}$ относительно точки *C*.

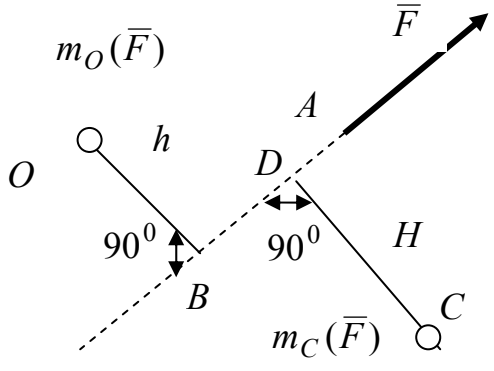
Отметим, что и в первом, и во втором примерах рычаги не являлись свободными телами, и точка *C* для них была единственной точкой, относительно которой был возможен поворот рычага. Однако в прикладной

статике, как уже было сказано, тела считаются свободными. Свободное тело может повернуться относительно бесконечного числа точек. Поэтому требуется теоретически осмыслить и обобщить результаты, описанные в предыдущих примерах, на случай *свободных* твердых тел.

§ 3.2. Алгебраический момент силы относительно центра. Главный алгебраический момент плоской системы сил относительно центра.

Алгебраический момент силы

Пусть линии действия сил, действующих на тело, расположены в одной плоскости (рис.3.3.). Такую систему сил, как известно, называют плоской системой сил. Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, можно считать, что силы приложены к самой плоскости, а плоскость жестко связана с телом. В качестве меры «поворотного действия» силы относительно некоторой точки (центра) в известной плоскости в механике вводится величина, называемая *алгебраическим моментом силы,* которая однозначно определяет и направление поворота, и величину поворотного действия силы.



$$m_O(\overline{F}) = +F \cdot h$$

$$m_C(\overline{F}) = -F \cdot H$$

*Рис.*3.3

3.1. Алгебраическим моментом силы относительно центра О называется взятая со знаком плюс или минус скалярная (алгебраическая) величина, равная произведению модуля силы на длину ее плеча (рис. 3.3).

$$m_0(\overline{F}) = \pm\left|\overline{F}\right| \cdot h. \qquad (3.1)$$

В правой системе координат, которой мы здесь пользуемся, берется знак плюс, если относительно точки О сила $\overline{F}$ стремится повернуть плоскость против часовой стрелки и знак минус - в противном случае.

3.2. Плечом силы $\overline{F}$ относительно центра O называется кратчайшее расстояние от центра O до линии действия силы.

На рис. 3.3 плечо силы относительно точки *O* обозначено через *OB* а длина плеча - через h; относительно точки *C* – через *CD и H*, соответственно. Таким образом, алгебраический момент силы относительно выбранного центра с математической точки зрения есть алгебраическая величина. Она может быть положительной, отрицательной и равной нулю. Измеряется в $H \cdot м$ (читается Ньютонах на метр) или в кратных единицах. *На плоскости алгебраический момент силы обозначается дуговой стрелкой.*

Свойства алгебраического момента силы

1) Алгебраический момент силы $\overline{F}$ относительно произвольного центра характеризуется своим модулем - произведением модуля силы на плечо и направлением действия (знаком момента). Другими словами, он полностью определяется своей *алгебраической* величиной.

2) Алгебраический момент силы не изменится, если силу $\overline{F}$ перенести вдоль ее линии действия, не изменяя направления действия силы на обратное. Действительно, при этом не изменятся направление возможного поворота плоскости под действием силы и плечо силы. Это полностью согласуется и со следствием из первых двух аксиом статики, которое утверждает, что силу можно переносить вдоль линии ее действия.

3) Алгебраический момент силы $\overline{F}$ относительно выбранного центра *O* равен нулю, если линия действия силы проходит через этот центр. Кстати, эта же сила $\overline{F}$ относительно другого центра *C* может создавать момент не равный нулю.

Еще раз отметим, что алгебраический момент силы есть мера «поворотного действия» силы в плоскости, в которой лежит выбранный центр и линия действия силы. *Это понятие вводится только для плоских систем сил.*

Главный алгебраический момент плоской системы сил относительно центра

Алгебраический момент силы относительно центра характеризует «поворотное действие» в плоскости относительно выбранного центра *O* одной отдельно взятой силы. На практике на твердое тело могут действовать несколько сил одновременно, линии действия которых лежат в одной плоскости. Каждая из сил создает свое «поворотное действие». С

практической точки зрения интересно знать или уметь вычислять «суммарное поворотное действие» всех этих сил относительно одного и того же центра *O*.

3.3. Главным алгебраическим моментом плоской системы сил относительно некоторого центра O, лежащего в плоскости действия сил, называется сумма алгебраических моментов всех сил, вычисленных относительно того же центра.

$$M_0 = \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (\pm F_k h_k)\,. \qquad (3.2)$$

Еще раз подчеркнем, в (3.2) суммируются алгебраические моменты сил, *вычисленные только относительно одного и того же центра*. Сумма алгебраических моментов относительно разных центров не имеет никакого механического смысла.

§ 3.3. Примеры к параграфам 3.1, 3.2

Пример 1. Вычислить алгебраический момент силы $\overline{F}$, приложенной в точке *D* относительно центров *A, B, C* . Линия действия силы и указанные точки лежат в одной плоскости (рис.1).

Решение. В этом примере обратите внимание на знаки алгебраических моментов силы относительно разных точек. Они ставятся в соответствии с определением 3.1. Модуль силы задается в Ньютонах или в кратных единицах, плечи сил измеряются в метрах.

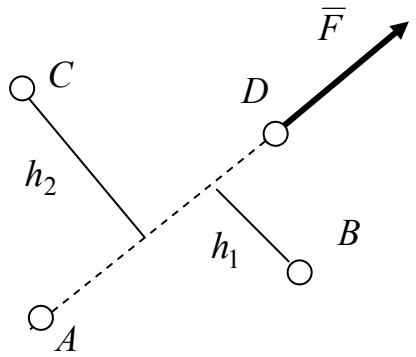


*Рис.*1

$m_A(\overline{F}) = 0$, так как линия действия силы проходит через центр *A*. Механически это означает, что сила стремится придать плоскости перемещение вдоль линии своего действия, но не может повернуть плоскость относительно точки *A*.

$m_B(\overline{F}) = -\left|\overline{F}\right| \cdot h_1$. Знак минус взят, потому что сила стремится повернуть свободную (никак не закрепленную) плоскость относительно точки *B* по часовой стрелке.

$m_C(\overline{F}) = +\left|\overline{F}\right| \cdot h_2$. Относительно точки *C* сила $\overline{F}$ стремится повернуть свободную плоскость против часовой стрелки, поэтому алгебраическому моменту присвоен знак плюс.

Замечание. Поясним знак $m_C(\overline{F})$ еще раз. Представьте себе, что рисунок 1 сделан на листе бумаги, которая лежит на чертежной доске. В точке С воткните мысленно иголку и подействуйте пальчиком на листок в направлении силы. Листочек на иголке,

как на оси, начнет поворачиваться против часовой стрелки. Знак плюс. Эти опыты можно проделать со всеми другими точками.

Пример 2. Вычислить алгебраические моменты трех сил, действующих по сторонам прямоугольника *ABCD* относительно двух центров *A и B*, если *AB=2м; AD=3м;* $F_1 = 3кН$; $F_2 = 5кН$; $F_3 = 8кН$.

Решение: $m_A(\overline{F}_1) = -F_1 \cdot AD = -3 \cdot 3 = -9 \ \ кН \cdot м$; $m_A(\overline{F}_2) = 0 \ \ кН \cdot м$;

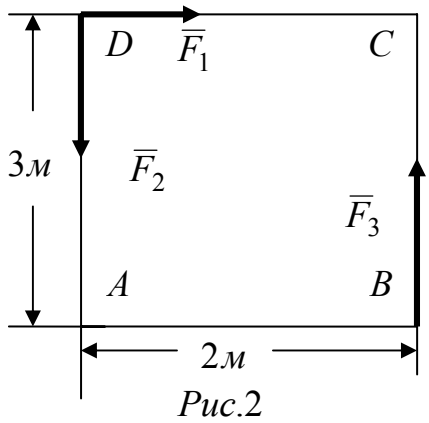


Рис.2

$m_A(\overline{F}_3) = +F_3 \cdot AB = 8 \cdot 2 = 16 \ \ кН \cdot м$;

$m_B(\overline{F}_1) = -F_1 \cdot BC = -3 \cdot 3 = -9кН \cdot м$;

$m_B(\overline{F}_2) = +F_2 \cdot AB = 5 \cdot 2 = 10 \ \ кН \cdot м$;

$m_B(\overline{F}_3) = 0 \ \ кН \cdot м$.

Ответ: Алгебраические моменты сил относительно точек (центров) *A и B* равны: $m_A(\overline{F}_1) = -9 \ \ кН \cdot м$; $m_A(\overline{F}_2) = 0 \ \ кН \cdot м$; $m_A(\overline{F}_3) = 16 \ \ кН \cdot м$; $m_B(\overline{F}_1) = -9кН \cdot м$; $m_B(\overline{F}_2) = 10 \ \ кН \cdot м$; $m_B(\overline{F}_3) = 0 \ \ кН \cdot м$.

Пример 3. Вычислить главные алгебраические моменты плоской системы сил, показанной на рисунке к примеру 2, относительно трех точек *A, B, C,* если по-прежнему *AB=2м, AD=3м,* $F_1 = 3кН$, $F_2 = 5кН$, $F_3 = 8кН$.

Решение: При вычислении главного алгебраического момента относительно точек *A и B* воспользуемся результатами примера 2 и просто сложим алгебраические моменты сил с учетом их знаков. Складывать можно только те алгебраические моменты, которые вычислены относительно одной и той же точки. Тогда:

$$M_A = \sum_{k=1}^{3} m_A(\overline{F}_k) = m_A(\overline{F}_1) + m_A(\overline{F}_2) + m_A(\overline{F}_3) = -9 + 0 + 16 = 7кН \cdot м;$$

$$M_B = \sum_{k=1}^{3} m_B(\overline{F}_k) = m_B(\overline{F}_1) + m_B(\overline{F}_2) + m_B(\overline{F}_3) = -9 + 10 + 0 = 1 \ \ кН \cdot м.$$

Дополнительно вычислим алгебраические моменты сил относительно точки *C* и сложим их, чтобы получить главный алгебраический момент системы сил относительно точки *C.*

$$M_C = \sum_{k=1}^{3} m_C(\overline{F}_k) = m_C(\overline{F}_1) + m_C(\overline{F}_2) + m_C(\overline{F}_3) = 0 + F_2 \cdot CD + 0 = 10 \ \ кН \cdot м.$$

Таким образом, плоская система сил, действующая на тело (рис.2), относительно всех трех точек *A,B,*C стремится повернуть тело против часовой стрелки, так как все вычисленные главные моменты положительны. Наибольшее суммарное поворотное действие получается относительно точки *C,* наименьшее – относительно точки *B.*

Ответ: Главные алгебраические моменты системы сил относительно центров *A, B и C*, соответственно, равны плюс $7кН \cdot м$; плюс $1кН \cdot м$ и плюс $10 \ кН \cdot м$

Замечание: В данном примере главные алгебраические моменты системы сил относительно разных точек оказались положительными. Это не закономерность, а случайность. При других данных для вычислений или при другом положении сил и точек, могли бы получить и отрицательные результаты.

§ 3.4. Векторный момент силы относительно центра

Пусть в некоторой точке пространства A (читай - в некоторой точке свободного тела, которое на рисунке не показано) приложена сила $\overline{F}$. Рассмотрим «поворотное» действие этой силы $\overline{F}$ относительно произвольной точки пространства *O*. Внимательный читатель, конечно, сразу же заметит, что «поворотное» действие одной силы можно было бы описать алгебраическим моментом силы. В самом деле, через точку и прямую (линию действия силы) в трехмерном пространстве всегда можно провести плоскость. Но дело в том, что на тело может действовать произвольная пространственная система сил и плоскости, проходящие через один и тот же центр *O,* и линии действия отдельных сил $\overline{F}_k$ не будут совпадать. Если при этом попытаться поставить вопрос о «суммарном поворотном действии» всей системы сил относительно центра O, то сразу же заметим, что при помощи какой-либо алгебраической величины, подобной главному алгебраическому моменту, то есть просто алгебраической суммы, не удается получить ответа на наш вопрос. Хотя бы потому, что набор чисел - алгебраических моментов - не ответит на вопрос, в какой плоскости произойдет это суммарное действие, в каком направлении при этом возможно опрокидывание тела. Величина, определяющая поворотное действие силы относительно центра в пространстве, должна определять одновременно три характеристики этого действия - направление возможного поворота, величину поворотного действия и плоскость поворотного действия. Следовательно, это может быть вектор. **Итак, «поворотное» действие силы в пространстве относительно выбранного центра попробуем смоделировать вектором.**

Введем в пространстве прямоугольную систему координат *Oxyz*, связанную с каким-либо неподвижным телом отсчета. Положение точки *A,* в которой приложена сила $\overline{F}$, определим в этой системе отсчета радиусом-вектором $\overline{r}$ (рис. 3.4, 3.5). Дадим следующее определение.

3.4. Моментом силы $\overline{F}$ относительно центра O (рис.3.4) называется вектор $\overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$, приложенный в центре O и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и линию действия силы (то есть перпендикулярно к плоскости

треугольника** OAB**) в ту сторону, откуда поворот тела под действием силы** $\overline{F}$ **наблюдается происходящим против часовой стрелки.

Итак, $$\overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}\,. \qquad (3.3)$$

$\overline{m}_0(\overline{F})$ - это обозначение векторного момента силы относительно центра. Здесь в скобках указано, момент какой силы вычислен. Индекс O показывает точку, относительно которой этот момент вычислялся. Знак вектора (черточка сверху) указывает на то, что эта величина отличается от алгебраического момента силы и должна анализироваться с учетом формулы (3.3).

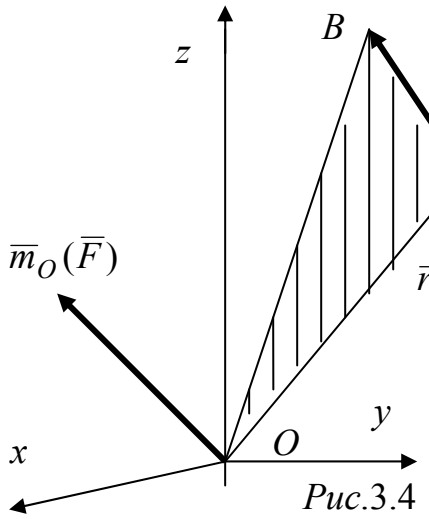


Рис.3.4

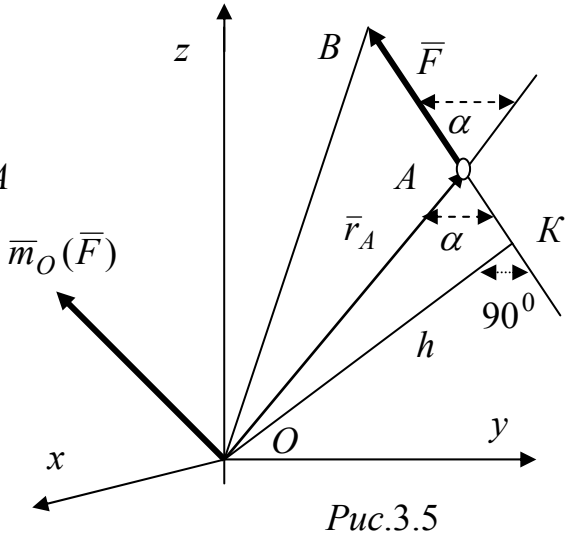


Рис.3.5

Если других сил нет и путаница невозможна, векторный момент силы кратко обозначают через $\overline{m}_0$. Векторный момент силы $\overline{m}_0$ относительно центра O, как и любой вектор, определяется: 1) точкой приложения (центр O). 2) направлением - вектор $\overline{m}_0$ перпендикулярен плоскости OAB, проходящей через линию действия силы $\overline{F}$ и центр O.

3) числовым значением или, как говорят еще, модулем векторного момента.

$$|\,\overline{m}_0(\overline{F})| = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot Sin\alpha \qquad (3.4)$$

Опуская перпендикуляр h из центра O на линию действия силы, видим (рис.3.5), что $|\overline{r}| \cdot Sin\alpha = h$. Тогда с учетом (3.4) модуль момента:

$$|\,\overline{m}_0(\overline{F})| = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot Sin\alpha = |\overline{F}| \cdot h\,. \qquad (3.5)$$

Здесь h , как и в случае с алгебраическим моментом, обозначает длину плеча силы $\overline{F}$ относительно центра O .

3.5. Кратчайшее расстояние h от центра O до линии действия силы называется плечом силы $\overline{F}$ относительно центра O. Встречается и другая формулировка этого понятия:

3.6. Длина перпендикуляра, опущенного из центра O на линию действия силы $\overline{F}$, называется плечом силы $\overline{F}$ относительно центра O.

3.7. Модуль векторного момента силы относительно выбранного центра O равен произведению модуля силы на длину плеча силы относительно центра O.

Таким образом, модуль векторного момента силы - величина строго положительная и измеряется произведением $H \cdot м$ (читается Ньютон на метр) или в кратных единицах.

Направления вектора $\overline{m}_0(\overline{F})$ при действии силы $\overline{F}$ в плоскости Oyz, в плоскости Oxy и в плоскости Oxz приведены на рис. 3.6.

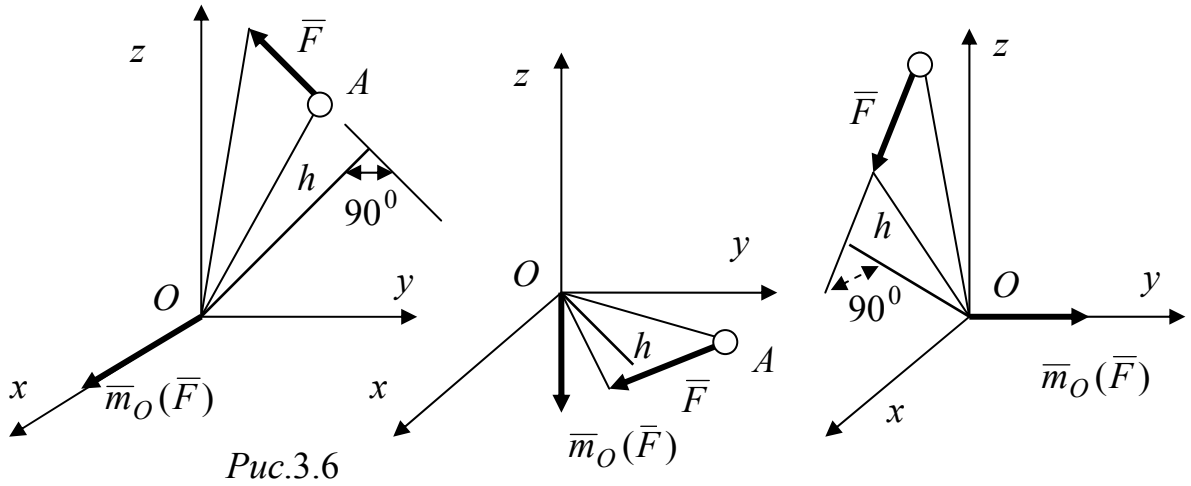


*Рис.*3.6

Геометрический смысл модуля векторного момента $|\overline{m}_0(\overline{F})|$

Легко заметить (рис. 3.5), что модуль $|\overline{m}_0(\overline{F})|$ векторного момента силы относительно центра, который вычисляется по формуле (3.5), численно равен удвоенной площади треугольника OAB с основанием, равным длине вектора (модулю) силы $\overline{F}$ и противолежащей ему вершиной в точке O. Действительно, пусть площадь треугольника OAB равна S . С учетом (3.5) и по рисунку 3.5:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2}\left|\overline{F}\right| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |\overline{m}_0(\overline{F})|. \quad \text{Отсюда,} \quad |\overline{m}_0(\overline{F})| = 2 \cdot S. \qquad (3.6)$$

3.8. Таким образом, модуль векторного момента силы относительно центра O равен удвоенной площади треугольника,

построенного на векторе силы как на основании и с противолежащей вершиной в центре О (моментный центр).

Свойства векторного момента силы относительно центра

1) $\overline{m}_o(\overline{F})$ не меняется при переносе силы $\overline{F}$ вдоль линии её действия, так как при этом не меняется плечо силы, площадь треугольника *OAB* и плоскость, в которой он построен, а следовательно, не изменятся модуль и направление вектора $\overline{m}_O(\overline{F})$ в пространстве. Это же следует и из «следствия» из первых двух аксиом статики.

2) $\overline{m}_0(\overline{F}) = 0$, если линия действия силы $\overline{F}$ проходит через точку O. В этом случае плечо силы относительно центра *O* окажется равным нулю. Механический смысл этого в том, что сила, линия действия которой проходит через точку O , не может повернуть тело относительно точки *O*.

3) Зная, например, векторные моменты двух сил относительно одного и того же центра $\overline{m}_o(\overline{F}_1)$ и $\overline{m}_o(\overline{F}_2)$, можно сравнивать между собой поворотные действия двух сил относительно центра *O*. Например, две разные по модулю силы, действующие в одной и той же плоскости, стремящиеся повернуть тело относительно центра *O* в одну и ту же сторону в случае, когда произведение модуля одной силы на ее плечо относительно центра *O* и произведение модуля второй силы на ее плечо относительно того же центра *O* будут одинаковы, будут создавать один и тот же векторный момент $\overline{m}_o = \overline{m}_o(\overline{F}_1) = \overline{m}_o(\overline{F}_2)$. С другой стороны, равенство $\overline{m}_o(\overline{F}_1) = \overline{m}_o(\overline{F}_2)$ означает, что на тело в одной и той же плоскости действуют две силы, стремящиеся по отдельности повернуть тело относительно центра *O* в одну и ту же сторону и создающие одинаковые по величине поворотные действия.

Итак, векторный момент силы $\overline{m}_o(\overline{F})$ - это векторная мера поворотного действия силы в пространстве.

Главный векторный момент произвольной пространственной системы сил

Пусть на тело действует произвольная пространственная система сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$ в точках с координатами $\overline{r}_k$, где $k = 1,2,3,...,n$.

3.8. Главным векторным моментом $\overline{M}_0$ произвольной пространственной системы сил относительно центра О называется векторная величина, равная геометрической сумме векторных моментов всех сил системы относительно того же центра О.

$$\overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n}(\overline{r}_k \times \overline{F}_k) = \sum_{k=1}^{n}\overline{m}_0(\overline{F}_k)\ . \qquad (3.7)$$

При вычислении главного алгебраического момента относительно центра алгебраически складывались алгебраические моменты сил, здесь геометрически складываются векторные моменты сил.

Другими словами, чтобы выполнить сложение по формуле (3.7), надо $n-1$ раз применить правило параллелограмма (3-я аксиома статики) или построить многоугольник векторов моментов, как это делалось при построении силового многоугольника для системы сходящихся сил. К счастью, формула (3.7) при решении задач практически не используется, но теоретическое ее значение трудно переоценить. Для системы из двух сил $\overline{F}_1$, действующей в плоскости, Oxy и силы $\overline{F}_2$, действующей в плоскости Oxz, главный векторный момент $\overline{M}_0$ показан на рисунке 3.7. $\overline{M}_0$ расположен в плоскости Oyz.

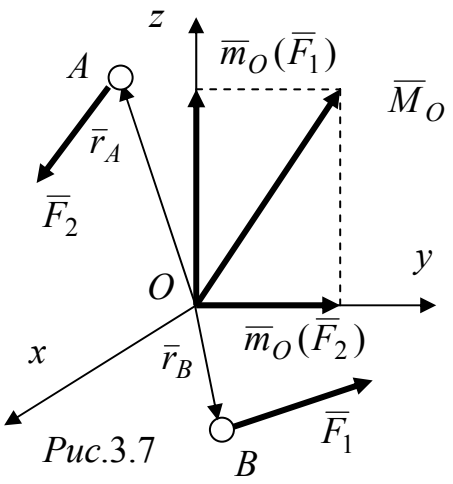


*Рис.*3.7

§ 3.5. Момент силы относительно оси

В качестве меры «поворотного» действия силы относительно оси вводится понятие *момента силы относительно оси*. Итак, есть прямая в пространстве. В точке *A,* не лежащей на этой прямой, действует сила $\overline{F}$. Относительно произвольной точки *O*, лежащей на этой прямой, вычислен векторный момент этой силы $\overline{m}_O(\overline{F})$. Введем в пространстве систему координат. Начало её выберем в той самой точке *O,* ось *Oz, например,* совместим с прямой. Теперь прямую можно назвать осью *Oz.*

3.9. Моментом силы $\overline{F}$ относительно оси Oz, проходящей через центр О, называется скалярная величина $m_z(\overline{F})$, равная проекции векторного момента этой силы $\overline{m}_O(\overline{F})$, вычисленного относительно центра О, на ось Oz (рис 3.8). Символически это записывается так:

$$m_z(\overline{F}) = np_z\overline{m}_o(\overline{F}) \quad \text{или} \quad m_z(\overline{F}) = |\overline{m}_O(\overline{F})|\ \mathrm{Cos}\,\gamma\ . \qquad (3.8)$$

Определение (3.8) практически не пригодно для вычислений. Чтобы вычислить момент силы относительно оси по формуле (3.8), пришлось бы:

1) Определить векторный момент силы $\overline{m}_0(\overline{F})$ относительно центра и построить его в центре *O*. Для этого надо знать модуль вектора $\overline{m}_0(\overline{F})$ и его направляющие косинусы. 2) Спроецировать вектор $\overline{m}_0(\overline{F})$ на ось *Oz*.

Определение 3.9 раскрывает математический смысл понятия «момент силы относительно оси» как проекцию вектора $\overline{m}_O(\overline{F})$, но не раскрывает механической сути понятия «момент силы относительно оси». Но именно определение 3.9 позволяет построить простой и прозрачный способ вычисления момента силы относительно оси, который часто называют вторым определением.

Геометрический и механический смысл момента силы относительно оси

Как было показано в предыдущем параграфе, модуль векторного момента силы $|\overline{m}_0(\overline{F})|$ численно равен удвоенной площади треугольника *OAB* с основанием, равным длине вектора (модулю) силы $\overline{F}$ (рис. 3.8). Тогда геометрический смысл модуля $|m_z(\overline{F})|$ следует из формулы (3.8):

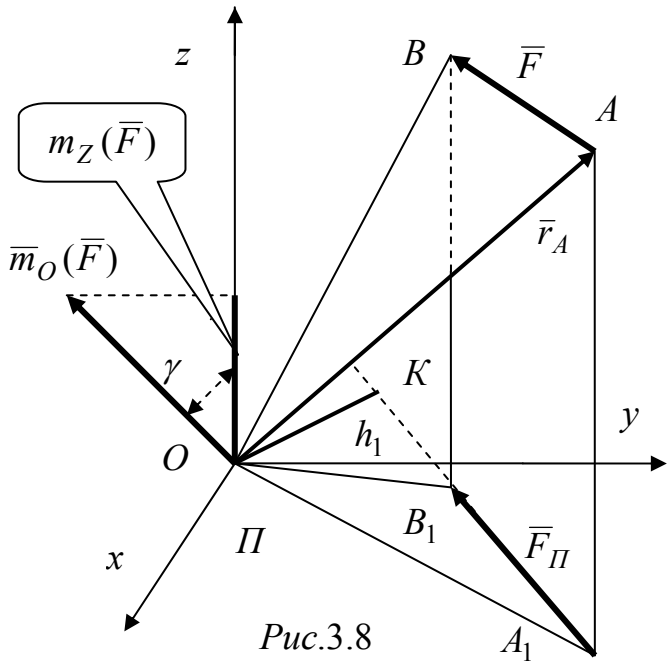


*Рис.*3.8

3.10.Модуль момента силы $|m_z(\overline{F})|$ *относительно оси Oz численно равен удвоенной площади треугольника* OA_1B_1*, который является проекцией треугольника OAB на плоскость П, перпендикулярную к оси Oz*. Доказательство утверждения следует из того, что угол между перпендикулярным к плоскости треугольника *OAB* вектором $\overline{m}_0(\overline{F})$ и положительным направлением оси *Oz*, с одной стороны, и угол между плоскостью треугольника *OAB* и плоскостью *П,* перпендикулярной оси *Oz*, с другой стороны, равны (рис.3.8). Обозначим проекцию силы $\overline{F}$ на плоскость *П* через $\overline{F}_П$. По определению проекции

силы на плоскость $\overline{F}_{\Pi}$ - это сила, то есть векторная величина. Другими словами (смотрите рис. 3.8), по формуле (3.8) с учетом (3.6) можем записать цепочку равенств:

$$|m_z(\overline{F})| = |\overline{m}_O(\overline{F})| \cdot |Cos\gamma| = 2 \cdot площадь \Delta OAB \cdot |Cos\gamma|$$
$$= 2 \cdot площадь \Delta OA_1B_1 = A_1B_1 \cdot h_1 = |\overline{F}_{\Pi}| \cdot h_1.$$

Таким образом, модуль момента силы относительно оси равен:

$$|m_z(\overline{F})| = A_1B_1 \cdot h_1 = |\overline{F}_{\Pi}| \cdot h_1, \qquad (3.9)$$

где $|\overline{F}_{\Pi}|$- модуль проекции силы $\overline{F}$ на плоскость *П,* перпендикулярную к оси *Oz*. Точка O - это начало координат и одновременно - точка пересечения оси *Oz* с перпендикулярной ей плоскостью *П.* h_1- высота треугольника OA_1B_1, опущенная из вершины O на сторону A_1B_1.

Формула (3.9) дает правило вычисления модуля момента силы $\overline{F}$ относительно оси *Oz*. С другой стороны, с точностью до знака, модуль момента силы относительно оси $|\overline{m}_0(\overline{F})|$ оказался равным алгебраическому моменту силы $\overline{F}_{\Pi}$ относительно точки O. Сама же сила $\overline{F}_{\Pi}$, напомним, получена проецированием силы $\overline{F}$ на плоскость *П,* перпендикулярную оси. Если удастся произведению $|\overline{F}_{\Pi}| \cdot h_1$, взятому из (3.9), присвоить знаки, вытекающие из (3.8), то вычисление момента силы $\overline{F}$ относительно оси *Oz* сведется к вычислению алгебраического момента силы $\overline{F}_{\Pi}$ в плоскости *П*, перпендикулярной к этой оси.

Из формулы (3.8) следует, что $m_z(\overline{F})>0$, если угол γ будет острым углом. Следовательно, вектор $\overline{m}_0(\overline{F})$ отклонен в положительном направлении оси *Oz*. Это, в свою очередь, подразумевает, что при наблюдении с конца вектора $\overline{m}_0(\overline{F})$ поворот тела относительно точки *O* под действием силы $\overline{F}$ происходит против часовой стрелки. Следовательно, алгебраическому моменту силы $\overline{F}_{\Pi}$ относительно точки *O* нужно присвоить знак плюс, если при наблюдении с положительного конца оси *Oz* поворот тела под действием силы $\overline{F}_{\Pi}$, являющейся проекцией силы $\overline{F}$ на плоскость *П,* наблюдается происходящим против часовой стрелки. То есть правило знаков, введенное при определении алгебраического момента силы относительно центра, сохраняется. Итак, можно дать еще одно определение момента силы относительно оси.

3.10. Моментом $m_z(\overline{F})$ ***силы*** $\overline{F}$ ***относительно оси Oz называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля проекции силы*** $\left|\overline{F}_{\Pi}\right|$ **на плоскость *П, перпендикулярную к оси Oz, на плечо этой силы*** h_1 ***относительно точки*** O ***- точки пересечения оси Oz и плоскости П.***

$$m_z(\overline{F}) = \pm h_1 \cdot \left|\overline{F}_{\Pi}\right|. \qquad (3.10)$$

3.11. Длина перпендикуляра h_1***, опущенного из центра*** O ***на линию действия силы*** $\overline{F}_{\Pi}$ ***в плоскости П, называется плечом силы*** $\overline{F}_{\Pi}$ ***относительно центра*** O***.***

Из формулы (3.10) становится ясен и механический смысл момента силы относительно оси:

3.12. Момент силы относительно оси $m_z(\overline{F})$ *является механической мерой поворотного действия силы относительно оси.*

Замечание: 1) На рисунке 3.8 плоскость *П* параллельна координатной плоскости *Oxy*. Поэтому силу $\overline{F}_{\Pi}$ можно было бы обозначить $\overline{F}_{xy}$.

2) Проекции силы на параллельные плоскости равны. Поэтому плоскость *П* не обязательно совмещать с плоскостью *Oxy*. На практике её удобно проводить мысленно параллельно плоскости *Oxy* через точку *A* - точку приложения силы $\overline{F}$. Алгебраический момент проекции силы придется вычислять в этом случае не относительно точки *O,* а относительно некой точки O_1- точки пересечения построенной плоскости и оси *Oz*.

Практический способ вычисления момента силы относительно оси.

Определение (3.10) позволяет сформулировать эффективный практический метод определения момента силы относительно оси. Для вычисления момента силы относительно любой оси поступают следующим образом (говорим на примере оси *Oz*):

1) Мысленно выбирается плоскость П, перпендикулярная к оси Oz.

2) Определяется точка O_1 *(её можно назвать как угодно), в которой ось* Oz *пересекается с плоскостью П (в нашем случае это была точка* O*).*

3) Сила $\overline{F}$ *проецируется на плоскость П и вычисляется модуль силы* $\left|\overline{F}_{\Pi}\right|$.

4) Относительно точки O_1 *в плоскости П вычисляется алгебраический момент силы* $\overline{F}_{\Pi}$ *по формуле (3.10).*

Свойства момента силы относительно оси

1. Момент силы относительно оси не меняется при перемещении силы вдоль линии её действия. Это прямо следует из того, что при этом не меняется площадь треугольника OAB и, следовательно, площадь треугольника OA_1B_1

2. Из формулы (3.8) следует, что момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях: а) сила $\overline{F}$ параллельна оси. В этом случае $\left|\overline{F}_{\Pi}\right|$=0; б) линия действия силы $\overline{F}$ (следовательно, и линия действия силы $\overline{F}_{\Pi}$) пересекает ось. В этом случае $h_1 = 0$.

3. Момент силы относительно оси не зависит от положения плоскости *П*, перпендикулярной к оси, так как проекции силы $\overline{F}$ на две параллельные плоскости равны. Плоскость *П* выбирается только по соображениям упрощения решения задачи.

4. Момент силы относительно оси не зависит от положения центра *O* на оси. При переносе центра *O* по оси *Oz* не изменяется величина силы $\overline{F}_{\Pi} = \overline{F}_{xy}$, направление её действия и сам треугольник OA_1B_1.

§ 3.6. Вычисление моментов силы относительно осей при аналитическом способе задания вектора силы

При работе с большим числом сил для вычисления моментов сил относительно осей (осевых моментов сил) приходится привлекать ЭВМ. Вычислительные машины непосредственно работают только с числом. Изложенные выше методы при этом не пригодны хотя бы потому, что такие понятия, как «по часовой стрелке, против часовой стрелки» машиной не воспринимаются. В таких случаях нужно обратиться к аналитическому способу задания векторов сил и моментов. Пусть есть полюс *O,* относительно которого вычислен или может быть вычислен векторный момент силы $\overline{m}_O(\overline{F})$. Совместим с полюсом начало правой прямоугольной системы координат $Oxyz$. Запишем векторный момент одной силы $\overline{m}_O(\overline{F})$ через его проекции m_x, m_y, m_z на оси координат в виде:

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = m_x\overline{i} + m_y\overline{j} + m_z\overline{k}\,.$$

Это всегда можно сделать, ведь $\overline{m}_O(\overline{F})$ с математической точки зрения есть просто вектор. Проекции m_x, m_y, m_z вектора $\overline{m}_O(\overline{F})$ на оси координат (смотрите 3.8), как выяснили выше, являются моментами силы

относительно соответствующих осей. Это прямо следует из определения (3.10). Поэтому $m_x = m_x(\overline{F})$; $m_y = m_y(\overline{F})$; $m_z = m_z(\overline{F})$.

Аналогично, представим вектор силы и радиус - вектор точки приложения силы через их проекции на оси (рис.3.9):

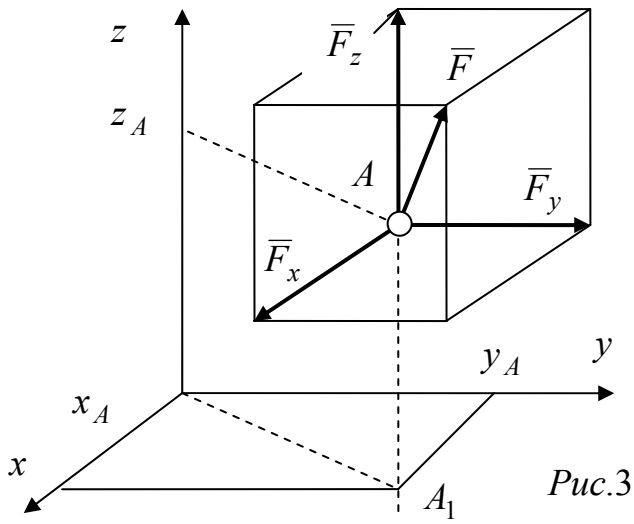
$$\overline{F} = F_x \cdot \overline{i} + F_y \cdot \overline{j} + F_z \cdot \overline{k}; \qquad \overline{r}_A = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}.$$

Где x, y, z - координаты точки A приложения силы (проекции радиуса-вектора $\overline{r}$ точки приложения силы) в выбранной системе координат, а F_x, F_y, F_z - проекции силы $\overline{F}$ на те же оси координат.

Тогда, с учетом (3.3) и правил представления векторного произведения, можно записать:

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \qquad (3.11)$$

Раскрывая определитель (3.11), получим формулы (3.12) на рис.3.9.



$$m_x(\overline{F}) = y \cdot F_z - z \cdot F_y$$

$$m_y(\overline{F}) = z \cdot F_x - x \cdot F_z \qquad (3.12)$$

$$m_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

*Рис.*3.9

Формулы (3.12) позволяют вычислять моменты силы $\overline{F}$ относительно осей непосредственно через проекции силы $\overline{F}$ и координаты её точки приложения A. В формулах (3.12) проявляются и механические свойства момента силы относительно оси. Поясним это на примере $m_z(\overline{F})$ - момента силы относительно оси Oz. Во-первых, в формулу момента $m_z(\overline{F})$ не входит проекция силы на ось Oz. С механической точки зрения это означает, что составляющая силы, параллельная оси, не вращает (тело) относительно этой оси. Попробуйте открыть дверь, действуя на нее

сверху-вниз или снизу-вверх, т.е. параллельно оси вращения.

Во-вторых, момент $m_z(\overline{F})$ силы $\overline{F}$ относительно оси Oz, как проекция вектора $\overline{m}_O(\overline{F})$ на ось z, не зависит от положения полюса на оси, т. е. $m_z(\overline{F}) = np_z\overline{m}_O(\overline{F}) = np_z\overline{m}_C(\overline{F})$. Это видно хотя бы из того, что сам векторный момент силы $\overline{m}_O(\overline{F})$ в формулах (3.12) не присутствует. Действительно, расположение точек O, C на оси z не влияет на величину проекций силы $\overline{F}$ на любую плоскость $П$, перпендикулярную к оси Oz, то есть параллельную координатной плоскости Oxy, и на координаты x, y точки A (рис.3.9).

§ 3.7. Примеры вычисления моментов силы относительно осей

Пример 1. Свободное твердое тело состоит из четырех невесомых стержней $AA_1 = c(м)$; $A_1B_1 = b(м)$; $B_1C_1 = a(м)$; $C_1C = c(м)$, жестко скрепленных между собой под прямым углом, как показано на рисунке 1. На тело параллельно осям координат действуют силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$, а сила $\overline{F}_4$ действует в боковой грани воображаемого параллелепипеда $OABCO_1A_1B_1C_1$ по диагонали боковой грани CB_1, составляющей угол φ с вертикальным стержнем CC_1. Определить в общем виде моменты заданных сил относительно осей координат Ox, Oy, Oz и осей Bv, B_1w.

