МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Р.А. Каюмов, И.З. Мухамедова

СБОРНИК ЗАДАЧ
С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЙ ПО ТЕМЕ «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ»

Учебно-методическое пособие

Казань
2019

СОДЕРЖАНИЕ

Основные понятия и формулы

Растяжение (сжатие)– это такой вид нагружения стержня, при котором в его поперечном сечении возникает только **внутренняя продольная сила N**, действующая вдоль оси бруса z.

Продольная сила (нормальная сила) N в сечении бруса – это суммарная сила, с которой левая часть воздействует на правую часть (или наоборот).

Вычисление продольной силы.

Для вычисления N применяется метод сечений. Продольная сила N численно равна алгебраической сумме проекций всех сил на продольную ось бруса, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

$$N = \sum_{\substack{\text{по одну} \\ \text{сторону} \\ \text{сечения}}} P_{iz} \qquad (1)$$

Правило знаков для N (рис.1):

При **растяжении** продольная сила **положительна** (если внешняя нагрузка направлена от сечения), при **сжатии – отрицательна** (если внешняя нагрузка направлена к сечению).

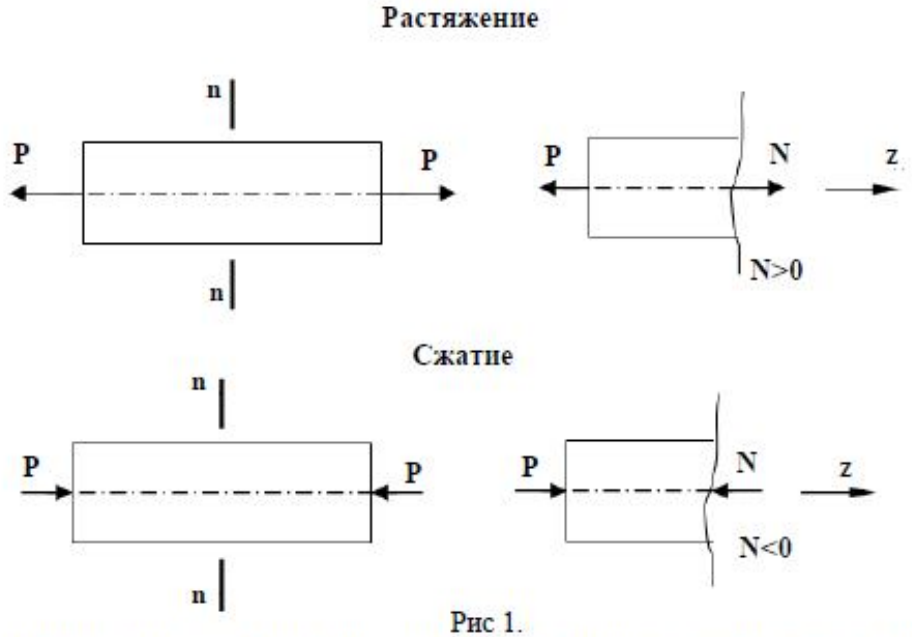


Рис 1.
Продольные силы в сечении – сжимающая (отрицательная) продольная сила; растягивающая (положительная) продольная сила

Например, согласно рис.2, внешние силы, действующие по правую сторону от сечения стержня n-n есть результат воздействия правой части стержня на левую (или наоборот). Так, с силой $\mathbf{N} = -\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ левая часть бруса в сечении воздействует на правую. Правая же часть бруса в сечении воздействует на левую с силой $\mathbf{N} = -\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_4$.

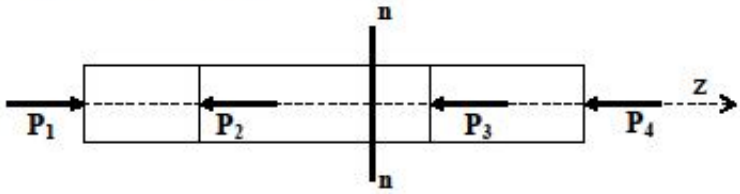


Рис.2. Пример центрального растяжения (сжатия) стержня

Напряжения. Расчеты на прочность

Напряжение – это давление, с которой одна часть бруса воздействует на другую его часть относительно рассматриваемого сечения. Например, согласно рис.2 левая часть стержня относительно сечения n-n создает на правую часть давление равное величине $\sigma = (-\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2)/\mathrm{A}$.

Другая интерпретация понятия напряжения:

Напряжение – это сила растяжения (сжатия) одного волокна единичного поперечного сечения.

Нормальные напряжения при центральном растяжении (сжатии) вычисляются по формуле:

$$\sigma = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}}, \qquad (2)$$

здесь **A** - площадь поперечного сечения.

Правило знаков для нормальных напряжений σ:

Если N>0, то $\sigma > 0$ - при растяжении стержня.

Если N<0, то $\sigma < 0$ - при сжатии стержня.

Введем понятие нормативного сопротивления $\mathbf{R_n}$, представляющее собой основной параметр сопротивления материалов внешним воздействиям, которое указывается в ГОСТ и контролируется на

производстве. **Нормативное сопротивление** R_n - это установленное нормами предельное значение напряжений в материале.

Введем понятие **расчетного сопротивления** R, которое определяется по формуле:

$$R = R_n / \gamma_m ,$$

где γ_m - коэффициент надежности по материалу которое учитывает возможное отклонение сопротивления материала в неблагоприятную сторону от нормативного значения, (γ_m>1).

Для разнопрочных материалов, в частности, хрупких (бетон, кирпич, камень), для которых предельные напряжения при растяжении и сжатии отличаются ($\sigma_в^{раст} \neq \sigma_в^{сж}$), условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{раст}^{max} = \frac{N_+}{A}^{max} \leq R_{раст},$$
$$\left|\sigma_{сж}\right|^{max} = \left|\frac{N_-}{A}\right|^{max} \leq R_{сж}. \qquad (3)$$

Здесь $R_{раст}$, $R_{сж}$ - расчетное сопротивление на растяжение и сжатие соответственно.