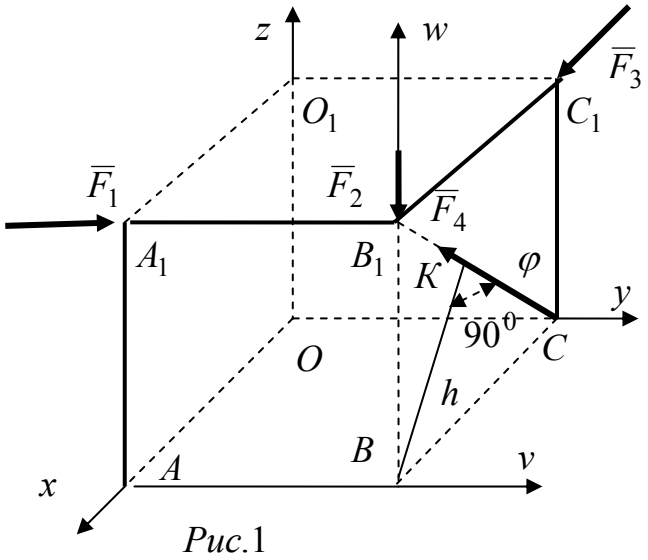


*Рис.*1

Решение: 1) Вычисляем моменты всех сил относительно оси Ox. Сила $\overline{F}_1$ действует в плоскости AA_1B_1B, перпендикулярной к оси. Поэтому проецировать силу на плоскость не надо. Точка пересечения оси и плоскости – это точка A. Плечо силы – отрезок AA_1. Тогда $m_x(\overline{F}_1) = -F_1 \cdot c$. Сила $\overline{F}_2$ действует в той же плоскости AA_1B_1B. Точка пересечения оси и плоскости – это точка A. Но плечо силы $\overline{F}_2$ - это отрезок AB. $m_x(\overline{F}_2) = -F_2 \cdot b$. Сила $\overline{F}_3$ параллельна оси, поэтому $m_x(\overline{F}_3) = 0$. Сила $\overline{F}_4$ проецируется на плоскость OO_1C_1C, совпадающую с плоскостью Oyz. Тогда

$\overline{F}_{4,yz} = F_4 \cdot Cos\varphi$. Точка пересечения оси и плоскости – это точка *O*. Плечо силы $\overline{F}_{4,yz}$ относительно точки *O* – отрезок *OC*. $m_x(\overline{F}_4) = +b \cdot F_4 \cdot Cos\varphi$.

2) Вычислим моменты сил относительно оси Oy. $m_y(\overline{F}_1) = m_y(\overline{F}_4) = 0$, так как первая из сил параллельна оси, а линия действия второй – пересекает ось. Силы $\overline{F}_2, \overline{F}_3$ лежат в одной и той же плоскости BB_1C_1C. Точка пересечения оси и плоскости – это точка *C*. Чтобы определить знаки моментов, наблюдаем с положительного конца оси *Oy*. Тогда $m_y(\overline{F}_2) = +F_2 \cdot a$; $m_y(\overline{F}_3) = +F_3 \cdot c$.

3) Вычислим моменты сил относительно оси Oz. $m_z(\overline{F}_2) = 0$, так как сила $\overline{F}_2$ параллельна оси Oz. Силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_3$ лежат в плоскости $O_1A_1B_1C_1$, перпендикулярной к оси Oz. Проецировать не надо. Точка пересечения оси и плоскости – это точка O_1. Чтобы определить знаки моментов, наблюдаем за силой с положительного конца оси *Oz*. Тогда $m_z(\overline{F}_1) = +F_1 \cdot a$, $m_z(\overline{F}_3) = -F_3 \cdot b$. Силу $\overline{F}_4$ приходится сначала спроецировать на плоскость *OABC*, перпендикулярную к оси *Oz*, затем вычислить момент этой проекции относительно точки пересечения оси и плоскости – точки *O*. *Тогда* $m_z(\overline{F}_4) = -F_4 \cdot b \cdot Sin\varphi$.

4) Вычислим моменты сил относительно оси B_1w *(это вертикальная ось, параллельная оси* Oz*).* $m_w(\overline{F}_1) = m_w(\overline{F}_2) = m_w(\overline{F}_3) = m_w(\overline{F}_4) = 0$, так как линии действия сил пересекают ось или параллельны ей (сила $\overline{F}_2$). Это означает, что ни одна из этих сил не может повернут тело относительно оси B_1w. Если бы эта ось была деформируемой, то силы могли бы согнуть, передвинуть ось, но не повернуть тело относительно этой оси.

5) Вычислим моменты сил относительно оси Bv. Моменты $m_V(\overline{F}_1) = m_V(\overline{F}_2) = 0$, так как $\overline{F}_1$ параллельна оси, а линия действия силы $\overline{F}_2$ пересекает ось. Сила $\overline{F}_3$ действует в плоскости BB_1C_1C, которая перпендикулярна оси. Поэтому проецировать её не придется. Точка пересечения оси и плоскости – это точка B. Следовательно, $m_V(\overline{F}_3) = +F_3 \cdot BB_1 = +F_3 \cdot c$. Сила $\overline{F}_4$ действует в той же плоскости, что и сила $\overline{F}_3$. Следовательно, её проецировать не придется. Но плечо этой силы нужно вычислить. Опустим из точки пересечения оси и плоскости *B* перпендикуляр $BK = h$ на линию действия силы $\overline{F}_4$, то есть на диагональ B_1C. Это плечо силы $\overline{F}_4$. Длина плеча $h = BC \cdot Cos\varphi$. Тогда $m_V(\overline{F}_4) = +F_4 \cdot BK = +F_4 \cdot a \cdot Cos\varphi$. Обратите внимание на то, что моменты одной и той же силы относительно разных осей имеют в общем случае разные значения.

Пример 2. Пользуясь рисунком к примеру 1, определить моменты сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$, $\overline{F}_4$ относительно осей Ox, Oy, Oz, пользуясь их аналитическим представлением. Сравнить полученные результаты с результатами примера предыдущего параграфа.

Решение: Заданные силы представим через их проекции на оси. Для этого спроецируем все силы на оси Ox, Oy, Oz и рядом выпишем координаты точки приложения. Получим:

$$F_{1x}=0;\quad F_{1y}=+F_1;\quad F_{1z}=0. \qquad A_1(x_1=a; y_1=0; z_1=c).$$

$$F_{2x}=0;\quad F_{2y}=0;\quad F_{2z}=-F_2. \qquad B_1(x_2=a; y_2=b; z_2=c).$$

$$F_{3x}=+F_3;\quad F_{3y}=o;\quad F_{3z}=0. \qquad C_1(x_3=0; y_3=b; z_3=c).$$

$$F_{4x}=+F_4\cdot Sin\varphi;\quad F_{4y}=0;\quad F_{4z}=+F_4\cdot Cos\varphi. \qquad C(x_4=0; y_4=b; z_4=0).$$

По формулам (3.12) для силы $\overline{F}_4$ получим:

$$m_x(\overline{F}_4)=y_4\cdot F_{4z}-z_4\cdot F_{4y}=b\cdot F_4\cdot Cos\varphi-0\cdot 0=b\cdot F_4\cdot Cos\varphi.$$

$$m_y(\overline{F}_4)=z_4\cdot F_{4x}-x_4\cdot F_{4z}=0\cdot F_4\cdot Sin\varphi-0\cdot F_4\cdot Cos\varphi=0$$

$$m_z(\overline{F}_4)=x_4\cdot F_{4y}-y_4\cdot F_{4x}=0\cdot 0-b\cdot F_4\cdot Sin\varphi=-b\cdot F_4\cdot Sin\varphi$$

Результаты вычислений полностью совпадают с результатами предыдущего параграфа. Вычисление других моментов по формулам (3.12) рекомендуем выполнить самостоятельно.

§ 3.8. Теоремы Вариньона о моменте равнодействующей

Ценность данной теоремы определяется тем, что она нашла широкое применение при решении задач. К ней надо отнестись очень внимательно. Разберитесь в приведенных примерах.

Теорема Вариньона о векторном моменте равнодействующей относительно центра

Пусть к телу приложена пространственная система сходящихся сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$, которая имеет равнодействующую $\overline{R}^*$, равную главному вектору данной системы $\overline{R}^*=\overline{R}$.

$$\overline{R}=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k.$$

Теорема. Векторный момент равнодействующей некоторой системы сходящихся сил относительно произвольного центра О равен сумме моментов составляющих сил относительно того же центра О.

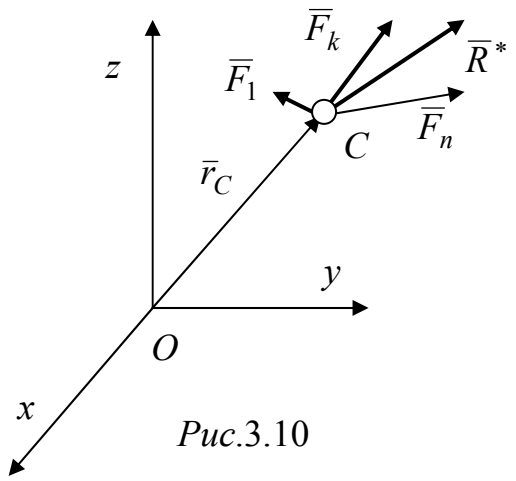


*Рис.*3.10

Доказательство: Пусть дана пространственная система сходящихся сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$, которая имеет равнодействующую $\overline{R}^*$. Пользуясь следствием из первых двух аксиом статики, приведем все силы в точку пересечения их линий действия - *C*. В произвольной прямоугольной декартовой системе отсчета координату точки *C* определим радиусом вектором $\overline{r}_C$ (рис.3.10).

Тогда с учетом (3.3), можно вычислить главный векторный момент $\overline{M}_0$ системы сил относительно центра *O*:

$$\overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} (\overline{r}_C \times \overline{F}_k) = \overline{r}_C \times \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = \overline{r}_C \times \overline{R} = \overline{r}_C \times \overline{R}^* = \overline{m}_0(\overline{R}^*). \qquad (3.13)$$

Здесь учтено, что для системы сходящихся сил равнодействующая совпадает с главным вектором, то есть $\overline{R}^* = \overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$. Радиус-вектор $\overline{r}_C$ в равенстве (3.13) удается вынести из - под знака суммы потому, что он является общим множителем ко всем слагаемым. Формально это проявляется в том, что у него отсутствует индекс «к». Окончательно,

$$\overline{m}_0(\overline{R}^*) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F}_k). \qquad (3.14)$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. 1) Теорема позволяет определять момент равнодействующей, не определяя заранее самой равнодействующей. На практике, как правило, бывают заданы лишь сами силы. 2) С другой стороны, как было показано при исследовании системы сходящихся сил, любую силу на плоскости можно единственным способом разложить по двум заданным направлениям, а в пространстве - по трем заданным направлениям, не лежащим в одной плоскости. При этом раскладываемые силы для своих составляющих являются равнодействующими. В этом случае теорема Вариньона позволяет при вычислении момента силы (если вычисления могут оказаться громоздкими) перейти к вычислению суммы моментов составляющих. Смотрите примеры. 3) В данной формулировке теорема больше используется в теоретических исследованиях. Но она же позволяет сформулировать теоремы для практически важных случаев - для вычисления алгебраического момента равнодействующей плоской системы сил относительно центра и момента равнодействующей относительно оси.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси

Пусть, по-прежнему, к телу приложена система сходящихся сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$, которая имеет равнодействующую $\overline{R}^*$, равную главному вектору данной системы $\overline{R}^* = \overline{R}$.

Теорема. Момент равнодействующей пространственной системы сходящихся сил относительно оси равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси.

Доказательство: Для доказательства теоремы достаточно спроецировать равенство (3.14) , например, на ось *Oz*. При этом надо помнить теорему векторной алгебры о том, что проекция вектора суммы равна сумме проекций слагаемых. Тогда получим:

$$\left|\overline{m}_O(\overline{R}^*)\right| \cdot Cos\gamma = \sum_{k=1}^{n} \left|\overline{m}_O(\overline{F}_k)\right| \cdot Cos\gamma_k \ . \qquad (*)$$

Принимая во внимание определение (3.8), из $(*)$ получаем:

$$m_z(\overline{R}^*) = m_z(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) \, . \qquad (3.\ 15)$$

Что и требовалось доказать.

Теорема Вариньона об алгебраическом моменте равнодействующей относительно центра

К телу приложена плоская система сходящихся сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$, которая имеет равнодействующую $\overline{R}^*$, равную главному вектору данной системы $\overline{R}^* = \overline{R}$.

Теорема. Алгебраический момент равнодействующей некоторой плоской системы сходящихся сил относительно произвольного центра О, лежащего в плоскости действия сил, равен сумме алгебраических моментов составляющих сил относительно того же центра О.

$$m_0(\overline{R}^*) = m_0(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) \, . \qquad (3.16)$$

Доказательство: На плоскости, в которой действуют силы, наметим произвольный центр *O и* введем систему координат с началом в центре *O*. Оси *Ox* и *Oy* расположим в плоскости действия сил, а ось *Oz* окажется перпендикулярной этой плоскости. При этом центр *O* – это точка пересечения оси и плоскости. Для оси *Oz* теорема Вариньона относительно оси (3.15) имеет место. Но, как было показано при определении момента

силы относительно оси (смотрите определение 3.10 из параграфа 3.5), момент силы относительно оси равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к оси. По построению, в рассматриваемом случае все силы уже лежат в плоскости, перпендикулярной к оси Oz. Поэтому моменты сил относительно оси полностью совпадают с алгебраическими моментами сил относительно центра *O*. Тогда соотношение (3.15) можно заменить соотношением (3.16). Поскольку на выбор точки *O* ограничения не накладывались, соотношение (3.16) будет справедливо для любых центров на плоскости действия сил. Что и требовалось доказать.

§ 3.9. Примеры на применение теоремы Вариньона

Пример 1. Вычислить алгебраический момент силы $\overline{F}$, действующей на консольный стержень в точке *B* под углом $\alpha = 60^0$ к вертикали, относительно точки А, расположенной в точке пересечения оси стержня и линии заделки. Вычисления провести двумя способами: 1) По определению алгебраического момента силы относительно центра. 2) Применив теорему Вариньона об алгебраическом моменте равнодействующей. Результаты сравнить.

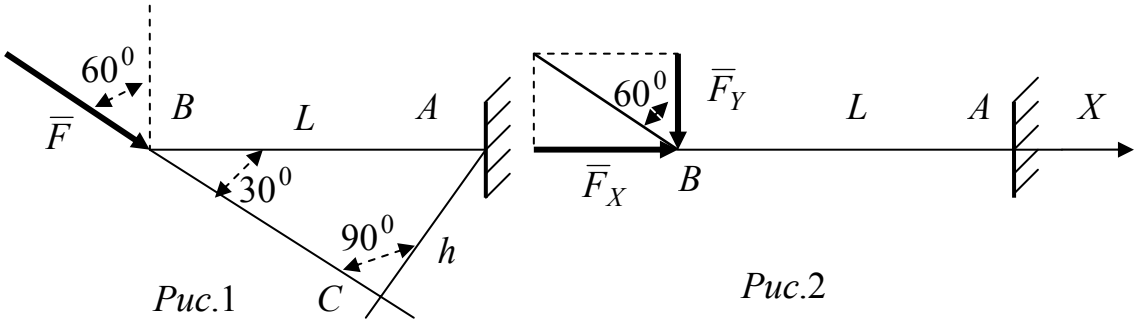


*Рис.*1 *Рис.*2

Решение: 1) Найдем плечо силы $\overline{F}$ относительно точки А (рис.1). Для этого продолжим линию действия силы $\overline{F}$ и опустим на неё перпендикуляр из точки А. Плечом силы окажется катет АС прямоугольного треугольника АВС. Следовательно, $AC = h = L \cdot Sin\alpha = 0{,}5 \cdot L$. Алгебраический момент силы $\overline{F}$ положителен, так как сила стремится повернуть стержень относительно точки *A* против часовой стрелки.

$$m_A(\overline{F}) = F \cdot h = 0{,}5 \cdot F \cdot L.$$

1) Воспользуемся теоремой Вариньона. Разложим силу $\overline{F}$ на горизонтальную ($\overline{F}_x$) и вертикальную ($\overline{F}_y$) составляющие. При этом сама сила $\overline{F}$ является для них равнодействующей (рис.2). По теореме Вариньона вместо момента силы $\overline{F}$ вычислим сумму моментов составляющих $\overline{F}_x$, $\overline{F}_y$. При этом учтем, что $m_A(\overline{F}_x) = 0$, так как линия действия силы $\overline{F}_x$ проходит через точку А.

2) $m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}_x) + m_A(\overline{F}_y) = \left|\overline{F}_y\right| \cdot L = F \cdot L \cdot Cos60^0 = 0{,}5 \cdot F \cdot L$.

Сравнивая результаты, полученные двумя способами, видим их совпадение. На наш взгяд, второй метод оказался рациональнее хотя бы тем, что не потребовал дополнительных геометрических построений. В следующем примере эти преимущества проявятся еще очевиднее.

Пример 2. На плоскую Г-образную раму, заделанную одним концом в точке *A,* действует сила $\overline{F}$ на свободном конце *C,* как показано на рисунках 3 и 4. Геометрические размеры рамы: *AB=H, BC=L.* Линия действия силы $\overline{F}$ лежит в плоскости рамы. Вычислить алгебраический момент силы $\overline{F}$ относительно точки *A* двумя способами: 1) Пользуясь определением алгебраического момента силы $\overline{F}$ относительно центра *A* , 2) Пользуясь теоремой Вариньона об алгебраическом моменте равнодействующей относительно центра *A*.

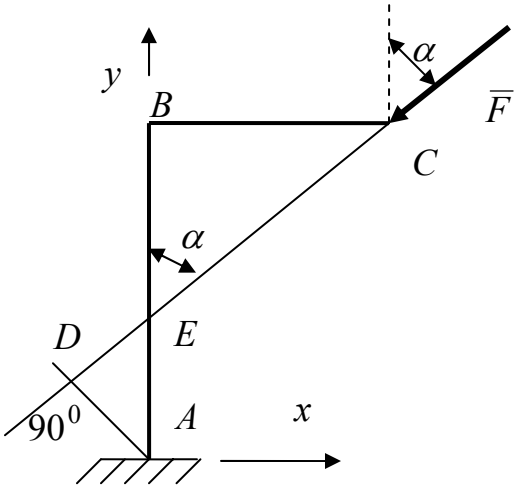


*Рис.*3

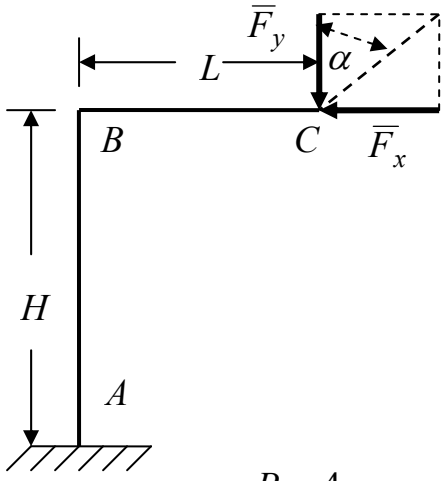


*Рис.*4

Решение: 1) Сила считается известной. Трудность заключается в определении длины плеча силы $\overline{F}$ относительно центра *A.* Продлим линию действия силы $\overline{F}$ до пересечения с перпендикуляром, опущенным на неё из точки *A (рис.3).* Получим два подобных (по трем углам) прямоугольных треугольника *ADE и BEC.* Плечом *h* силы $\overline{F}$ относительно точки А является катет *AD* прямоугольного треугольника *ADE.* Для подобных треугольников можно записать пропорцию:

$$AD/BC=AE/CE. \qquad (*)$$

Длины отрезков, вошедших в пропорцию (*), вычислим через данные задачи.

$$BC/BE=tq\alpha; \qquad BE=BC/tq\alpha=L/tq\alpha; \qquad AE=AB-BE=H-L/tq\alpha;$$

$$CE=BC/Sin\alpha=L/Sin\alpha; \qquad AD=h; \qquad BC=L.$$

Из (*) получим: $h/L=(H-L/tq\alpha)/(L/Sin\alpha)$; $h = H \cdot Sin\alpha - L \cdot Cos\alpha$.

Искомый алгебраический момент силы будет равен:

$$m_A(\overline{F}) = +F \cdot h = F \cdot (H \cdot Sin\alpha - L \cdot Cos\alpha). \qquad (**)$$

2) Воспользуемся теоремой Вариньона. Для этого разложим силу $\overline{F}$ на горизонтальную ($\overline{F}_x$) и вертикальную ($\overline{F}_y$) составляющие так, чтобы заданная сила $\overline{F}$ была бы для них равнодействующей (рис. 4). Алгебраический момент вычисляется без всяких дополнительных геометрических построений:

$$m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}_x) + m_A(\overline{F}_y) = F \cdot Sin\alpha \cdot H - F \cdot Cos\alpha \cdot L.$$

Или $$m_A(\overline{F}) = F \cdot (H \cdot Sin\alpha - L \cdot Cos\alpha).$$

Что полностью совпадает с (**). Отметим, что в этом примере $m_A(\overline{F}_x) \neq 0$, так как линия действия силы $\overline{F}_x$ не проходит через точку *A*. Можно сделать вывод: преимущества от применения теоремы Вариньона очевидны.

§ 3.10. Пара сил. Краткие сведения из теории пар.

На практике часто встречаются две равные по величине силы, действующие в разные стороны по параллельным прямым. Они могут встречаться отдельно, могут входить в состав каких - либо систем сил. Такие системы сил требуют отдельного рассмотрения

3.13. Парой сил или парой называется система двух равных по модулю параллельных сил $\overline{F}' = -\overline{F}$, направленных в противоположные стороны *(рис. 3.11).* Из определения следует, что линии действия сил пары в силу их параллельности лежат всегда в одной плоскости. Другими словами, отдельную пару всегда образует плоская система из двух сил.

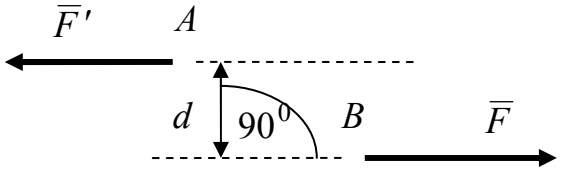


*Рис.*3.11

3.14. Плечом пары называется длина кратчайшего расстояния d между линиями действия сил пары.

3.15. Плоскостью действия пары или плоскостью пары называется плоскость, в которой действуют силы пары.

3.15. Совокупность пар $(\overline{F}_1{}', \overline{F}_1)$, $(\overline{F}_2{}', \overline{F}_2)$ *… называется системой пар.* В общем случае плоскости действия отдельных пар системы могут быть различны.

3.16. Если все пары сил лежат в одной плоскости, то систему пар называют плоской системой пар. В противном случае система пар будет называться пространственной системой пар.

Система сил, образующих пару, не имеет равнодействующей, хотя ее главный вектор $\overline{R} = \overline{F} + \overline{F}'$ равен нулю, так как по определению $\overline{F}' = -\overline{F}$. Эта система сил не подлежит дальнейшему упрощению. Например, ее

нельзя заменить одной силой, не нарушая механического состояния тела, на которое действует пара.

Теорема о сумме проекций сил пары

Теорема. *Сумма проекций сил пары на любую ось, лежащую в плоскости действия сил пары, равна нулю.*

Доказательство: Выберем произвольную ось в плоскости действия пары (рис. 3.12). В силу параллельности линий действия сил пары они пересекают эту ось под одним и тем же углом α. Учитывая, что $|\overline{F}| = |\overline{F}'|$, получим: $|\overline{F}| \cdot Cos\alpha - |\overline{F}'| \cdot Cos\alpha \equiv 0$.

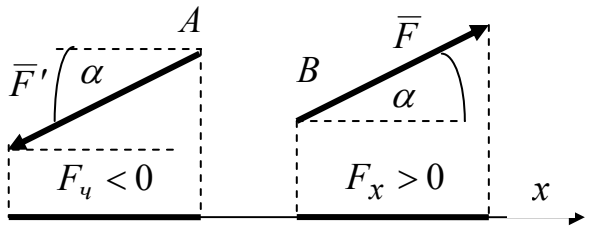


*Рис.*3.12

Что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует: *а) пара сил не может придать телу движение в каком-либо прямолинейном направлении;. б) сумма проекций сил пары на любую ось, лежащую в плоскости действия пары, никакой полезной информации не несет. Другими словами, при любых значениях сил пары сумма их проекций на ось равна нулю. в) действие пары на тело сводится к стремлению придать телу поворот.*

Векторный момент пары и его свойства

Величиной, которая является мерой вращательного (поворотного) действия пары может быть в общем случае векторная величина, ибо она должна показывать и плоскость действия пары, и направление действия пары (направление поворота), и величину «поворотного» действия пары.

3.13. В качестве меры поворотного действия пары сил принимается главный векторный момент сил пары (то есть главный векторный момент $\overline{M}_O$ двух сил, из которых состоит пара) относительно произвольного центра О, который будет называться векторным моментом пары $\overline{m}$. По определению главного момента системы сил относительно центра он записывается так (см. рис. 3.13):

$$\overline{m} = \overline{M}_O = \overline{m}_0(\overline{F}') + \overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{r}_A \times \overline{F}' + \overline{r}_B \times \overline{F}\,. \qquad (3.17)$$

Ниже будет показано, что главный векторный момент сил пары не зависит от выбора центра O и должен быть вычислен по теореме о векторном моменте пары.

Теорема о векторном моменте пары

Теорема. *Векторный момент пары* $\overline{m}$ *равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы пары (рис.3.13).*

$$\overline{m} = \overline{AB} \times \overline{F} \tag{3.18}$$

или

$$\overline{m} = \overline{BA} \times \overline{F}'. \tag{3.19}$$

Доказательство. Из (3.17) с учетом $\overline{F}' = -\overline{F}$ *имеем:*

$$\overline{m} = \overline{r}_A \times \overline{F}' + \overline{r}_B \times \overline{F} = -\overline{r}_A \times \overline{F} + \overline{r}_B \times \overline{F} = (\overline{r}_B - \overline{r}_A) \times \overline{F}$$

или

$$\overline{m} = \overline{AB} \times \overline{F},$$

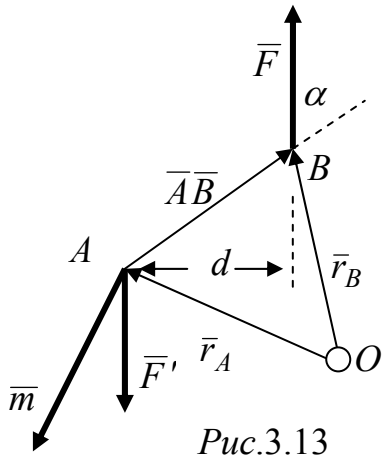


*Рис.*3.13

где $\overline{AB} = (\overline{r}_B - \overline{r}_A)$ - вектор, направленный из точки *A* в точку *B* (рис. 3.13). Равенство (3.18) доказано. Аналогично доказывается равенство (3.19). Результат не изменится, если центр *O* будет выбран между линиями действия сил пары. Из (3.18), (3.19) следует:

3.14. Векторный момент пары $\overline{m}$ ***перпендикулярен плоскости действия сил пары. Направлен вектор*** $\overline{m}$ ***так, что при наблюдении с его конца поворот тела под действием сил пары наблюдается происходящим против часовой стрелки.***

3.15. Модуль векторного момента пары $|\overline{m}|$ ***равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары (рис. 3.13):***

$$m = |\overline{m}| = |\overline{AB}| \cdot |\overline{F}| \cdot Sin\alpha = |\overline{F}| \cdot d. \tag{3.20}$$

Момент пары никогда не равен нулю. Векторный момент пары не зависит от положения сил пары на линиях их действия, так как при перемещении сил пары вдоль линии их действия не изменяются ни плоскость действия пары, ни направление действия пары, ни модуль (числовое значение) векторного момента пары. Поэтому у векторного момента пары нет индекса, который указывал бы на выбранную точку. Сказанное можно принять как свойства векторного момента пары. Итак:

3.17. ***Векторным моментом пары*** $\overline{m}$ ***называется вектор, перпендикулярный плоскости действия пары, равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на плечо*** d ***и направленный в ту сторону, откуда поворот тела под действием пары наблюдается происходящим против часовой стрелки.***

§ 3.11. *Свойства пар сил*

Теорема о переносе пары в плоскости её действия.

Теорема. *Пару сил можно переносить в плоскости её действия. При этом действие пары на абсолютно твёрдое тело не изменится (вектор* $\overline{m}$ *можно переносить параллельно самому себе).*

Теорема о переносе пары в параллельную плоскость

Теорема. *Пару сил, действующую на абсолютно твёрдое тело, можно переносить в плоскость, параллельную плоскости пары. При этом действие пары на абсолютно твёрдое тело не изменится (другими словами, вектор* $\overline{m}$ *можно переносить вдоль линии действия, перпендикулярной плоскости пары).*

Теорема об эквивалентности пар

Теорема. *Две пары, имеющие одинаковые векторные моменты* $\overline{m}_1 = \overline{m}_2$*, эквивалентны, то есть они производят одинаковое действие на абсолютно твёрдое тело.*

На практике это означает, что если две пары сил $(\overline{F}_1{}', \overline{F}_1)$ и $(\overline{F}_2{}', \overline{F}_2)$ лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, вращают тело в одну сторону и модули их векторных моментов равны ($|\overline{F}_1| d_1 = |\overline{F}_2| d_2$), где d_k (*к=1,2*) плечи соответствующих пар, то они оказывают на тело одинаковое действие.

Теорема о геометрическом сложении пар

Теорема. *Система пар, действующих на абсолютно твёрдое тело, эквивалентна одной паре, момент которой равен геометрической сумме моментов пар системы.*

Символически это записывается так:

$$\overline{M} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_k \ . \qquad (3.21)$$

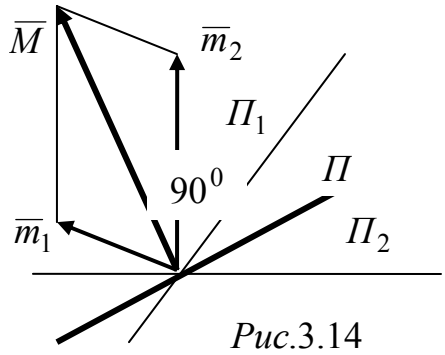


*Рис.*3.14

Это означает, что векторные моменты пар, действующих на тело в разных плоскостях, геометрически складываются так же, как силы, по правилу параллелограмма или векторного многоугольника, который для сил раньше назывался *силовым многоугольником.*

3.18.Чтобы геометрически сложить пары сил по формуле (3.21), нужно, пользуясь свойствами пар сил привести вектора их векторных моментов $\overline{m}_k$ в одну точку и сложить их по правилу параллелограмма или векторного многоугольника. Результирующая пара сил будет действовать в плоскости П, перпендикулярной к вектору суммы пар $\overline{M}$.

Сложение векторных моментов двух пар сил показано на рисунке 3.14.

Геометрическое условие равновесия пар сил

Пусть на тело действует произвольная (пары располагаются в разных плоскостях) система пар сил, а сил, которые не входили бы в какую – либо пару, нет. Тогда такая система пар по формуле (3.21) может быть приведена к одной паре сил. Следовательно:

3.19. Состояние покоя тела под действием системы пар сил будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$\overline{M} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_k = 0. \qquad (3.22)$$

Это и есть *геометрическое условие равновесия пар сил, а система пар, удовлетворяющая условию (3.22), называется эквивалентной нулю.*

То есть пару можно уравновесить только другой парой, имеющей по величине такой же момент, но действующей в противоположном направлении.

Алгебраический момент пары сил

Для системы пар, действующих в одной плоскости (плоская система пар), отпадает необходимость определять дополнительно плоскость действия результирующей пары сил. Результирующая пара, момент которой можно было бы найти по (3.21), будет лежать в той же плоскости. Векторный момент пары можно заменить его алгебраическим аналогом,

договорившись о знаке пары, которым можно будет характеризовать направление действия пары сил в плоскости.

3.20. Алгебраическим моментом пары называется скалярная величина, равная взятому со знаком плюс или минус произведению модуля одной из сил пары на длину плеча пары.

$$m = \pm \left|\overline{F}\right| \cdot d. \qquad (3.23)$$

3.21. По договоренности, алгебраическому моменту пары сил присваивается знак плюс, если пара сил стремится повернуть тело (плоскость действия)против часовой стрелки, и присваивается знак минус, если пара сил стремится повернуть тело по часовой стрелке.

Обратите внимание на то, что правило знаков для алгебраического момента пары полностью совпадает с аналогичными правилами знаков для алгебраического момента силы и момента силы относительно оси.

Поскольку единственным механическим последствием действия пары на тело является возможный поворот тела, то алгебраический момент пары сил является единственной характеристикой пары сил на плоскости. Поэтому, когда надо показать действующую на тело пару сил, её показывают просто круговой стрелкой и рядом записывают величину её алгебраического момента.

Из свойств пар сил, сформулированных выше, еще раз обратим внимание на два из них:

Свойства пар сил на плоскости

1. *Пару сил можно переносить в плоскости её действия.*
2. *Две пары сил эквивалентны (то есть вызывают одно и то же механическое действие), если их алгебраические моменты равны.*

Из второго свойства следует, что в паре сил можно менять величину силы и величину плеча пары сил, сохраняя неизменным алгебраический момент пары То есть пару сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$ можно преобразовать в пару сил $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$ так, чтобы модули их алгебраических моментов были равны

$$\left|\overline{F}_1\right| \cdot d_1 = \left|\overline{F}_2\right| \cdot d_2$$

и обе пары действовали бы в одну сторону

Сложение пар на плоскости сводится к сложению их алгебраических моментов по формуле:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k \ . \qquad (3.\ 24)$$

Алгебраическое условие равновесия пар сил на плоскости

Из (3.24) следует, что

3.21. Состояние покоя твердого тела под действием плоской системы пар сил будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k = 0 . \qquad (3.25)$$

Пример 1. *На плоскости действуют две пары сил* $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$, $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$, *как показано на рисунке 1. Найти их результирующую пару, если* $F_1 = F_1' = 10H$; $F_2 = F_2' = 6H$; $d_1 = 2м$; $d_2 = 5м$.

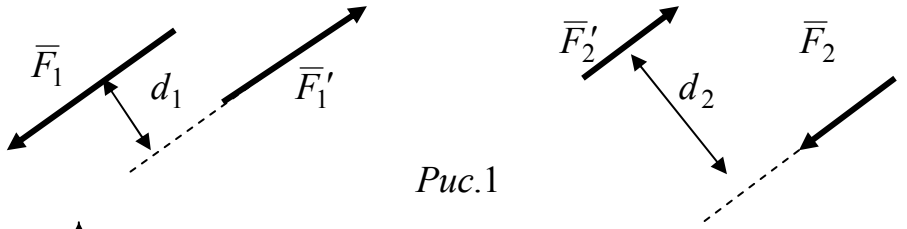


*Рис.*1

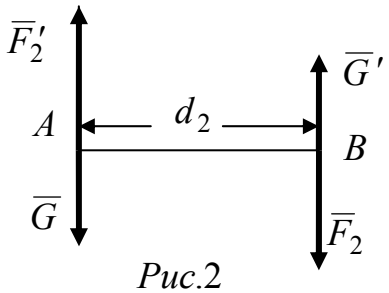


*Рис.*2

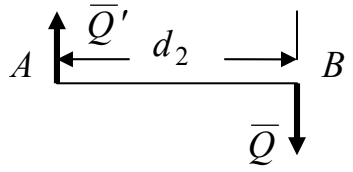


*Рис.*3

Решение: Пары сил показаны на рис.1. Рассмотрим два способа получения результирующей пары. Первый способ назовем практическим способом. Он основан на формуле (3.25). Именно им надо пользоваться при решении задач. Для начала найдем алгебраические моменты первой и второй пар. По определению они равны, соответственно:

$$m_1 = +F_1 \cdot d_1 = 10 \cdot 2 = 20H \cdot м; \qquad m_2 = -F_2 \cdot d_2 = -6 \cdot 5 = -30H \cdot м .$$

Алгебраический момент результирующей пары по (3.25) равен:

$$M = m_1 + m_2 = 20 - 30 = -10H \cdot м .$$

Таким образом, результирующая пара лежит в той же плоскости, что и слагаемые пары и действует по часовой стрелке, так как её алгебраический момент отрицателен.

Теперь найдем результирующую пару, опираясь на свойства пар сил и правила сложения сил. Пару можно перемещать в плоскости её действия, а силы пары можно перемещать вдоль линий их действия. Возьмем на плоскости горизонтальный отрезок *AB* (рис.2). Пусть длина этого отрезка равна длине плеча второй пары, то есть

$AB = d_2$. Развернем и перенесем вторую пару на отрезок *AB* так, чтобы линии действия сил пары стали перпендикулярны отрезку, а сами силы были приложены в точках *A и B*. Состояние тела при этом не меняется. Чтобы произвести такую же операцию с первой парой, её плечо надо увеличить до величины d_2. Это можно сделать, если первую пару заменить другой парой по теореме эквивалентности пар. Должно быть $m_1 = m_1^*$, где $m_1 = +F_1 \cdot d_1 = 10 \cdot 2 = 20H \cdot м$, а $m_1^* = G \cdot d_2 = 20H \cdot м$. Отсюда, $G = G' = m_1 / d_2 = 20/5 = 4H$. Таким образом, первая пара заменяется эквивалентной ей парой $(\overline{G}, \overline{G}')$ с плечом $d = d_2$ и силами, модули которых $G = G' = 4H$. Пару сил $(\overline{G}, \overline{G}')$ приведем к отрезку *AB* и получим систему сил, показанную на рисунке 2. Складываем силы в точках *A и B.* Для этого из большей по модулю силы вычитаем меньшую и направляем в сторону большей по
модулю силы. Получаем $Q = Q' = F_2' - G = 6 - 4 = 2H$. Итак, две заданные пары сил заменились на две параллельные, равные по модулю и действующие в разные стороны силы $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$. Таким образом система сил $(\overline{Q}, \overline{Q}')$ образуют результирующую пару сил (рис. 3). Её момент $M = -Q \cdot d = -2 \cdot 5 = -10H \cdot м$, что полностью совпадает с вычисленным ранее значением.

§ 3.12. Основная теорема статики

Продолжаем рассматривать системы сил, линии действия которых произвольно (линии действия и не параллельны, и не пересекаются в одной точке) расположены на плоскости или в пространстве. Встает вопрос: «Как упростить такие системы сил?» И сразу вспоминается метод сложения сил, приложенных в одной точке, построением силового многоугольника. Этот метод был получен *при изучении системы сходящихся сил.* Но там все силы можно было привести к одной точке пользуясь только определением системы сходящихся сил и следствием из первых двух аксиом статики. В нашем случае все силы пока приложены в разных точках пространства или плоскости. Как перенести все силы *произвольной пространственной системы сил* в одну точку или, как говорят, привести силы к одному центру, если система сил не является сходящейся? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема* о *параллельном переносе силы.

Теорема. Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, не изменяя ее механического действия, можно переносить параллельно самой себе в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару сил с векторным моментом, равным векторному моменту переносимой силы относительно точки, в которую сила переносится.

Доказательство: Пусть сила $\overline{F}$ *переносится из точки A в точку B* (рис.3.15). Произведем следующие действия, приводящие каждый раз к эквивалентным системам сил. В точке *B* на линии, параллельной линии

действия силы $\overline{F}$, построим систему сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, модули которых равны модулю силы $\overline{F}$. По первой аксиоме статики система сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ эквивалентна нулю. Далее заметим, что силы $\overline{F}$, $\overline{F}_1$ образуют пару сил, которую можно заменить векторным моментом пары $\overline{m} = \overline{BA} \times \overline{F}$. С другой стороны момент пары $\overline{m}$ равен векторному моменту переносимой силы относительно точки переноса *B,* то есть $\overline{m} = \overline{m}_B(\overline{F}) = \overline{BA} \times \overline{F}$.

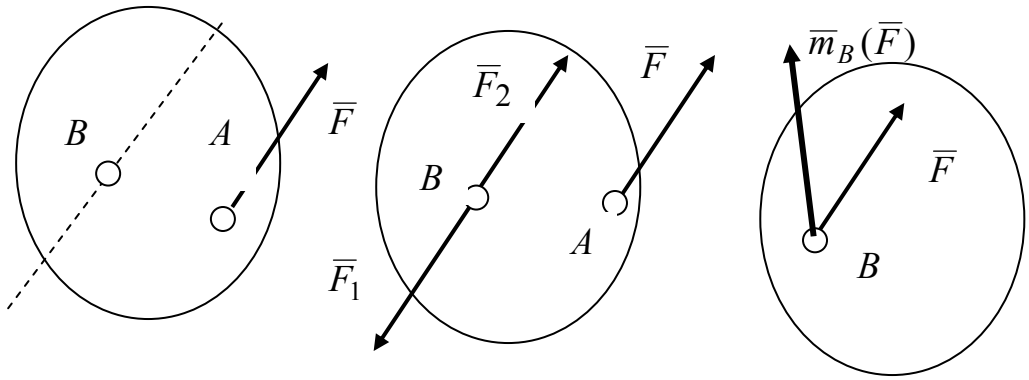


Рис. 3.15

В точке *B* осталась сила F_2, равная по модулю силе $\overline{F}$ и действующая по параллельной прямой в ту же сторону. Силы $\overline{F}$ и $\overline{F}_2$ отличаются только тем, что приложены в разных точках. Поэтому силу $\overline{F}_2$ можно считать силой $\overline{F}$, перенесенной в точку *B*. **Итак, силу $\overline{F}$, приложенную в точке *A*, можно не изменяя механических последствий ее действия на тело, заменить силой $\overline{F}$, приложенной в точке *B*, и ее векторным моментом относительно точки *B*. Что и требовалось доказать.**

Основная теорема статики.

Пусть теперь на тело действует система сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ...\overline{F}_k, ...\overline{F}_n)$, произвольно расположенных в пространстве (рис.3.16). Упрощение данной системы сил решается основной теоремой статики.

Теорема. Произвольная система сил, действующая на тело, приводится в произвольно выбранном центре O к одной силе, равной главному вектору данной системы сил, и паре сил с векторным моментом $\overline{M}_O$, равным главному векторному моменту системы сил относительно центра O.

Доказательство: Дана произвольная система сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ...\overline{F}_k, ...\overline{F}_n)$. На рис.3.16 взято четыре силы. Требуется параллельным переносом привести

все силы в одну точку. Было показано, что отдельная сила $\overline{F}$ в точке A эквивалентна параллельной силе $\overline{F}$ в точке B и паре сил с моментом $\overline{m} = \overline{m}_B(\overline{F})$. Над упрощаемой системой сил произведем операции параллельного переноса всех сил из точек их приложения в произвольно выбранный *центр O, который называется центром приведения*. Используя теорему о параллельном переносе, в центре O получим «ежик» векторов сил $\overline{F}_k$ (рис.3.17) и «ежик» векторов моментов $\overline{m}_k = \overline{m}_O(\overline{F}_k)$ всех сил системы относительно центра O (рис. 3.17).

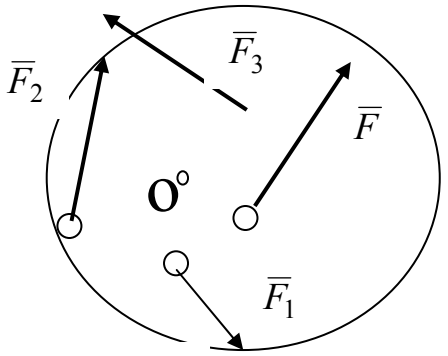


Рис.3.16

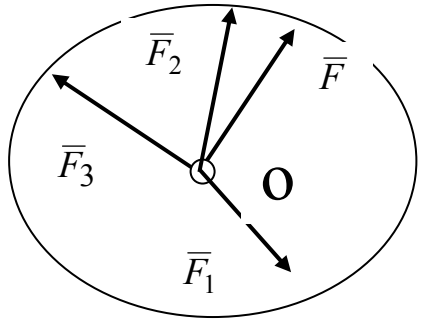


Рис.3.17

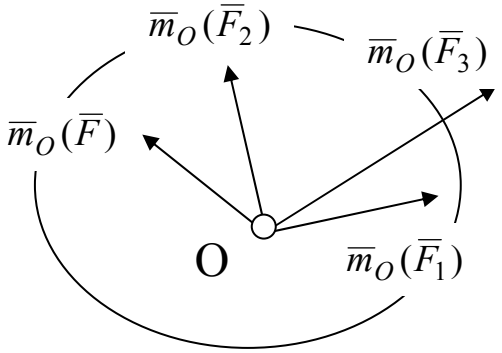


Рис. 3.18

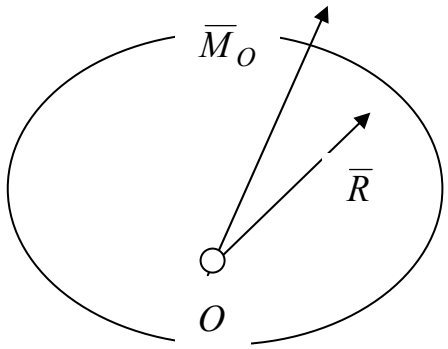


Рис.3.19

В центре O можно произвести геометрическое сложение векторов сил $\overline{F}_к$ и отдельно векторов моментов сил $\overline{m}_O(\overline{F}_k)$, вычисленных относительно одной и той же точки приведения O. Это делается применением правила параллелограмма или силового многоугольника.

В центре O после сложения получим два вектора - главный вектор и главный момент исходной системы сил относительно центра O *(рис.3.18)*, заменяющие собой данную систему сил:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k, \qquad \overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} (\overline{r}_k \times \overline{F}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k \qquad (3.26)$$

Механическое состояние тела при этом не изменилось. Как видно из хода доказательства теоремы, главный вектор $\overline{R}$ не зависит от центра приведения. В любом центре суммировались бы те же силы. А главный момент системы сил $\overline{M}_0$ зависит от центра приведения. Модули и направления векторных моментов для разных центров – различны.

Значение основной теоремы статики. Оказалось, что любая произвольная пространственная система сил может быть приведена самое большее к трем силам, две из которых образуют пару сил с моментом $\overline{M}_O$.

§ 3.13. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Основная теорема статики позволяет сформулировать условия равновесия произвольной пространственной и произвольной плоской систем сил.

А. Геометрические условия равновесия

Теорема. Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы ее главный вектор и главный момент относительно произвольно выбранного центра О были равны нулю:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k, =0; \qquad \overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} (\overline{r}_k \times \overline{F}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k = 0. \qquad (3.27)$$

Докажем необходимое условие. Пусть рассматриваемая система сил находится в равновесии, т.е. она эквивалентна нулю, а тело под действием этой системы сил находится в покое. Но на основании теоремы предыдущего параграфа любая система сил эквивалентна в общем случае одной силе и одной паре сил. Следовательно, в состоянии равновесия необходимо одновременное выполнение условий (3.27). *Достаточность*: Пусть на тело действует произвольная система сил, для которой условия (3.27) выполняются. Но тогда произвольная система сил, действующая на тело, будет эквивалентна нулю, а тело, следовательно, будет находиться в состоянии равновесия.

Б. Аналитические условия равновесия

Теорема. Для равновесия произвольной пространственной системы сил, действующих на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на оси принятой системы координат и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю.

Доказательство: Введем произвольную прямоугольную систему координат *Oxyz*. Запишем главный вектор и главный момент произвольной системы сил через их проекции на оси:

$$\overline{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{i}, \qquad \overline{M}_O = m_x\bar{i} + m_y\bar{j} + m_z\bar{k},$$

где

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \qquad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \qquad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}; \qquad (3.28)$$

$$m_x = \sum_{k=1}^{n} m_{kx}(\overline{F}_k); \quad m_y = \sum_{k=1}^{n} m_{ky}(\overline{F}_k); \quad m_z = \sum_{k=1}^{n} m_{kz}(\overline{F}_k). \qquad (3.29)$$

Пусть тело находится в равновесии. Тогда справедливо (3.27). Вектор равен нулю тогда и только тогда, когда равен нулю его модуль:

$$\left|\overline{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0; \qquad \left|\overline{M}_0\right| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0.$$

Следовательно, с учетом (3.28), (3.29) в состоянии равновесия должно быть:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} m_{kx}(\overline{F}_k) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad (3.30) \qquad \sum_{k=1}^{n} m_{ky}(\overline{F}_k) = 0; \qquad (3.31)$$

$$\sum_{k=1}^{n} Fkz = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} m_{kz}(\overline{F}_k) = 0.$$

Соотношения (3.30) , (3.31) носят название аналитических условий равновесия произвольной пространственной системы сил В приложениях они используются и для исследования состояния равновесия тел со связями.

В этих случаях связи сначала заменяются их реакциями, а уже потом записываются условия равновесия.

Если реакции связей неизвестны и определяются из (3.30), (3.31), то последние называются уравнениями равновесия.

§ 3.14. Условия равновесия произвольной плоской системы сил

А. Смешанные условия равновесия

Плоская произвольная система сил приводится в любом центре на плоскости действия сил к главному вектору и главному алгебраическому моменту:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \,, \qquad M_0 = \sum_{k=1}^{\infty} m_k = \sum_{k=1}^{n} m_O(\overline{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \pm F_k \cdot h_k \tag{3.32}$$

Условия равновесия, вытекающие из (3.27) и (3.32) приобретают вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) = 0\,. \tag{3.33}$$

В других обозначениях (3.33) переписывается так:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} \pm F_k \cdot h_k = 0\,. \tag{3.34}$$

Первое условие в (3.33), (3.34) - геометрической условие. Второе условие – алгебраическое условие. Поэтому их можно назвать смешанными условиями.

Б. Аналитические условия равновесия

Из условий (3.33) непосредственно вытекает основная форма условий равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} m_O(\overline{F}_k) = 0. \tag{3.34}$$

Теорема. Для равновесия произвольной плоской системы сил, действующих на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на оси принятой системы координат и суммы алгебраических моментов всех сил относительно произвольного центра были равны нулю.

Существуют еще две аналитические формы условий равновесия, на которых остановимся в следующей главе при решении задач.

Вопросы для самоконтроля к главе 3

1. Мерой какого действия силы является векторный момент силы относительно центра?
2. Что называется алгебраическим моментом силы относительно центра?
3. Что называется плечом силы относительно выбранного центра?
4. Опишите правило знаков для алгебраического момента силы относительно центра.
5. Что называется векторным моментом силы относительно центра?
6. Чему равен модуль векторного момента силы относительно центра?
7. В каких единицах измеряется модуль векторного и алгебраического моментов силы относительно центра?
8. Для какой системы сил вводится понятие алгебраического момента силы относительно центра?
9. Для какой системы сил вводится понятие векторного момента силы относительно центра?
10. Покажите геометрический смысл модулей алгебраического момента силы относительно центра и векторного момента силы относительно центра.
11. Как сложить два векторных момента силы относительно одного и того же центра?
12. Что называется главным алгебраическим моментом силы относительно центра?
13. Что называется главным векторным моментом системы сил относительно центра?
14. Дайте определение момента силы относительно оси?
15. Опишите правило знаков, принятое для моментов силы относительно оси.
16. Опишите механический смысл момента силы относительно оси.

17. Опишите алгоритм практического метода вычисления момента силы относительно оси.
18. Когда момент силы относительно оси равен нулю?
19. Как вычисляются моменты силы относительно оси в случае, когда силы заданы аналитически?
20. Опишите свойства алгебраического момента силы относительно центра.
21. Опишите свойства векторного момента силы относительно центра.
22. Опишите свойства момента силы относительно оси.
23. Сформулируйте теорему Вариньона в различных вариантах и опишите её значение.
24. Приведите какой-либо простейший пример применения теоремы Вариньона.
25. Дайте определение пары сил. Алгебраического и векторного моментов пары сил.
26. Сформулируйте свойства пары сил в пространстве и на плоскости.
27. Сформулируйте условия равновесия пар сил в пространстве и на плоскости.
28. Сформулируйте теорему о параллельном переносе силы.
29. Докажите теорему о параллельном переносе силы.
30. Сформулируйте основную теорему статики для произвольной пространственной системы сил.
31. Сформулируйте основную теорему статики для произвольной плоской системы сил.
32. Докажите основную теорему статики для произвольной пространственной системы сил.
33. Опишите значение основной теоремы статики
34. Сформулируйте геометрические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
35. Докажите необходимые и достаточные условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
36. Сформулируйте аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
37. Сформулируйте смешанные условия равновесия произвольной плоской системы сил.
38. Сформулируйте аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил.
39. Докажите аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил, исходя из смешанных условий равновесия произвольной плоской системы сил.

ГЛАВА 4. РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Наличие навыков моделирования и решения задач для инженеров имеет огромное значение. С учетом этого, в данной главе будут рассмотрены приложения теории плоской системы сил к определению реакций связей, наложенных на твердые тела. Рассматриваются только те ситуации, когда линии действия всех сил, включая и линии действия реакций связей, лежат в одной плоскости.

§ 4.1. Равновесие твердого тела под действием плоской системы сходящихся сил

На фото 1 показана плоская ферма. Фотография сделана в процессе строительства торгового комплекса «Мега» в г. Казани. Расчет реакций отдельных стержней (читай определение сил, действующих на стержни) приведет к системе сходящихся сил. Это будет показано в примерах.

Задача складирования труб (фото 2) тоже приведет к исследованию системы сходящихся сил. Если рассмотреть отдельную трубу, то станет понятно, что другие «отброшенные» трубы могут действовать на неё только вдоль радиуса. Этот вывод следует из геометрических свойств окружности. А следовательно, линии действия всех сил пересекутся в центре окружности отдельной трубы. Другими словами, трубы при складировании подвергаются действию постоянных распределенных сил. Если взять отдельную трубу, лежащую в массиве, можно увидеть шесть линий контакта с другими трубами.

На фото 3 показана одна из стоек поливальной машины «Фрегат» на капустном поле (общая длина, наблюдаемая нами была около 500м.). Вертикальное давление на эту машину происходит из-за натяжения гибких нерастяжимых нитей (троса),

поддерживающих трубы подачи воды для полива. Здесь также имеется плоская система сходящихся сил. При горизонтальных колебаниях трубы из-за движения машины может возникнуть и пространственная система сходящихся сил.

Вернемся к теоретическим результатам, приведенным в предыдущих главах, и рассмотрим их практическое применение

4.1. Если линии действия плоской системы сил пересекаются в одной точке, то система сил называется плоской системой сходящихся сил.

Так как главный вектор системы сходящихся сил равен ее равнодействующей, то *геометрические* условия равновесия в общем случае имеют вид (2.10):

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0. \qquad (4.1)$$

4.2. Итак, для равновесия плоской системы сходящихся сил, действующих на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы ее главный вектор был равен нулю (геометрическое условие).

При этом и главный вектор, и все силы, включая реакции связей, лежат в одной плоскости. Силовой многоугольник в состоянии равновесия становится плоской многоугольной замкнутой фигурой.

Пусть в пространстве введена правая прямоугольная система координат $Oxyz$, связанная с неподвижной плоскостью действия сил. На плоскости действия сил располагаются оси Ox, Oy. Ось Oz перпендикулярна к плоскости действия сил. Тогда в полученных ранее соотношениях главы 2, проекции всех без исключения сил на ось Oz обращаются в тождественный ноль.

Напомним. Если обозначить через R_x, R_y проекции главного вектора на оси Ox и Oy, а F_{kx}, F_{ky} - проекции сил на те же оси, то можно записать:

$$\overline{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j}; \qquad \overline{F}_k = F_{kx}\bar{i} + F_{ky}\bar{j},$$

где
$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k; \qquad R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \qquad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}. \tag{4.2}$$

Модуль главного вектора $\overline{R}$ определяется по формуле:

$$\left|\overline{R}\right| = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2} = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} F_{kx})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{ky})^2}. \tag{4.3}$$

Косинусы углов, которые образует вектор $\overline{R}$ с осями Ox и Oy на плоскости, находятся по формулам

$$Cos\alpha = R_x \big/ \left|\overline{R}\right|; \quad Cos\beta = R_y \big/ \left|\overline{R}\right|. \tag{4.4}$$

Тогда *аналитические* условия равновесия примут вид (см. 2.12):

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{кx} = 0; \qquad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \tag{4.5}$$

4.3. Итак, для равновесия плоской системы сходящихся сил, действующей на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на принятые оси координат были равны нулю (аналитические условия).

Условие (4.1) используется чаще в теоретических исследованиях, а условия (4.5) - при решении задач. При этом условия (4.1) , (4.5) можно использовать в двух вариантах. Во – первых, если все силы известны, то указанные условия выступают в виде проверочных условий. В таком виде они широко используются для проверки полученных решений. Во - вторых, если часть сил неизвестна, то условия (4.1), (4.5) ипользуются для определения этих сил. При этом очевидно, что из условия (4.1) может быть определен лишь один неизвестный вектор силы, а из условий (4.5) можно определить две алгебраические величины. ***Когда условия (4.1), (4.5) используются для определения неизвестных величин, они называются уравнениями равновесия.***

§ 4.2. Примеры к параграфу 4.1

Пример 1. Определить равнодействующую двух равных по величине сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, образующих между собой угол $\alpha = 60^\circ$, если известно, что сила $\overline{F}_1$ образует с осью Ox угол $\beta = 45^\circ$, а $\left|\overline{F}_1\right| = \left|\overline{F}_2\right| = 25$ кН. Силы изображены на рисунке 1.

Решение: Известно, что сходящаяся система сил может быть приведена к одному центру - точке пересечения линий действия этих сил. Пусть тогда начало системы координат Oxy имеет своим началом именно этот центр. Изобразим на рисунке силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и построим на них параллелограмм. Равнодействующая $\overline{R}$ изобразится диагональю параллелограмма (в данном случае ромба). Направление $\overline{R}$ определим углом $\gamma = \beta + \alpha/2 = 45 + 60/2 = 75^\circ$. Величину $\overline{R}$ (рис.2), то есть модуль вектора $\left|\overline{R}\right|$, можно определить графически, вычерчивая вектора $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{R}$ в едином масштабе. Здесь воспользуемся теоремой косинусов.

$$\left|\overline{R}\right| = \sqrt{\left|\overline{F}_1\right|^2 + \left|\overline{F}_2\right|^2 + 2\cdot\left|\overline{F}_1\right|\cdot\left|\overline{F}_2\right|\cdot Cos\alpha} =$$

$$\sqrt{2\cdot\left|\overline{F}_1\right|^2 + 2\left|\overline{F}_1\right|^2\cdot Cos\alpha} = \left|\overline{F}_1\right|\cdot\sqrt{3} = 1{,}73\cdot\left|\overline{F}_1\right| = 43{,}3\,кН.$$

(Ответ: $\left|\overline{R}\right| = 43{,}3$ *кН.* Вектор $\overline{R}$ образует с осью Ox угол $\gamma = 75^\circ$).

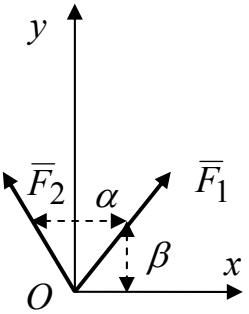


*Рис.*1

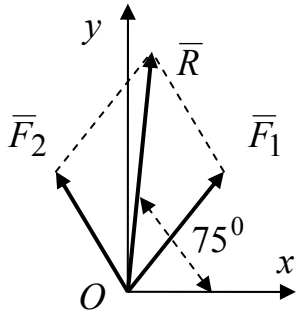


*Рис.*2

Пример 2. Груз весом P удерживается в равновесии при помощи двух одинаковых невесомых стержней с шарнирами по концам, как показано на рисунке 3.

Определить реакции стержней R_1 и R_2, если $P = 100$ *кН.*

Решение: Мысленно освободим шарнирный узел C от стержней AC и CB и заменим их действие реакциями R_1 и R_2. Полученную при этом схему сил изобразим на рисунке 3. Введём прямоугольную систему координат Cxy с началом в узле C и запишем условия равновесия (4.5) узла C:

$$\sum F_{kx} = 0 : -R_1 Cos30° + R_2 Cos30° = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0 : R_1 Cos\,60° + R_2 Cos\,60° - P = 0.$$

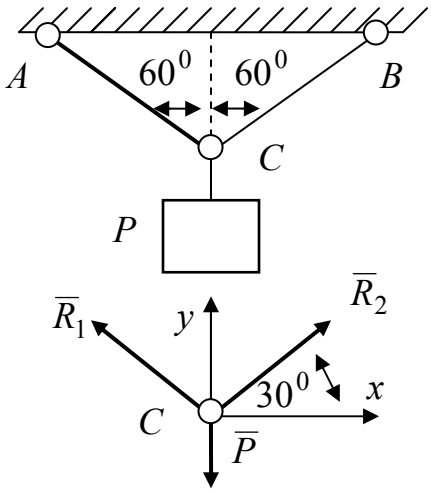


*Рис.*3

Из первого уравнения равновесия следует, что $R_1 = R_2$. Тогда из второго уравнения получим $2R_1 Cos60° = P$; $R_1 = R_2 = P/(2Cos60°)$. Подставляя значения P, получаем $R_1 = R_2 = 100/(2 \cdot 0{,}5) = 100$ *кН.* Таким образом, $R_1 = R_2 = P$ *кН* (реакции равны по величине). (*Ответ:* $R_1 = R_2 = P = 100$ *кН.)*

Пример 3. Невесомые стержни AB и BC скреплены между собой шарнирно в точке B, а в точках A и C при помощи шарниров прикреплены к вертикальной стене так, что $\Delta\ ABC$ располагается в вертикальной плоскости **(Рис. 4)** Стержни одинаково сопротивляются растяжению и сжатию. Определить наибольшую по величине вертикальную силу $\overline{P}$, которую можно приложить в узле B, если разрушение стержней наступает при приложении продольной силы величиной Q.

Решение: Мысленно освободимся от связей в узле B и заменим их действие реакциями $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ (рис.5). Запишем уравнения равновесия (4.5) для плоской системы сил.

$$\sum F_{kx} = 0 : -R_2 Cos\alpha - R_1 Cos\alpha = 0; \quad \sum F_{ky} = 0 : R_2 Sin\alpha - R_1 Sin\alpha - P = 0.$$

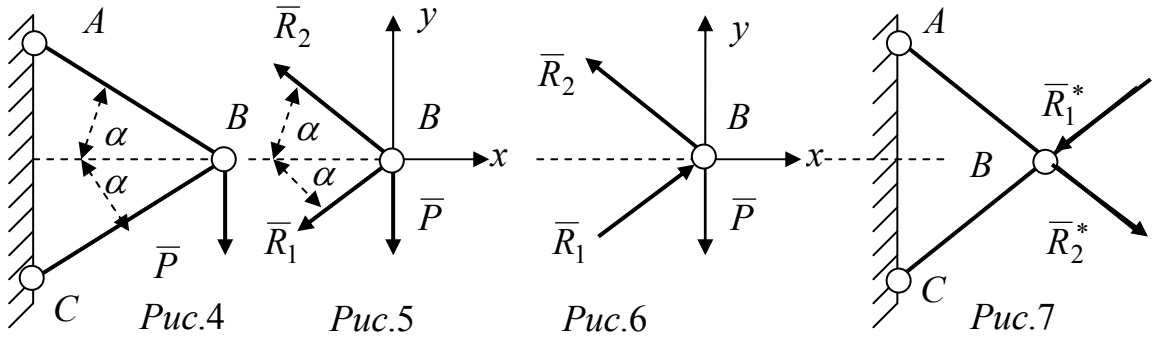


*Рис.*4 *Рис.*5 *Рис.*6 *Рис.*7

Из первого уравнения равновесия получим $R_1 = -R_2$, а второе уравнение при этом перепишется так: $R_2 Sin\alpha + R_2 Sin\alpha = P$ или $2R_2 Sin\alpha = P$. Отсюда

$$R_2 = P/(2 \cdot Sin\alpha); \qquad R_1 = -R_2 = -P/(2 \cdot Sin\alpha). \qquad (*)$$

Обсудим полученные результаты. Напомним, что $R_1 = |\overline{R}_1|$, $R_2 = |\overline{R}_2|$. По первому из соотношений (*) вопросов не возникает, но что может означать знак «минус» во втором равенстве (*), где величина $R_1 > 0$ приравнивается к отрицательной величине? Так «отреагировала» математика на построение расчётной схемы. «Неточность» расчетной схемы заключается в том, что истинное направление силы $\overline{R}_1$ прямо противоположно направлению показанному на рисунке 5. Истинные направления реакций стержней $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ показаны на рисунке *6.* Сам узел действует на стержни вдоль их осей *AB* и *BC* силами $\overline{R}_1^*$ и $\overline{R}_2^*$ так, что $\overline{R}_1^* = -\overline{R}_1$, $\overline{R}_2^* = -\overline{R}_2$ (рис.7). Это следует из закона о равенстве действия и противодействия. Другими словами, стержень *AB* растянут, а стержень *CB* сжат. Как общее правило, отметим***: если реакции $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ стержней с шарнирными концами, приложенные к узлу со стороны стержней, направлены от узла, как на рис. 5, и из решения соответствующей системы уравнений равновесия их модули получились со знаком плюс, то стержни растянуты, в противном случае - стержни сжаты.***

Теперь определим допустимую величину силы $\overline{P}$. Материал стержней одинаково сопротивляются растяжению и сжатию, силы реакций стержней по модулю равны ($|\overline{R}_1| = |\overline{R}_2|$). Тогда условие отсутствия разрушения принимает вид: $|\overline{R}_2| \le Q$ или $\dfrac{P}{2Sin\alpha} \le Q$. *(Ответ:* В узле *B* можно приложить силу $\overline{P}$, величина которой $P \le 2Q \cdot Sin\alpha$).

§ 4.3. Равновесие твердого тела под действием произвольной плоской системы сил

4.4. Если линии действия сил, лежат в одной плоскости, не параллельны и не пересекаются в одной точке, то такая система сил называется произвольной плоской системой сил.

Выберем в плоскости действия сил точку приведения *O*. Путем параллельного переноса приведем все силы в эту точку (пользуясь основной теоремой статики в плоскости действия сил). Произвольная плоская система сил упростится и будет заменена одной силой, равной главному вектору системы сил и одной парой сил, момент которой равен главному алгебраическому моменту системы сил относительно точки переноса *O*.

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k; \qquad M_0 = \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k). \qquad (4.6)$$

Другими словами, любая произвольная плоская система сил может быть заменена эквивалентной ей, тоже плоской, системой сил, состоящей самое большее из трех сил. Главный вектор – это сила, пара сил состоит из двух сил. Все силы лежат в одной и той же плоскости. Действие пары сил на тело учитывается алгебраическим моментом.

Геометрические (смешанные) условия равновесия

4.5. Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный алгебраический момент этой системы сил были равны нулю (см. предыдущую главу).

$$\overline{R} = 0; \qquad M_0 = 0. \tag{4.7}$$

Первое условие является геометрическим условием, потому что наложено на геометрический объект - вектор, второе условие – аналитическое. Это условие наложено на алгебраический объект. Поэтому в совокупности их можно назвать смешанными условиями. В целом, условия (4.7) носят больше теоретический характер и позволяют записать аналитические условия равновесия, используемые на практике.

Аналитические условия равновесия

Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат Oxy с началом в центре O. При вычислениях удобно от векторов, перейти к их проекциям на оси Ox и Oy. Из условий (4.7) непосредственно вытекает основная форма аналитических условий равновесия (4.8). Действительно, из (4.7) следует, что в состоянии равновесия

$$\left|\overline{R}\right| = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2} = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} F_{kx})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{ky})^2} = 0; \quad M_O = 0.$$

Это означает, что в состоянии равновесия

$$\sum_{k=1}^{n} F_{кx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) = 0. \tag{4.8}$$

4.6. Для равновесия произвольной плоской системы сил, действующих на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на произвольные оси Ox, Oy и сумма алгебраических моментов сил относительно центра O были одновременно равны нулю.

Если, кроме того, в плоскости действует система пар сил $(m_1, m_2, ...m_j)$, то с учетом теоремы о проекциях сил пары на произвольную ось и условий (3.25), только в третье уравнение системы (4.8) нужно будет добавить сумму их алгебраических моментов. Условия равновесия примут вид:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{кx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0. \tag{4.9}$$

4.7. Для равновесия произвольной плоской системы сил, действующих на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси Ox и Oy, суммы алгебраических моментов сил относительно центра O и алгебраических моментов пар сил были одновременно равны нулю.

Условия (4.8) и (4.9) носят название «основная аналитическая форма условий равновесия произвольной плоской системы сил», потому что они непосредственно следуют из смешанных условий (4.7). Пользуясь условиями (4.8), (4.9), можно вести два вида расчета: проверочный расчет и определение неизвестных сил. При первом виде расчета считается, что все силы известны, их подставляют в (4.8) или в (4.9) и проверяют равенство нулю полученных сумм. При втором виде расчета часть сил не известны. В прикладных задачах статики – это, как правило, реакции опор. В этом случае они определяются из условий (4.8) или (4.9). При этом сами условия становятся системой трех алгебраических уравнений. В этом варианте условия (4.8), (4.9) называются аналитическими уравнениями равновесия. В прикладной статике неизвестными силами чаще всего бывают реакции связей. Из трех уравнений равновесия можно определить три неизвестные силы.

Существуют еще две аналитические формы условий равновесия произвольной плоской системы сил. Приводим их без вывода.

4.8. Для равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы алгебраических моментов всех сил относительно двух произвольных центров A и B и алгебраических моментов пар сил, а так же сумма проекций всех сил на любую ось, не перпендикулярную отрезку AB, были одновременно равны нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_B(\overline{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{кx} = 0. \quad (4.10)$$

При применении условий (4.10) ось x не должна быть перпендикулярна отрезку AB. Наконец, третья форма условий равновесия.

4.9. Для равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы алгебраических моментов всех сил относительно трех произвольных центров A, B и C, не лежащих на одной прямой, и алгебраических моментов пар сил были равны нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0; \sum_{k=1}^{n} m_B(\overline{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0; \sum_{k=1}^{n} m_C(\overline{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0 \quad (4.11)$$

При использовании условий (4.11) нужно быть внимательным при выборе точек *A,B,C.* Недопустимо брать их на одной прямой.

Параллельная плоская система сил

4.10. Если линии действия сил, действующих в одной плоскости, параллельны между собой, то плоская система сил называется параллельной плоской системой сил.

Это - частный случай произвольной плоской системы сил и все предыдущие выводы справедливы и для нее. Но математическую (вычислительную) сторону задачи можно упростить, если при составлении уравнений равновесия одну из осей координат выбрать параллельно линиям действия сил. Действительно, направив, например, ось *Oy* параллельно линии действия сил, можно увидеть, что сумма проекций всех сил на ось *Ox* в основной форме условий равновесия (4.9) обратится в тождество, так как проекция каждой отдельной силы на ось *Ox* будет равна нулю (линия действия каждой силы перпендикулярна оси, на которую сила проецируется). Тогда из условий (4.9) - (4.11) получим два условия равновесия для параллельной плоской системы сил (4.12), (4.13), которые могут использоваться и в качестве уравнений равновесия.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0. \quad (4.12)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} m_B(\overline{F}_k) + \sum_{i=1}^{j} m_i = 0. \quad (4.13)$$

4.11. Для равновесия плоской параллельной системы сил, действующих на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную линиям действия сил, и суммы алгебраических моментов всех сил относительно произвольно выбранного центра А в плоскости действия сил и алгебраических моментов пар сил, были равны нулю.

4.12. Или, для равновесия плоской параллельной системы сил, действующих на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы алгебраических моментов всех сил относительно двух произвольно выбранных центров А и В в плоскости действия сил и алгебраических моментов пар сил, были равны нулю

Частные случаи приведения плоской системы сил к центру

1) Если $\overline{R}=0,\quad M_0=0,$ то, как было уже показано, тело под действием произвольной плоской системы сил находится в равновесии, а сама система сил эквивалентна нулю. 2) Если $\overline{R}=0,\quad M_0\neq 0$ - это означает, что произвольная плоская система сил при приведении к центру *O* оказалась эквивалентной одной паре сил с моментом M_0. И в первом, и во втором случаях значение M_0 не изменится, если выбрать другой центр приведения, то есть M_0 здесь не зависит от центра приведения. 3) Если $\overline{R}\neq 0,\quad M_0=0,$ то плоская система сил приводится к одной силе – главному вектору $\overline{R}$, а, следовательно, главный вектор становится равнодействующей и $\overline{R}=\overline{R}^*$. Равнодействующая приложена в центре приведения *O.* Как было показано выше, к равнодействующей всегда приводится система сходящихся сил. Но в отдельных случаях, оказывается, к равнодействующей может быть приведена и произвольная плоская система сил. 4) Если $\overline{R}\neq 0,\quad M_0\neq 0,$ то и в этом случае плоская система сил может быть приведена к равнодействующей, но приложенной не в центре *O,* куда первоначально приводилась система сил, а в другом центре O_1, лежащем на прямой, параллельной главному вектору системы сил в точке *O* и проходящей на расстоянии d от точки О (рис.4.1, 4.2).

Действительно (см. рис.4.1), заменим главный алгебраический момент M_0 парой сил ($\overline{R},\overline{R}'$) так, чтобы $|\overline{R}|\cdot d=|M_0|$. То есть в паре сил, силу приравняли главному вектору. Это можно делать, не меняя момент пары. Теперь повернем и переместим эту пару в плоскости так,

чтобы одна из сил пары оказалась приложенной в точке приведения O и действовала по линии действия главного вектора $\overline{R}$ в противоположную сторону (рис. 4.2). Видим, что в точке O образовалась система двух сил ($\overline{R}, \overline{R}'$) ~ *0,* которую можно отбросить. Остается сила $\overline{R}'$, приложенная в некоторой точке O_1 прямой, отстоящей от точки O на расстоянии $d = |M_0| / |\overline{R}|$. Что и утверждалось.

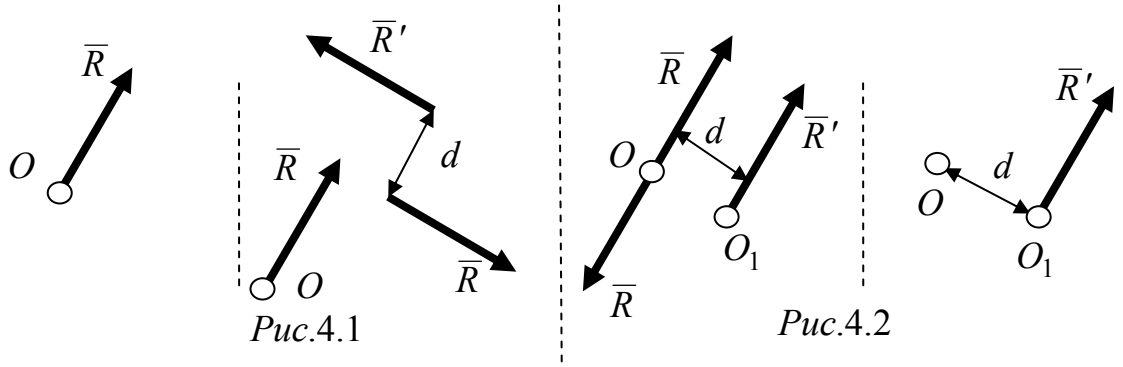


*Рис.*4.1 *Рис.*4.2

Распределенные силы

Если твердые тела взаимодействуют по линии, то это взаимодействие описывается распределенными силами. Теория распределенных сил может быть строго изложена после знакомства с теорией параллельных сил. Здесь в конечном виде приведем результаты, нужные сейчас для решения задач. При составлении условий равновесия распределенную силу надо заменить сосредоточенной силой – равнодействующей. Распределенную силу принято обозначать $\overline{q}$, равнодействующую распределенной силы -через $\overline{Q}$. Модули этих сил равны q *и* Q, соответственно. Размерность [q]= сила/длина (*Н/м, кН/м, т/м*), размерность $[Q] = сила$ $(Н, кН, т)$ Постоянная распределенная сила и сила, распределенная по закону треугольника, и их равнодействующии показаны на рис.4.3, рис.4.4, соответственно.

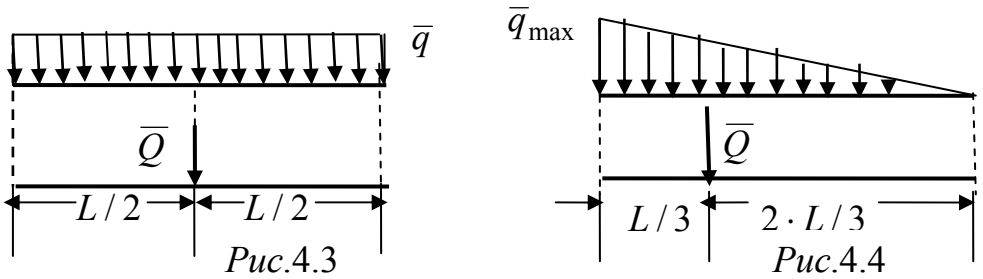


*Рис.*4.3 *Рис.*4.4

$$Q = q \cdot L \qquad (4.14)$$

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot L \qquad (4.15)$$

Линии действия равнодействующих сил $\overline{Q}$ проходят через геометрический центр тяжести фигур, изображающих распределенную силу, параллельно направлению действия распределенной силы

§ 4.4. Примеры к параграфу 4.3

Пример 1. Абсолютно твердое тело (балка) с прямолинейной осью находится в равновесии под действием двух равных по величине сил $\overline{F}$ (Рис.1). В точке *A* балка связана с цилиндрическим шарниром, а в точке *B* опирается на невесомый стержень с шарнирами по концам. Определить реакции связей, считая, что на балку действует произвольная плоская система активных и реактивных сил. $F = 10кН$. Размеры балки указаны на рисунке.

Замечание: В этой задаче встретились два вида связей: «цилиндрический шарнир» и «невесомый стержень с шарнирами по концам». Везде, где они в дальнейшем будут встречаться, нужно будет изображать их реакции, как на рис.2. А еще внимательно посмотрите на вычисление алгебраических моментов сил относительно различных центров.

Решение: Освободим тело от связей и заменим их действие реакциями. Получим расчетную схему, показанную на рис.2. Для полученной схемы составим уравнения равновесия первой основной формы в виде (4.8). При этом рекомендуем вспомнить вычисление проекции силы на ось и алгебраических моментов силы относительно центра.

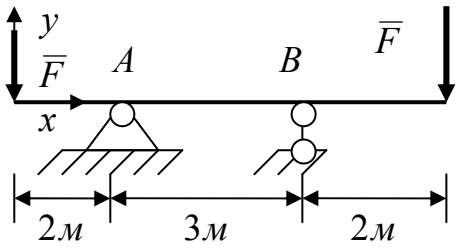


*Рис.*1

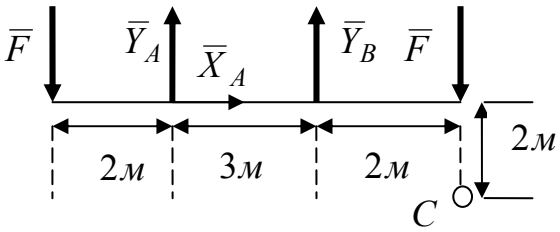


*Рис.*2

$$\sum_{k=1}^{n} F_{кx} = 0: \qquad X_A = 0. \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \qquad Y_A + Y_B - F - F = 0. \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0: \qquad F \cdot 2 + Y_B \cdot 3 - F \cdot 5 = 0. \tag{3}$$

Решаем уравнения (1)-(3). Из (1) следует: $X_A = 0$. Из (3) следует: $Y_B = 3 \cdot F / 3 = F = 10кН$. Из (2) следует: $Y_A = 2 \cdot F - Y_B = 20 - 10 = 10кН$.

Полученное решение требуется проверить. Но здесь уместно одно замечание. Еще со школы мы знаем, чтобы проверить правильность решения уравнения или системы уравнений, надо найденные корни подставить в решенное уравнение. Все это правильно. Но, в отличие от задачников по математике, в механике мы сами вынуждены составлять уравнения. При этом мы можем и ошибиться еще на стадии составления уравнений. Вот поэтому нам нужно не просто подставить корни в решенную систему уравнений (1) - (3), в которой может быть ошибка, а составить еще одно дополнительное механическое уравнение равновесия, которое тоже должно удовлетворяться при найденных корнях.

Проверка: Составим еще одно уравнение моментов относительно какого-либо центра. Например, относительно центра *C,* расположенного под правым концом балки ниже на $2м$ оси *Ox (рис.2).* Выбор этого центра обусловлен только тем, что в уравнение алгебраических моментов относительно этого центра войдут все найденные реакции. Можно было взять и другой центр. Итак:

$$\sum_{k=1}^{n} m_C(\overline{F}_k) = 0: \qquad F \cdot 7 - Y_A \cdot 5 - X_A \cdot 2 - Y_B \cdot 2 = 0. \qquad (4)$$

Соотношение (4) можно назвать не уравнением, а *условием* равновесия. Из него ничего находить не будем. Мы лишь проверим его выполняемость при найденных значениях реактивных сил. Подставим в (4) значения реакций:

$$10 \cdot 7 - 10 \cdot 5 - 0 \cdot 2 - 10 \cdot 2 = 70 - 70 = 0.$$

Вывод: Условие (4) удовлетворяется. Реакции найдены правильно.

Ответ: $X_A = 0$; $Y_A = 10кН$; $Y_B = 10кН$.

Пример 2. Абсолютно твердое тело (балка) с прямолинейной осью находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил (рис.3). В точке *A* балка связана с цилиндрическим шарниром, а в точке *B* опирается на невесомый стержень с шарнирами по концам. Ось стержня (связь в точке B) образует угол $\alpha = 30^0$ с вертикалью, как показано на рисунке 4. На левом свободном конце балки действует сосредоточенная сила $\overline{F}$ под углом $\beta = 45^0$ к оси балки. На участке *AB* на балку действует равномерно распределенная сила $\overline{q}$ (нагрузка q). Размеры балки указаны на рисунке. Определить реакции связей.

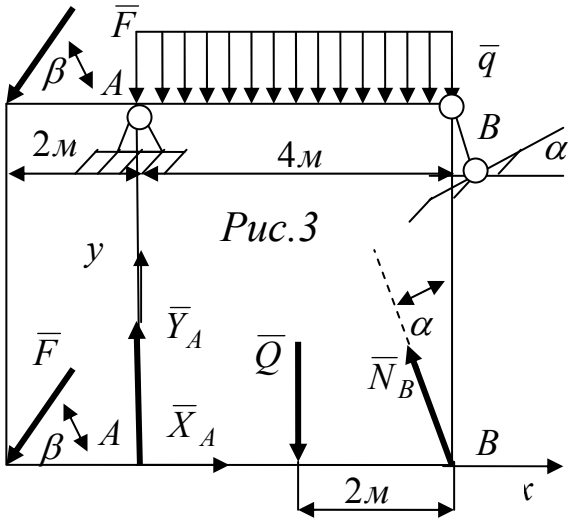


Рис.3

Рис.4

Замечание. Эту задачу решим в общем виде. Нужно будет обратить внимание, во-первых, на вычисление алгебраических моментов наклонных сил $\overline{F}$ и $\overline{N}_B$ с использованием теоремы Вариньона. Во-вторых, появилась распределенная сила. Посмотрите и запомните, как она будет участвовать в уравнениях равновесия.