В теории расчета бетонных конструкций условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{раст}^{max} \leq R_{bt},$$
$$\left|\sigma_{сж}\right|^{max} \leq R_b,$$

где R_b называется расчетным сопротивлением на сжатие, R_{bt} называется расчетным сопротивлением бетона на растяжение.

Для Стали 3 (представитель пластичных материалов), у которой предельные напряжения при растяжении и сжатии примерно одинаковые ($\sigma_т^{раст} \approx \sigma_т^{сж}$), условие прочности имеет вид :

$$\left|\sigma\right|^{max} = \left|\frac{N}{A}\right|^{max} \leq R. \qquad (4)$$

Деформации. Расчеты на жесткость

Под действием продольных внешних сил, стержень удлиняется или укорачивается.

Абсолютным удлинением, или абсолютной продольной деформацией Δl называется величина, которая численно равна разности длины деформированного бруса l_k и его длины до деформации l:

$$\Delta l = l_k - l. \tag{5}$$

Линейной деформацией называется **относительная продольная деформация** т.е отношение абсолютной продольной деформации бруса Δl к его первоначальной длине l:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{6}$$

Если умножить ε на 100% , то $100 \cdot \varepsilon$ показывает, на сколько процентов изменилась длина стержня.

Правило знаков для линейной деформации:

При удлинении продольная деформация положительна $\Delta l > 0$, **а при укорочении – отрицательна** $\Delta l < 0$.

Закон Гука при растяжении (сжатии) имеет вид:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}, \tag{7}$$

где l - начальная длина стержня, E – модуль упругости материала (характеризует жесткость материала). Величина $E \cdot A$ называется **жесткостью стержня**.

Формулой (7) можно пользоваться для вычисления абсолютного удлинения участка стержня длиной l при условии, что в пределах этого участка значение продольной силы постоянно и жесткость стержня не меняется.

В ряде случаев для обеспечения надежной работы стержня необходимо выполнение **условия жесткости**. Стержень называется **жестким**, если его деформация (удлинение или укорочение) находится в пределах нормы.

$$|\Delta l| \le [\Delta l], \tag{8}$$

где $[\Delta l]$ - допустимая деформация.

Растяжение и сжатие стержня с учетом собственного веса

Собственным весом при растяжении и сжатии стержней можно пренебрегать, если мы не имеем дело с длинными стержнями или со стержнями из материала, обладающего сравнительно небольшой прочностью (камень, кирпич) при достаточном весе. При расчете длинных канатов подъемников, цепей, различного рода длинных штанг и высоких

каменных сооружений (башни маяков, опоры мостовых ферм) приходится вводить в расчет и собственный вес конструкции.

Напряжения в сечении при растяжении (сжатии) с учетом собственного веса (рис.3) оказываются неодинаковыми во всех сечениях и их можно вычислить по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P + \gamma \cdot A \cdot z}{A} = \frac{P}{A} + \gamma \cdot z, \qquad (9)$$

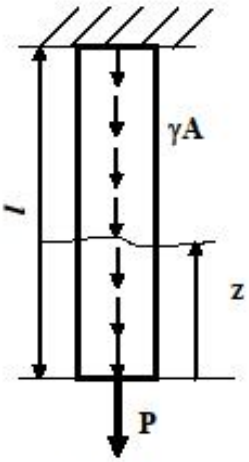


Рис. 3

где γ - удельный вес материала, A - площадь поперечного сечения стержня,

Если стержень постоянного поперечного сечения (A=$const$), и жесткость материала не меняется ($E \cdot A = const$) то полное удлинение (укорочение) стержня на участке длиной l имеет вид:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot A} + \frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E}, \qquad (10)$$

В общем случае, полное удлинение стержня получится путем суммирования удлинений всех его участков, согласно выражению:

$$\Delta l_{полн} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + ... + \Delta l_n. \qquad (11)$$

Статически неопределимые задачи

Статически неопределимыми называются такие стержни и стержневые системы, расчет которых не может быть произведен только с помощью уравнений статики. Этих уравнений недостаточно для определения всех опорных реакций и внутренних усилий. Степень статической неопределимости определяется по следующей формуле:

$$\boxed{\textit{степень статич. неопред.} = \textit{число неизвестных} - \textit{число ур. статики}}$$

Для решения таких задач необходимо составить дополнительные уравнения, которые называются **уравнениями совместности деформаций**, рассмотрев деформированное состояние стержня или стержневой системы. Уравнения совместности деформаций составляются с учетом малости деформаций стержней и стержневых систем.

При изготовлении элементов конструкции их размеры невозможно изготовить точно по проекту. В результате, при сборке приходится некоторые элементы предварительно нагружать. **Монтажные напряжения** – это напряжения, возникающие от неточности изготовления стержней и только в статически неопределимых системах при сборке.

Температурные напряжения – это напряжения, возникающие от перепада температур в стержнях и только в статически неопределимых системах.

Температурная деформация записывается на основе **закона Дюамеля-Неймана:**

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta t, \qquad (12)$$

где Δt - это разница между конечным и начальным значениями температуры, т.е. $\Delta t = t_{конеч} - t_{нач}$; α - коэффициент линейного температурного расширения; l - начальная длина стержня.