Решение: Балка показана на рисунке 3. Освободим её от связей. Ничего нового по сравнению с примером 1 в этом нет. Реакции связей показаны на рис.4. Как и в

первом примере, реакция стержня в точке B направлена по оси стержня. Равномерно распределенную силу $\overline{q}$ заменяем её равнодействующей $\overline{Q}$. Величина $Q = q\dfrac{кН}{м}\cdot 4м = 4q\ \ кН$ по (4.14). Поместим начало координат в точке A и составим три уравнения равновесия по второй форме.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{кx} = 0: \qquad -F\cdot Cos\beta + X_A - N_B\cdot Sin\alpha = 0. \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0: \qquad F\cdot Sin\beta\cdot 2 - Q\cdot 2 + N_B\cdot Cos\alpha\cdot 4 = 0. \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_B(\overline{F}_k) = 0: \qquad F\cdot Sin\beta\cdot 6 - Y_A\cdot 4 + Q\cdot 2 = 0. \tag{3}$$

При составлении уравнений моментов воспользовались теоремой Вариньона. Например, при составлении уравнений (2) и (3) силу $\overline{F}$ представили в виде суммы горизонтальной и вертикальной составляющих $\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y$. При этом алгебраические моменты силы $\overline{F}_x$ относительно точек A *и* B равны нулю, так как её линия действия проходит по оси балки через эти точки. Величина силы $\overline{F}_y$ равна модулю её проекции на ось Ay, то есть $\left|\overline{F}_y\right| = F\cdot Sin\beta$. Эта величина, помноженная на соответствующее плечо, и вошла в уравнения (2), (3). Аналогично поступили с силой $\overline{N}_B$. Тогда из второго и третьего уравнений следует, что

$$N_B = (2Q - 2F\cdot Sin\beta)/4Cos\alpha; \quad Y_A = (6F\cdot Sin\beta + 2Q)/4.$$

Из первого уравнения получим X_A:

$$X_A = F\cdot Cos\beta + N_B\cdot Sin\alpha = F\cdot Cos\beta + Sin\alpha\cdot(2Q - 2F\cdot Sin\beta)/4Cos\alpha.$$

Окончательно,

$$X_A = F\cdot Cos\beta + (2Q - 2F\cdot Sin\beta)\cdot tq\alpha/4.$$

Составим проверочное условие:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \qquad -F\cdot Sin\beta + Y_A - Q + N_B\cdot Cos\alpha = 0. \tag{4}$$

Подставляя сюда найденные значения реакций связей, будем иметь:

$$-F\cdot Sin\beta + (6F\cdot Sin\beta + 2Q)/4 - Q + (2Q - 2F\cdot Sin\beta)/4 = 0.$$

Или: $(-4\cdot F\cdot Sin\beta + 6F\cdot Sin\beta + 2Q - 4\cdot Q + 2Q - 2F\cdot Sin\beta) = 0.$

Вывод: Проверочное условие (4) удовлетворяется. Величины реакций Y_A, N_B найдены правильно. При нашем выборе условия (4) не проверенной остается величина X_A. Её можно было бы проверить, выбирая моментную точку, например, как в

примере 1. Здесь же X_A вычисляется через заданную величину $\overline{F}$ и проверенную величину $\overline{N}_B$. Для уверенности можно еще раз решить уравнение (1) и найти X_A.

Ответ: $X_A = F \cdot Cos\beta + (2Q - 2F \cdot Sin\beta) \cdot tq\alpha / 4$;

$Y_A = (6F \cdot Sin\beta + 2Q)/4$; $N_B = (2Q - 2F \cdot Sin\beta)/4Cos\alpha$.

Пример 3. Абсолютно твердое тело (балка) с прямолинейной осью находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил (рис.5). В точке *A* балка заделана. Другой конец *B* балки свободен. На балку действуют пара сил с моментом m, сосредоточенная сила $\overline{F}$ под углом α к оси балке и сила, распределенная по «закону треугольника». Своего максимального значения, равного $\overline{q}_{\max} = 2q$ $кН/м$, распределенная сила достигает на свободном конце. Размеры тела показаны на рисунке. Определить реакции связей, если $m = qa^2$ $кН \cdot м$; $F = 3qa$; $\alpha = 60^0$.

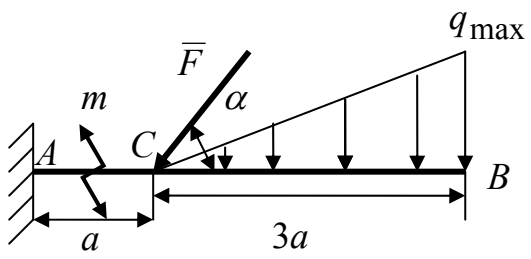


Рис.5

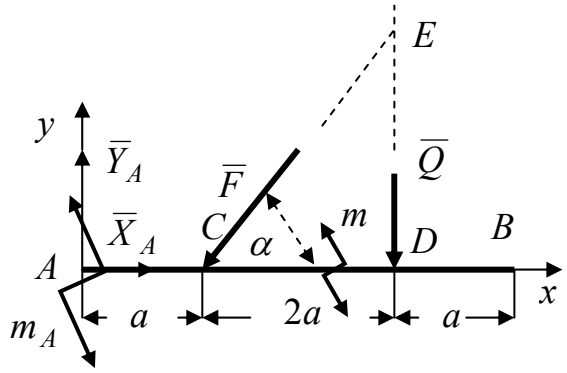


Рис.6

Замечание: В этой задаче рассматривается связь, называемая «плоская заделка». Реакции такой связи (да и вообще любых связей) не зависят ни от формы тела, ни от действующих сил. Везде, где встречается такая связь, нужно будет вводить реакции, показанные на рис 6. То есть $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, m_A$. Так называемый неизвестный опорный момент m_A ничем от известного момента m не отличается. Единственное, повторимся, он будет определяться из уравнений равновесия. Еще одна новизна – это «треугольная сила (нагрузка)». Её надо заменить равнодействующей $\overline{Q}$ так, как показано выше (4.15). Тогда она будет приложена на расстоянии $2a$ от точки *C*. Сила $\overline{Q}$ - это теперь обычная сосредоточенная сила и работают с ней, как с обычными сосредоточенными силами. Обозначение $\overline{Q}$ для этой силы выбрано только потому, чтобы лишний раз подчеркнуть её происхождение от распределенной силы. Кроме того для вычисления алгебраического момента «наклонной силы» $\overline{F}$ будем пользоваться теоремой Вариньона.

Решение: Отбросим связь в точке *A* и заменим её действие реакциями связей $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, m_A$. Векторы сил реакций направим в положительном направлении осей, а неизвестную пока пару сил с неизвестным моментом m_A направим против часовой

стрелки. Это делается для того, чтобы в уравнения равновесия эти искомые величины вошли с плюсом. Практика показала, что момент реактивной пары сил нужно на рисунке всегда указывать в том месте, где он возникает. Распределенную силу $\overline{q}$ заменяем её равнодействующей $\overline{Q}$, силу $\overline{F}$ и пару сил с моментом m оставляем без изменения. Величина равнодействующей (4.15): $Q = q_{мах} \cdot 3a/2 = 3qa$. Свободное тело AB показано на рисунке 6. По условию задачи тело находится в равновесии и, следовательно, для него можно записать уравнения равновесия. **В задачах с заделкой удобны уравнения равновесия, составленные по основной форме.**

$$\sum_{k=1}^{n} F_{кx} = 0: \qquad X_A - F \cdot Cos\alpha = 0. \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \qquad Y_A - F \cdot Sin\alpha - Q = 0. \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}) = 0: \quad m_A - F \cdot Sin\alpha \cdot a + m - Q \cdot 3a = 0. \tag{3}$$

В уравнение моментов вошла только вертикальная составляющая силы $\overline{F}$. Её горизонтальная составляющая, равная $F \cdot Cos\alpha$, проходит через моментную точку A *и её алгебраический момент равен нулю.* Решая (1) - (3) получим:

$$X_A = F \cdot Cos\alpha = 0{,}5 \cdot 3qa = 1{,}5qa;$$

$$Y_A = F \cdot Sin\alpha + Q = 3qa \cdot 0{,}87 + 3qa = 5{,}61qa;$$

$$m_A = F \cdot Sin\alpha \cdot a - m + Q \cdot 3a = 0{,}87 \cdot 3qa \cdot a - qa^2 + 3qa \cdot 3a = 10{,}61qa^2.$$

Проверка: Составим дополнительное условие равновесия тела в виде уравнения для алгебраических моментов. Чтобы оно получилось попроще, нужно удачно выбрать центр. Выберем его в точке E - в точке пересечения линий действия сил $\overline{F}$ *и* $\overline{Q}$. Тогда силы $\overline{F}$ *и* $\overline{Q}$ в уравнение не войдут, так как их линия действия проходят через этот центр *E*. При этом $DE = 2a \cdot tg60^0 = 3{,}48a$. Проверочное уравнение будет иметь вид:

$$\sum_{k=1}^{n} m_E(\overline{F}_k) = 0: \qquad m_A + m + X_A \cdot DK - Y_A \cdot 3a = 0.$$

Подставим в это уравнение значения найденных величин.

$$(10{,}61 + 1 + 1{,}5 \cdot 3{,}48 - 5{,}61 \cdot 3) \cdot qa^2 = (16{,}83 - 16{,}83) \cdot qa^2 = 0$$

Вывод: реакции найдены правильно.

Ответ: $X_A = 1{,}5qa$ *кН*; $Y_A = 5{,}61qa$ *кН*; $m_A = 10{,}61qa^2$ *кН · м*.

Пример 4. Плоская рама (рис.7) находится под действием сосредоточенной силы $\overline{F}$, распределенной силы $\overline{q}$, пары сил с моментом m_0. В точке A рама прикреплена к неподвижному основанию посредством неподвижного

цилиндрического шарнира, а в точке B - невесомым стержнем с шарнирами по концам. Определить реакции связей, если $F = 10\,кН$; $q = 3\,кН/м$; $m_0 = 5\,кН\cdot м$; $a = 4\,м$; $b = 2\,м$; $h = 3\,м$.

Замечание: В этом и следующем примерах рассматриваются плоские тела, которые в технике называются рамами. Убедитесь, что вид тела не имеет принципиального значения для решения задачи.

Решение. Освободимся от связей и заменим их действие реакциями. Распределенную силу $\overline{q}$ заменим ее равнодействующей $\overline{Q}$. Величина этой силы $Q = q \cdot h = 3 \cdot 3 = 9\,кН$. Составим уравнения равновесия плоской системы сил, показанной на рис.8 по основной форме:

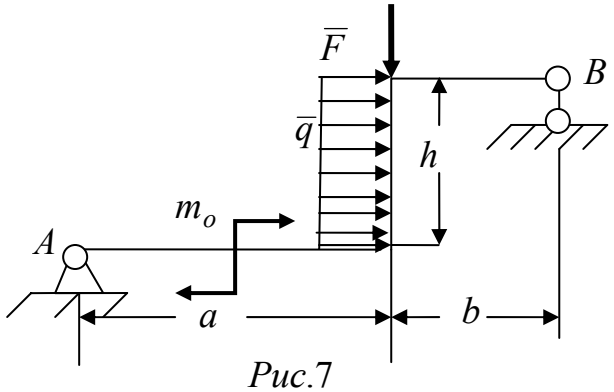


*Рис.*7

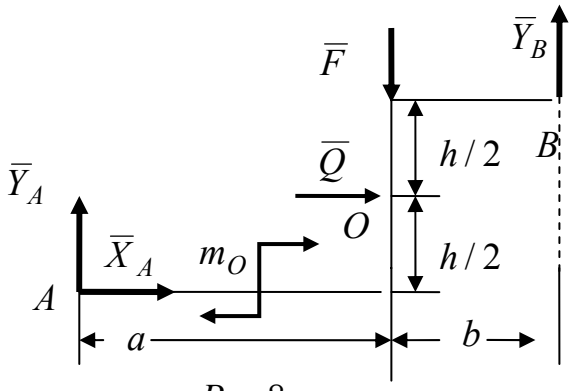


*Рис.*8

$$\sum_{k=1}^{n} F_{кx} = 0: \quad X_A + Q = 0. \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \quad -F + Y_B + Y_A = 0. \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0: \; -m_0 - Q\frac{h}{2} - Fa + Y_B(a+b) = 0. \tag{3}$$

Решим эту систему уравнений относительно неизвестных величин реакций связей X_A, Y_A, Y_B. Из уравнения (1) следует: $X_A = -Q = -9\,кН$. Знак «минус» означает, что реакция $\overline{X}_A$ направлена в противоположную сторону. Из уравнения (3):

$$Y_B = \frac{1}{a+b}(m_0 + Q\cdot\frac{h}{2} + F\cdot a) = \frac{1}{6}(5 + 9\cdot 1{,}5 + 10\cdot 4) = 9{,}75кН$$

Наконец, из уравнения (2) получим: $Y_A = F - Y_B = 10 - 9{,}75 = 0{,}25кН$.

Проверка. Решение обязательно нужно проверить. Например, можно составить уравнения моментов относительно точки О - точки приложения равнодействующей распределенных сил.

$$\sum_{k=1}^{n} m_O(\overline{F}_k) = 0, \qquad -Y_A\cdot a + X_A\cdot\frac{h}{2} + Y_B\cdot b - m_0 = 0.$$

Подставим найденные значения реакций. $-0{,}25\cdot 4 - 9\cdot 1{,}5 + 9{,}75\cdot 2 - 5 = 0$.

Корни «удовлетворили» уравнение. Следовательно, корни – реакции связей найдены правильно. *Ответ*: $X_A = -9$ *кН;* $Y_A = 0{,}25$ *кН;* $Y_B = 9{,}75$ *кН.*

Пример 5. Жестко заделанная одним концом *A* рама находится под действием сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, пары сил с моментом m_0 и распределенной по линейному закону силы $\overline{q}$ (рис.9). Определить реакции связей, если $F_1 = 5$ *кН;* $F_2 = 15$ *кН;* $q_{\max} = 6$ *кН/м;* $m_0 = 10$ *кН · м;* $h = 6$ *м;* $a = 4$ *м;* $b = 3$ *м.*

Решение. Вновь воспользуемся принципом освобождаемости от связей и заменим связи их реакциями. В точке A будут приложены реактивные силы $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и реактивная пара сил с алгебраическим моментом m_A. Реактивная пара с моментом m_A физически ничем не отличается от пары с моментом m_0, но она неизвестна. Равнодействующая распределенной силы $Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot b = \frac{1}{2} 6 \cdot 3 = 9$ *кН.* Линия действия равнодействующей $\overline{Q}$ параллельна линии действия $\overline{q}$ и проходит через центр тяжести площади прямоугольного треугольника. С учетом сделанных замечаний, получим свободную раму, подвергнутую действию показанных на рисунке сил. Составим уравнения равновесия.

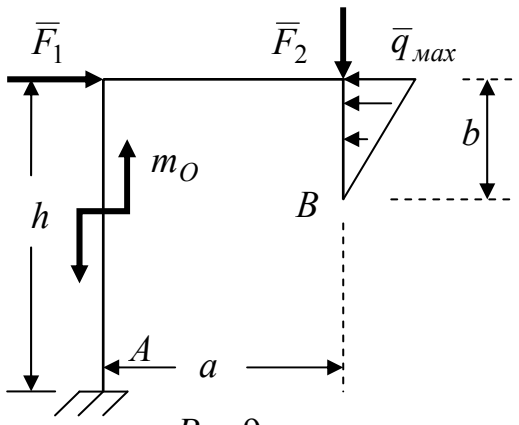


*Рис.*9

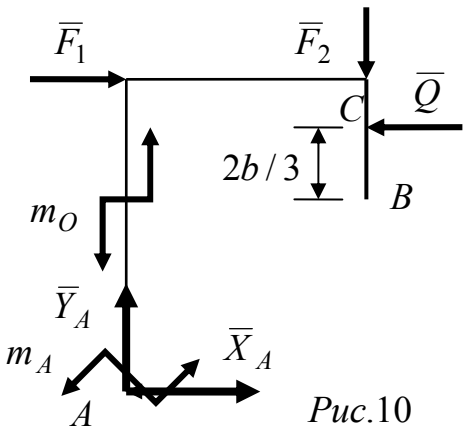


*Рис.*10

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0: \quad X_A + F_1 - Q = 0. \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \quad Y_A - F_2 = 0. \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0: \quad m_A + m_0 - F_1 \cdot h - F_2 \cdot a + Q \cdot (h - \frac{b}{3}) = 0. \qquad (3)$$

Из уравнения (1) следует: $X_A = Q - F_1$. Из уравнения (2) следует: $Y_A = F_2$.

Из уравнения (3) получим: $m_A = F_1 h + F_2 a - m_0 - Q \cdot (h - \frac{b}{3})$.

Подставляя числовые значения, будем иметь:

$$X_A = 9 - 5 = 4\,кН; \quad Y_A = F_2 = 15\,кН;$$

$$m_A = 5 \cdot 6 + 15 \cdot 4 - 10 - 9(6-1) = 35\,кН \cdot м.$$

Проверим решение, составив еще одно уравнение моментов относительно точки приложения равнодействующей силы $\overline{Q}$.

$$\sum_{k=1}^{n} m_C(\overline{F}_k) = 0: \quad m_A + X_A \cdot (h - \frac{b}{3}) + m_0 - F_1 \cdot \frac{b}{3} - Y_A \cdot a = 0.$$

Подставим в проверочное уравнение найденные значения и убедимся, что реакции определены правильно. $35 + 4 \cdot 5 + 10 - 5 \cdot 1 - 15 \cdot 4 = 0$.

Ответ: $X_A = 4\,кН;\ Y_A = 15\,кН;\quad m_A = 35\ кН \cdot м.$

§ 4.5. Задачи для самостоятельного решения на равновесие твердых тел под действием плоской системы сил

Плоская система сходящихся сил

Задача 4.1. Определить в четырех случаях геометрическим способом модуль равнодействующей плоской сходящейся системы сил, если $|\overline{F}_1| = 30\,кН;\ |\overline{F}_2| = 15\,кН;\ |\overline{F}_3| = 45\,кН.$ Значения углов, которые силы образуют с осями координат, приведены на соответствующих рисунках к задаче. Ход решения и итоговый результат сопроводить чертежами, выполненными в выбранном масштабе.

Задача 4.2. Определить в четырех случаях аналитическим способом модуль равнодействующей плоской сходящейся системы сил и угол, который она образует с по ложительным направлением оси Ox,

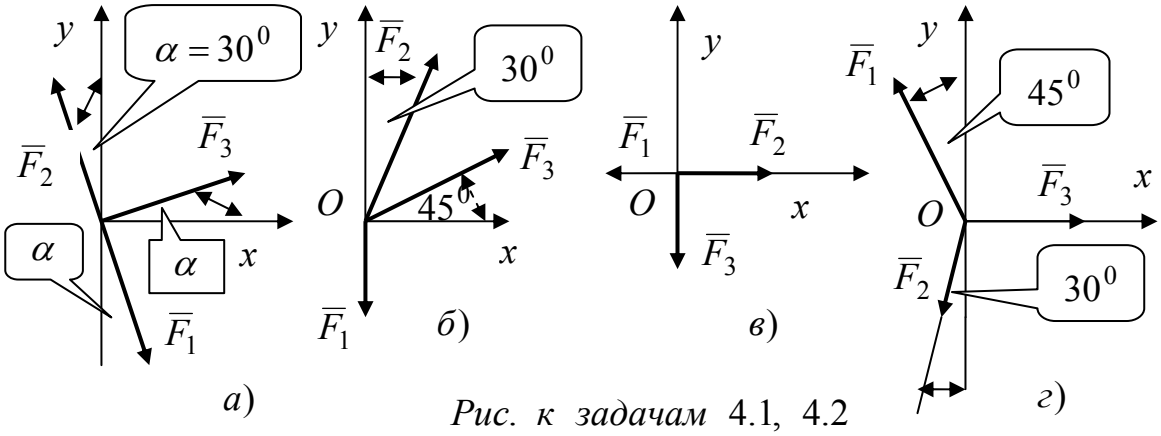


Рис. к задачам 4.1, 4.2

если $|\overline{F}_1| = 50\,кН;\quad |\overline{F}_2| = 25\,кН;\quad |\overline{F}_3| = 75\quad кН.$ Решение сопроводить чертежами. Заданные системы сил приведены на рисунках к задаче 4.2.

Задача 4.3. Невесомые стержни AC и BC с шарнирами по концам соединены между собой и с вертикальной стеной при помощи шарниров

(рисунок к задаче 4.3). Длина стержня $AC = 3$ м, расстояние между осями шарниров А и В, перпендикулярных плоскости рисунка, $AB = 1$ м. В узле C действуют силы, расположенные в плоскости ΔABC так, что направления $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_4$ параллельны AB, $\overline{F}_2$ действует вдоль линии BC, а $\overline{F}_3$ действует по перпендикулярному к BC направлению. Определить реакции стержней AC и BC в узле C для различных вариантов нагружения, которые даны в таблице к задаче. (Одна задача – одна строка в таблице. При решении задачи нулевые силы на рисунке не указывать.)

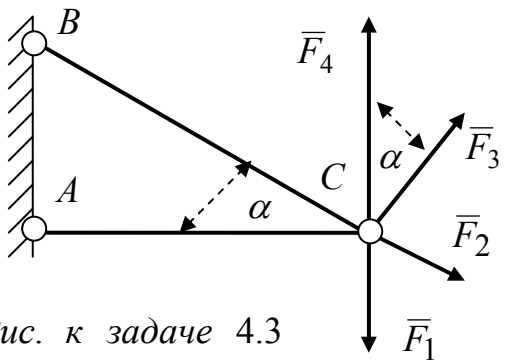


Рис. к задаче 4.3

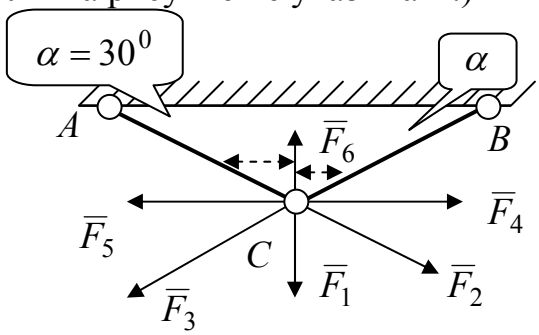


Рис. к задаче 4.4

Табл. к задаче 4.3

Номер варианта	$\mathbf{F}_1$, кН	$\mathbf{F}_2$, кН	$\mathbf{F}_3$, кН	$\mathbf{F}_4$, кН
1 а)	0	**49**	0	0
2 а)	0	0	**60**	0
1 б)	**10**	**30**	0	0
2 б)	**14**	0	**25**	0
3 б)	8	0	32	0
4 б)	0	**16**	**30**	0
5 б)	0	**40**	**52**	0
6 б)	0	0	**28**	**68**
1 в)	**100**	**120**	**140**	0
2 в)	0	**90**	**110**	**140**
3 в)	**40**	0	**120**	**180**
4 в)	**98**	**60**	0	**100**

Задача 4.4. Невесомые стержни AC и BC с шарнирами по концам соединены между собой и с потолком при помощи цилиндрических шарниров так, что оси шарниров перпендикулярны плоскости ΔABC. Узел C нагружен силами. Силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_6$ действуют вдоль линии, перпендикулярной AB, силы $\overline{F}_5$ и $\overline{F}_4$ - вдоль линии, параллельной AB,

а силы $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$ действуют вдоль осей стержней AC и BC, соответственно. Определить реакции стержней AC и BC. Данные для расчета приведены в таблице к задаче 4.4. (Одна задача – одна строка в таблице. При решении задачи нулевые силы на рисунке не указывать.)

Табл. к задаче 4.4

Номер варианта	$\mathbf{F}_1$, кН	$\mathbf{F}_2$, кН	$\mathbf{F}_3$, кН	$\mathbf{F}_4$, кН	$\mathbf{F}_5$, кН	$\mathbf{F}_6$, кН
1 а)	0	**17**	0	0	0	0
2 а)	0	0	**19**	0	0	0
3 а)	0	0	0	**25**	0	0
4 а)	0	0	0	0	**29**	0
5 а)	0	0	0	0	0	**37**
1 б)	**13**	**21**	0	0	0	0
2 б)	**29**	0	**60**	0	0	0
3 б)	**15**	0	0	**34**	0	0
4 б)	**23**	0	0	0	**41**	0
5 б)	0	**39**	0	**11**	0	0
6 б)	0	**19**	0	0	**9**	0
7 б)	0	**33**	0	0	0	**18**
8 б)	0	0	**21**	**15**	0	0
9 б)	0	0	0	**25**	0	**35**
10 б)	0	**41**	0	0	**29**	0
1 в)	**17**	**24**	**29**	0	0	0
2 в)	0	**19**	**25**	**29**	0	0
3 в)	0	0	0	**25**	**21**	**60**
4 в)	0	0	**100**	**15**	0	**130**
5 в)	**98**	0	**71**	**120**	0	0
6 в)	0	**102**	**130**	**160**	0	0
7 в)	0	0	**140**	0	**90**	**110**
8 в)	0	**80**	0	0	**94**	**121**
9 в)	0	**72**	**90**	0	**110**	0
10 в)	0	**119**	0	**40**	0	**80**

Задача 4.5. На рисунках к задаче изображена плоская ферма под действием сосредоточенных сил $\overline{F}_K$. На ферму наложены связи в виде неподвижного цилиндрического шарнира и невесомого стержня с шарнирами по концам. Определить реакции опорных связей, считая конструкцию абсолютно твердой (не изменяемой), а систему заданных

активных сил и реакций связей плоской. Данные для расчета взять в таблице к задаче. Одна задача – одна строка в таблице. При решении задачи нулевые силы на рисунке не указывать.

Указание: Пронумеруйте все стержни. Решение задачи начните с узла, в котором сходятся не более двух стержней с неизвестными реакциями. Это узел, в котором приложена сила $\overline{F}_6$.

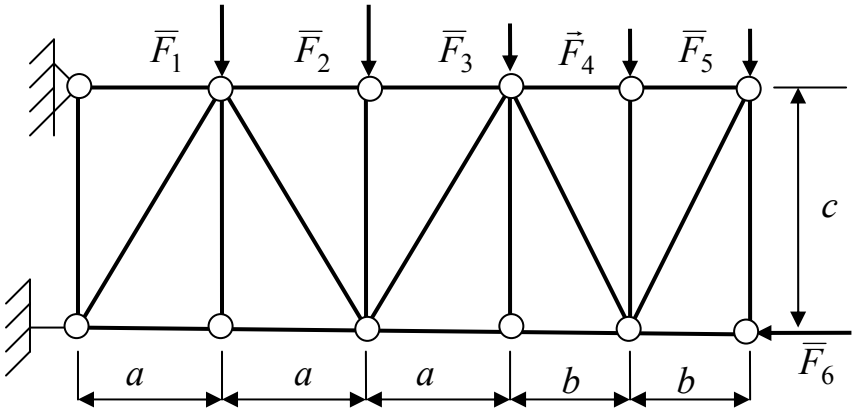


Рис. к задаче 4.5

Таблица к задаче 4.5

№ Варианта	F_1 кН	F_2 кН	F_3 кН	F_4 кН	*a* м	*b* м	*c* м	F_5 кН	F_6 кН
1	**10**	0	**20**	0	**2**	**2**	**4**	**40**	**60**
2	0	**15**	0	**21**	**3**	**2**	**6**	**35**	**60**
3	0	0	**40**	**12**	**4**	**1**	**5**	**20**	**55**
4	**21**	**8**	0	0	**1**	**5**	**3**	**15**	**48**
5	**14**	0	**28**	0	**1**	**3**	**4**	**40**	**25**
6	0	**30**	0	**60**	**2**	**5**	**3**	**16**	**29**
7	**45**	0	**90**	0	**5**	**4**	**5**	**8**	**34**
8	**12**	0	**16**	**20**	**2**	**6**	**3**	**10**	**8**
9	0	**7**	**14**	**20**	**4**	**3**	**4**	**21**	**17**
10	**60**	**45**	**20**	0	**2**	**1**	**6**	**31**	**13**
11	**10**	**12**	0	**24**	**4**	**4**	**4**	**30**	**40**
12	0	**20**	0	**30**	**3**	**2**	**1**	**25**	**50**

Задача 4.6. На рисунках к задаче изображены балки с прямолинейной осью под действием сосредоточенных сил $\overline{F}_K$, пар сил с алгебраическими моментами m_K и распределенных сил $\overline{q}_K$. На конструкции наложены

комбинации связей в виде неподвижных цилиндрических шарниров, подвижных цилиндрических шарниров (шарниры на катках), невесомых стержней с шарнирами по концам и жесткой заделки. Определить реакции опорных связей, считая конструкции абсолютно твердыми, а систему заданных сил и реакций связей плоской. Данные для расчета взять в таблице. Одна задача – одна строка в таблице. При решении задачи нулевые нагрузки на рисунке не указывать.

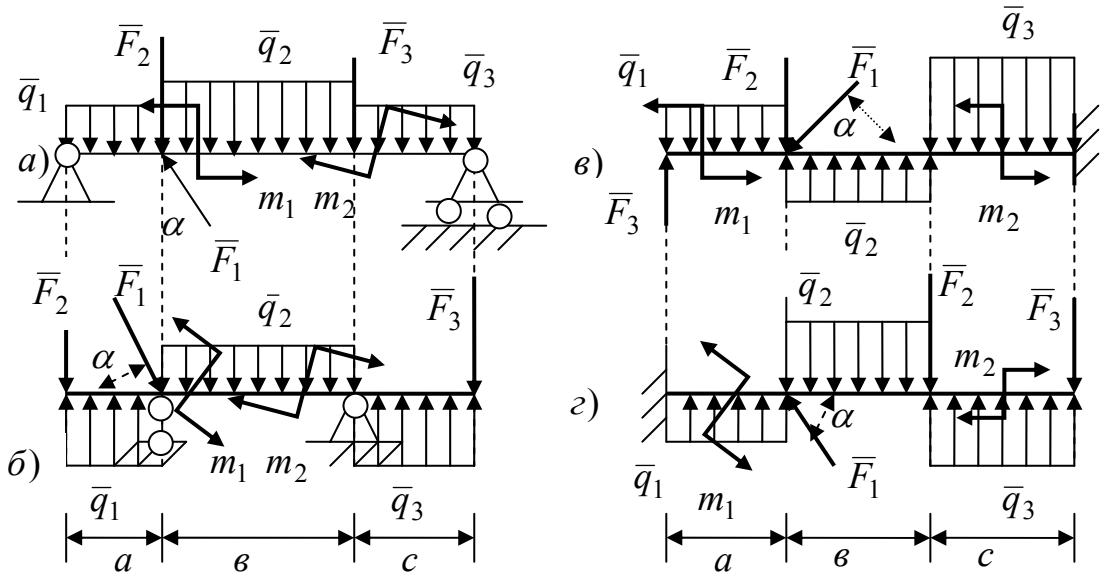


Рис. к задаче 4.6

Таблица к задаче 4.6

№ Вар-та	F_1 кН	F_2 кН	F_3 кН	q_1 кН/м	q_2 кН/м	q_3 кН/м	m_1 кН м	m_2 кН м	a м	b м	c м	α Град
1	**10**	0	**20**	**15**	0	0	**10**	0	**2**	**2**	**4**	**30**
2	0	**15**	0	0	0	**20**	0	**14**	**3**	**2**	**6**	**45**
3	0	0	**40**	**14**	0	0	0	**13**	**4**	**1**	**5**	**15**
4	**21**	**8**	0	0	**18**	0	**21**	0	**1**	**5**	**3**	**60**
5	**14**	0	**28**	0	0	**12**	0	**12**	**1**	**3**	**4**	**75**
6	0	**30**	0	0	**15**	0	**31**	0	**2**	**5**	**3**	**15**
7	**45**	0	**90**	**18**	0	0	0	7	**5**	**4**	**5**	**30**
8	**12**	0	**16**	0	**25**	0	**49**	0	**2**	**6**	**3**	**60**
9	0	**7**	**14**	0	0	**30**	0	**19**	**4**	**3**	**4**	**45**
10	**60**	**45**	**20**	0	**40**	0	0	**11**	**2**	**1**	**6**	**30**
11	**10**	**12**	0	0	0	0	0	0	**4**	**4**	**4**	**90**

Задача 4.7. На рисунках *a) и b)* к задаче изображены плоские рамы, которые находятся под действием сосредоточенных сил $\overline{F}_к$, пар сил с алгебраическими моментами $m_к$ и распределенных сил $\overline{q}_к$. На рамы наложены связи в виде комбинации неподвижного цилиндрического шарнира и подвижного цилиндрического шарнира (рис.*a*) или жесткой заделки (рис.b). Определить реакции опорных связей, считая конструкции абсолютно твердыми, а систему заданных сил и реакций связей плоской. Данные для расчета взять в таблице к задаче 4.6. Одна задача – одна строка в таблице. При решении задачи нулевые нагрузки на рисунке не указывать.

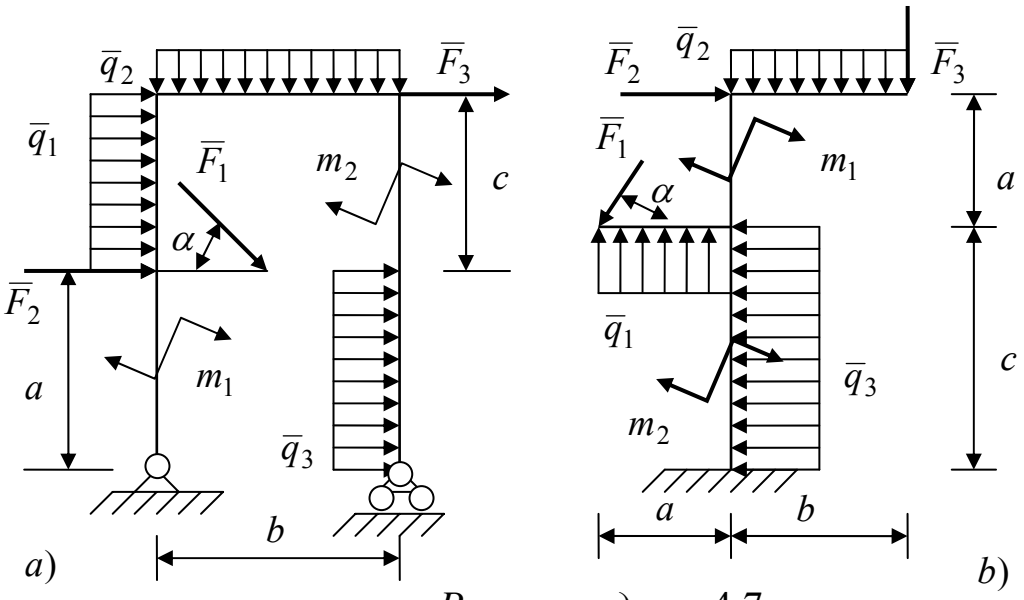


Рис. к задаче 4.7

§ 4.6. Исследование равновесия системы тел, находящихся под действием плоской системы сил

На практике часто приходится определять реакции связей, наложенных на систему тел. Понятие системы тел дано в первой главе. Здесь лишь отметим, что системы тел могут быть геометрически изменяемыми и неизменяемыми. Рассмотрим пример. На рисунках 4.5, 4.6 показаны две внешне похожие конструкции. На рисунке 4.5 конструкция изготовлена из трех однородных невесомых стержней, шарнирно соединенных по концам. Полученный при этом треугольник установлен на цилиндрический шарнир в точке *A* и опирается на однородный стержень в точке *B*. Для системы тел (стержней), образовавших треугольник, назовем эти связи *внешними.*

4.13. Связи, соединяющие систему тел с телами, не вошедшими в систему, называются внешними связями.

На рисунке 4.4 показана конструкция из двух однородных невесомых стержней, шарнирно соединенных в точке *C*. Чтобы она могла служить как элемент строительной конструкции, на неё наложены две внешние связи в виде неподвижных цилиндрических шарниров в точках *A и B*. Если освободить обе конструкции от внешних связей, то первая из низ остается неизменяемой (не меняет свою форму), а вторая становится изменяемой (может изменить первоначальную форму). Под действием сил стержни второй конструкции будут приходить в движение.

4.14. Для геометрически неизменяемых систем твердых тел реакции внешних связей определяются так же, как для одного твердого тела.

В нашем случае можно записать три уравнения равновесия для плоской системы сил, показанной на рис. 4.5 и определить три реакции $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Y}_B$. То есть, ничего нового для неизменяемых систем тел нет.

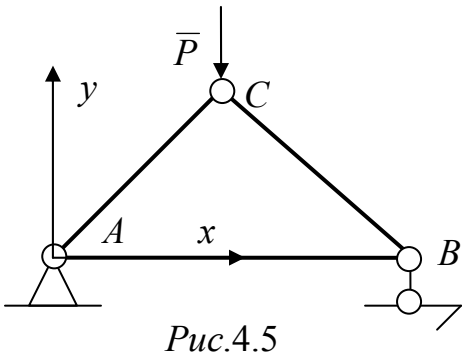


*Рис.*4.5

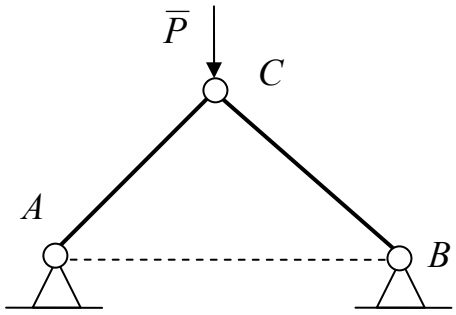


*Рис.*4.6

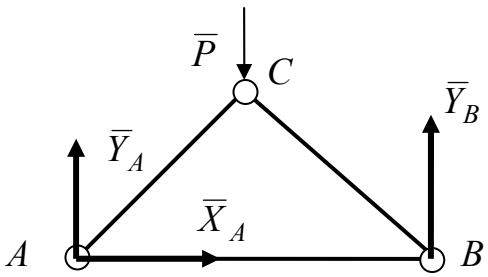


*Рис.*4.7

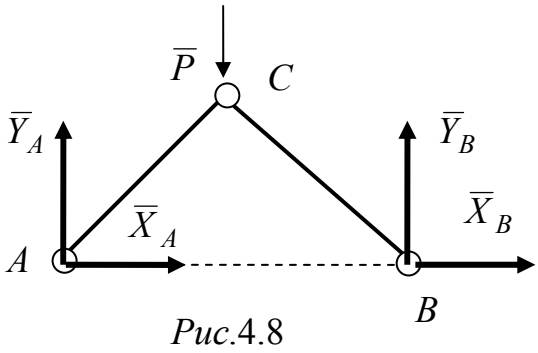


*Рис.*4.8

Сосредоточимся на изменяемых системах. На рисунке 4.8 показаны реакции внешних связей для этого случая. Их четыре: $\overline{X}_A, \overline{X}_B, \overline{Y}_A, \overline{Y}_B$. Условия равновесия статики и для этой системы тел должны выполняться, согласно принципа отвердевания. Но для изменяемых систем тел они,

являясь необходимыми, не являются достаточными для определения всех неизвестных реакций. Их всего, как известно, три. Чтобы решить задачу, надо воспользоваться методом расчленения.

Метод расчленения

Основная идея метода заключена в том, чтобы систему тел «расчленить» и записать условия равновесия для каждого тела отдельно. При этом, естественно, действие одного тела на другое надо заменить реакциями связей.

4.15. Связи, соединяющие отдельные тела системы между собой, называются внутренними связями.

В плоской системе сил можно получить $3 \cdot n$ уравнений равновесия, где n - число тел в системе тел. Число неизвестных реакций внешних и внутренних связей должно быть равно этому числу. Если число неизвестных будет больше, то задача станет статически неопределимой (читай не разрешимой). Расчленим систему тел с рис.4.8 и составим

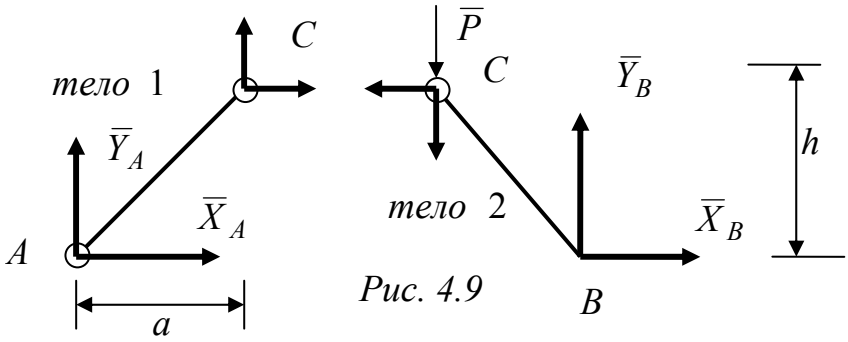


Рис. 4.9

условия равновесия каждого из тел под действием тех сил, *которые на него действуют.* Систему сил покажем на рисунке 4.7

Запишем систему уравнений равновесия для тела 1 (рис 4.7):

$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0$: $X_A + X_C = 0$. Отсюда: $X_A = -X_C$. (1).