Основные методы оценки прочности конструкции

1. **Метод допускаемых напряжений.** При расчете по допускаемым напряжениям *в качестве предельного принимается состояние, при котором хотя бы в одной точке элемента конструкции расчетное напряжение становиться равным предельному значению* (тогда конструкция считается вышедшей из строя). По этому методу расчет ведется по рабочему состоянию, когда все элементы работают в упругой области с использованием условия прочности:

$$|\sigma|^{max} \le \mathbf{R} \qquad (13)$$

2. **Метод допустимых нагрузок (расчет на прочность по теории предельного равновесия).** При достижении в одном из стержней предельного значения напряжений (предел текучести для Ст.3) несущая способность стержневой системы не исчерпывается, т.к. другие элементы могут взять на себя нагрузку или ее часть, которую должен был нести разрушенный элемент. Тогда *за предельное (опасное) состояние следует принять такое, при котором конструкция превращается в механизм* (т.е. небольшие добавочные напряжения приводят к большим перемещениям, или, по другому, дополнительная нагрузка приводит к неограниченной деформации конструкции). Согласно этому методу условие прочности может быть записано в виде:

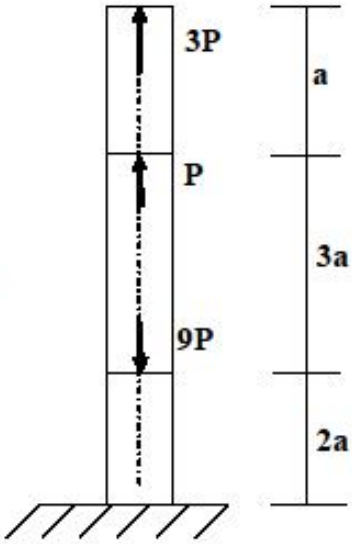
$$|\mathbf{P}|^{max} \le [\mathbf{P}] \qquad (14)$$

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ

Задача № 1
Расчет на прочность стержня постоянного сечения

Пример решения задачи

Сечение колонны



Для заданной расчетной схемы стальной колонны постоянного поперечного сечения требуется:

1. Подобрать номер профиля в сечении из условия прочности.
2. Определить продольную деформацию (укорочение или удлинение) колонны.

Исходные данные:

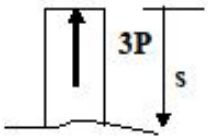
$P = 60\,т;\ a = 1.3\,м;\ \ R = 2.3\,т/см^2;$

$E = 2 \cdot 10^3\ т/см^2.$

Решение

1. Методом сечений рассмотрим участки колонны. Отсчет участков ведем от свободного конца стержня.

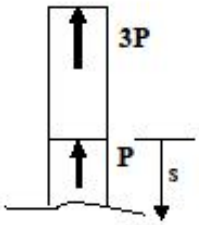
I участок $0 \le s \le a$



$$N_1 = 3P = 3 \cdot 60 = 180\,т;$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{180т}{3 \cdot A^{двут}} = \frac{60т}{A^{двут}}.$$

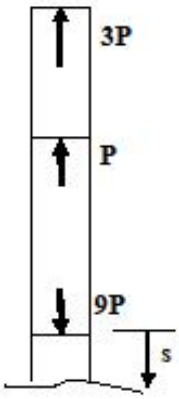
II участок $0 \le s \le 3a$



$$N_2 = 3P + P = 3 \cdot 60 + 60 = 240\text{т};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{240\text{т}}{3 \cdot A^{\text{двут}}} = \frac{80\,\text{т}}{A^{\text{двут}}};$$

.III участок $0 \le s \le 2a$



$$N_3 = 3P + P - 9P = -5 \cdot 60 = -300\,\text{т};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{-300\text{т}}{3 \cdot A^{\text{двут}}} = \frac{-100\,\text{т}}{A^{\text{двут}}};$$

Далее построим эпюру продольных сил (рис.4). Если площадь поперечного сечения колонны постоянная, тогда опасное сечение можно определить по эпюре N.

Третий участок самый нагруженный и, следовательно, будет испытывать максимальные напряжения.

Из условия прочности определяем номер двутавра в сложном сечении колонны:

$$\left|\frac{N}{A}\right|^{\max} \le R \quad \Rightarrow \quad \frac{300\,\text{т}}{3 \cdot A^{\text{двут}}} \le 2.3\ \text{т/см}^2;$$

$$A^{\text{двут}} \ge 43.47\,\text{см}^2.$$

Из таблицы Сортамента для двутавров (приложение №1) согласно этому условию по площади $A^{\text{двут}}$ подходит двутавр № =30.

$$A^{\text{двут №30}} = 46.5\,\text{см}^2.$$

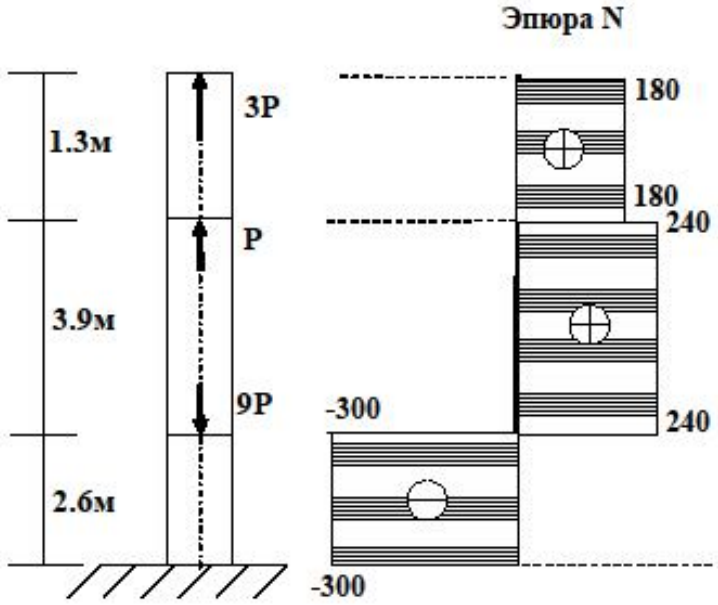


Рис.4. Эпюра продольных сил N

2. Абсолютная продольная деформация определяется по формуле:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot 3A^{двут}} + \frac{N_2 \cdot 3a}{E \cdot 3A^{двут}} + \frac{N_3 \cdot 2a}{E \cdot 3A^{двут}} =$$

$$= \frac{180т \cdot 130\ см}{2 \cdot 10^3 т/см^2 \cdot 3 \cdot 46.5 см^2} + \frac{240т \cdot 390\ см}{2 \cdot 10^3 т/см^2 \cdot 3 \cdot 46.5 см^2} -$$

$$- \frac{300т \cdot 260\ см}{2 \cdot 10^3 т/см^2 \cdot 3 \cdot 46.5 см^2} = 0.14\ см.$$

Ответ: Для обеспечения прочности колонны нужно взять двутавр № 30. Колонна удлиняется на 0.14 см.