$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0$: $Y_A + Y_C = 0$. Отсюда: $Y_A = -Y_C$ (2).

$\sum_{k=1}^{n} m_C(\overline{F}_k) = 0$: $X_A \cdot h - Y_A \cdot a = 0$. Отсюда: $Y_A = \frac{h}{a} X_A$. (3)

Запишем систему уравнений равновесия для тела 2 (рис 4.7):

$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0: -X_C + X_B = 0$. Отсюда: $X_C = X_B$. (4)

$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \quad Y_B - P - Y_C = 0$. Отсюда: $Y_B - Y_C = P$. (5)

$\sum_{k=1}^{n} m_C(\overline{F}_k) = 0: \; Y_B \cdot a + X_B \cdot h = 0$. Отсюда: $Y_B = -\frac{h}{a} X_B$. (6)

Сравнивая (1) и (4) имеем: $X_A = -X_B$. (7) Сравнивая (2) и (5) получим: $Y_A + Y_B = P$ (8) или $\frac{h}{a} X_A - \frac{h}{a} X_B = 2 \cdot X_A \frac{h}{a} = P$. Отсюда: $X_A = \frac{P \cdot a}{2h}$; (9) $X_B = -\frac{P \cdot a}{2h}$ (10); $X_C = X_B = -\frac{P \cdot a}{2h}$. Сравнивая (3) и (6) с учетом (9) и (10) получим из (8): $Y_A = Y_B$ (11) и $2 \cdot Y_A = P$; $Y_A = Y_B = P/2$ (12). Из (5) следует: $Y_C = -P/2$. Таким образом, все шесть неизвестных реакций определились.

Замечание: 1) Оставаясь в рамках метода расчленения, уравнения равновесия можно было составить и другим способом: Взять первые три уравнения равновесия для тела 1 (можно и для тела 2) и присоединить к ним уравнения равновесия не расчлененной конструкции с рисунка 4.6. Полученную систему решить совместно. Предлагаем это сделать самостоятельно и сравнить результаты.

2) Рассмотренный пример взят лишь для иллюстрации метода расчленения. Внимательный читатель, видимо, заметил, что в данной задаче реакции стержней могли быть определены и без метода расчленения. Можно было записать систему уравнений равновесия плоской системы сходящихся сил для узла С. Она состояла бы из двух уравнений.. Еще по два уравнения равновесия для системы сходящихся сил можно было бы записать для опор А и В (рис. 4.6). Реакции этих опор определились бы. Но в сумме мы опять получили бы, как и в методе расчленения, шесть уравнений равновесия. Остается только восхищаться тем, как модели механики отражают действительность.

Вопросы для самоконтроля к главе 4

(На вопросы дайте письменные ответы и сравните их с материалами пособия)

1. Какие системы сил называются пространственными, а какие - плоскими системами сходящихся сил?
2. Имеет ли плоская система сходящихся сил равнодействующую? Если да, то, как её построить геометрическим способом?

3. Сформулируйте геометрические условия равновесия для плоской системы сходящихся сил.
4. Сформулируйте аналитические условия равновесия для плоской системы сходящихся сил.
5. Сколько неизвестных реакций связей можно найти из уравнений равновесия плоской системы сходящихся сил? Почему?
6. Какие плоские системы сил называются произвольными плоскими системами сил?
7. Дайте определение алгебраического момента силы относительно центра.
8. Сформулируйте свойства алгебраического момента силы относительно центра и обоснуйте их.
9. Дайте определение проекции силы на ось.
10. Сформулируйте геометрические (смешанные) условия равновесия для плоской системы сходящихся сил.
11. Сформулируйте основную форму аналитических условий равновесия для произвольной плоской системы сил.
12. Сформулируйте вторую и третью аналитические условия равновесия для произвольной плоской системы сил.
13. Какие дополнительные условия должны быть соблюдены при формулировке аналитических условий равновесия произвольной плоской системы сил по второй и третьей формам?
14. Сколько неизвестных реакций связей можно найти из аналитических уравнений равновесия произвольной плоской системы сил?
15. Сформулируйте аналитические условия равновесия для плоской системы параллельных сил в двух формах.
16. Как проверяются решения задач на определение реакций связей для произвольной плоской системы сил?
17. Какие связи называются внешними связями, а какие – внутренними при рассмотрении равновесия системы тел?
18. Как записываются уравнения равновесия для определения реакций внешних связей, наложенных на неизменяемую систему тел, находящуюся под действием произвольной плоской системой сил?
19. Опишите метод расчленения для решения задачи о равновесии системы тел.
20. В каких случаях (по числу неизвестных) задача о равновесии системы тел разрешима с использованием уравнений равновесия статики.

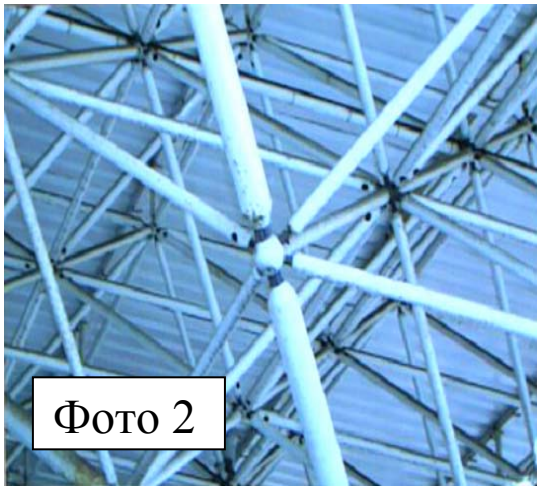
ГЛАВА 5. РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

В этой главе рассматривается равновесие несвободных твердых тел под действием пространственных систем сил. Необходимо еще раз обратить внимание на то, как закрепленные тела превращаются в свободные. Обратить внимание на связи и их реакции, на составление расчетных схем, на приемы вычисления проекций сил на три взаимно перпендикулярные оси и вычисление моментов сил относительно трех взаимно перпендикулярных осей. Запомните виды уравнений равновесия.

§ 5.1. Равновесие твердого тела под действием пространственной системы сходящихся сил

Предварительно рассмотрим несколько примеров реальных сооружений. При составлении расчетных схем для определения сил взаимодействия отдельных элементов (тел) между собой потребуются знания о пространственных системах сходящихся сил.

На фото 1 показано структурное покрытие площади бензоколонки. «Структура» состоит из стержней, пространственно соединенных в отдельных узлах (фото 2).



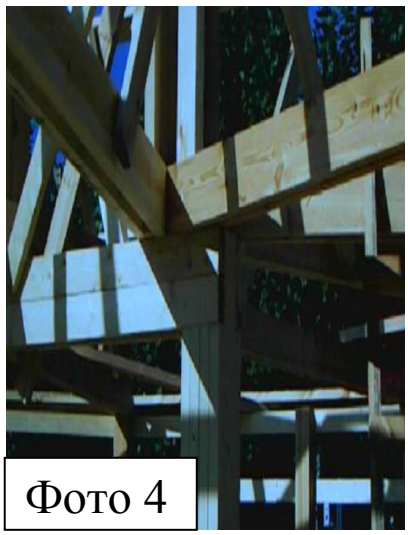
На Фото 3 показаны вантовые конструкции казанского моста «Миллениум» в момент строительства первой очереди. Силы натяжения «нитей» образуют в вершине пилонов, запроектированных в виде буквы «М», пространственную систему сходящихся сил. В аналогичной ситуации находится узловое соединение из деревянных стержней (фото 4).

При проектировании подобных конструкций, в первую очередь, производится «силовой расчет». Поэтому, не опасаясь повторений, вспомним некоторые прикладные результаты построенной ранее теории для системы сходящихся сил.

Теорема. Для равновесия системы сходящихся сил, действующей на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно,

чтобы суммы проекций всех сил системы на оси принятой системы координат были равны нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0. \qquad (5.1)$$



Соотношения (5.1) носят название **аналитических условий равновесия** свободного твердого тела, находящегося под действием пространственной системы сходящихся сил. В приложениях они используются и для исследования состояния тел со связями. В этом случае связи сначала заменяются их реакциями, а уже потом записываются условия равновесия. Сами условия равновесия становятся уравнениями равновесия для определения неизвестных реакций связей. Рассмотрим примеры.

§ 5.2. Примеры к параграфу 5.1

Пример 1. Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в узлах *A и B₁* и прикреплены другими концами к неподвижным сферическим шарнирам (рис.1). В узлах *A и B₁* приложены силы, как показано на рисунке к задаче. Определить реакции стержней, если $F_1 = 4кН$; $F_2 = 7кН$; $F_3 = 10кН$; $AD = a = 3м$; $AB = b = 4м$; $AA_1 = c = 5м$.

Решение. В этой задаче стержни, из которых состоит геометрически неизменяемая конструкция, нужно будет рассматривать как связи, наложенные на точки их соединения. Можно считать, что точки A и B_1 находятся в равновесии под действием активных сил $\overline{F}_k$ и наложенных связей. Условия равновесия записываются для свободных тел, поэтому точки надо освободить от связей и заменить их действие реакциям

Рассмотрим узел A (рис.2). Отбросим связи и заменим их реакциями. Получим систему сходящихся в узле A сил, показанную на рисунке 2. При составлении уравнений равновесия (5.1) придется проецировать силы $\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3, \overline{F}_1, \overline{F}_2$ на соответствующие оси. Следовательно, будут нужны углы (точнее, косинусы и синусы

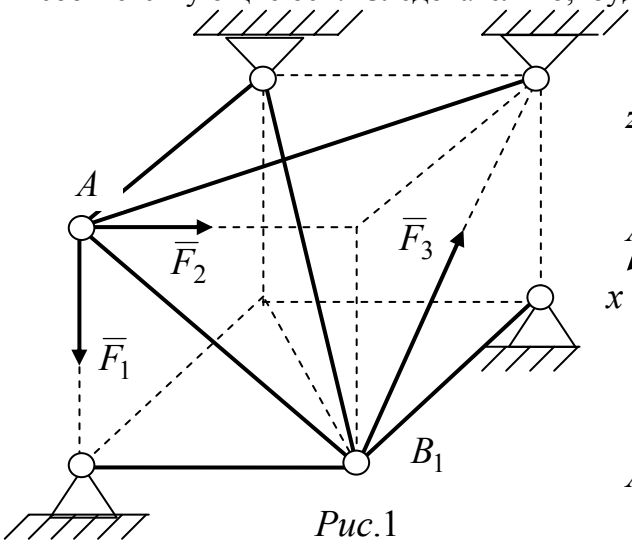


*Рис.*1

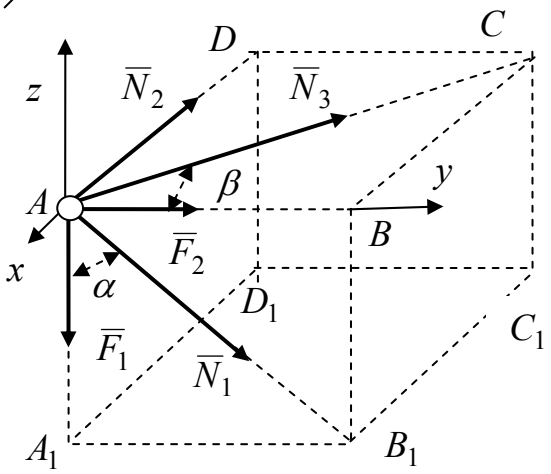


*Рис.*2

углов) между направлением действия силы и направлениями осей. Рекомендуем вводить их по мере необходимости при составлении уравнений. Определить их величины можно будет потом. В узле A мы ввели пока два неизвестных угла α и β, которые позволяют найти проекции сил на оси.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0: \; -N_2 - N_3 \sin\beta = 0. \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \; F_2 + N_3 \cos\beta + N_1 \sin\alpha = 0. \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0: \; -F_1 - N_1 \cos\alpha = 0. \tag{3}$$

Поясним составление уравнений равновесия. Уравнение (1) содержит проекции сил на ось Ax. На эту ось не могут дать проекций силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{N}_1$, так как действуют в плоскости, перпендикулярной к оси Ax. Тогда можно рассмотреть грань $ABCD$. Спроецировав силы, показанные на рисунке 3, на ось Ax, получим уравнение (1). Первое слагаемое в этом уравнении – это проекция силы $\overline{N}_2$. Второе слагаемое - проекция силы $\overline{N}_3$. Обе проекции отрицательны, потому что направление сил противоположно положительному направлению оси Ax. Сила $\overline{F}_2$ перпендикулярна оси и проекция её равна нулю.

Чтобы получить уравнение (2), придется отбросить силы, лежащие в плоскости грани A_1ADD_1, которая перпендикулярна к оси Ay. На эту ось проецируются только те силы, которые действуют по граням $ABCD$ и A_1ABB_1. Это следует прямо из

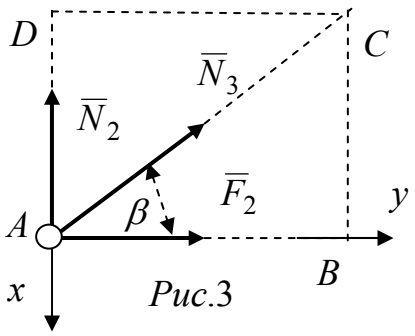


*Рис.*3

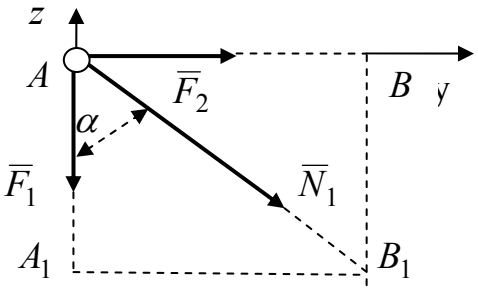


*Рис.*4

определения проекции силы на ось. Проекции дадут силы $\overline{N}_1, \overline{N}_3, \overline{F}_2$. Эти силы видны на рисунках 3, 4.

Чтобы получить уравнение (3), нужно отбросить силы, лежащие в грани $ABCD$, так как она перпендикулярна оси Ay. Тогда останется то, что показано на рис.5. Решая систему уравнений (1) - (3), будем иметь:

из уравнения (3): $$N_1 = \frac{-F_1}{\cos\alpha}. \qquad (4)$$

Из уравнения (2) : $$N_3 = -\frac{1}{\cos\beta}\left(F_2 - F_1\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right). \qquad (5)$$

Из уравнения (1):

$$N_2 = -N_3\sin\beta \quad \text{или} \quad N_2 = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\left(F_2 - F_1\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right). \qquad (6)$$

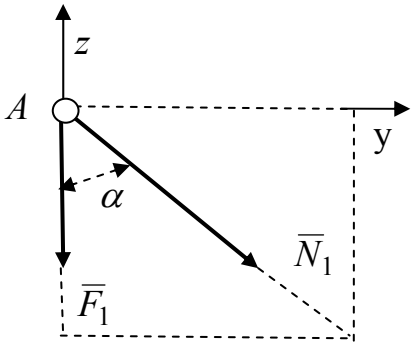


*Рис.*5

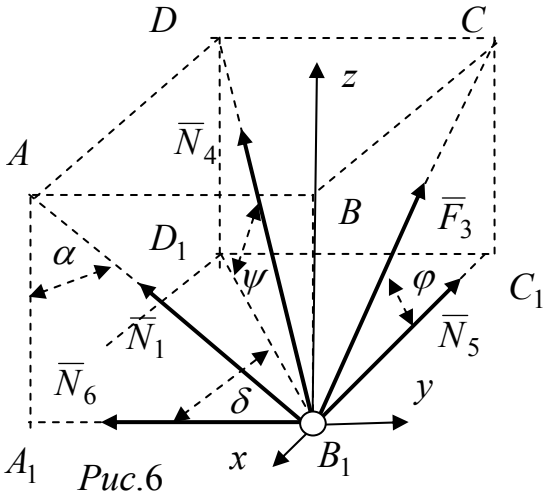


*Рис.*6

Рассмотрим узел B_1 (рис.6). Начало координат перенесем в этот узел. Направление осей показано на рис.6. При этом введем три новых угла φ, ψ и δ. Кроме того, обратите внимание на реакцию $\overline{N}_4$. Эта сила действует по диагонали прямоугольника DD_1B_1B, который является диагональным сечением воображаемого

прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. При определении проекций силы $\overline{N}_4$ воспользуемся методом двойного проецирования.

Составим условия равновесия узла B_1:

$$\sum F_{kx} = 0: \ -N_5 - F_3 \cos\varphi - N_4 \cos\psi \cdot \sin\delta = 0; \quad (7)$$

$$\sum F_{ky} = 0: \ -N_6 - N_1 \sin\alpha - N_4 \cos\psi \cdot \cos\delta = 0; \quad (8)$$

$$\sum F_{kz} = 0: \ N_1 \cos\alpha + F_3 \sin\varphi + N_4 \sin\psi = 0. \quad (9)$$

Поясним уравнения (7) - (9). На ось B_1x не дают проекции силы реакций $\overline{N}_6$ и $\overline{N}_1$, так как они действуют в плоскости AA_1BB_1, перпендикулярной к оси B_1x. Легко спроецировать силы $\overline{N}_5$ и $\overline{F}_3$. Эти силы и ось B_1x показаны на рис.7. Проекции этих сил представлены первыми двумя членами в (7). Сила $\overline{N}_4$ тоже дает проекцию на эту ось, но вычисления мы проведем чуть позже.

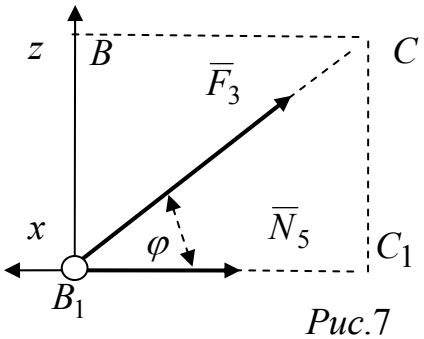


Рис.7

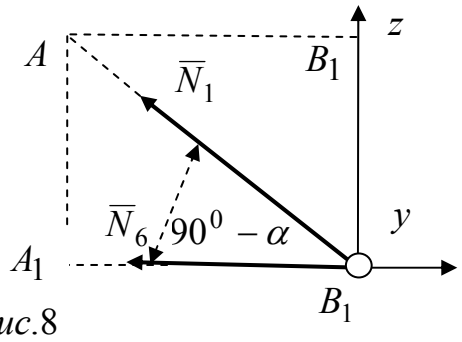


Рис.8

Оставляя пока силу $\overline{N}_4$, спроецируем другие силы на ось B_1y. Силы $\overline{N}_5$ и $\overline{F}_3$ лежат в плоскости, перпендикулярной к оси B_1y, и их проекции равны нулю. Проецироваться будут силы, показанные на рис.8. Проекции этих сил представлены первыми двумя членами в (8). Появились знаки "минус", так как ось B_1y и направления действия сил противоположны.

Опять же, оставляя пока силу $\overline{N}_4$, спроецируем другие силы на ось B_1z. Проекции сил $\overline{N}_6$ и $\overline{N}_5$ будут равны нулю, так как они лежат в плоскости $A_1B_1C_1D_1$, перпендикулярной к оси. Проекцию силы $\overline{F}_3$ находим элементарно, пользуясь рис.7. При этом получится второй член в уравнении (9). Проекцию силы $\overline{N}_1$ на ось B_1z находим по рис.8. Получим первый член в уравнении (9).

Наконец, найдем проекцию силы $\overline{N}_4$ на оси B_1x, B_1y, B_1z. Сама сила показана на рис.6 и рис. 9. Проекцию силы $\overline{N}_4$ на ось B_1z получаем прямо по определению. Вид этой проекции - третий член в уравнении (9). Чтобы вычислить проекции силы $\overline{N}_4$ на оси B_1x и B_1y, воспользуемся методом двойного проецирования. Первоначально спроецируем её на плоскость $A_1B_1C_1D_1$, в которой лежат оси B_1x, B_1y.

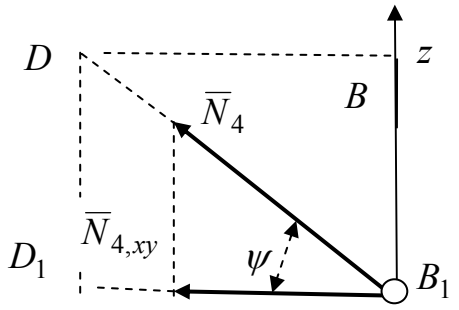


*Рис.*9

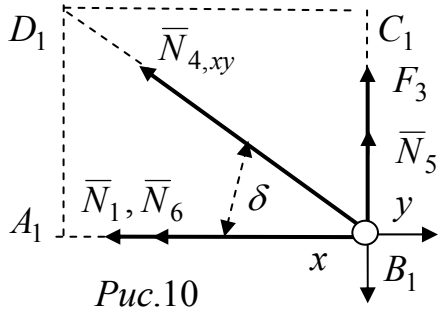


*Рис.*10

Тогда получим силу $\overline{N}_{4,xy}$. Величина этой силы $\left|\overline{N}_{4,xy}\right| = N_4 \cos\varphi$. Сила $\overline{N}_{4,XY}$ показана на рис.9. Далее, теперь уже силу $\overline{N}_{4,xy}$ спроецируем на оси B_1x, B_1y в плоскости $A_1B_1C_1D_1$ (рис.10). Получим:

$$N_{4,x} = -\left|\overline{N}_{4,xy}\right| \cdot \sin\delta \ ; \qquad N_{4,Y} = -\left|\overline{N}_{4,xy}\right| \cdot \cos\delta .$$

Подставляя сюда, полученное ранее, значение $\left|\overline{N}_{4,xy}\right|$ получим последние члены в уравнениях (7) и (8), соответственно. Решим систему уравнений (7) – (9) относительно неизвестных N_4, N_5, N_6 в общем виде. Значение N_1 было получено при рассмотрении равновесия узла A. Из уравнения (9) при известном N_1 имеем:

$$N_4 = -\frac{1}{\sin\psi}\left(N_1 \cos\alpha - F_3 \sin\varphi\right) = -\frac{1}{\sin\psi}\left(F_3 \sin\varphi - F_1\right). \qquad (10)$$

Из уравнения (8) следует:

$$N_6 = -N_1 \sin\alpha - N_4 \cos\psi \cos\delta = F_1 \cdot tg\alpha + \frac{\cos\psi \cos\delta}{\sin\psi}\left(F_3 \sin\varphi - F_1\right). \qquad (11)$$

Из уравнения (7) получим:

$$N_5 = -F_3 \cos\varphi - N_4 \cos\psi \sin\delta = \frac{\cos\psi \sin\delta}{\sin\psi}\left(F_3 \cdot \sin\varphi - F_1\right) - F_3 \cos\varphi . \qquad (12)$$

Итак, искомые силы $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, $\overline{N}_6$ определены в общем виде по величине. Чтобы найти их числовые значения, надо получить числовые значения тригонометрических функций.

1. Рассмотрим прямоугольник ABB_1A_1 (рис.4). По определению:

$$\cos\alpha = \frac{AA_1}{AB_1} = \frac{c}{\sqrt{в^2 + c^2}} = 5/\sqrt{4^2 + 5^2} = 5/\sqrt{41} = 5/6{,}403 = 0{,}781 .$$

Здесь длина $AA_1 = c$ дана в условии задачи, а длину диагонали AB_1 нашли по теореме Пифагора.

$$\sin\alpha = \frac{A_1B_1}{AB_1} = \frac{в}{\sqrt{в^2 + c^2}} = 4/6{,}403 = 0{,}625 .$$

2. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ (рис.3):

$$\sin\beta = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + в^2}} = 3/\sqrt{9+16} = 3/5 = 0{,}600;$$

$$\cos\beta = \frac{AB}{AC} = \frac{в}{\sqrt{a^2 + в^2}} = 4/5 = 0{,}800.$$

3. Рассмотрим прямоугольник BCC_1B_1 (рис.7):

$$\sin\varphi = \frac{CC_1}{B_1C} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 5/\sqrt{9+25} = 5/5{,}831 = 0{,}857;$$

$$\cos\varphi = \frac{B_1C_1}{B_1C} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 3/5{,}831 = 0{,}514.$$

4. Рассмотрим прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ (рис.10):

$$\sin\delta = \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + в^2}} = 3/\sqrt{9+16} = 3/5 = 0{,}600;$$

$$\cos\delta = \frac{A_1B_1}{B_1D_1} = \frac{в}{\sqrt{a^2 + в^2}} = 4/\sqrt{9+16} = 4/5 = 0{,}800.$$

Отметим, что, как оказалось, углы β и δ равны. Внимательный читатель это мог заметить и раньше. Кроме того, нам понадобится в дальнейшем $B_1D_1 = \sqrt{a^2 + в^2} = 5м$.

6. Рассмотрим диагональное прямоугольное сечение BB_1D_1D (рис.9):

$$\sin\psi = \frac{DD_1}{DB_1}; \qquad \cos\psi = \frac{B_1D_1}{B_1D}; \qquad B_1D_1 = 5м;$$

$$B_1D^2 = DD_1{}^2 + B_1D_1{}^2 = c^2 + a^2 + в^2; \quad B_1D = \sqrt{9+16+25} = 7{,}071.$$

Тогда

$$\sin\psi = 5/7{,}071 = 0{,}707; \qquad \cos\psi = 5/7{,}071 = 0{,}707.$$

Другими словами, $\psi = 45^\circ$. Ну это к слову.

Подставляя значения сил и тригонометрических функций в формулы (4) – (6), (10) – (12) получим:

$$N_1 = -4/0{,}781 = -5{,}122\ кН;$$

$$N_2 = \frac{0{,}6}{0{,}8}\left(7 - 4\frac{0{,}625}{0{,}781}\right) = 2{,}849\ кН;$$

$$N_3 = -\frac{1}{0{,}800}\left(7 - 4\frac{0{,}625}{0{,}781}\right) = -4{,}749\ кН;$$

$$N_4 = -\frac{1}{0{,}707}\left(10 \cdot 0{,}857 - 4\right) = -6{,}464\ кН;$$

$$N_5 = \frac{0{,}707 \cdot 0{,}600}{0{,}707}(10 \cdot 0{,}857 - 4) - 10 \cdot 0{,}514 = -2{,}398\ кН;$$

$$N_6 = 4 \cdot \frac{0{,}625}{0{,}781} + \frac{0{,}707 \cdot 0{,}800}{0{,}707}(10 \cdot 0{,}857 - 4) = 6{,}856\ кН.$$

Знаки минус у величин N_1, N_4, N_5, с математической стороны, означают, что силы $\overline{N}_1$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$ в узлах имеют прямо противоположное значение, а механический смысл этого, как это уже обсуждалось в «плоских» задачах, заключен в том, что 1-ый, 4-ый и 5-ый стержни сжаты.

Ответ: $N_1 = -5{,}122\ кН$; $N_2 = 2{,}849\ кН$; $N_3 = -4{,}749\ кН$; $N_4 = -6{,}464\ кН$; $N_5 = -2{,}398\ кН$; $N_6 = 6{,}856\ кН$.

§ 5.3. Равновесие твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил

В третьей главе было показано, что произвольная пространственная система сил приводится в произвольном центре к главному вектору и главному векторному моменту этой системы сил. При этом предполагалось, что система сил приложена к свободному твердому телу или к свободной геометрически неизменяемой системе твердых тел.Была доказана теорема:

Теорема. Для равновесия произвольной пространственной системы сил, действующих на абсолютно твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на оси принятой системы координат и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \qquad (5.2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k) = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k) = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = 0. \qquad (5.3)$$

В данном параграфе активные силы приложены к телу со связями. Чтобы применить теорию, связи заменяют их реакциями. Реакции в общем случае являются неизвестными силами или парами сил, с неизвестными моментами. Их можно определить, составляя условия равновесия (5.2), (5.3). Но в этом случае, поскольку в *условия* равновесия войдут неизвестные силы и моменты, *условия* равновесия превращаются в *уравнения* равновесия для определения неизвестных реакций и реактивных моментов. Кроме того, необходимо вспомнить понятие момента силы относительно оси. Рассмотрим примеры.

§ 5.4. Примеры к параграфу 5.3

Пример 1. Абсолютно твердое тело весом $P = 20кН$ в форме прямоугольной плиты закреплено в горизонтальном положении, как показано на рис. 1. В точке *A* тело соединено со сферическим шарниром, в точке *B* оно опирается на подшипник, а в точке C тело поддерживается невесомым стержнем с шарнирами по концам, который располагается в вертикальной плоскости. На тело действуют распределенные силы постоянной интенсивности $\overline{q}$ и силы $\overline{q}_1$, распределенные по линейному закону. Максимальное значение силы $\overline{q}_1$ обозначено $\overline{q}_{\max}$ В плоскости плиты действует пара сил с моментом $m = 12кН \cdot м$ и по диагонали прямоугольника действует сосредоточенная сила $\overline{F}$. Определить реакции связей, наложенных на плиту, если $F = 15кН$; $q = 5кН / м$; $q_{\max} = 8кН / м$; $AB = a = 10м$; CL=$c = 5м$; $BC = b = 6м$; $\beta = 60^\circ$.

Указания: В этом примере нужно закрепить знания о связях «сферический шарнир», «подшипник», «невесомый стержень с шарнирами по концам». Надо запомнить приведение распределенных сил к силам сосредоточенным - равнодействующим, обратить внимание на технику применения теоремы Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси.

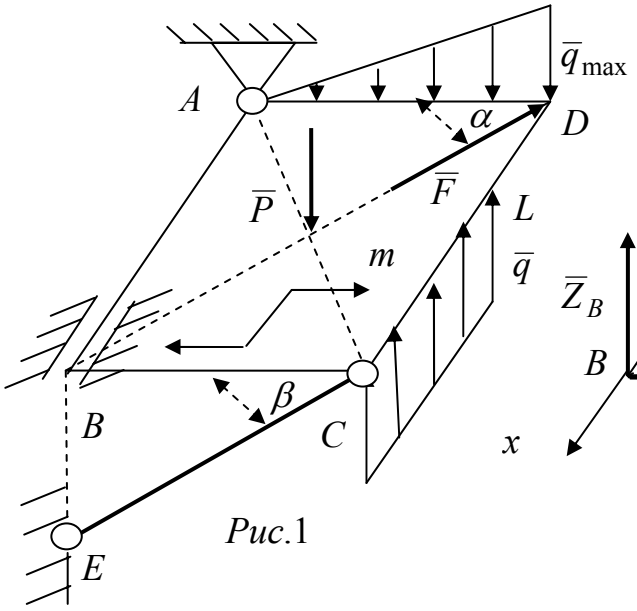


*Рис.*1

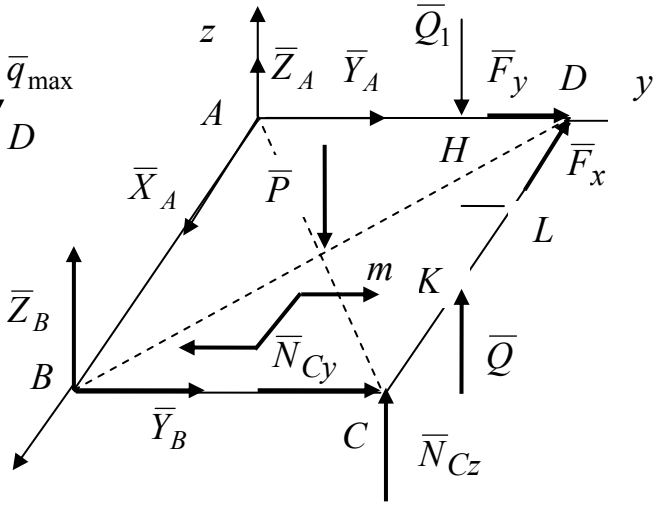


*Рис.*2

Решение: Первое, что нужно сделать в подобных случаях, - это закрепленное тело сделать свободным. Поэтому освободимся от связей и заменим их реакциями. Реакции связей не зависят ни от формы тела, ни от сил, действующих на тело. Поэтому везде, где встретятся такие связи, с ними нужно будет поступить так же, как в этой задаче. В этой задаче три вида связей.

1) В точке *A* плита связана со сферическим шарниром. При решении задач реакцию сферического шарнира разлагают на три силы:

$\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, действующие по трем взаимно перпендикулярным направлениям, как правило, по положительным направлениям осей координат.

2) В точке B - подшипник. Эта связь не ограничивает движения тела вдоль оси подшипника. Реакция подшипника раскладывается на две силы в плоскости, перпендикулярной оси подшипника. В нашем случае это будут $\overline{Y}_B$ и $\overline{Z}_B$.

3) Третья связь – невесомый стержень с шарнирами по концам. Реакция прямого стержня направлена вдоль его оси. Обозначим её $\overline{N}_C$.

Внимание: Реакция – это сила, с которой связь действует на тело. Поэтому все силы реакций должны быть приложены именно к телу, равновесие которого рассматривается. Этим объясняется появление индекса у реакции стержня $\overline{N}_C$.

Второе. Нужно заменить распределенные силы их равнодействующими. Действительно, в условия равновесия входят только сосредоточенные силы. В данном примере есть распределенная постоянная сила $\overline{q}$ и сила, распределенная по закону треугольника $\overline{q}_1$. Наибольшее значение силы $\overline{q}_1$ дано в условии задачи и обозначено как $\overline{q}_{\max}$. Как известно, линии действия равнодействующих $\overline{Q}$ и $\overline{Q}_1$ проходят через центры тяжестей геометрических фигур, изображающих распределенные силы, и параллельны им. Обозначим точку приложения силы $\overline{Q}$ через *K, а* силы $\overline{Q}_1$ - через H. Положение этих точек таково:

$$CK = 0{,}5 \cdot CL = 2{,}5м \text{ (от точки } C\text{)}; \quad AH = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4м \text{ (от точки } A\text{)}.$$

Величины этих сил:

$$Q = q \cdot CL = 5 \cdot 5 = 25кН; \qquad Q_1 = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24кН.$$

Третье. Надо подумать и о математической стороне задачи. Мы имеем в виду то, что может облегчить в последующем, как составление самих уравнений равновесия, так и их решение. С этой точки зрения разумно будет «наклонные силы» заранее разложить по осям. Таких сил у нас две: в вертикальной плоскости, которая параллельна плоскости Azy, действует неизвестная реакция $\overline{N}_C$. В плоскости действия её разложим на две силы: $\overline{N}_{Cy}$ и $\overline{N}_{Cz}$.

При этом $\left|\overline{N}_{Cy}\right| = N_C \cdot \cos\beta$; $\left|\overline{N}_{Cz}\right| = N_C \cdot \sin\beta$.

Сила $\overline{F}$ действует в горизонтальной плоскости Axy под углом α к стороне AD по диагонали плиты. Эту силу разложим на две силы: $\overline{F}_x$ и $\overline{F}_y$, при этом

$$\left|\overline{F}_x\right| = F \cdot Sin\alpha; \qquad \left|\overline{F}_y\right| = F \cdot Cos\alpha.$$

Все это поможет составить уравнения проекций сил на оси и позволит легко применить теорему Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси. После разложения «наклонных» сил на составляющие, легко определить плечи этих сил относительно осей координат, что потребуется при составлении моментов сил относительно осей. В результате получим расчетную схему задачи, показанную на рис.2. Составим первые три уравнения равновесия (5.2):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0: \qquad X_A - F \cdot Sin\alpha = 0. \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \qquad Y_A + Y_B + N_C \cdot Cos\beta + F \cdot Cos\alpha = 0. \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0: \qquad Z_A + Z_B + Q - Q_1 - P + N_C \cdot Sin\beta = 0. \tag{3}$$

Поясним, например, уравнение (2), которое содержит проекции сил на ось Ay. При этом будем помнить, что силы, действующие в плоскости, которая перпендикулярна оси, не проецируются на ось. Другими словами, проекции сил $\overline{X}_A, \overline{Z}_A, \overline{Z}_B, \overline{N}_{Cz}, \overline{Q}, \overline{Q}_1, \overline{P}, \overline{F}_x$ на ось Ay будут равны нулю. Проецироваться будут те силы, которые показаны на рис.3. Все четыре проекции положительны, так как их направление совпадает с положительным направлением оси Ay. Чтобы составить уравнение (2), остается их просто просуммировать. Аналогично составляются два других уравнения.

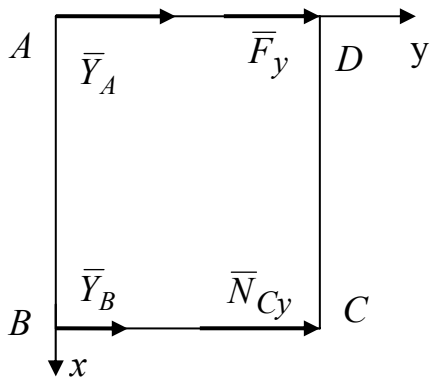


*Рис.*3

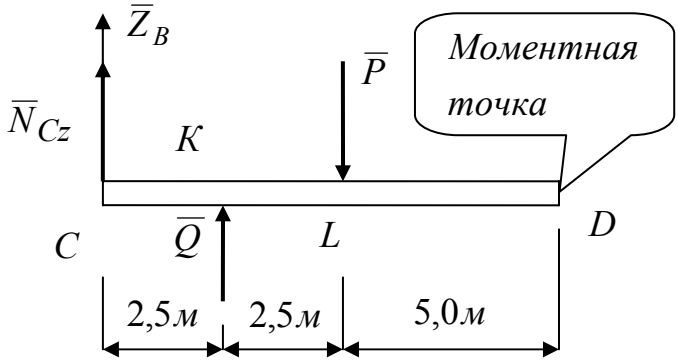


*Рис.*4

Перейдем к уравнениям моментов сил (5.3) относительно осей $Axyz$, показанных на рис.2. Если ввести другие оси, то вид уравнений тоже будет другим. Уравнения моментов будут иметь вид:

$$\sum_{k=1}^{n} m_x\left(\overline{F}_k\right) = 0: \quad \left|\overline{N}_{Cz}\right| \cdot BC + Q \cdot BC - Q_1 \cdot AH - P \cdot \frac{BC}{2} = 0. \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k) = 0: \quad -Z_B \cdot CD - \left|\overline{N}_{Cz}\right| \cdot CD - Q \cdot KD + P \cdot \frac{CD}{2} = 0. \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = 0: \quad Y_B \cdot AB + \left|\overline{N}_{Cy}\right| \cdot AB + \left|\overline{F}_x\right| \cdot AD - m = 0. \tag{6}$$

Поясним их составление на примере уравнения моментов относительно оси Ay. Силы $\overline{X}_A, \overline{F}_X, \overline{Z}_A, \overline{Q}_1$ пересекают рассматриваемую ось. Их моменты равны нулю. Силы $\overline{Y}_A, \overline{Y}_B, \overline{F}_y, \overline{N}_{Cy}$ параллельны оси Ay. Их моменты относительно этой оси тоже равны нулю. Остаются силы $\overline{Z}_B, \overline{N}_{CZ}, \overline{Q}, \overline{P}$. Посмотрим на систему сил,

действующих на тело, с положительного конца оси Ay (рис.4). Тогда увидим силы, которые дадут моменты относительно оси Ay. Все они уже лежат в плоскостях, перпендикулярных оси Ay. Поэтому вычисление моментов относительно оси Ay сводится к вычислению алгебраических моментов показанных сил в плоскости рисунка относительно точки D. Соответствующие слагаемые показаны в (5). Аналогично составляются и два других уравнения (4) и (6).

Отвлечемся на некоторое время от механики и решим систему уравнений (1) – (6) относительно величин искомых реакций $X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, N_C$. При этом понадобятся тригонометрические функции угла α. По теореме Пифагора диагональ прямоугольника (плиты) $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = 11{,}662 м$. Тогда $Sin\alpha = AB / BD = 10 / 11{,}662 = 0{,}857$. $Cos\alpha = AD / BD = 6 / 11{,}662 = 0{,}514$.

Кроме того, $Sin\beta = Sin60^0 = 0{,}87$; $Cos\beta = Cos60^0 = 0{,}5$.