Задание для самостоятельной работы (задача № 1)

Для заданной расчетной схемы стального стержня постоянного поперечного сечения требуется подобрать номер профиля в сечении из условия прочности. Определить полное абсолютное удлинение (укорочение) стержня.

Исходные данные и схему нагружения взять из табл. 1, 2 и 3.

Таблица № 1

Исходные данные (задача № 1)

	А	*Б*	*В*	*Г*	
	Схема поперечного сечения (таблица №2)	P, т	Длина a, м	Модуль упругости $E*10^3$, т/см^2	R, т/см^2
1	2	70	1.2	2	2.3
2	7	65	1.5	2.1	2.3
3	5	80	1.6	2	2.3
4	4	47	1.1	2.1	2.3
5	9	58	0.7	2.2	3.5
6	3	62	0.8	2.1	2.3
7	8	40	1.3	2	2.3
8	1	37	1	2.2	3.5
9	6	45	1.1	2.1	2.3
0	3	50	1.4	2.2	3.5

Таблица № 2

Схемы поперечного сечения колонны (задача № 1)

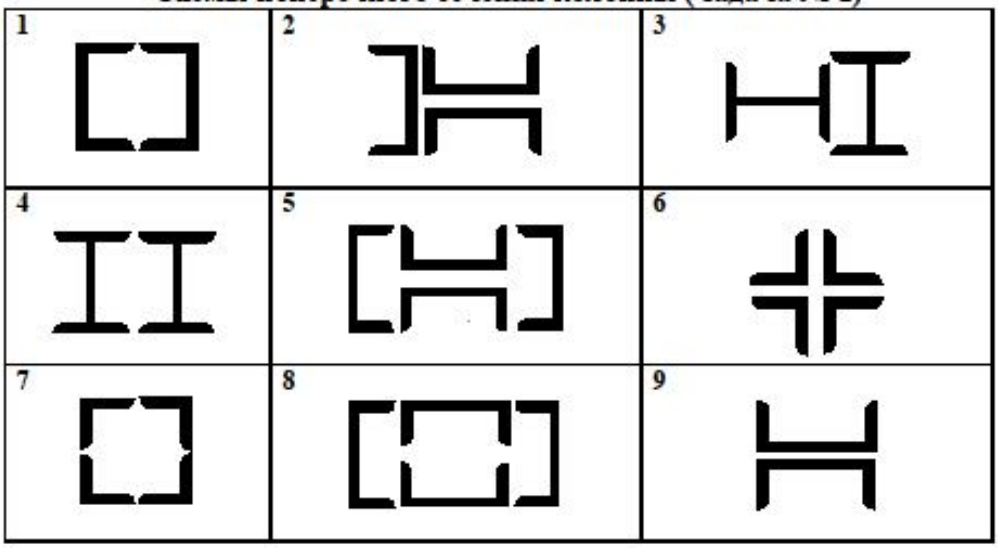
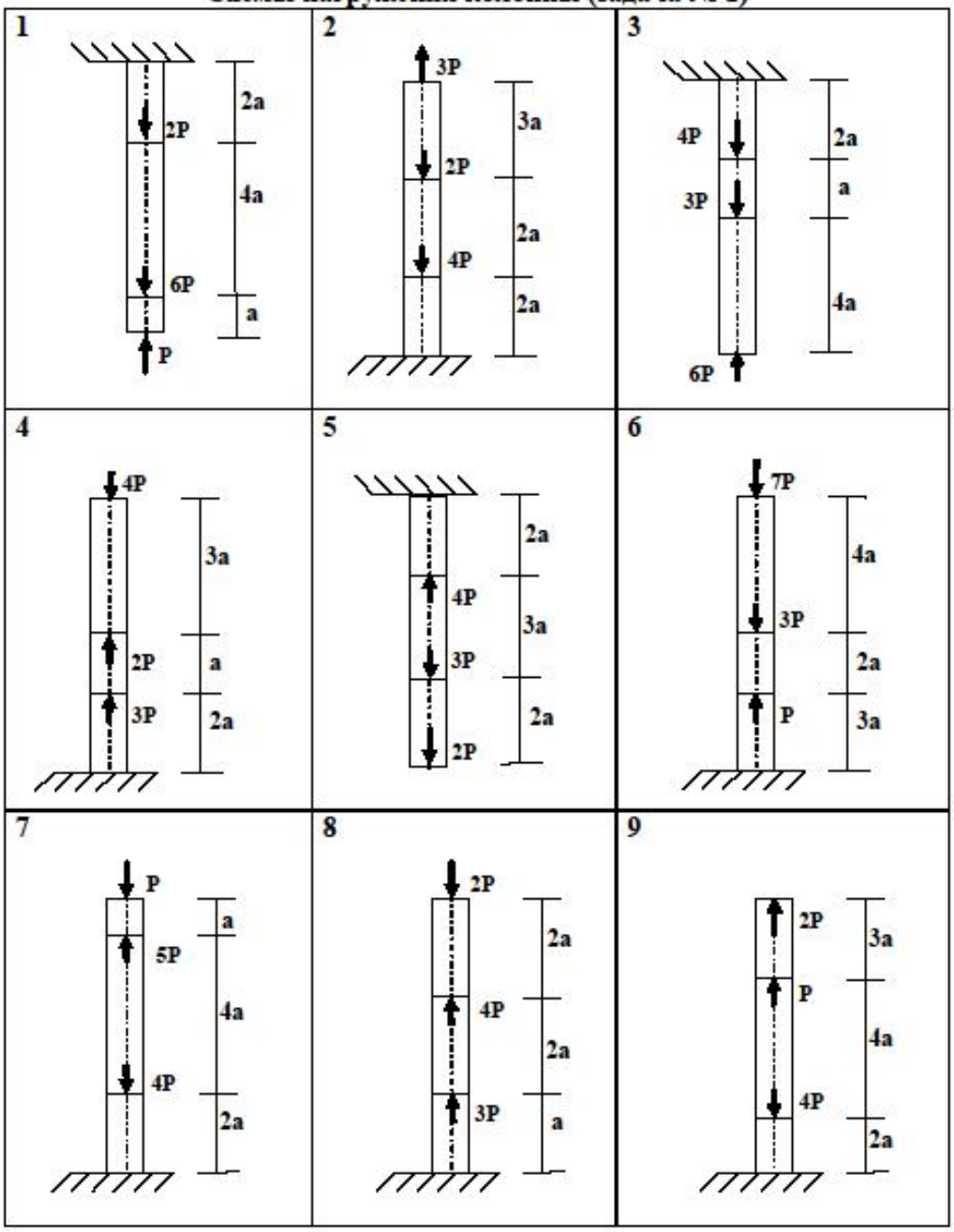
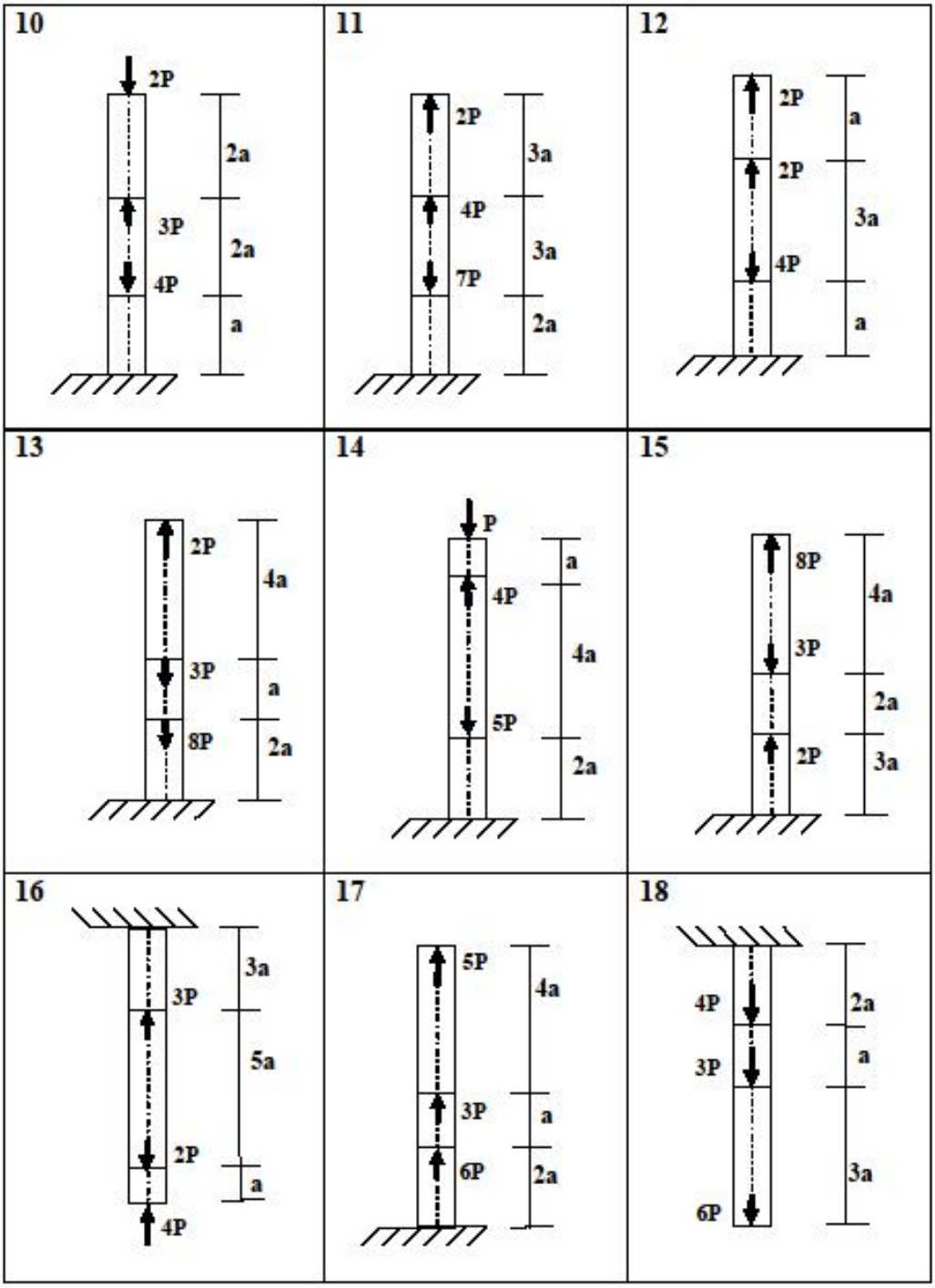
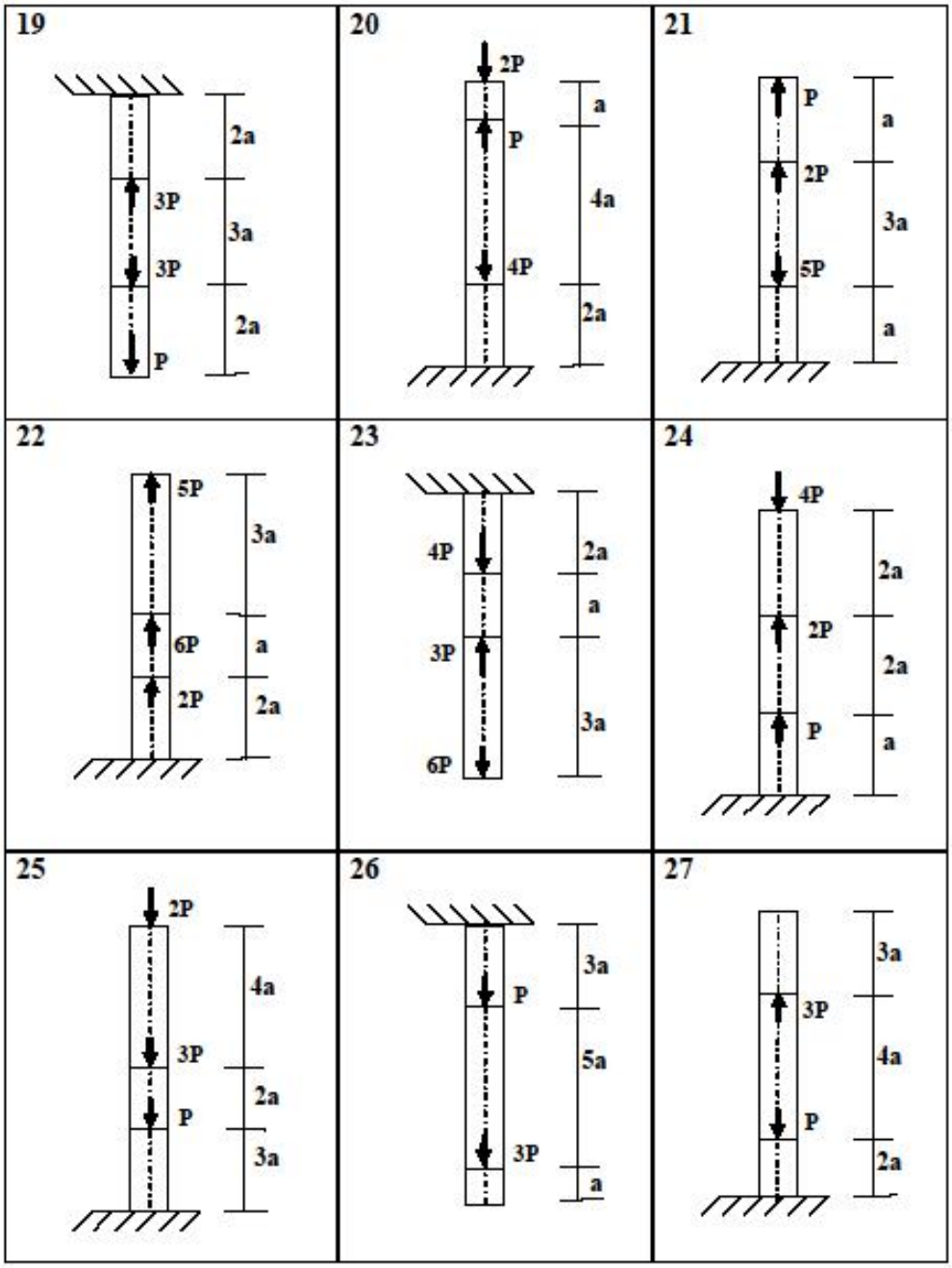


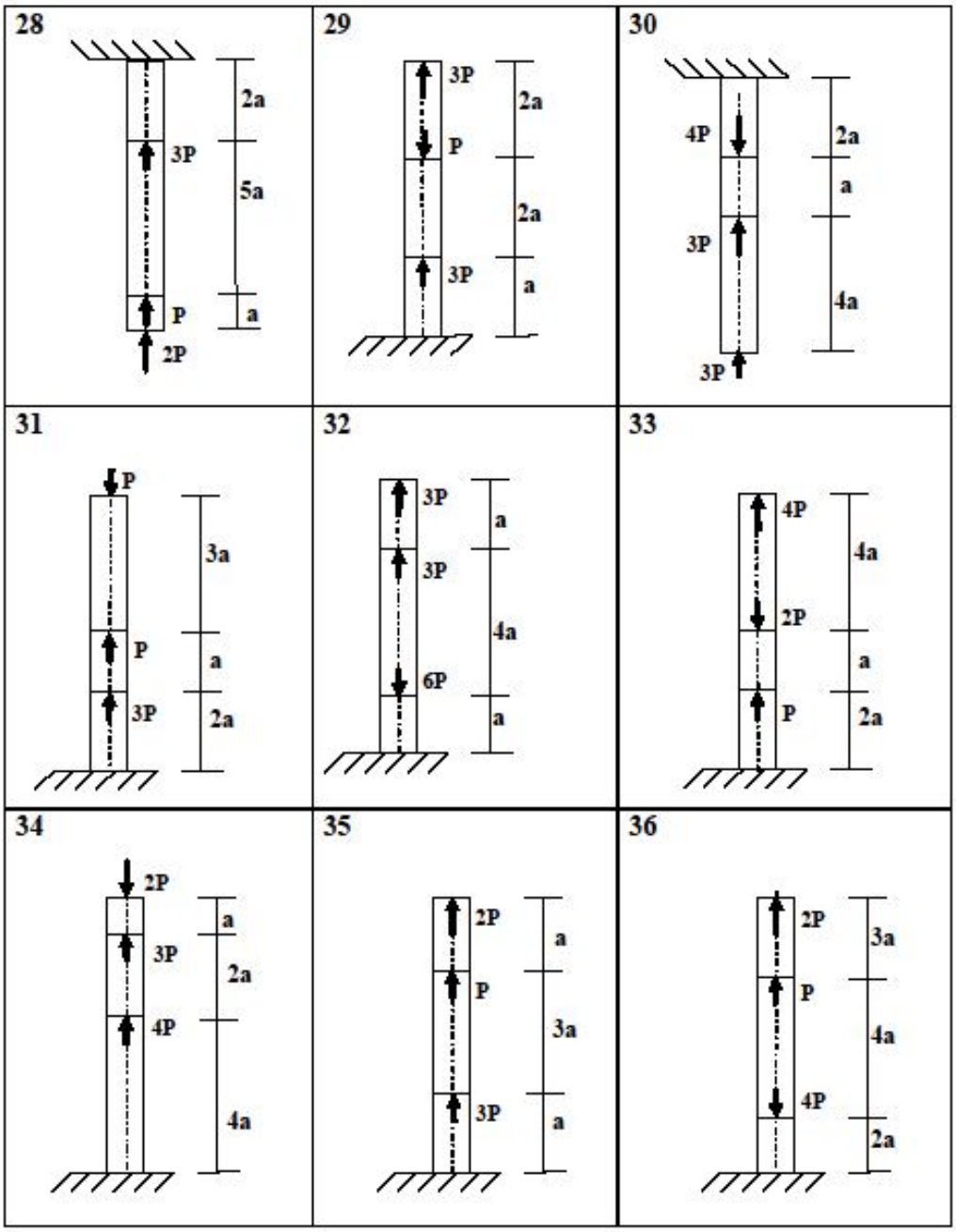
Таблица № 3

Схемы нагружения колонны (задача № 1)




10
2P
3P
4P
2a
2a
a
11
2P
4P
7P
3a
3a
2a
12
2P
2P
4P
a
3a
a
13
2P
3P
8P
4a
a
2a
14
P
4P
5P
a
4a
2a
15
8P
3P
2P
4a
2a
3a
16
3P
2P
4P
3a
5a
a
17
5P
3P
6P
4a
a
2a
18
4P
3P
6P
2a
a
3a


19
2a
3P
3a
3P
2a
P
20
2P
a
P
4a
4P
2a
21
P
a
2P
3a
5P
a
22
5P
3a
6P
a
2P
2a
23
4P
2a
a
3P
3a
6P
24
4P
2a
2P
2a
P
a
25
2P
4a
3P
2a
P
3a
26
3a
P
5a
3P
a
27
3a
3P
4a
P
2a

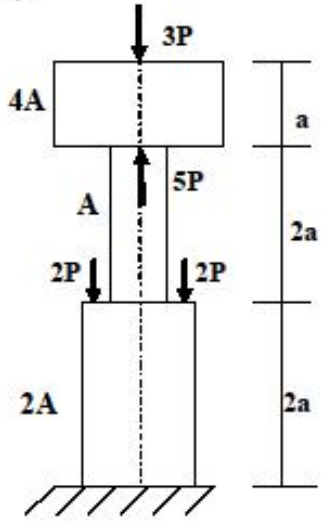

28
2a
3P
5a
P
a
2P
29
3P
2a
P
2a
3P
a
30
4P
2a
a
3P
4a
3P
31
P
3a
P
a
3P
2a
32
3P
a
3P
4a
6P
a
33
4P
4a
2P
a
P
2a
34
2P
a
3P
2a
4P
4a
35
2P
a
P
3a
3P
a
36
2P
3a
P
4a
4P
2a

Задача № 2
Расчет ступенчатой колонны на прочность и жесткость

Пример решения задачи

Для колонны переменного сечения требуется:

1) построить эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ.
2) проверить прочность;
3) определить полное удлинение (укорочение);
4) проверить жесткость колонны.
5) подобрать новое значение площади поперечного сечения из условия прочности колонны.



Исходные данные:

A=350 см^2; P=130 кН; a=1.2м;

$E = 0.36 \cdot 10^4 кН/см^2; [\Delta l] = 0.1 см.$

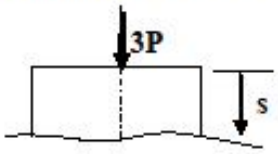
$R_{bt} = 0{,}14 \frac{кН}{см^2}; \quad R_b = 2.2 \frac{кН}{см^2}.$

Решение

Колонна имеет 3 участка. Границами участков служат сечения, в которых приложены внешние силы или же изменяется площадь поперечного сечения.

1. Методом сечений определяем величину нормальной силы N и нормального напряжения σ на каждом участке из условия равновесия рассматриваемой части колонны.

I участок $0 \le s \le 1.2 м$



$$N_1 = -3P = -3 \cdot 130 = -390 кН;$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{4A} = \frac{-390 кН}{4 \cdot 350 см^2} = -0.28 кН/см^2;$$

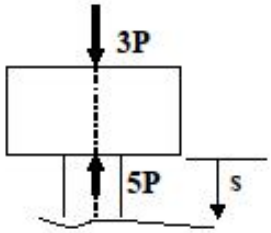
$$\Delta l_1 = \frac{N \cdot a}{E \cdot 4 \cdot A} = \frac{-390 кН \cdot 120 см}{0.36 \cdot 10^4 кН/см^2 \cdot 4 \cdot 350 см^2} = -0.009 см.$$

Выражения для продольной силы N_1 и нормального напряжения σ_1 являются постоянными величинами. Для построения эпюры достаточно взять границы участка. Таким образом, можно записать:

При s=0: $N_1 = -390кН;\quad \sigma_1 = -0.28кН/см^2;$

При s=a=1.2м: $N_1 = -390кН;\quad \sigma_1 = -0.28кН/см^2.$

II участок $0 \le s \le 2.4м$



$$N_2 = -3P + 5P = 2 \cdot 130 = 260\ кН;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{260кН}{350см^2} = 0.74кН/см^2;$$

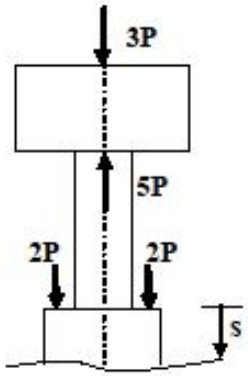
$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot 2a}{E \cdot A} = \frac{260кН \cdot 240см}{0.36 \cdot 10^4 кН/см^2 \cdot 350см^2} = 0.05см.$$