Подставим в уравнения модули сил и размеры плиты. Получим:

$$\sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k)=0: \quad N_C \cdot Sin\beta \cdot b + Q \cdot b - Q_1 \cdot \frac{2}{3} b - P \cdot \frac{b}{2} = 0. \qquad (4^*)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k)=0: \quad -Z_B \cdot a - N_C \cdot Sin\beta \cdot a - Q \cdot \frac{3}{4} a + P \cdot \frac{a}{2} = 0. \qquad (5^*)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k)=0: \quad Y_B \cdot a + N_C \cdot Cos\beta \cdot a + F \cdot Sin\alpha \cdot b - m = 0. \qquad (6^*)$$

Тогда из уравнения (1) следует:

$$X_A = +F \cdot Sin\alpha = 15 \cdot 0{,}857 = 12{,}855 кН. \qquad (7)$$

Из уравнения (4^*) после сокращения на b следует:

$$N_C = \left(0{,}5 \cdot P + \frac{2}{3} Q_1 - Q\right) \frac{1}{\sin\beta} = \left(0{,}5 \cdot 20 + \frac{2}{3} \cdot 24 - 25\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}155 кН. \qquad (8)$$

Из уравнения (5^*) после сокращения на a следует:

$$Z_B = \left[0{,}5 \cdot P - N_C \sin\beta - Q \cdot \frac{3}{4}\right] = \\ = [0{,}5 \cdot 20 - 0{,}87 \cdot 1{,}155 - 25 \cdot 0{,}75] = -9{,}75 кН. \qquad (9)$$

Из уравнения (6^*) получим:

$$Y_B = \frac{1}{a}[-F \cdot b \cdot \sin\alpha + m - N_C \cdot a \cdot \cos\beta] = \\ = \frac{1}{10}[-15 \cdot 6 \cdot 0{,}857 + 12 - 10 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}155] = -7{,}091 кН. \qquad (10)$$

Из уравнения (2) следует: $Y_A = -F \cdot Cos\alpha - N_C \cos\beta - Y_B =$

$$= -15 \cdot 0{,}514 - 0{,}5 \cdot 1{,}155 + 7{,}091 = -1{,}197 кН\,. \qquad (11)$$

Из уравнения (3) получим: $Z_A = P + Q_1 - Q - Z_B - N_C \cdot Sin\beta =$

$$= 20 + 24 - 25 + 9{,}75 - 1{,}155 \cdot 0{,}87 = 27{,}75 кН\,. \qquad (12)$$

Знаки «минус» у Y_A, Y_B, Z_B указывают на то, что истинное направление этих реакций противоположно тем, которые изначально предполагались и были показаны на расчетной схеме рис.2. Сделаем проверку решения.

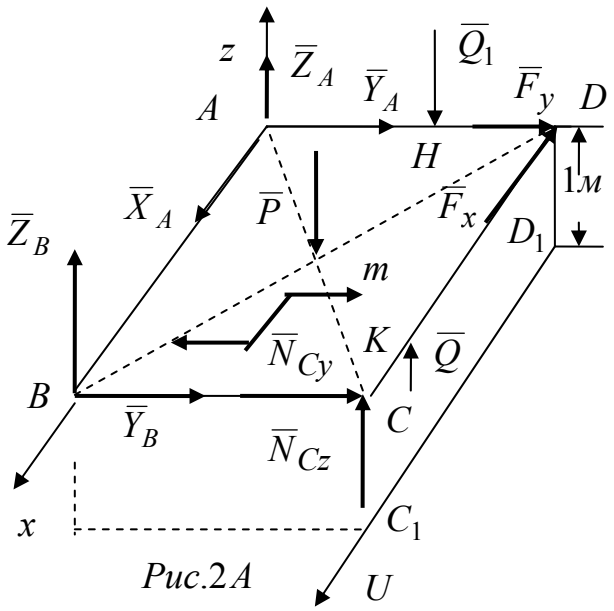


Рис.2А

Проверка. Составим дополнительное условие равновесия плиты. Предлагается ввести дополнительную ось D_1U, параллельную оси Ax и проходящую под стороной CD ниже на одну единицу длины, например, на один метр (рис. 2А). Условие равновесия моментов всех сил относительно оси D_1U представлено условием (13):

$$\sum_{k=1}^{n} m_U\left(\overline{F}_k\right) = 0: \quad -Y_A \cdot DD_1 - Y_B \cdot CC_1 - Z_B \cdot BC - Z_A \cdot AD -$$
$$- N_C \cdot CC_1 \cdot Cos\beta - F \cdot DD_1 \cdot Cos\alpha + Q_1 \cdot DH + P \cdot AD/2 = 0. \qquad (13)$$

Подставляя сюда заданные в условии задачи и найденные в ходе решения величины, будем иметь:

$$+1{,}197 \cdot 1 + 7{,}091 \cdot 1 + 9{,}75 \cdot 6 - 27{,}75 \cdot 6 - 1{,}155 \cdot 0{,}5 \cdot 1 - 15 \cdot 0{,}514 \cdot 1 +$$
$$+ 24 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 174{,}788 - 174{,}7875 = 0{,}0005 \approx 0.$$

Можно заключить, что проверенные реакции найдены правильно. Не проверенной осталась лишь сила $\overline{X}_A$, но вероятность ошибки при её определении мала. Очень уж простые уравнения (1) и (7).

На что обратить внимание при составлении уравнений равновесия? 1) Как показал наш опыт, уравнения и условия равновесия можно составлять в любых осях и механика явления при этом не нарушается. 2) Из предыдущего следует, что нужно так вводить систему координат, чтобы в уравнениях равновесия содержалось как можно меньше неизвестных. Тогда придется делать меньше математических операций для

определения неизвестных. Например, ось D_1U была бы очень «плохой» для составления уравнения равновесия. Посмотрите, в (13) вошли сразу пять неизвестных величин. Если бы уравнение (13) использовалось для определения неизвестных, пришлось бы делать большое число подстановок. 3) При проверке решения наоборот, нужно стремиться к тому, чтобы как можно больше найденных и проверяемых уже теперь величин попали в условия равновесия. Этого добиваются «удачным» выбором осей. Условия (13), куда были подставлены найденные значения реакций для проверки, весьма удачны.

Ответ: $X_A = 12{,}855 кН$; $Y_A = -1{,}197 кН$; $Z_A = 27{,}75 кН$; $Z_B = -9{,}75 кН$; $Y_B = -7{,}091 кН$; $N_C = 1{,}155 кН$.

Пример 2. Абсолютно твердое тело, изготовленное из трех стержней, жестко соединенных под прямым углом в точке B, подвергается действию пространственной системы сил, как показано на рисунке 5. На участке AB действует еще и пара сил с моментом m_y, стремящаяся повернуть стержень AB относительно его продольной оси. Конец A стержня AB жестко заделан, концы C и D свободны. Определить реакции связи (заделки), если $F_1 = 10 кН$; $F_2 = 20$ *кН*; $q = 5$ *кН/м*; $q_{\max} = 10$ *кН/м*; $m_y = 6\ кН \cdot м$; $\alpha = 30^\circ$; $AB = 4м$; $BC = 6$ *м*; $BD = 3$ *м*; $P_1 = 12$ *кН*; $P_2 = 18$ *кН*; $P_3 = 9$ *кН*.

Указания: В этом примере нужно закрепить знания о связи «пространственная заделка», запомнить приведение распределенных сил к силам сосредоточенным - равнодействующим, обратить внимание на технику применения теоремы Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси.

Решение. Свяжем с телом прямоугольную систему координат $Axyz$ с началом в точке A и построим расчетную схему. Отбросим связь, и её действие на тело заменим реакциями связи (рис.6). Реакции пространственной заделки состоят из трех сил, назовем их $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$ и трех реактивных моментов пар сил относительно трех взаимно перпендикулярных осей. Назовем их M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}. Далее, заменим распределенные силы равнодействующими $\overline{Q}$, $\overline{Q}_1$, действующими параллельно заданным распределённым силам. Величины этих сил находятся так же, как это делалось в «плоских» задачах предыдущего параграфа.

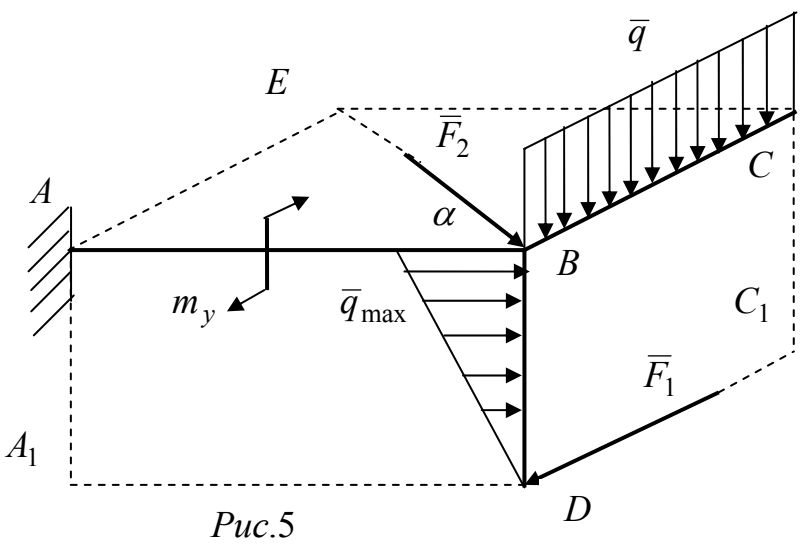


Рис.5

$$Q = q \cdot BC = 5 \cdot 6 = 30кН\ ; \qquad Q_1 = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot BD = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15кН\ .$$

Сила $\overline{Q}$ приложена в точке K так, что $BK = KC$, и действует параллельно оси Az. Сила $\overline{Q}_1$ приложена в точке H так, что $BH = \frac{1}{3} BD$; $HD = \frac{2}{3} BD$. Действует сила $\overline{Q}_1$ параллельно оси Ay.

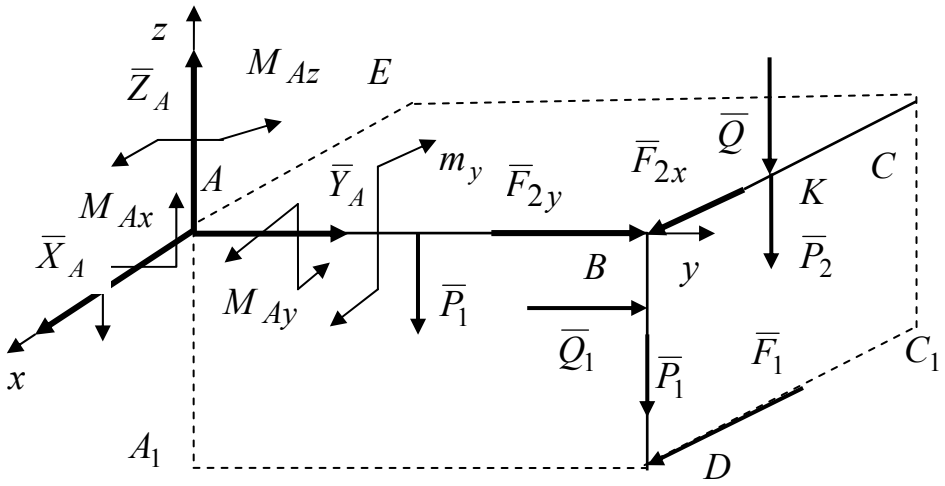


*Рис.*6

Чтобы облегчить проецирование «наклонной» силы $\overline{F}_2$ на оси координат и применить в дальнейшем теорему Вариньона, силу $\overline{F}_2$ разложим на составляющие $\overline{F}_{2x}$ и $\overline{F}_{2y}$ так, что $\overline{F} = \overline{F}_{2x} + \overline{F}_{2y}$. Последнее равенство означает, что для подсистемы сил $\overline{F}_{2x}, \overline{F}_{2y}$ сила $\overline{F}_2$ является равнодействующей. Составляющей $\overline{F}_{2z}$ нет, то есть она равна нулю, так как сила $\overline{F}_2$ действует в воображаемой плоскости $ABCE$, перпендикулярной к оси Az. По модулю (по величине) составляющие силы $\overline{F}_2$ равны:

$$\left|\overline{F}_{2x}\right| = F_2 \sin\alpha = 10кН\ ; \qquad \left|\overline{F}_{2y}\right| = F_2 \cos\alpha = 17{,}4кН\ .$$

В результате получим свободное тело, находящееся под действием произвольной пространственной системы сил, показанных на рисунке 6. Этот рисунок со всеми действующими силами и будем называть расчетной схемой. Именно для системы сил и моментов (включая реактивные), показанных на этом рисунке 6, составляются уравнения равновесия (5.2), (5.3).

Решение: Составление уравнений равновесия начнем с уравнений проекций сил на оси Ax, Ay, Az. Эти уравнения проще, чем уравнения моментов. Прокомментируем составление первого из них. Проецируя все без исключения силы (только силы) на ось Ax, получим:

$$X_{A,x} = X_A; \qquad F_{2x} = F_2 \sin\alpha; \qquad F_{1,x} = F_1.$$

Проекции выписанных сил положительны, потому что сами силы «сонаправлены», т.е. отклонены в ту же сторону, что и ось Ax.

Проекции сил $Y_{A,x} = Z_{A,x} = F_{2y} = Q_x = Q_{1,x} = 0$, так как линии действия сил $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, $\overline{F}_{2y}$, $\overline{Q}$, $\overline{Q}_1$ перпендикулярны к оси Ax. Силы тяжести $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ проецируются только на ось Az. Составляя алгебраическую сумму проекций всех сил, получим первое уравнение равновесия (1).

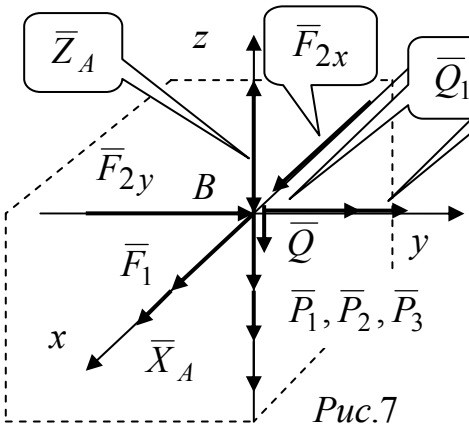


*Рис.*7

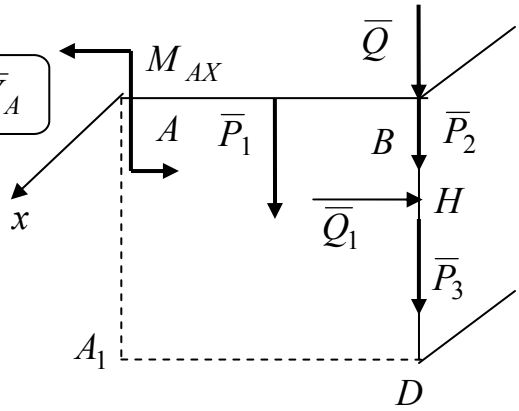


*Рис.*8

$$\sum F_{kx} = 0: \quad X_A + F_1 + F_2 \cdot \sin\alpha = 0. \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad Y_A + Q_1 + F_2 \cdot \cos\alpha = 0. \tag{2}$$

$$\sum F_{kz} = 0: \quad Z_A - Q - P_1 - P_2 - P_3 = 0. \tag{3}$$

Замечание: когда есть трудности с пространственным представлением геометрических объектов, можно воспользоваться следующим приемом. При составлении уравнений проекций (и только в этом случае) можно построить вспомогательный рисунок с силами, приведенными в одну точку путем параллельного переноса. В нашей задаче это показано на рис.7. На нем изображены все силы, действующие на тело, приведенные в точку B путем параллельного переноса. В эту же точку перенесены и оси координат. По рисунку видно, какие силы лежат на той или иной оси. Сравните теперь силы, лежащие на той или иной оси, с соответствующими уравнениями равновесия и увидите их полное согласование. Повторимся, это можно делать только при составлении уравнений проекций сил и нельзя переносить силы при составлении уравнений моментов. Аналогично уравнению (1) составляются уравнения проекции всех сил на оси Ay и Az. Это уравнения (2) и (3).

Обратимся к составлению уравнений моментов относительно осей Ax, Ay, Az. Вспомним свойства моментов силы относительно оси: Если сила параллельна оси или пересекает ось, то её момент относительно этой оси равен нулю. Кроме того, для облегчения пространственного восприятия на стержнях AB, BC, BD построим воображаемый прямоугольный параллелепипед (рис.6). Тогда увидим, что часть сил не дают моменты относительно оси *Ax:*

$$m_x\left(\overline{X}_A\right)=m_x\left(\overline{Y}_A\right)=m_x\left(\overline{Z}_A\right)=m_x\left(\overline{F}_2\right)=m_x\left(\overline{F}_1\right)=0.$$

Дело в том, что силы $\overline{X}_A$, $\overline{F}_1$ параллельны оси Ax, а линии действия сил $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, $\overline{F}_2$ - пересекают ось. Эти силы в первом уравнении моментов (4) участвовать не будут. Момент относительно оси Ax дают равнодействующие распределенных сил $\overline{Q}$, $\overline{Q}_1$ и силы тяжести отдельных стержней $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ (рис.6). Все эти силы уже лежат в плоскостях, перпендикулярных к оси Ax. Чтобы вычислить моменты сил $\overline{P}_1$, $\overline{Q}_1$, $\overline{P}_3$ относительно Ax, надо вычислить алгебраические моменты (как это делалось в «плоских» задачах) этих сил относительно точки A в плоскости $ABDA_1$. A - точка пересечения оси и плоскости $ABDA_1$.

Силы $\overline{Q}$ и $\overline{P}_2$ удобно спроецировать на эту же плоскость $ABDA_1$. В результате получим вспомогательный рисунок 8 для определения алгебраических моментов сил относительно точки A (см. рис. 8):

$$m_x\left(\overline{Q}\right)=-Q\cdot AB; \quad m_x\left(\overline{P}_2\right)=-P_2\cdot AB; \quad m_x\left(\overline{P}_3\right)=-P_3\cdot AB;$$
$$m_x\left(\overline{P}_1\right)=-\frac{1}{2}AB\cdot P_1; \quad m_x\left(\overline{Q}_1\right)=Q_1\cdot BH.$$

Кроме того, есть искомый момент M_{Ax}. Сложим эти моменты и получим уравнение (4).

Аналогично составляются два других уравнения моментов. Относительно оси Ay моменты дадут пара сил с моментом M_{Ay}, сила $\overline{F}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{Q}$, пара сил с моментом m_y. В то же время,

$$m_y\left(\overline{P}_1\right)=m_y\left(\overline{P}_3\right)=m_y\left(\overline{Q}_1\right)=m_y\left(\overline{F}_2\right)=m_y\left(\overline{X}_A\right)=m_y\left(\overline{Z}_A\right)=m_y\left(\overline{Y}_A\right)=0,$$

так как линии действия сил $\overline{X}_A$, $\overline{Z}_A, \overline{F}_2$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$ - пересекают ось Ay, а силы $\overline{Q}_1$, $\overline{Y}_A$ - параллельны оси. При составлении уравнения моментов относительно оси Az будем смотреть на тело и систему сил с положительного конца оси Az. Тогда:

$$m_z\left(\overline{X}_A\right)=m_z\left(\overline{Y}_A\right)=m_z\left(\overline{Z}_A\right)=m_z\left(\overline{P}_1\right)=m_z\left(\overline{P}_2\right)=m_z\left(\overline{P}_3\right)=m_z\left(\overline{Q}\right)=$$
$$=m_z\left(\overline{Q}_1\right)=m_z\left(\overline{F}_{2y}\right)=0.$$

Так как линии действия $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Q}_1$, $\overline{F}_{2y}$ - пересекают ось, а линии действия других сил параллельны оси Az. Момент дадут: $\overline{F}_1$, M_{Az}, $\overline{F}_{2x}$.

$$m_z\left(\overline{F}_1\right)=-F_1\cdot AB; \qquad m_z\left(\overline{F}_{2x}\right)=-F_2\cdot Sin\alpha\cdot AB.$$

Уравнения моментов примут вид (4), (5) и (6). В уравнениях (1) – (6) искомыми величинами являются X_A, Y_A, Z_A, M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}. Остальные входящие в них величины известны.

$$\sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k) = 0 : M_{Ax} + Q_1 \cdot \frac{1}{3} BD - Q \cdot AB - P_1 \frac{AB}{2} - P_2 \cdot AB - P_3 \cdot AB = 0. \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k) = 0 : \quad M_{Ay} - m_y - Q \cdot \frac{BC}{2} - F_1 \cdot BD - P_2 \frac{BC}{2} = 0. \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = 0 : M_{Az} - F_2 \sin\alpha \cdot AB - F_1 \cdot AB = 0. \quad (6)$$

Решим уравнения равновесия (1) – (6). Из уравнения (6) получим:

$$M_{Az} = AB \cdot F_2 \cdot \sin\alpha + F_1 \cdot AB = 40 + 40 = 80 кН \cdot м. \quad (7)$$

Из уравнения (5) получим:

$$M_{Ay} = m_Y + Q \frac{BC}{2} + F_1 \cdot BD + P_2 \frac{BC}{2} =$$
$$= 6 + 30 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 18 \cdot 3 = 180 кН \cdot м. \quad (8)$$

Из уравнения (4) получим:

$$M_{Ax} = Q \cdot AB - \frac{1}{3} \cdot BD \cdot Q_1 + \frac{1}{2} \cdot AB \cdot P_1 + AB \cdot P_2 + AB \cdot P_3 =$$
$$= 30 \cdot 4 - 15 \cdot 1 + 2 \cdot 12 + 4 \cdot 18 + 4 \cdot 9 = 237 кН \cdot м. \quad (9)$$

Из уравнений (1)-(3) получим:

$$Z_A = Q + P_1 + P_2 + P_3 = 69 кН. \quad (10)$$

$$Y_A = -Q_1 - F_2 \cos\alpha = -15 - 17{,}4 = -32{,}4 кН. \quad (11)$$

$$X_A = -F_1 - F_2 \sin\alpha = -10 - 10 = -20 кН. \quad (12)$$

Проверка: В этом примере, чтобы проверить решение, в точке C введем ещё одну вспомогательную систему координат (рис. 9) с осями , соответственно параллельными первоначальным осям системы координат $Axyz$. Назовем вспомогательную систему координат $CUVW$ и составим в этих осях три условия равновесия моментов. Подставим в них проверяемые значения найденных реакций из (7)-(12):

$$\sum m_U(\overline{F}_k) = 0 : \quad -Z_A \cdot AB + P_1 \frac{AB}{2} + Q_1 \frac{BD}{3} + M_{Ax} = 0;$$
$$-69 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 15 + 237 = 0. \quad (13)$$

$$\sum m_V\left(\overline{F}_k\right)=0: \quad -Z_A\cdot BC+P_1\cdot BC+M_{Ay}+Q\frac{BC}{2}+P_2\frac{BC}{2}+ \tag{14}$$
$$+P_3\cdot BC-F_1\cdot BD-m_y=0.$$
$$-69\cdot 6+12\cdot 6+180+30\cdot 3+18\cdot 3+9\cdot 6-10\cdot 3-6=-450+450=0.$$

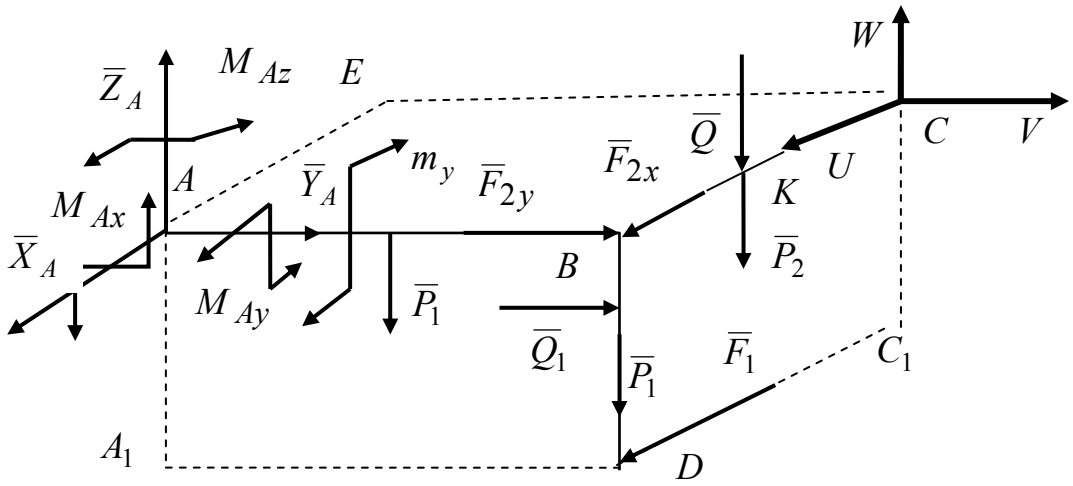


*Рис.*9

$$\sum m_W\left(\overline{F}_k\right)=0: \quad X_A\cdot AB+Y_A\cdot BC+M_{Az}+F_{2y}\cdot BC+Q_1\cdot BC=0.$$

$$-20\cdot 4-32{,}4\cdot 6+80+17{,}4\cdot 6+15\cdot 6=0; \tag{15}$$
$$-274{,}4+170+104{,}4=0.$$

Замечание: Как видим, соотношения (13) - (15) удовлетворились. Задача решена правильно. Они использовались здесь для проверки решения. Поэтому их называем условиями равновесия. Но их можно было использовать и для решения задачи, тогда они назывались бы уравнениями равновесия .

Ответ: $X_A=-20кН$; $Y_A=-32{,}4кН$; $Z_A=69кН$; $M_{Ax}=237кН\cdot м$; $M_{Ay}=180кН\cdot м$; $M_{Az}=80кН\cdot м$.

§ 5.5. Задачи для самостоятельного решения к главе 5

Задачи 5.1-5.6. Неизменяемая конструкция состоит из трех невесомых абсолютно твердых стержней с шарнирами по концам. Стержни являются ребрами или диагоналями граней воображаемого куба. Стержням присвоены номера, показанные на выносках к рисункам. Один из концов стержней шарнирно прикреплен к неподвижному телу в точках A, B *или* C, вторые концы соединены шарнирно в точке D. В

узле D по направлениям DK к узлу приложена сила $\overline{F}$. Определить реакции стержней, если $F = 10кН$.

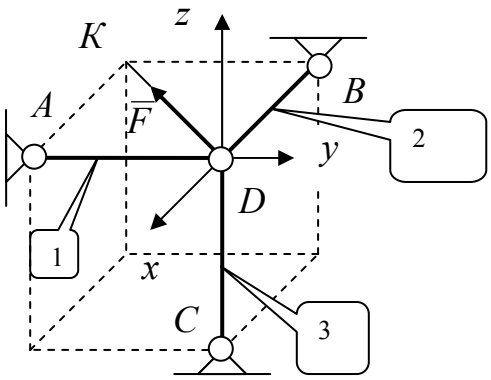


Рис. к задаче 5.1

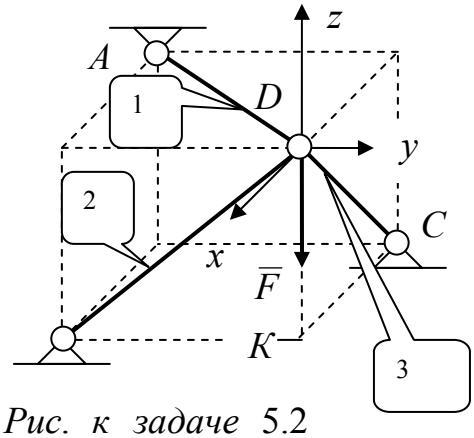


Рис. к задаче 5.2

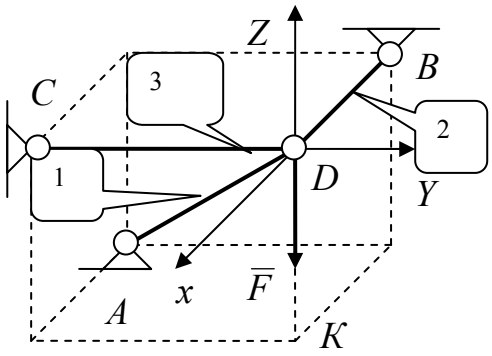


Рис. к задаче 5.3

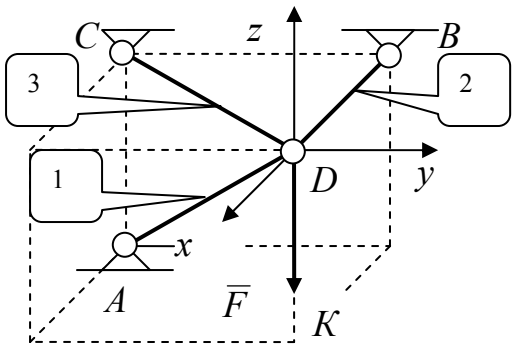


Рис. к задаче 5.4

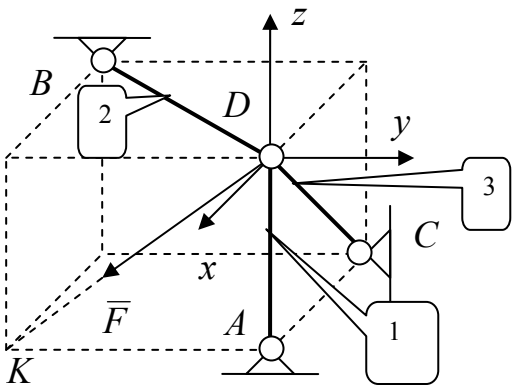


Рис.к задаче 5.5

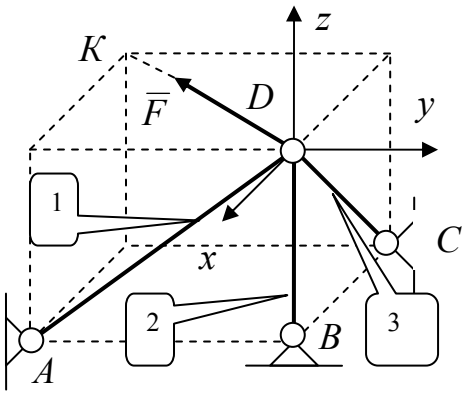


Рис.к задаче 5.6

Задачи 5.7-5.10. На рисунках к задачам показаны пространственные тела, изготовленные из абсолютно твердых стержней. Стержни жестко соединены между собой так, что их оси пересекаясь, образуют между собой прямые углы. Один конец конструкции A жестко заделан, остальные концы – свободны. В точке C на тело действуют сосредоточенная сила $\overline{F}$ (F в кН), а вдоль оси одного из стержней равномерно распределенная сила $\overline{q}$ (q в *кН/м*), вызывающие пространственное сопротивление наложенной связи. Линии действия сил параллельны координатным осям, показанным на рисунках. Считая, что длины стержней известны, определить в общем виде реакции связи (заделки) в точке A. В качестве подсказки общие для всех задач реакции пространственной заделки в точках A показаны на рис. к задаче 5.8.

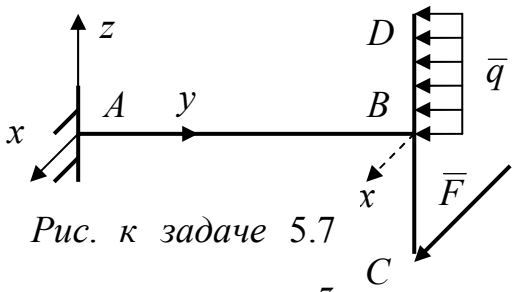


Рис. к задаче 5.7

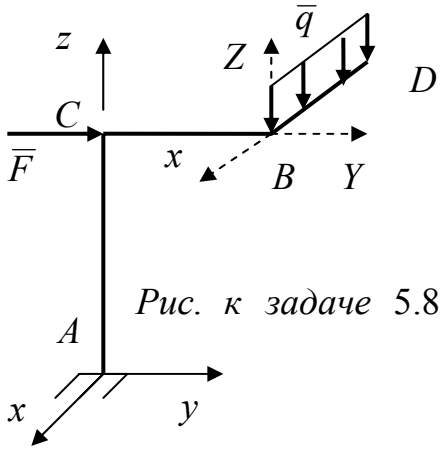


Рис. к задаче 5.8

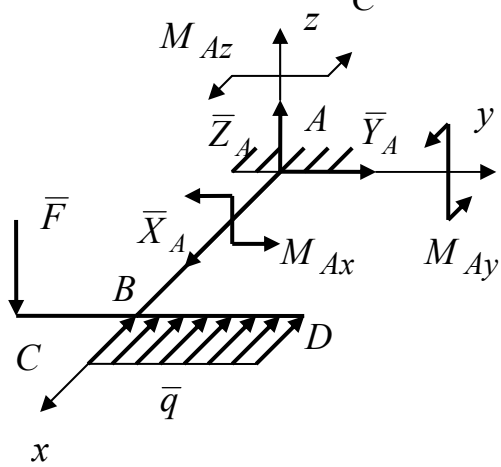


Рис. к задаче 5.9

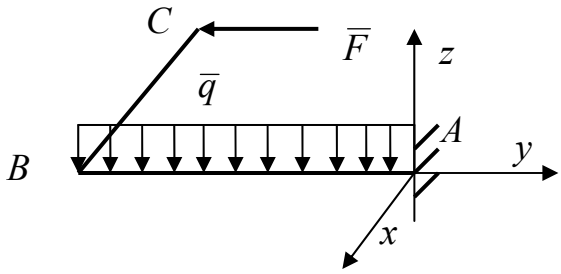


Рис. к задаче 5.10

Задачи 5.11-5.14. Горизонтальная абсолютно твердая плита $ABCD$ в точке A соединена со сферическим шарниром, в точке B с подшипником, ось которого, совпадает с осью боковой грани пластины, а в точке C пластина поддерживается невесомым стержнем с шарнирами по концам. На пластину действуют или сосредоточенная сила $\overline{F}$ (F в кН), или равномерно распределенная по одной из сторон сила $\overline{q}$ (q в кН/м). Определить в общем виде реакции связей, наложенных на пластину, предполагая, что размеры пластины известны.

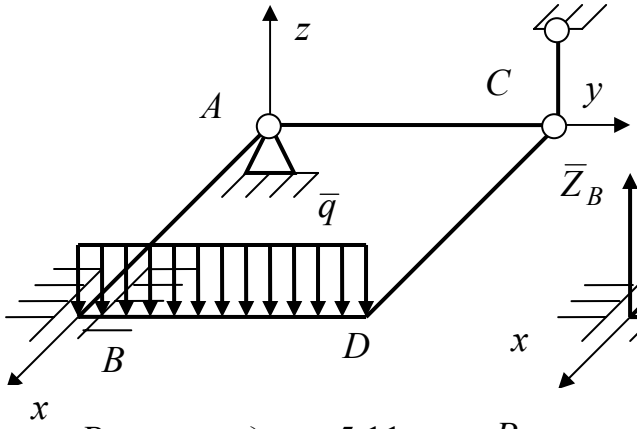


Рис. к задаче 5.11

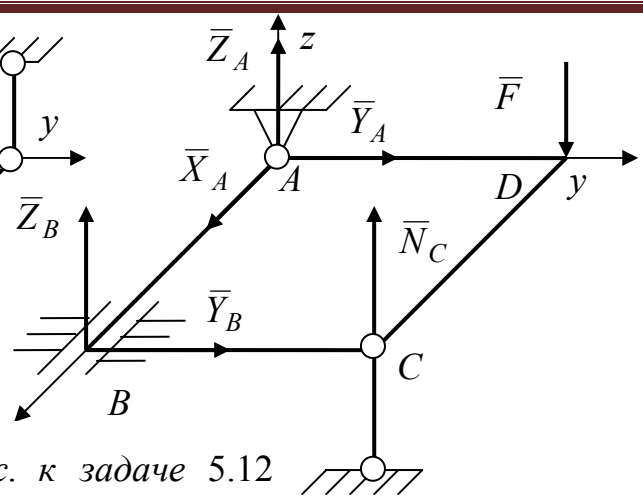


Рис. к задаче 5.12

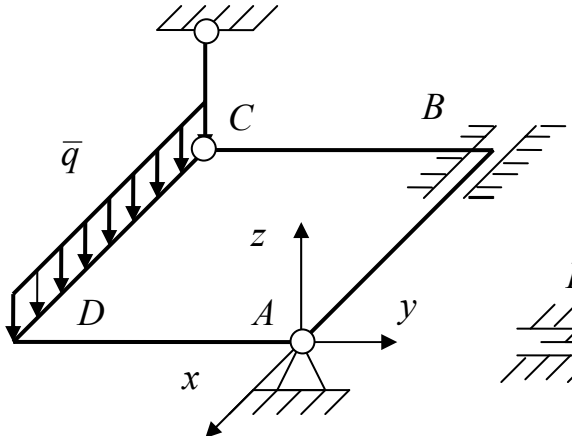


Рис. к задаче 5.13

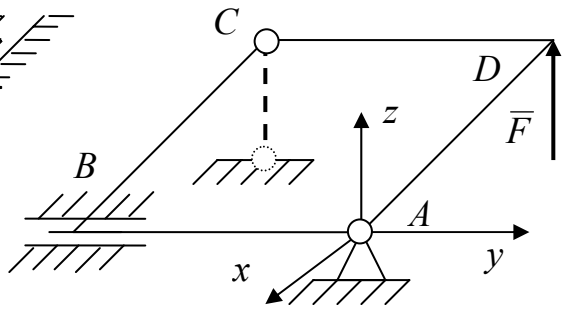


Рис. к задаче 5.14

Ответы к задачам 5.1 – 5.14

5.1) $N_1 = -5 \cdot \sqrt{2} кН$; $N_2 = -5 \cdot \sqrt{2} кН$; $N_3 = 0$. 5.2) $N_1 = 5 \cdot \sqrt{2} кН$; $N_2 = N_3 = -5 \cdot \sqrt{2} кН$. 5.3) $N_1 = -10 \cdot \sqrt{3} кН$; $N_2 = N_3 = 10 кН$.
5.4) $N_1 = -10 \cdot \sqrt{3} кН$; $N_2 = 0$, $N_3 = 10 \cdot \sqrt{2} кН$. 5.5) $N_1 = -10 \cdot \sqrt{2} кН$; $N_2 = -10 кН$, $N_3 = 10 кН$. 5. 6) $N_1 = N_3 = -10 кН$; $N_2 = \sqrt{2} \cdot 10 кН$.
5.7) $Q = q \cdot BD$ кН; $X_A = -F$ кН; $Y_A = Q$ кН; $Z_A = 0$ кН;
$M_{Ax} = -Q \cdot BD/2$ кН · м; $M_{Ay} = F \cdot BC$ кН · м; $M_{AZ} = F \cdot AB$ кН · м.
5.8) $Q = q \cdot BD$ кН; $X_A = 0$ кН; $Y_A = -F$ кН; $Z_A = Q$ кН; $M_{Az} = 0$ кН · м; $M_{Ax} = +Q \cdot BC + F \cdot AC$ кН · м; $M_{Ay} = +Q \cdot BD/2$ кН · м. 5.9) $Q = q \cdot BD$ кН; $X_A = Q$ кН; $Y_A = 0$ кН; $Z_A = F$ кН; $M_{Ax} = -F \cdot CB$ кН · м; $M_{Ay} = -F \cdot AB$ кН · м; $M_{Az} = -Q \cdot BD/2$ кН · м.

Ответы к задачам 5.1 – 5.14 (продолжение)

5.10) $X_A = 0\ кН$; $Y_A = F\ кН$; $Z_A = Q\ кН$; $M_{Ax} = -q \cdot AB \cdot (AB/2)$; $M_{Ay} = 0$; $M_{Az} = -F \cdot BC$. 5.11) $X_A = 0\ кН$; $Y_A = 0\ кН$; $Z_A = -Q/2\ кН$; $Y_B = 0\ кН$; $Z_B = Q\ кН$; $N_C = Q/2\ кН$. 5.12) $X_A = 0\ кН$; $Y_A = 0\ кН$; $Z_A = F\ кН$; $Y_B = 0\ кН$; $Z_B = -F\ кН$; $N_C = F\ кН$; 5.13) $X_A = 0\ кН$; $Y_A = 0\ кН$; $Z_A = 0{,}5 \cdot Q\ кН$; $Y_B = 0\ кН$; $Z_B = -Q/2\ кН$; $N = Q\ кН$; 5.14) $X_A = 0\ кН$; $Y_A = 0\ кН$; $Z_A = -F\ кН$; $Y_B = 0\ кН$; $Z_B = F\ кН$; $N_C = -F\ кН$.

Задача 5.15. Абсолютно твердая прямоугольная плита *ABCD* (смотрите рис. к задаче 5.15) расположена в горизонтальной плоскости. В точке *A* плита опирается на сферический шарнир, в точке *B* на подшипник, ось которого совпадает с осью *Ay*, в точке *C* на вертикальный невесомый стержень. На плиту действуют сосредоточенные силы, распределенные силы и пары сил с алгебраическими моментами m_1 и m_2. Первая пара действует в вертикальной плоскости, вторая – в горизонтальной плоскости. Значения действующих сил и моментов пар приведены в одной строке таблицы к задаче. Определить реакции связей, наложенных на пластину и проверить решение, если *AE=3м; BE=2м; DL=3м; CL=2; AN=2м; DN=6м; CG=6м; BG= 2м. (Смотрите замечание к задаче после таблицы).*

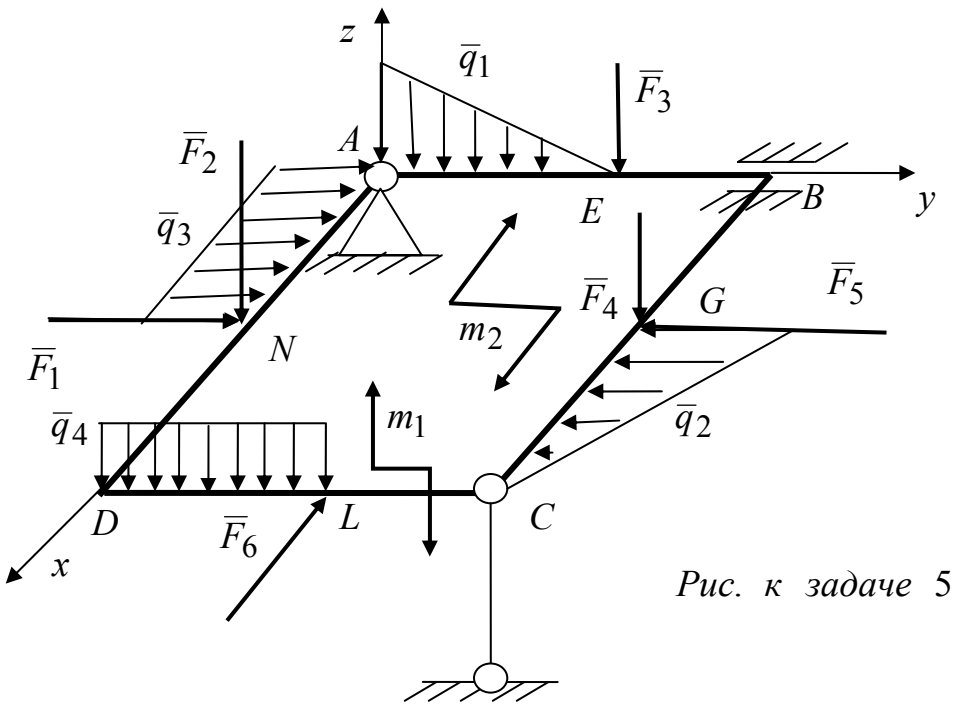


Рис. к задаче 5.15

Таблица к задаче 5.15

№ Вари-анта	m_1	m_2	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	q_1^{max}	q_2^{max}	q_3	q_4
	кНм	*кНм*	*кН*	*кН*	*кН*	*кН*	*кН*	*кН*	*кН/м*	*кН/м*	*кН/м*	*кН/м*
1	**2**	0	**13**	0	0	0	0	0	0	0	**3**	0
2	0	**3**	0	**12**	0	0	0	0	0	0	0	**2**
3	**4**	0	0	0	**24**	0	0	0	0	0	**4**	0
4	0	**5**	0	0	0	**17**	0	0	0	0	0	**5**
5	**6**	0	0	0	0	0	**14**	0	0	0	**6**	0
6	0	**7**	0	0	0	0	0	**18**	0	0	0	**7**
7	**2**	0	**14**	0	0	0	0	0	0	0	**3**	0
8	0	**4**	0	**13**	0	0	0	0	0	0	0	**4**
9	**3**	0	0	0	**16**	0	0	0	0	0	**8**	0
10	0	**6**	0	0	0	**19**	0	0	0	0	0	**6**
11	**2**	0	**13**	0	**4**	0	0	0	**4**	0	0	**5**
12	0	**4**	**14**	0	0	**13**	0	0	0	**3**	**4**	0
13	**3**	0	0	**13**	**2**	0	0	0	3	0	0	**4**
14	0	**8**	0	0	0	**15**	0	**14**	0	**2**	**3**	0
15	**8**	0	0	**12**	0	0	**14**	0	**2**	0	**3**	0
16	0	**7**	0	0	0	0	**14**	**13**	**3**	0	0	**3**
17	**4**	0	**18**	0	0	0	0	**15**	0	**5**	**2**	0
18	0	**4**	0	**17**	0	0	0	**19**	**6**	0	**4**	0
19	**5**	0	0	0	**14**	0	**18**	0	0	**4**	0	**3**
20	0	**3**	**10**	0	0	0	**12**	0	**5**	0	**4**	0
21	**6**	0	0	0	**17**	0	**15**	0	0	**2**	0	**3**
22	0	**8**	0	0	0	**16**	0	**21**	**4**	0	**3**	0
23	**4**	0	0	0	0	**23**	**12**	0	0	**5**	0	**2**
24	0	**5**	0	0	0	**17**	**15**	0	**7**	0	**5**	0

Варианты 1-10 относим к первому уровню трудности, они «легче», варианты 11-24 – ко второму уровня трудности.

Замечание: Один общий рисунок к задачам позволяет студентам решить 24 задачи для определения реакций связей. При этом приобретаются навыки составления и решения уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил. Значения величин сил и моментов для одной задачи указаны в одной строке таблицы к задаче. Если значение какой-либо величины, взятой из строки таблицы, равно

нулю, то это означает, что её нет. При составлении расчетных схем эти величины показывать на рисунках не надо.

При использовании преподавателем рисунка и таблицы данных при контроле знаний число вариантов может быть увеличено, например, за счет переноса связей в разные точки пластины или стержневой конструкции. Например, в задаче 5.16 «заделку» можно переносить в точки B, C, D, E, оставляя неизменной таблицу данных. Это приведет к пятикратному увеличению вариантов для тестирования. Если отрабатывается просто техника составления уравнений равновесия без последующего их решения, некоторые нули в строках таблицы можно заменить значениями сил и моментов.

Задача 5.16. Твердое тело в виде жестко скрепленных между собой под прямым углом в горизонтальной плоскости невесомых стержней с прямолинейными осями находится под действием сосредоточенных сил (таблица 1 к задаче), распределенных сил и пар сил с известными алгебраическими моментами (таблица 2 к задаче). Определить реакции пространственной заделки, если $AN = 5м$; $BG = 3м$; $GN = 2м$; $NH = 5$;

$CH = 4м$; $NL = 4м$; $DL = 1{,}5м$; $LS = 1м$; $SE = 6м$.

Варианты 1-12 относим к первому уровню трудности, они «легче», варианты 13-24 – ко второму уровня трудности.

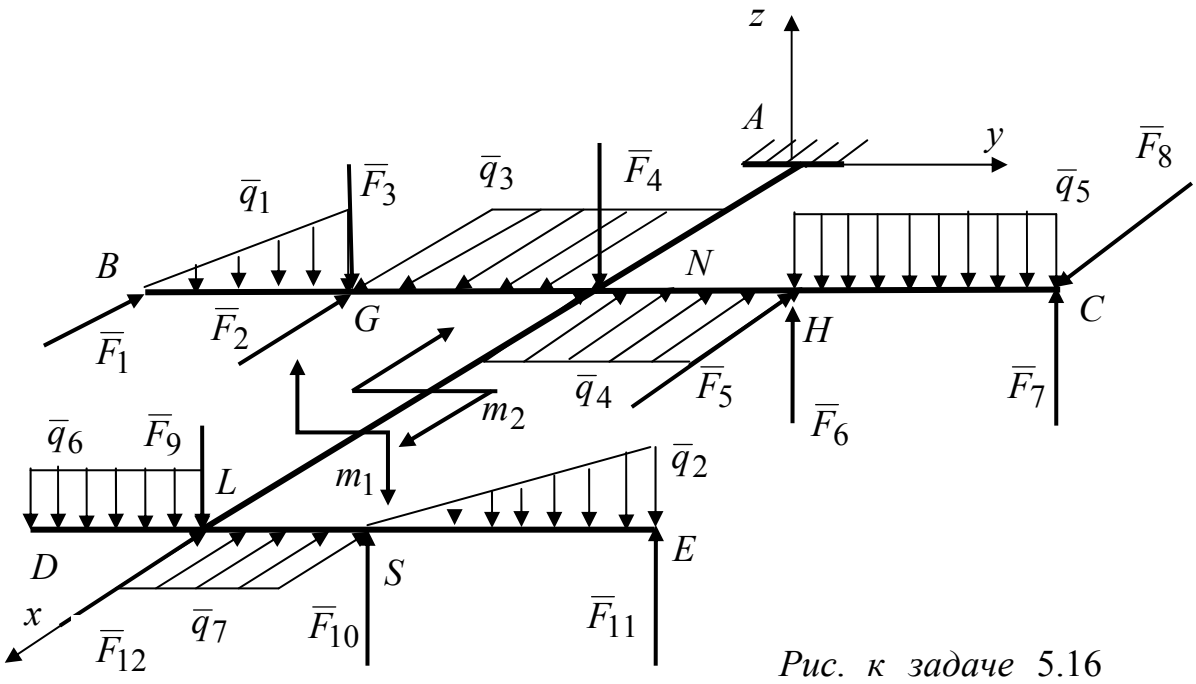


Рис. к задаче 5.16

Замечание: Один общий рисунок к задаче позволяет решить 24 варианта задачи, предложенные в строках двух таблиц Можно пользоваться только одной таблицей, считая равными нулю все величины приведенные в другой таблице. Получим 48 более простых задач. Если переносить заделку на другие свободные концы тела B, C, D, E, то получим 240 задач на составление и решение уравнений равновесия. Кроме того, у преподавателя во время консультаций есть возможность оперативно менять содержимое отдельных строк в таблицах.

Таблица 1 к задаче 5.16

№ Варианта	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
	кН	*кН*	*кН*	*кН*	*кН*	*кН*	*кН*	*кН*	*кН*	*кН*	*кН*	*кН*
1	**13,1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**20,0**
2	0	**12,3**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**21,0**
3	0	0	**24,7**	0	0	0	0	0	0	0	**17,0**	0
4	0	0	0	**17,3**	0	0	0	0	0	**23,0**	0	0
5	0	0	0	0	**14,2**	0	0	0	**11,0**	0	0	0
6	0	0	0	0	0	**18,9**	0	**12,0**	0	0	0	0
7	**14,0**	0	0	0	0	0	**19,5**	0	0	0	0	0
8	0	**13,0**	0	0	0	0	0	**23,4**	0	0	0	0
9	0	0	**16,0**	0	0	0	0	0	**28,3**	0	0	0
10	0	0	0	**19,0**	0	0	0	0	0	**16,8**	0	0
11	0	0	0	0	**12,0**	0	0	0	0	0	**32,0**	0
12	0	0	0	0	0	**15,0**	0	0	0	0	0	**17,9**
13	0	**13,0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**30,2**
14	0	0	**23,0**	0	0	0	0	0	0	0	**28,2**	0
15	0	0	0	**21,0**	0	0	0	0	0	**26,6**	0	0
16	0	0	0	0	**30,0**	0	0	0	**27,3**	0	0	0
17	0	0	0	0	0	**16,0**	0	**29,1**	0	0	0	0
18	**15,0**	0	0	0	0	0	**24,7**	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	**21,9**	0	**25,0**	0	0	0	0
20	0	0	0	0	**14,6**	**0**	**0**	**0**	**27,0**	0	0	0
21	0	0	0	**21,7**	0	0	0	0	0	**29,0**	0	0
22	0	0	**17,6**	0	0	0	0	0	0	0	**21,0**	0
23	0	**23,1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**24,0**
24	**12,5**	0	0	0	0	0	**26,0**	0	0	0	0	0

Таблица 2 к задаче 5.16

№ Вари-анта	m_1	m_2	q_1^{max}	q_2^{max}	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
	кНм	*кНм*	*кН/м*	*кН/м*	*кН/м*	*кН/м*	*кН/м*	*кН/м*	*кН/м*
1	**2,0**	0	0	0	**3,0**	0	0	0	0
2	0	**3,0**	0	0	0	**2,0**	**0**	**0**	**0**
3	**4,0**	0	0	0	0	0	**5,0**	0	0
4	0	**5,0**	0	0	0	0	0	**6,0**	0
5	**6,0**	0	0	0	0	0	0	0	**7,0**
6	0	**7,0**	0	0	0	0	**8,0**	0	0
7	**2**	0	0	0	0	0	0	**4**	0
8	0	**4,0**	0	0	0	0	0	0	**2,0**
9	**3,0**	0	0	0	0	0	0	**8,0**	0
10	0	**6,0**	0	0	0	0	**3,0**	0	0
11	**4,0**	0	0	0	0	**6,0**	0	0	0
12	0	**5,0**	0	0	**5,0**	0	0	0	0
13	**5,0**	**4,0**	**3,0**	0	**2,0**	0	0	0	0
14	**7,0**	**6,0**	0	**6,0**	0	**3,0**	0	0	0
15	**2,0**	**8,0**	**5,0**	0	0	0	**4,0**	0	0
16	**3,0**	**6,0**	0	**4,0**	0	0	0	**5,0**	0
17	**4,0**	**7,0**	**2,0**	0	0	0	0	0	**6,0**
18	**6,0**	**4,0**	0	**1,0**	0	0	0	**7,0**	0
19	**6,0**	**4,0**	**7,0**	0	0	0	**8,0**	0	0
20	**9,0**	**8,0**	0	**7,0**	0	**9,0**	0	0	0
21	**3,0**	**4,0**	**5,0**	0	**6,0**	0	0	0	0
22	**7,0**	**5,0**	0	**6,0**	0	**3,0**	0	0	0
23	**7,0**	**5,0**	**3,0**	0	0	0	**4,0**	0	0
24	**4,0**	**8,0**	0	**5,0**	0	0	0	**6,0**	0

Вопросы для самоконтроля к главе 5

(Отвечать письменно, где можно сопровождать рисунками)

1. Покажите реакцию невесомого стержня.
2. Покажите реакции подшипника.
3. Покажите реакции сферического шарнира.
4. Покажите реакции пространственной заделки.
5. Что называется моментом силы относительно оси?
6. Опишите правило вычисления момента силы относительно оси.

7. Перечислите свойства момента силы относительно оси.

8. В каких единицах измеряется момент силы относительно оси?

9. Что называется проекцией силы на ось и как она вычисляется?

10. Что называется проекцией силы на плоскость?

11. Опишите способ двойного проецирования силы на ось. Когда он применяется?

12. Как вычисляется равнодействующая равномерно распределенной силы? Как проходит её линия действия?

13. Как вычисляется равнодействующая силы, распределенной по закону треугольника?

14. Как проходит линия действия равнодействующей распределенной по закону треугольника силы?

15. Запишите геометрические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил?

16. Запишите аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил?

17. Сколько неизвестных величин реакций можно найти из условий равновесия пространственной системы сходящихся сил?

18. Запишите геометрические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

19. Запишите аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

20. Какие системы сил называются пространственными системами сил?

ГЛАВА 6. ТРЕНИЕ

§ 6.1. Законы Кулона

6.1. Трение - это механическое сопротивление, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся прижатых друг к другу тел при их перемещении относительно друг друга.

6.2. Сила сопротивления, препятствующая свободному скольжению одного тела по поверхности другого тела и лежащая в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей тел, называется силой трения.

6.3.Поверхность, при скольжении по которой возникает сила сопротивления скольжению (сила трения), называется шероховатой поверхностью.

Благодаря трению происходит, например, движение локомотива и автомобиля. Отрицательным последствием трения является износ тел. Чтобы уменьшить износ, используется смазка, применяются шариковые

и роликовые подшипники. В теоретической механике изучается сухое трение, т.е. трение между телами в отсутствие смазывающего слоя. При этом различают трение скольжения при равновесии тела, трение скольжения при движении и трение качения. Рассмотрим сухое трение скольжения при покое и сформулируем законы Ш. Кулона.

Закон сухого трения скольжения Ш. Кулона

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого возникает приложенная к телу сила трения, лежащая в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей тел и направленная в сторону, противоположную направлению возможного перемещения тела.

2. Сила трения скольжения $\overline{F}_{тр}$ ***зависит от действующих на тело активных сил и численно может принимать любые значения от нуля до некоторой предельной величины*** $F_{пр}$***, которая называется предельной силой трения:***

$$0 \le F_{тр} \le F_{пр}. \qquad (6.1)$$

При этом максимального значения $F_{пр}$ ***сила трения скольжения достигает в момент "трогания" тела с места (т.е. в момент, предшествующий началу движения).***

3. Величина предельной силы трения покоя $F_{пр}$ ***равна произведению коэффициента трения скольжения покоя*** f ***на модуль нормальной реакции поверхности*** N***, на которой покоится тело:***

$$F_{пр} = f \cdot N. \qquad (6.2)$$

4. Коэффициент трения покоя f ***является безразмерной величиной, которая определяется из эксперимента. Коэффициент трения зависит от шероховатости, влажности, температуры трущихся поверхностей и не зависит от размеров последних.***

Законы Кулона справедливы и при движении одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью. При этом сила трения направлена противоположно относительному перемещению тела, а динамический коэффициент трения f_d зависит еще и от скорости движения. Для большинства материалов f_d уменьшается с увеличением относительной скорости движения и стремится к некоторому постоянному значению. В технических расчетах полагают $f_d = f$.

Примерные значения коэффициента трения скольжения покоя проведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1

Материалы	f
кирпич - бетон	0,76
сталь - сталь	0,15
дерево - дерево дуб - дуб (поперек волокна) дуб - дуб (вдоль волокна)	0,4 - 0,7 0,54 0,62
сталь - лед	0,027

§ 6.2. Угол трения. Конус трения

Пусть имеется тело, которое покоится на горизонтальной шероховатой поверхности. Если нет сил, которые пытаются сдвинуть тело, то о силах трения говорить не приходится. Подействуем на тело силой $\overline{Q}$, возрастающей от нуля, до некоторого значения, после чего может начаться движение. Нас сейчас интересует только этот промежуток времени. С появлением силы $\overline{Q}$ возникнет и сила трения.

6.4. Равнодействующая нормальной реакции $\overline{N}$ поверхности возможного скольжения и силы трения $\overline{F}_{тр}$ называется полной реакцией шероховатой поверхности $\overline{R}_{тр}$.

Из определения следует, что имеет место равенство $\overline{R}_{тр} = \overline{F}_{тр} + \overline{N}$. Полная реакция приложена в точке *O,* в которой пересекаются линия действия реакции $\overline{N}$ и поверхности возможного скольжения.

При увеличении силы трения до своего предельного значения $F_{пр}$, тело продолжает оставаться в покое, величина нормальной реакции N не меняется (рис. 6.1). В этом легко убедиться, если составить уравнение равновесия для определения N. Полная реакция поверхности увеличивается до своего предельного значения $R_{пр}$ из-за изменения $F_{пр}$.

6.5. Предельным состоянием равновесия *тела, лежащего на шероховатой поверхности, называется такое состояние равновесия тела, при котором сила трения достигает своего предельного значения $F_{пр}$.*

В этом состоянии полная реакция $\overline{R}_{тр}$ отклонена от нормали на наибольший угол α_0, называемый углом трения. Если продолжать увеличивать силу $\overline{Q}$, начнется движение. То есть предельное равновесие предшествует началу движения.

6.6. Углом трения *называется наибольший угол* α_0*, который образует полная предельная реакция шероховатой поверхности* $\overline{R}_{пр}$ *со своей нормальной составляющей* $\overline{N}$ *в условиях предельного состояния равновесия тела.* Как видно по рис. 6.1, угол трения, с учетом третьего закона Кулона, может быть вычислен по формулам:

$$tg\alpha_0 = F_{пр} / N \qquad \text{или} \qquad tg\alpha_0 = f\,. \qquad (6.3)$$

6.7. Тангенс угла трения α_0 *равен коэффициенту трения.*

Рассмотрим теперь предельные состояния равновесия, когда активные сдвигающие силы типа $\overline{Q}$ пытаются сдвинуть тело по другим направлениям, проходящим через точку O. Нормальная реакция $\overline{N}$ не меняется, величина $F_{пр} = fN$ может меняться, если коэффициент трения f по разным направлениям будет различным. Конец вектора $\overline{F}_{пр}$ опишет в плоскости Oxy, касательной к поверхности возможного скольжения тела, замкнутую кривую. В частном случае это будет окружность. Вектор $\overline{R}_{пр}$ при этом опишет конус с вершиной в точке O.

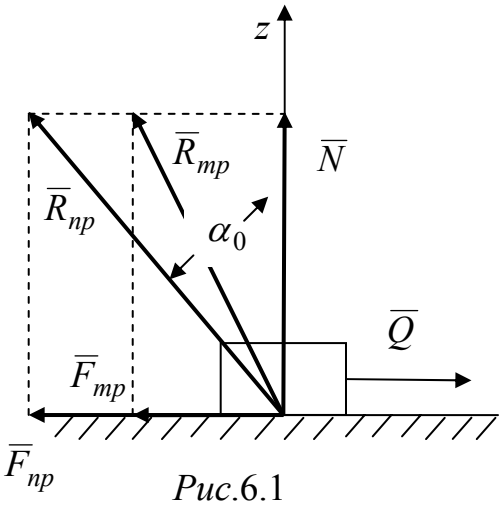


*Рис.*6.1

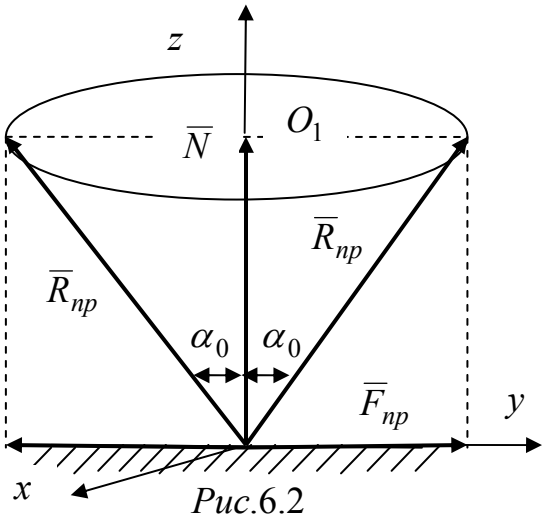


*Рис.*6.2

6.8. Конус, *описанный полной предельной реакцией шероховатой поверхности с осью, совпадающей с направлением нормальной реакции* $\overline{N}$ *в точке O, называется конусом трения (рис. 6.2).* Если f не зависит от направлений возможных движений, то угол при вершине конуса равен $2\alpha_0$. Используя понятие о конусе трения, формулируется условие равновесия твердого тела на шероховатой поверхности.

§ 6.3. Условие предельного равновесия тела на шероховатой поверхности

Рассмотрим предельное равновесие твердого тела на шероховатой поверхности под действием активных сил, равнодействующая которых на рис. 6.3 изображена через $\overline{F}$. Сила $\overline{F}$ действует под углом β к нормали в точке O. Сдвиг тела может произойти в плоскости, на которой покоится тело. Если тело лежит на криволинейной поверхности, мгновенный сдвиг может произойти в касательной плоскости к поверхности, проведенной в точке O. Не уменьшая общности, предположим, что сила $\overline{F}$ действует в плоскости Oyz. Тогда, проецируя действующие силы на ось Oz, получим $N - F\cos\beta = 0$. Отсюда $N = F\cos\beta$. Проецируя силы на ось Oy, будем иметь $F_{np} - F\sin\beta = 0$ и $F_{np} = F\sin\beta$. Тело будет оставаться в равновесии до тех пор, пока $F_{np} \geq F \cdot Sin\beta$. По закону Кулона $F_{np} = fN = fF\cos\beta$. Тогда $\overline{F}_{np} = fF\cos\beta = F\sin\beta$ или $f = tg\beta$. Последнее равенство справедливо только для состояния предельного равновесия. Левая часть этого равенства - постоянная величина $f = tg\alpha_0$. Следовательно, в состоянии предельного равновесия $tg\alpha_0 = tg\beta$ и $\alpha_0 = \beta$. Если же $\beta > \alpha_0$, то равновесие нарушается - сдвигающая сила

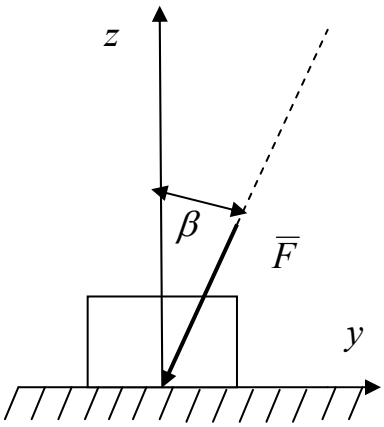


Рис.6.3

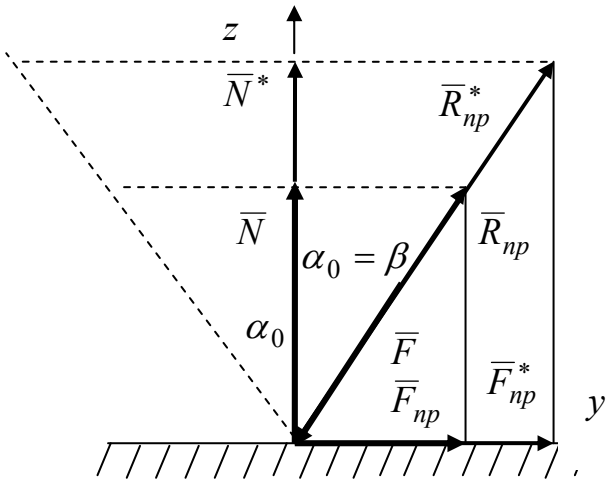


Рис.6.4

$F\sin\beta$ оказывается больше максимальной силы трения F_{np}, а если $\beta \leq \alpha_0$, сдвигающая сила $F\,Sin\,\beta$ будет меньше предельной силы трения F_{np} и сдвинуть тело не удается. Увеличение модуля силы $\overline{F}$ приводит к увеличению F_{np}, R_{np}, а тело остается в равновесии. Случай предельного равновесия показан на рис. 6.4. Здесь сила $\overline{F}$ действует вдоль образующей конуса трения.

6.9. Условие предельного равновесия. Никакая активная сила $\overline{F}$ не может вывести из равновесия тело, лежащее на шероховатой поверхности, если линия ее действия проходит через вершину конуса, оставаясь внутри него или на его поверхности.

Пример к параграфу 6.3

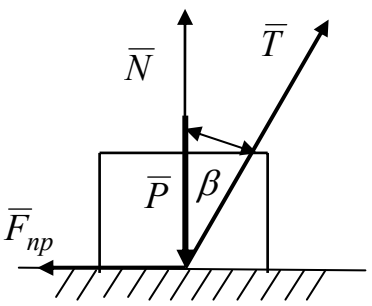


*Рис.*1

Пример 1. Металлический ящик весом P=1000 Н с плоским днищем лежит на горизонтальной ледяной поверхности. Определить величину силы $\overline{T}$, которую надо приложить к ящику под углом $\beta = 30^0$ к вертикали, чтобы сдвинуть его с места, если $f = 0{,}027$.

Решение: $tg\beta = tg30^0 = 0{,}577$. $tg\alpha_0 = f = 0{,}027$, т.е. $tg\beta > tg\alpha_0$ и при приложении силы достаточной величины ящик сдвинуть можно. Определим такую силу.

Запишем условия равновесия тела (см. рис. к задаче):

$\sum F_{kx} = 0$: $T\sin\beta - F_{пр} = 0$.

$\sum F_{ky} = 0$: $N - T\cos\beta - P = 0$.

Из второго уравнения: $N = P - T\cos\beta$. Тогда $F_{пр} = fN = f(P - t\cos\beta)$.

С учетом этого, из первого уравнения получим: $T\sin\beta - f(P - T\cos\beta) = 0$

или $$T = \frac{\gamma P}{\sin\beta + f\cos\beta} = 51{,}588\ H. \qquad (*)$$

Если сила $\overline{T}$ действует по горизонтали , то $\sum F_{kx} = T - F_{пр} = 0$; $T = F_{пр}$; $F_{пр} = fN$. $\sum F_{kx} = N - P = 0$; $N = P$ и $T = fP = 27\,H$.

Этот результат следует и из формулы (*), если принять $\beta = \pi/2$. *Ответ: T=27H.*

§ 6.4. Трение качения

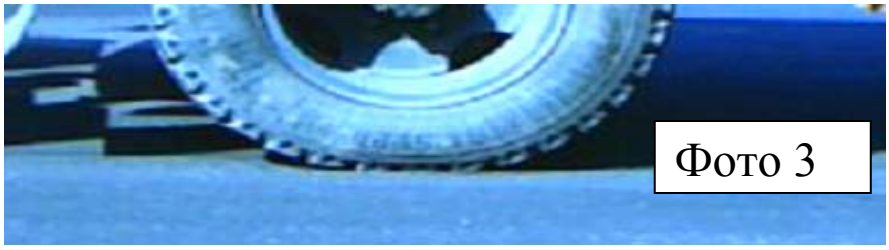
6.10. ***Трением качения*** *называется сопротивление, которое возникает при качении одного тела по поверхности другого.*

6.11. Сила, являющаяся мерой сопротивления качению одного тела по поверхности другого, называется силой трения качения.

6.12. Если внешние силы, вызывающие качение колеса, сводятся к силе, приложенной в центре колеса, и паре сил с моментом M_0, то колесо называется ведомо – ведущим. Если $M_0 \neq 0$; $Q = 0$, то колесо

называется ведущим, и если $M_0 = 0$; $Q \neq 0$, *то колесо называется ведомым.*

Рассмотрим движение ведомого колеса (катка) по горизонтальной плоскости. Опыты с качением одного тела по поверхности другого



показывают, что для построения механической модели качения нужно отказываться от принятой в теоретической механике гипотезы об абсолютно твердом теле. В теоретической механике это приходится делать только здесь. Картина движения видна уже на простейших экспериментах – наблюдениях (см. фото 1-3). Сопротивление качению возникает из-за того, что при качении деформируется или основание (фото 1), или само колесо - каток (фото 2, 3), или то и другое вместе.

Для начала построим модели движения качением для раздельных случаев. Схематично оба случая показаны на рис. 6.5, 6.6. Математические выкладки показывают, что обе модели приводят к одному и тому же результату. Поэтому обсудим, например, вариант, показанный на рис. 6.6. В центре катка приложена сила тяжести $\overline{P}$ и активная сила $\overline{Q}$. Из- за деформации основания нормальная реакция основания смещается от линии действия силы тяжести на некоторую величину δ_0 в сторону действия силы $\overline{Q}$ - в точку A. В этой же точке приложена сила трения качения $\overline{F}_{тр}^{кач}$. С увеличением Q, увеличивается и δ_0. В момент, предшествующий началу движения, то есть в состоянии предельного равновесия, $\delta_0 = \delta$, а $Q = Q_{пред} = \overline{F}_{пр}^{кач}$. При этом уравновешиваются две пары сил $\left\{ \overline{Q}_{пр},\ \overline{F}_{пр}^{кач} \right\}$ и $\left\{ \overline{P}, \overline{N} \right\}$. Приравнивая их моменты, получим:

$$N \cdot \delta = Q_{пр} \cdot (R - h) = Q_{пр} R(1 - h / R) \approx Q_{пр} \cdot R .$$

Отсюда $$Q_{пр} = \delta \cdot N / R \qquad (6.4)$$

или $$Q_{пр} = f^* N . \qquad (6.5)$$

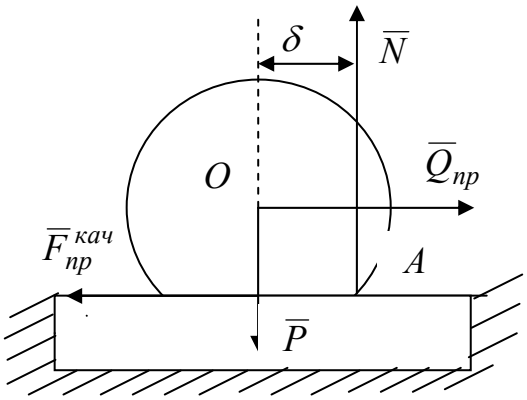


*Рис.*6.5

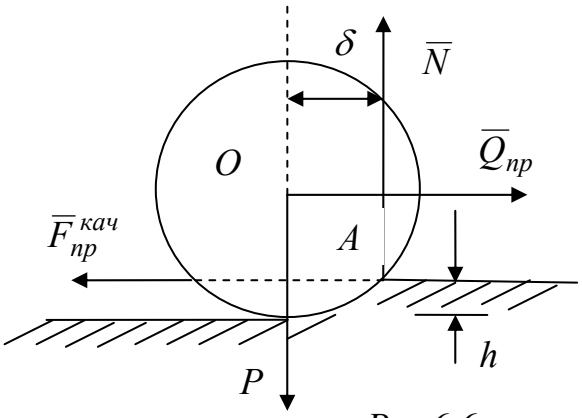


*Рис.*6.6

Здесь учтено, что деформации колеса или основания малы и $h / R << 1$. $f^* = \delta / R$ - безразмерный коэффициент трения качения для

колеса данного радиуса. В экспериментах с различными материалами колес и основания, различных радиусов колес установлено:

1. В достаточно широких пределах величина δ*, называемая коэффициентом (размерным) трения качения покоя, не зависит от радиуса колеса.*

2. $Q_{пр} = f^* N$ *и видим, что предельная сила трения* $F_{пр}^{кач} = Q_{пр}$ *при* f^**=const пропорциональна нормальной реакции, т.е. весу колеса.*

3. Коэффициент трения качения покоя δ *зависит от материала колеса и основания и их физического состояния (чистоты обработки в первую очередь), но не зависит от угловой скорости качения колеса и скорости скольжения по плоскости.*

Возвращаясь к (6.4), видим, что при $Q > Q_{пр}$ движение качением начнется, а при $Q < Q_{пр}$ колесо будет оставаться в равновесии. Другими словами, чтобы сдвинуть колесо с места, нужно приложить силу Q, большую, чем максимальная сила сопротивления движению качением.

Сравним (6.2) и (6.5) учитывая, что нормальная реакция плоскости $N = P$ (весу колеса). Тогда можно заключить: если $Q < fN = fP$, то движения скольжением нет. Если $Q < f^* N = f^* P$, то нет движения качением.

Если $f^* < f$, движение может начаться только тогда, когда Q станет больше $Q_{пр} = f^* N$. Если $Q > Q_{пр} = f^* N$, то имеет место движение качением. Когда $Q > Q_{пр}$ и $Q > F_{пр} = fP$, появляется еще и скольжение.

Если $f^* > f$, колесо находится в равновесии, пока $Q < fP$. При $fP < Q \le f^* P$ колесо скользит, не вращаясь. И когда $Q > f^* P$, наряду со скольжением возникает и качение. Для большинства встречающихся в практике случаев $f^* < f$. В этом мы находим объяснение тому, что на практике движение скольжением всегда стараются заменить движением качения. Примерные значения размерного коэффициента трения качения приведены в таблице 6.2

Таблица 6.2

Материалы	δ (см)
Дерево по дереву	0,05-08
Сталь мягкая по стали	0,005
Сталь закаленная по закаленной стали	0,001

§ 6. 5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.1. (1.48 [7]). Автомобиль весом P стоит на наклонном участке дороги. Высота центра тяжести грузовика над полотном дороги равна h, расстояние между центрами колес - b; коэффициент трения скольжения колес о дорогу равен f. При каком угле наклона дороги α к плоскости горизонта может произойти опрокидывание грузовика? Когда может начаться боковое скольжение ? *Ответ:* 1) Опрокидывание - при $f > tg\alpha > \frac{b}{2h}$. 2) Боковое скольжение - при $\frac{b}{2h} > tg\alpha > f$.

Задача 6.2. (1.50 [7]). Конструкция автомобиля позволяет крутящий момент от двигателя подводить к передней, или к задней оси. В каком случае при прочих равных условиях автомобиль может преодолеть более крутой подъем по дороге с малым коэффициентом трения скольжения? Почему? *Ответ:* Когда ведущая ось – задняя.

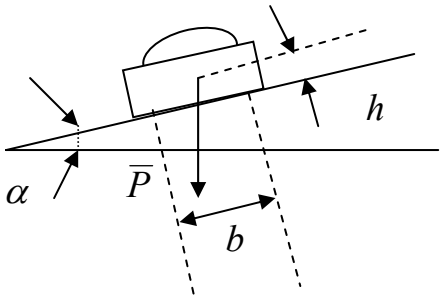


Рис. к задаче 6.1

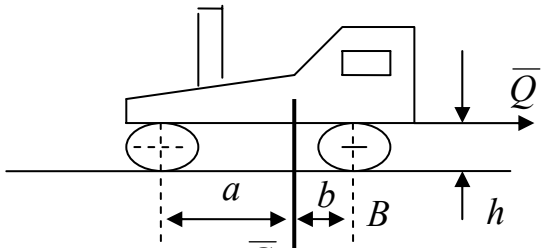


Рис. к задаче 6.3

Задача 6.3. (1.47[7]). Колесный трактор весом P соединен с прицепом водилом, расположенным на высоте h над дорогой. Сила сопротивления движению прицепа - $\overline{Q}$. Радиусы передних и задних (ведущих) колес принять одинаковыми и равными R, коэффициент трения качения колес - δ, коэффициент трения скольжения между колесом и дорогой - f. Принять моменты трения качения передних и задних колес равными их максимальным значениям, т.е. $\delta \cdot N_A$,$\delta \cdot N_B$ и считая, что ведущие колеса трактора не проскальзывают, найти: 1) При каком моменте M на ведущей оси трактора он тронется с места? 2) Вертикальные силы давления N_A, N_B на колеса в этот момент. 3) Силу тяги трактора Q_1 из условия, что она не опрокидывает его. 4) Силу тяги Q_2 при которой отсутствует проскальзывание ведущих колес. (Ответ:1) $M = QR + \delta G$.

2) $N_A = [G(b-\delta) - Qh]/(a+b)$: $N_B = [G(a+b) + Qh]/(a+b)$.

3) $Q_1 \le [G(b-\delta)]/h$. 4) $Q_2 \le G[fR(a+b) - \delta(b-a)]/[R(a+b) - h(fR+\delta)]$).

Ответ: $M = PR\sin\alpha$, $\alpha \le arctgf$.

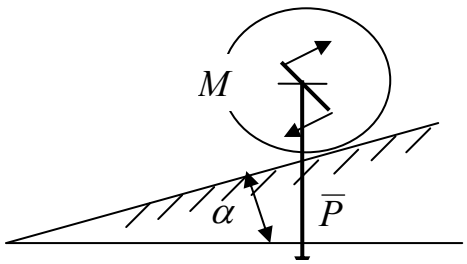


Рис. к задаче 6.4

Задача 6.4(1.43[7]). Цилиндр весом $\overline{P}$ и радиусом R лежит на шероховатой наклонной плоскости. Коэффициент трения скольжения цилиндра по плоскости равен f. При каком моменте M пары сил, приложенных к цилиндру, и каком угле наклона α плоскости к горизонту возможно равновесие цилиндра? Трением качения пренебречь. *Примечание:* Образующая цилиндра перпендикулярна линии наибольшего ската наклонной плоскости.

Вопросы для самоконтроля к главе 6

1. Что называется трением скольжения?
2. Что называется силой трения скольжения?
3. Что называется предельной силой трения скольжения и чему она равна?
4. От чего зависит коэффициент трения скольжения?
5. Сформулируйте закон Ш.Кулона.
6. Что такое состояние предельного равновесия?
7. Опишите конус трения, угол трения.
8. Что называется силой трения качения и чему она равна?
9. В каких единицах измеряются коэффициенты трения скольжения и качения?
10. Почему движение скольжением стараются заменить движением качением?

ГЛАВА 7. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 7.1. Понятие о центре параллельных сил

Пусть две параллельные силы $\overline{F}_1$,$\overline{F}_2$ приложены к телу в точках А и В (рис.7.1). Покажем, что они имеют равнодействующую $\overline{R}^* = \overline{R}$ (главному вектору), линия действия которой параллельна силам и пересекает отрезок AB в некоторой точке C. Выберем на отрезке AB произвольную точку приведения сил C и, пользуясь теоремой о параллельном переносе силы, приведем обе силы к этой точке. Получим:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \quad \text{и} \qquad m_C = m_C(\overline{F}_1) + m_C(\overline{F}_2) = F_1 \cdot h_1 - F_2 \cdot h_2,$$

где $h_1 = AC$ Cosα; $h_2 = BC$ Cos α - плечи сил относительно точки C (см. рис. 7.1). Точку С выберем так, чтобы главный вектор $\overline{R}$ стал равнодействующей. Тогда должно быть: $m_C = m_C(\overline{F}_1) + m_C(\overline{F}_2) = 0$. Отсюда

$$AC / BC = F_2 / F_1 \ . \qquad (7.1)$$

То есть, *отношение расстояний от точек приложения сил до точки приведения С обратно пропорционально отношению модулей приложенных сил.* Чем больше сила, тем ближе к ней стоит точка C . Так как силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно перемещать вдоль линии действия силы, равнодействующую $\overline{R}^* = \overline{R}$ можно приложить в любой точке прямой, проходящей через точку С, параллельно линиям действия сил. Легко показать, что положение точки C на отрезке AB не изменится, если обе силы относительно их точек приложения одновременно повернуть в одну сторону и на один и тот же угол.

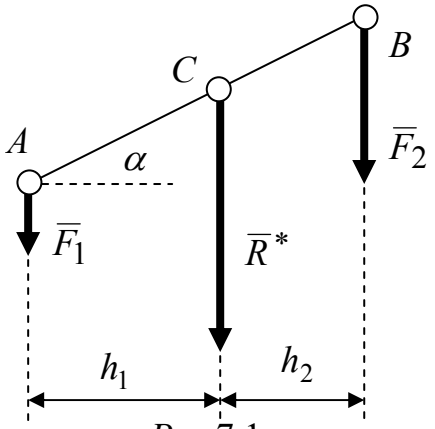


*Рис.*7.1

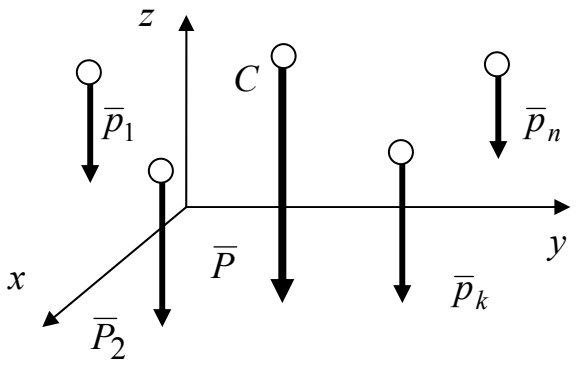


*Рис.*7.2

Точка С, обладающая рассмотренными свойствами, называется центром двух параллельных сил. Аналогичная ситуация наблюдается для системы из n одинаково направленных сил. Система имеет равнодействующую, линия действия которой проходит через точку приведения C.

7.1.Точка С, в которой пересекаются линии действия равнодействующих двух параллельных систем сил, полученных одна из другой путем одновременного поворота всех сил одной системы относительно их точек приложения на один и тот же угол и в одну и ту же сторону, называется центром параллельных сил.

Координаты центра параллельных сил определяются по формулам:

$$x_c = (\sum_{k=1}^{n} F_k x_k)/R \ ; \quad y_c = (\sum_{k=1}^{n} F_k y_k)/R \ ; \quad z_c = (\sum_{k=1}^{n} F_k z_k)/R \ . \qquad (7.2)$$

В формулах (7.2) R- модуль равнодействующей системы параллельных сил. Когда все силы направлены в одну сторону, R вычисляется как арифметическая сумма модулей всех сил системы. Величины x_C, y_C, z_C – это координаты центра системы параллельных сил C; x_k, y_k, z_k – координаты точек приложения отдельных сил рассматриваемой системы.

§ 7.2. Центр тяжести твердого тела

На Земле и вблизи земной поверхности на каждую частицу твердого тела действует направленная вертикально вниз сила тяжести. Можно считать, что эти силы, будучи приложенными к различным частицам тела, образуют параллельную систему сил. Обозначим через $\overline{p}_k$ - силу тяжести k - частицы, а через $\overline{P}$ - их равнодействующую (силу тяжести тела) .

7.2. Модуль равнодействующей сил тяжести, действующих на отдельные частицы твердого, тела, называется весом тела ($P = |\overline{P}|$).

По формулам (7.2) можно найти центр параллельных сил тяжести.

7.3. *Центром тяжести твердого тела называется центр параллельных сил тяжести, действующих на отдельные частицы данного тела (рис. 7.2).*

Центр тяжести – это геометрическая точка, в которой как бы сосредоточен вес тела. Легко проверить экспериментально, что, если в центре тяжести к свободному телу приложить силу, уравновешивающую силу тяжести тела, то тело будет находиться в состоянии равновесия. Теоретически это же следует и из первой аксиомы статики. Так как центр тяжести – точка геометрическая, она может располагаться и в пустоте (например, для пустотелого шара - мяча). Координаты центра тяжести находятся по формулам (7.3), которые прямо вытекают из (7.2).

$$x_c = (\sum_{k=1}^{n} p_k x_k)/P \ ; \quad y_c = (\sum_{k=1}^{n} p_k y_k)/P \ ; \quad z_c = (\sum_{k=1}^{n} p_k z_k)/P \ . \qquad (7.3)$$

Формулами (7.3) можно пользоваться тогда, когда тело может быть условно разбито на части, координаты центров тяжести которых x_k, y_k, z_k известны. На практике такие случаи встречаются часто и формулы (7.3) находят большое применение.

§ 7.3 Координаты центра тяжести однородного твердого тела

Центр тяжести объема. Как известно, вес однородного тела может быть вычислен по формуле $P = \gamma \cdot V$, где γ - удельный вес материала тела, V- объем тела. Аналогично, вес любой k - той части тела вычисляется по формуле $p_k = \gamma \cdot v_k$. Подставляя P и p_k в формулы (7.3), получим:

$$x_c = (\sum_{k=1}^{n} v_k x_k)/V; \qquad y_c = (\sum_{k=1}^{n} v_k y_k)/V; \qquad z_c = (\sum_{k=1}^{n} v_k z_k)/V. \qquad (7.4)$$

Центр тяжести плоской фигуры. Если тело представляет из себя тонкую однородную пластину постоянной толщины h, то разобьем ее на k частей, с известными координатами центров тяжести, при $V = S \cdot h$, $v_k = s_k \cdot h$. Здесь S *и* s_k - площади всей пластины и отдельной ее k - той части. Подставляя объемы V и v_k в формулы (7.4) получим:

$$x_c = (\sum_{k=1}^{n} s_k x_k)/S; \qquad y_c = (\sum_{k=1}^{n} s_k y_k)/S. \qquad (7.5)$$

Центр тяжести линии. Если тело имеет вид тонкого прямолинейного или изогнутого стержня с постоянной площадью поперечного сечения, например, длинный трубопровод постоянного диаметра, то $V = S \cdot L$; $v_k = s_k \cdot l_k$,

где L, l_k - вся длина стержня и длина его отдельной части, соответственно. Подставляя объемы V и v_k в формулы (7.4), имеем:

$$x_c = (\sum_{k=1}^{n} l_k x_k)/L; \qquad y_c = (\sum_{k=1}^{n} l_k y_k)/L; \qquad z_c = (\sum_{k=1}^{n} l_k z_k)/L. \qquad (7.6)$$

§ 7.4. Практические методы определения координат центров тяжести твердых тел

1. Метод симметрии. Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела лежит на этой оси Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости. Если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела совпадает с центром симметрии.

2.Метод разбиения (метод дополнения). Метод уже использован при получении формул (7.3)-(7.6). Метод основан на разбиении тела или плоской фигуры на части, координаты центров тяжести которых известны.

3. Метод интегрирования. Иногда приходится иметь дело с телами «неправильной формы».Тело неправильной формы не удается разбить так, чтобы координаты центров тяжести всех частей были известны. Тогда вычисление координат центра тяжести тела сводится к вычислению интегралов по объему тела, или по площади фигуры, или криволинейного интеграла вдоль линии. Соответствующие формулы имеют вид:

$$x_c = \frac{1}{V}\int_v x dv; \qquad y_c = \frac{1}{V}\int_v y dv; \qquad z_c = \frac{1}{V}\int_v z dv. \qquad (7.7)$$

Или
$$x_c = \frac{1}{S}\int_{(s)} x ds; \qquad y_c = \frac{1}{S}\int_{(s)} y ds. \qquad (7.8)$$

Или
$$x_c = \frac{1}{L}\int_{(L)} x dL; \qquad y_c = \frac{1}{L}\int y dL; \qquad z_c = \frac{1}{L}\int_{(L)} z dL. \qquad (7.9)$$

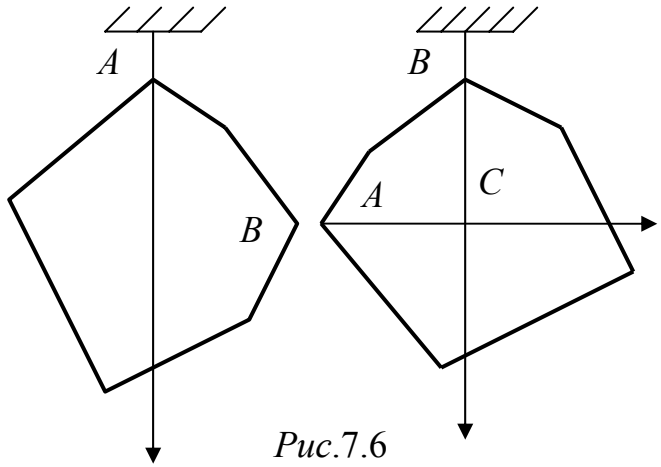


*Рис.*7.6

4. Экспериментальные методы (рис.7.6). Рассмотрим метод подвешивания для определения координат центра тяжести плоского многоугольника. Сделаем два испытания (подвешивания) многоугольника за две его вершины *A* и *B*. Одновременно при помощи отвеса нанесем на поверхности фигуры линию, проходящую через точку подвеса фигуры. Точка пересечения линий отвеса при двух способах подвешивания и дает центр тяжести фигуры. Существуют и другие экспериментальные методы.

§ 7.5. Примеры к главе 7

Пример 1. На рисунках к примеру показаны однородные тела в виде плоских фигур, которые имеют ось симметрии (рис.1) и объемные однородные тела, имеющие центр симметрии (рис.2). В первом случае (рис.1) центр тяжести лежит где-то на оси

симметрии. В этом случае больше ничего не известно. Во втором случае (рис.2) точно известно, что центр тяжести лежит в центре тела, то есть в центре симметрии тела.

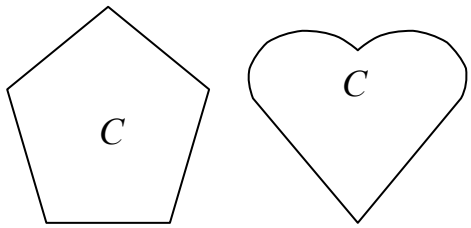


*Рис.*1

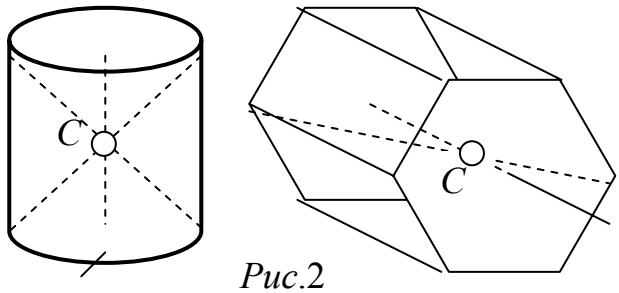


*Рис.*2

Пример 2. Поясним на примере метод разбиения (дополнения). Определить координаты центра тяжести п-образной плоской фигуры, показанной на рис. 3, если прямоугльник без выреза имеет размеры $3a \times 2a$ (*м*), размер выреза - $a \times a$ (*м*). Решение провести методом разбиения, методом дополнения и, последнее, воспользоваться методом симметрии.

***Решение**: а) Метод разбиения (рис. 3).* Сама фигура и система координат, в которой проводятся вычисления, показаны на рис. 3. Разобьем заданную фигуру на три фигуры и пометим их номерами. Вычислим площади и координаты центров тяжести фигур в показанных на рисунке осях:

$$x_1 = 0{,}5a; \quad x_2 = 1{,}5a; \quad x_3 = 2{,}5a; \qquad y_1 = a; \quad y_2 = 1{,}5a; \quad y_3 = a.$$

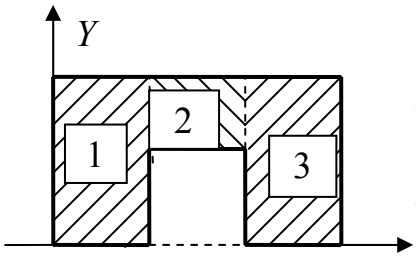


*Рис.*3

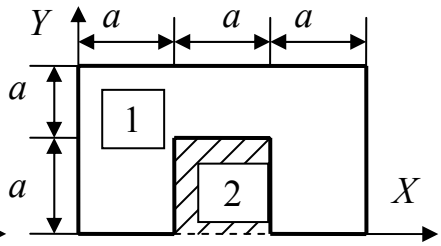


*Рис.*4

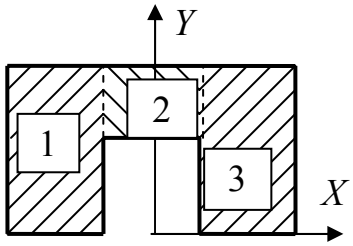


*Рис.*5

$$s_1 = 2a^2; \qquad s_2 = a^2; \qquad s_3 = 2a^2; \qquad s = s_1 + s_2 + s_3 = 5a^2.$$

По (7. 5) будем иметь:

$$x_c = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}{s} = \frac{2a^2 \cdot 0{,}5a + a^2 \cdot 1{,}5a + 2a^2 \cdot 2{,}5a}{5a^2} = \frac{7{,}5a^3}{5} = 1{,}5a;$$

$$y_c = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3}{s} = \frac{2a^2 \cdot a + a^2 \cdot 1{,}5a + 2a^2 \cdot a}{5a^2} = \frac{5{,}5a^2}{5} = 1{,}1a$$

б) Методом дополнения (рис.4). Дополним фигуру до полного прямоугольника и назовем ее первой фигурой. Второй фигурой будет квадрат выреза. Тогда

$$x_1 = 1{,}5a; \quad x_2 = 1{,}5a; \quad y_1 = a; \quad y_2 = 0{,}5a; \quad s_1 = 2a \cdot 3a = 6a^2; \quad s_2 = a^2.$$

Площадь всей фигуры: $s = s_1 - s_2 = 5a^2$. *Внимание!* При вычислении координат центра тяжести обратите внимание на знаки. Произведение, относящееся к вырезу, вычитается.

$$x_c = \frac{s_1 x_1 - s_2 x_2}{s} = \frac{6a^2 \cdot 1{,}5a - a^2 \cdot 1{,}5a}{5a^2} = \frac{7{,}5a^3}{5a^2} = 1{,}5a;$$

$$y_c = \frac{s_1 y_1 - s_1 y_1}{s} = \frac{6a^2 \cdot a - a^2 \cdot 0{,}5a}{5} = \frac{5{,}5a^3}{5} = 1{,}1a.$$

Как видим, оба метода дают один и тот же результат. Это объясняется тем, что центр тяжести фигуры определялся в одних и тех же осях.

в) Метод симметрии (рис.5). Заметим, что заданная фигура имеет ось симметрии. Тогда по методу симметрии, центр тяжести должен лежать на этой оси. Совместим с ней ось Oy нашей системы координат. Воспользуемся методом разбиения, и запишем:

$$x_1 = -1{,}5a; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 1{,}5a; \quad y_1 = a; \quad y_2 = 1{,}5a; \quad y_3 = a;$$

$$s_1 = s_3 = 2a^2; \quad s_3 = a^2; \quad s = 5a^2;$$

$$x_c = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}{s} = \frac{-2a^2 \cdot 1{,}5a + a^2 \cdot 0 + 2a^2 \cdot 1{,}5a}{5a^2} = 0;$$

$$y_c = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3}{s} = \frac{2a^2 \cdot a + a^2 \cdot 1{,}5a + 2a^2 \cdot a}{5a^2} = 1{,}1a.$$

Действительно, центр тяжести оказался на оси симметрии $x_c = 0$. Сравнивая найденные значения координат центра тяжести в трех случаях, видим, что они указывают на одну и ту же геометрическую точку. Последний путь решения самый рациональный, так как владея методом симметрии, координату $x_c = 0$ можно было не определять.

§ 7.6. Применение теории параллельных сил к определению равнодействующей распределенных сил

В технических приложениях взаимодействие тел по линиям моделируются силами, непрерывно распределенными по линиям. Но теоретические построения в статике выполнены для систем сосредоточенных сил. Следовательно, необходимо определить равнодействующую (то есть сосредоточенную силу) распределенных по линии сил как по величине, так и по направлению. Для обозначения распределенных сил в механике используется символ $\overline{q}$. Это вектор. Для обозначения модуля этой величины будем использовать ту же букву q. Но это уже скаляр. Равнодействующую распределенной по некоторому

отрезку силы можно было бы, как раньше, обозначить символом $\overline{R}^*$. Однако, чтобы подчеркнуть связь равнодействующей с распределенной силой, введено обозначение $\overline{Q}$. Модуль равнодействующей обозначается просто буквой Q. Из теории параллельных сил известно, что равнодействующая $\overline{Q}$ будет параллельна распределенной силе $\overline{q}$. Распределенную силу в прикладных разделах механики называют распределенной нагрузкой. В системе единиц СИ основной единицей измерения для q будет Н/м, а для модуля силы Q - Н (Ньютон).

Определим равнодействующую непрерывно распределенных по линии параллельных сил, показанных на рисунках 7.7 и 7.8.

А) Равномерно распределенная сила (рис. 7.7). Начало координат выберем в точке *A*. Ось Ax направим в сторону точки *B*. Выделим на отрезке *AB* бесконечно малый элемент длиной dx, через который на отрезок *AB* передается элементарная сила $d\overline{Q} = \overline{q} \cdot dx$, модуль которой равен $dQ = q \cdot dx$ (Н). В силу малости отрезка dx можно считать, что элементарная сосредоточенная сила $d\overline{Q}$ приложена на левом конце этого отрезка. Определим модуль равнодействующей $\overline{Q}$ всей распределенной по отрезку *AB* силы $\overline{q}$. Для этого надо просуммировать модули бесконечного числа элементарных сил $d\overline{Q}$, то есть вычислить интеграл:

$$Q = \int_0^l q \cdot dx = q \cdot \int_0^l dx = q \cdot l = q \cdot AB; \qquad Q = q \cdot AB. \qquad (7.10)$$

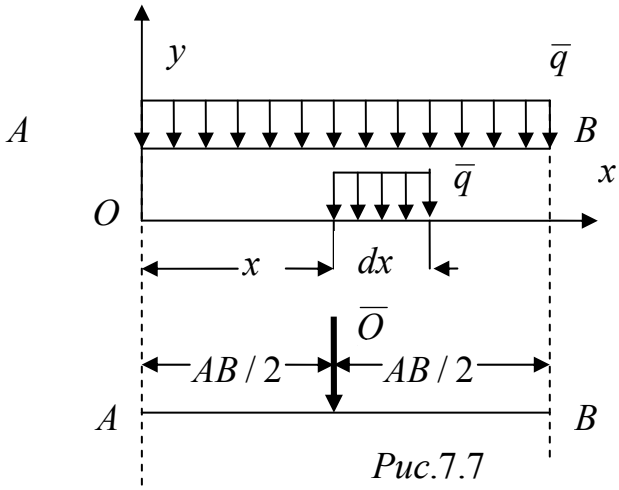


Рис.7.7

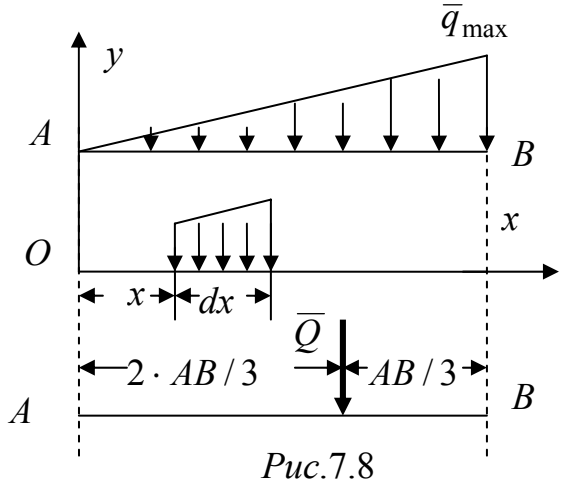


Рис.7.8

7.4. Итак, *модуль равнодействующей равномерно распределенной по линии силы равен произведению модуля распределенной силы q на длину отрезка, по которому эта сила действует.*

Определим на отрезке AB координату точки, через которую проходит линия действия равнодействующей $\overline{Q}$, как координату x_C центра бесконечного числа параллельных сил $d\overline{Q}$. При этом в формулах 7.3 значок суммы придется заменить значком интеграла. Тогда:

$$x_C = \frac{1}{Q} \cdot \int_0^l x \cdot q dx = \frac{1}{ql} \cdot q \frac{x^2}{2}\Big|_0^l = \frac{1}{ql} \cdot \frac{ql \cdot l}{2} = \frac{l}{2}; \qquad x_C = \frac{AB}{2}. \qquad (7.11)$$

7.5. Другими словами, линия действия равнодействующей равномерно распределенной силы делит отрезок AB на две равные части.

Тогда сила $\overline{Q}$ должна быть приложена, как показано на рисунке *7.7.*

Б) Распределенная сила $\overline{q}(x)$, изменяющаяся по линейному закону от нуля да некоторого максимального значения $q_{\max} = q_1$ (рис. 7.8). Такое распределение силы называют еще распределением по закону треугольника. Систему координат выберем, как в предыдущем случае. Модуль распределенной силы меняется по закону

$$q(x) = \frac{q_1}{l} \cdot x, \qquad \text{где} \qquad 0 \le x \le l.$$

Модуль равнодействующей Q будет равен:

$$Q = \int_0^l q(x) \cdot dx = \int_0^l \frac{q_1}{l} \cdot x \cdot dx = \frac{q_1 \cdot x^2}{2 \cdot l}\Big|_0^l = \frac{q_1 \cdot l}{2}.$$

7.6. Итак, модуль равнодействующей, распределенной по закону треугольника силы, равен половине произведения модуля максимального значения распределенной силы $q_{\max}$ на длину отрезка, по которому эта сила действует (7.12).

$$Q = \frac{q_1 \cdot AB}{2}. \qquad (7.12)$$

Линия действия равнодействующей $\overline{Q}$ параллельна силе $\overline{q}$ и пересекает отрезок AB в точке с координатой x_C.

$$x_C = \frac{1}{Q} \cdot \int x \cdot q(x) dx = \frac{1}{Q} \cdot \int x \cdot \frac{q_1}{l} x \cdot dx = \frac{1}{Q} \cdot \frac{q_1}{l} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{2}{q_1 l} \cdot \frac{q_1}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{2l}{3};$$

$$x_C = \frac{2}{3} \cdot AB. \qquad (7.13)$$

7.7. Итак, равнодействующая сила $\overline{Q}$ сил, распределенных по линейному закону (закону треугольника), должна быть приложена на расстоянии двух третьих от точки A, являющейся вершиной треугольника.

Замечание. Полученные результаты для двух частных видов распределенной силы показали, что линия действия равнодействующей $\overline{Q}$ проходит через центры тяжестей геометрических фигур (прямоугольник и прямоугольный треугольник), изображающих вид распределенной силы. Этот вывод справедлив для любых распределенных по линии сил.

7.8 Линия действия равнодействующей $\overline{Q}$, непрерывно распределенной вдоль отрезка прямой по любому закону силы $\overline{q}(x)$, параллельна силе $\overline{q}(x)$ и проходит через центр тяжести геометрической фигуры, изображающей изменение модуля этой распределенной силы.

§ 7.7. Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.1. Пользуясь методами симметрии, разбиения и дополнения, определить координаты центров тяжестей плоских однородных фигур, показанных на рисунках к задаче.

Рекомендация. Систему координат рекомендуется выбирать так, чтобы вся фигура располагалась в положительной четверти осей координат. В этом случае координаты всех отдельных частей фигуры будут положительны и выразятся через размер *a*.

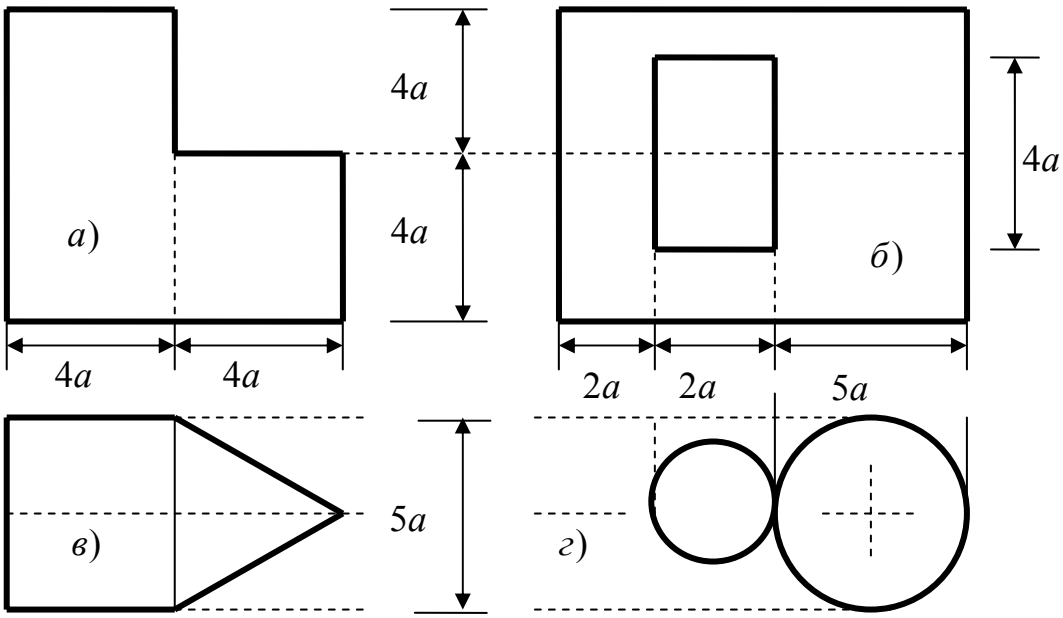


Рис. к задаче 7.1

Вопросы для самоконтроля к главе 7

1. Какие системы сил называются системами параллельных сил?
2. Что называется центром параллельных сил?
3. Напишите формулы для определения координат центра параллельных сил.
4. Что называется центром тяжести твердого тела?
5. По каким формулам определяются координаты центра тяжести твердого тела?
6. По каким формулам определяются координаты центра тяжести объема, площади и линии?
7. Что называется весом тела?
8. В каких единицах можно измерить вес тела?
9. Опишите метод разбиения и метод дополнения для определения координат центра тяжести однородного твердого тела.
10. Чему равна равнодействующая сил, равномерно распределенных по отрезку прямой?
11. Как проходит линия действия равнодействующей сил, равномерно распределенных вдоль отрезка прямой ?
12. Чему равна равнодействующая сил, непрерывно распределенных по закону треугольника вдоль отрезка прямой?
13. Как проходит линия действия равнодействующей сил, непрерывно распределенных по закону треугольника вдоль отрезка прямой?
14. Где приложена сила тяжести тела?
15. Чем различаются сила тяжести тела и вес тела?
16. В каких единицах измеряется модуль силы, распределенной по линии?
17. В каких единицах измеряется модуль равнодействующей распределенных сил?
18. Опишите метод симметрии для определения положения центра тяжести однородного тела.
19. Опишите метод подвешивания для определения центра тяжести плоских фигур.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ

А. Алгебра

1. Действия с показательными выражениями

$$a^m a^n = a^{m+n};\ \ a^m / a^n = a^{m-n};\ \ \left(a^m\right)^n = a^{mn};\ \ \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

2. Натуральные логарифмы. Логарифмированием некоторой величины называется нахождение ее логарифма. Нахождение величины по ее логарифму называется потенцированием. Логарифмом L числа N при основании c называется показатель степени, в которую нужно возвысить основание c, чтобы получить L. ($L = \log_C N \leftrightarrow C^L = N$). Всякое положительное число при любом положительном основании с, за исключением единицы, имеет свой логарифм. Если $c = e = 2{,}7118181818$, то логарифм называется натуральным и обозначается $L = \ln N$ без указания основания.

Логарифмы обладают следующими свойствами:

$$\ln 1 = 0;\ \ln e = 1;\ \ln 0 = -\infty;\quad \ln(ab) = \ln a + \ln b;\ \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b;$$

$$\ln a^n = n\ln a;\ \ln\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\ln a.$$

3. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ *и формулы сокращенного умножения*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если $b^2 - 4ac > 0$, имеется два действительных корня, если $b^2 - 4ac = 0$ - два совпадающих корня, если $b^2 - 4ac < 0$ - два мнимых корня. Полезны следующие формулы:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;\qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$\left(a^2 - b^2\right) = (a+b)(a-b);\qquad \left(a^3 \pm b^3\right) = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right).$$

Б. Геометрия

1. Треугольник. Сумма углов треугольника равна 2π *рад* или 180° (рис.1). Площадь треугольника вычисляется по формуле $S = 0{,}5 \cdot b \cdot h$ или

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = 0{,}5 \cdot (a + b + c)$ (смотри обозначения на рис.1).

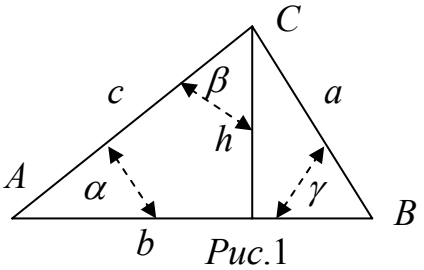


*Рис.*1

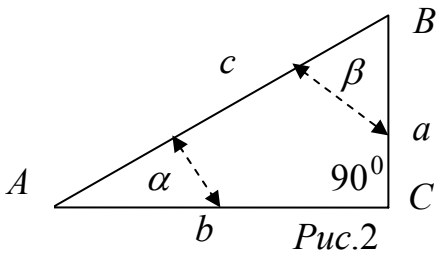


*Рис.*2

При решении треугольников используются **теоремы косинусов**:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma;$$

и синусов $a / \sin\alpha = b / \sin\beta = c / \sin\gamma$

Для прямоугольных треугольников имеют место соотношения (рис.2):

$$S = 0{,}5\,ab; \quad c^2 = a^2 + b^2; \quad \sin\alpha = a / c; \quad \cos\alpha = b / c; \quad tg\,\alpha = a / b.$$

Центр тяжести треугольников находится на пересечении медиан, то есть прямых, соединяющих вершины треугольников с серединами противолежащих сторон.

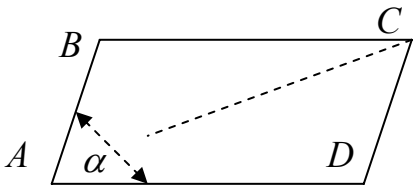


*Рис.*3

2. Параллелограмм (рис.3). Противолежащие стороны параллелограмма попарно равны и параллельны, противоположные углы равны, площадь параллелограмма $S = bh$. Длину диагонали можно вычислить по теореме косинусов, которая в данном случае примет вид :

$$d^2 = a^2 + b^2 + ab\cos(\angle ВАД)$$

3. Окружность. Длина окружности $L=2\pi r=\pi d$. Площадь круга $S=\pi r^2$. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу окружности, проведенному в точку касания.

В. Тригонометрия

1.Приведем некоторые часто используемые формулы тригонометрии:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\ ;\ \ \sin\alpha/\cos\alpha=tg\alpha\ \ ;\ \ \cos\alpha/\sin\alpha=ctg\alpha$$

$$\sin\alpha=\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}};\qquad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}};\qquad tg\,2\alpha=\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha};$$

$$Sin(\alpha\pm\beta)=Sin\alpha\cdot Cos\beta\pm Cos\beta\cdot Sin\alpha\ ;$$
$$Cos(\alpha\pm\beta)=Cos\alpha\cdot Cos\beta\mp Sin\alpha\cdot Sin\beta;$$

$$Sin2\alpha=2Sin\alpha\cdot Cos\alpha\ ;\qquad Cos2\alpha=Cos^2\alpha-Sin^2\alpha;$$
$$Sin^2\alpha=(1-Cos2\alpha)/2\ ;\qquad Cos^2\alpha=(1+Cos2\alpha)/2\ ;$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ;\quad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ ;\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right].$$

2. Формулы приведения

Функции углов	β=90°±α	β=180°±α	β=270±α	β=360°±α
sin β	+ cos α	∓ sin α	- cos α	± sin α
cos β	∓ sinα	- cos α	± sin α	+ cos α

3. Значения тригонометрических функций некоторых углов

Функция--α(град.)	0	30°	45°	60°	90°
sin α	0	0,5	√2 / 2	√3 / 2	1
cos α	1	√3 / 2	√2 / 2	0,5	0
tg α	0	1 / √3	1	√3	± ∞
ctg α	± ∞	√ 3	1	1 /√3	0
функция α (рад)	0	π / 6	π / 4	π / 3	π / 2

Г. Элементы векторной алгебры

Примерами векторных величин в механике являются: сила, момент силы относительно центра, скорость точки, ускорение точки и т.д. Все операции с их векторами выполняются по правилам векторной алгебры.

***1. Геометрический способ сложения векторов (правило параллелограмма или треугольника)*:** суммой двух векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$, приложенных в одной точке, является вектор $\bar{c}$, изображающийся диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах. Символически это записывается так: $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ (смотри третью аксиому статики для сил).

Чтобы определить числовые значения векторов можно: а) построить параллелограмм в масштабе и неизвестный вектор $\bar{c}$ определить графически. б) построив чертеж параллелограмма, воспользоваться для вычислений теоремами косинусов или синусов.

2. Аналитический способ задания и действия с векторами . Пусть

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \qquad \text{Тогда} \qquad |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Здесь a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\bar{a}$ на оси *Ox, Oy, Oz.* Косинусы углов между векторами и положительными направлениями осей *Ox, Oy, Oz* равны

$$\cos\alpha = a_x / |\bar{a}| \;;\; \cos\beta = a_y / |\bar{a}| \;;\; \cos\gamma = a_z / |\bar{a}|.$$

Если вектор $\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k$, то $a_x = \sum_{k=1}^{n} a_{kx}$; $a_y = \sum_{k=1}^{n} a_{ky}$; $a_z = \sum_{k=1}^{n} a_{kz}$.

Модуль вектора

$$|\bar{a}| = \sqrt{\left(\sum a_{kx}\right)^2 + \left(\sum a_{ky}\right)^2 + \left(\sum a_{kz}\right)^2}\ .$$

3. Скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть скалярная величина, которая обозначается:

$$\left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\alpha\ .$$

Здесь α - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

4. Векторное произведение $\bar{c}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть векторная величина.

$$\bar{c} = \left[\bar{a} \times \bar{в}\right] \text{ или } \bar{c} = \left(\bar{a} \times \bar{в}\right) \quad \text{и} \quad |\bar{c}| = \left||\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\alpha\right|.$$

Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ и направлен так, что кратчайший поворот от первого (сомножителя) вектора $\bar{a}$ ко второму (сомножителю) вектору $\bar{b}$ должен наблюдаться происходящим против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\bar{c}$.

Координаты *(проекции вектора на оси координат) вектора* $\bar{c}$ определяются по формулам:

$$c_x = a_y b_z - b_y a_z\ ; \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z\ ; \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x\ .$$

Д. Производные и интегралы некоторых функций

1. Таблица производных

1) $(c) = 0$; *c=const;* 2) $(x^n) = n\,x^{n-1}$; *n=const;*

3) $(e^x) = e^x$; 4) $(a^x) = a^x \cdot \ln a$; *a=const ;*

5) $(\ln x)' = 1/x$;

6) $(\sin x)' = \cos x$; 7) $(\cos x)' = -\sin x$;

8) $(tgx)' = 1/\cos^2 x$; 9) $(ctgx)' = -1/\sin^2 x$;

10) $(shx)' = chx$; 11) $(chx)' = shx$,

где
$$shx=(e^{x}-e^{-x})/2;$$
$$chx=(e^{x}+e^{-x})/2.$$

- гиперболический синус и косинус, соответственно.

2. Дифференцирования сложной функции.

Пусть $y = f[\varphi(x)]$, тогда $y' = f'_{\varphi}[\varphi(x)]\cdot\varphi'_{x}(x)$.

Примеры:

1) $y = \sin 2x,\ y' = \cos 2x\cdot(2x)' = 2\cos 2x.$

2) $y=a^{2t};\quad y'=a^{2\cdot t}\cdot\ln a\cdot(2t)'=2a^{2t}\ln a.$

3. Таблица неопределенных интегралов

1) $\int kdx = kx + c$; 2) $\int x^{n}dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$;

2) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln x + c$; 4) $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + c$;

5) $\int e^{x}dx = e^{x} + c$;

6) $\int \sin xdx = -\cos x + c$; 7) $\int \cos xdx = \sin x + c$;

8) $\int chxdx = shx + c$; 9) $\int shxdx = chx + c$.

Во всех формулах C – постоянная интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1.Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа. -2004.- 416с.
2.Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – С.-С-Петербург: Лань. -2004. -786с.
3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1986. – 448с. Или С-Петербург-Москва-Краснодар: Лань, -2008.-448с.
4. Сборник коротких задач по теоретической механике. Под ред. Кепе О.Э. М.: Высшая школа, 1986. – 368с. Или 2-е стереотипное изд. С-Петербург, Лань,-2008г, - 368с.
5. Шигабутдинов Ф.Г., Камалов А.З., Шигабутдинов А.Ф. Сборник задач по теоретической механике. Статика. Казань: КГАСУ, -2004. -179с.

Дополнительная литература

6. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики. (Под редакцией К.С. Колесникова) М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, -2000. – 736с.
7.Сборник задач по теоретической механике. (Под редакцией К.С.Колесникова) М.: Наука, -1989. – 448с. Или 4-е стереотипное издание, С-Петербург, Лань, -2009г.-448с.
8.Сахарный Н.Ф. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1964. – 596с.
9.Бражниченко Н.А., Кан В.Л. и др. Сборник задач по теоретической механике. 3-е изд., переработанное и дополненное. – М.: Высшая школа, -1974.
10.Статика. Задания и методические указания к выполнению курсовой работы по теоретической механике (под ред. Шигабутдинова Ф.Г.). Казань: КГАСУ, - 2007. – 47с.

Электронные видео курсы

11.Шигабутдинов Ф.Г., Шигабутдинов А.Ф. Курсовые работы по статике. Видео фильмы - на 5-ти DVD дисках. Казань. - 2004, Разбор курсовой работы в аудитории. Материалы можно получить на кафедре теоретической механики КГАСУ.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРОВ 3
ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 4
§ 1.1. Статика. Тела статики 4
§ 1.2. Сосредоточенная сила. Системы сосредоточенных сил 6
§ 1.3. Примеры к параграфу 1.2 10
§ 1.4. Аксиомы статики 11
§ 1.5. Примеры к параграфу 1.4 13
§ 1.6. Связи. Реакции связей 15
Вопросы для самоконтроля к главе 1 25

ГЛАВА 2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. 26
§ 2.1. Геометрический способ упрощения системы сходящихся сил 26
§ 2.2. Аналитический способ определения и сложения сил. 33
§ 2.3. Построение вектора силы по его проекциям 37
§ 2.4. Примеры к параграфам 2.2, 2.3. 38
§ 2.5. Условия равновесия системы сходящихся сил. 42
Вопросы для самоконтроля к главе 2 45

ГЛАВА 3. МОМЕНТ СИЛЫ. ПАРА СИЛ. ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ К ЦЕНТРУ. 47
§ 3.1. Условия равновесия простейшего рычага. 47
§ 3.2. Алгебраический момент силы относительно центра. Главный алгебраический момент плоской системы сил относительно центра. 49
§ 3.3. Примеры к параграфам 3.1, 3.2. 51
§ 3.4. Векторный момент силы относительно центра. 53
§ 3.5. Момент силы относительно оси. 57
§ 3.6. Вычисление моментов силы относительно осей при аналитическом способе задания вектора силы. 61
§ 3.7. Примеры вычисления момента силы относительно оси. 63
§ 3.8. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. 65
§ 3.9. Примеры на применение теоремы Вариньона. 68
§ 3.10. Пара сил. Краткие сведения из теории пар. 70
§ 3.11. Свойства пар сил 73
§ 3.12. Основная теорема статики 77
§ 3.13. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил. 80
§ 3.14. Условия равновесия произвольной плоской системы сил. 82
Вопросы для самоконтроля к главе 3. 83

ГЛАВА 4. РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ. 85
§ 4.1. Равновесие твердого тела под действием плоской системы сходящихся сил. 85
§ 4.2. Примеры к параграфу 4.1 88
§ 4.3. Равновесие твердого тела под действием произвольной плоской системы сил. 90
§ 4.4. Примеры к параграфу 4.3. 96
§ 4.5. Задачи для самостоятельного решения на равновесие 95
твердых тел под действием плоской системы сил. 103
§ 4.6. Исследование равновесия системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. 108
Вопросы для самоконтроля к главе 4 111

ГЛАВА 5. РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ. 113
§ 5.1. Равновесие твердого тела под действием пространственной системы сходящихся сил. 113
§ 5.2. Примеры к параграфу 5.1. 114
§ 5.3. Равновесие твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил. 120
§ 5.4. Примеры к параграфу 5.3. 121
§ 5.5. Задачи для самостоятельного решения к главе 5 131
Вопросы для самоконтроля к главе 5. 139

ГЛАВА 6. ТРЕНИЕ. 140
§ 6.1. Законы Кулона. 140
§ 6.2. Угол трения. Конус трения. 142
§ 6.3. Условие предельного равновесия тела на шероховатой поверхности. 144
§ 6.4. Трение качения. 145
§ 6.5. Задачи для самостоятельного решения. 149
Вопросы для самоконтроля к главе 6. 150

ГЛАВА 7. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ. 150
§ 7.1. Понятие о центре параллельных сил. 150
§ 7.2. Центр тяжести твердого тела. 152
§ 7.3. Координаты центра тяжести однородного твердого тела. 153
§ 7.4. Практические методы определения координат центров тяжести твердых тел. 153
§ 7.5. Примеры к главе 7. 154

§ 7.6. Применение теории параллельных сил к определению равнодействующей распределенных сил. 156
§ 7.7 Задачи для самостоятельного решения. 159
Вопросы для самоконтроля к главе 7. 160

ПРИЛОЖЕНИЕ (Краткие сведения из математики) 161
ЛИТЕРАТУРА 167
ОГЛАВЛЕНИЕ 168

Феликс Галлямович Шигабутдинов
Айрат Феликсович Шигабутдинов

КРАТКИЙ КУРС

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Ч.1. СТАТИКА

Учебное пособие

Редактор: В.В. Попова

Редакционно-издательский отдел
Казанского государственного архитектурно-строительного
университета

Подписано в печать 09.09.2009 Формат 60 ×84/16
Заказ № 42 Печать ризографическая Усл.-печ. л. 10,7
Тираж 300 экз. Бумага офсетная №1 Уч. -изд. л. 10,7
Печатно-множительный отдел КГАСУ
420043, Казань, ул. Зеленая , д. 1

Отпечатано в ООО "Ислам-пресс"
420049, РТ, г.Казань, ул.Газовая, д.19, к.119
тел.:(843) 246-46-96
www.islam-press.ru