Аналогично первому участку, на границах второго участка можно записать:

При s=0: $N_2 = 260кН;\quad \sigma_2 = 0.74кН/см^2;$

При s=2.4м: $N_2 = 260кН;\quad \sigma_2 = 0.74кН/см^2.$

III участок $0 \le s \le 2.4м$



$$N_3 = -3P + 5P - 4P = -2 \cdot 130 = -260\ кН;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2A} = \frac{-260кН}{2 \cdot 350см^2} = -0.37кН/см^2;$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot 2a}{E \cdot 2 \cdot A} = \frac{-260кН \cdot 240см}{0.36 \cdot 10^4 кН/см^2 \cdot 2 \cdot 350см^2} =$$

$$= -0.025\ см.$$

Для третьего участка вычислим:

При s=0: $N_3 = -260кН;\quad \sigma_3 = -0.37кН/см^2;$

При s=2.4м: $N_3 = -260кН;\quad \sigma_3 = -0.37кН/см^2.$

1. Построение эпюры N и σ

Значения продольной силы N и нормального напряжения σ на границах участков мы вычислили выше. По ним строим эпюры.

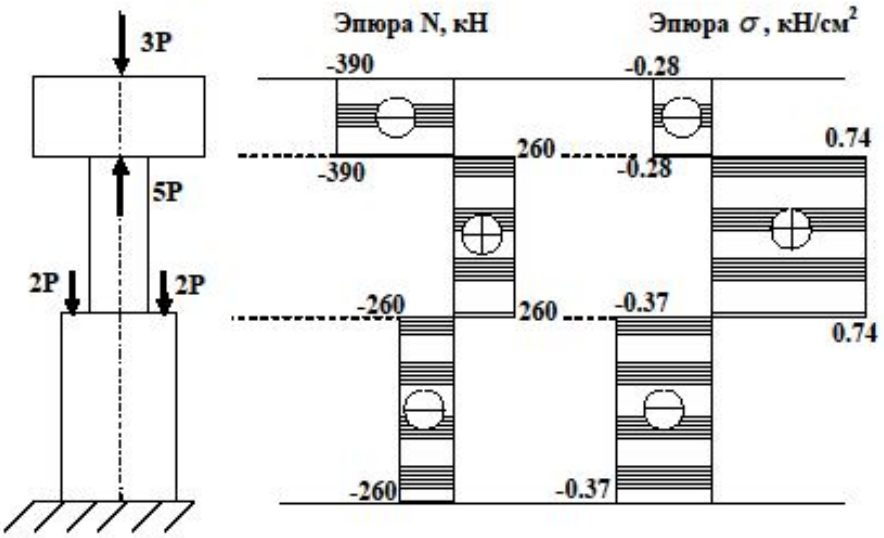


Рис.5. Эпюры продольных сил и нормальных напряжений

2. Проверка прочности колонны

Так как колонна с переменным сечением, то по эпюре N для данной задачи нельзя определить опасное сечение. Опасное сечение определяем по эпюре σ, причем находим максимальные сжимающие и максимальные растягивающие напряжения, так как бетонная колонна обладает разнопрочными свойствами.

По эпюрам напряжений σ видно, что максимальные сжимающие напряжения возникают на III участке. Поэтому можно записать следующее условие прочности для сжатой части:

$$|\sigma_{сж}|^{max} \le R_b \quad \Rightarrow 0.37\ кН/см^2 \le 2.2 кН/см^2.$$

II участок колонны испытывает растяжение, тогда можно записать условие прочности для максимально растянутой части колонны в виде:

$$\sigma_{раст}{}^{max} \le R_{bt} \quad \Rightarrow 0.74\ кН/см^2 \ge 0.14 кН/см^2.$$

Условие прочности для II участка не выполняется.

3. Определение полного удлинения (укорочения) колонны

Полная абсолютная продольная деформация на свободном конце колонны определяется по формуле:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0.009\,\text{см} + 0.05\,\text{см} - 0.025\,\text{см} = 0.016\,\text{см}.$$

4. Проверка жесткости колонны

$|\Delta l_1| \le [\Delta l] \Rightarrow 0.009\,см \le 0.1\,см;$
$|\Delta l_2| \le [\Delta l] \Rightarrow 0.05\,см \le 0.1\,см;$
$|\Delta l_3| \le [\Delta l] \Rightarrow 0.025\,см \le 0.1\,см;$
$|\Delta l\ | \le [\Delta l] \Rightarrow 0.016\,см \le 0.1\,см.$

Таким образом, условия жесткости выполняются.

5. Подбор новой площади сечения из условия прочности.

Так как для растянутой части колонны условие прочности не выполняется, то для подбора нового поперечного сечения можно записать:

$$\sigma_{\text{раст}}^{\max} = \frac{N_2}{A^{\text{нов}}} \le R_{bt};$$

$$\frac{260\ \text{кН}}{A^{\text{нов}}} \le 0.14\ \text{кН/см}^2;$$

$$A^{\text{нов}} \ge 1857\,\text{см}^2.$$

Вывод: Колонна жесткая, но не прочная. Для обеспечения прочности необходимо взять площадь из условия $A^{\text{нов}} \ge 1857\,\text{см}^2$.

Задание для самостоятельной работы (задача №2)

Для заданной расчетной схемы колонны переменного сечения требуется:

1) построить эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ.
2) проверить прочность колонны;
3) определить полное удлинение (укорочение);
4) проверить жесткость колонны;
5) подобрать новое значение площади поперечного сечения из условия прочности колонны.

Исходные данные задачи и схему нагружения колонны взять согласно шифру из табл. 4 и 5.

Таблица№ 4

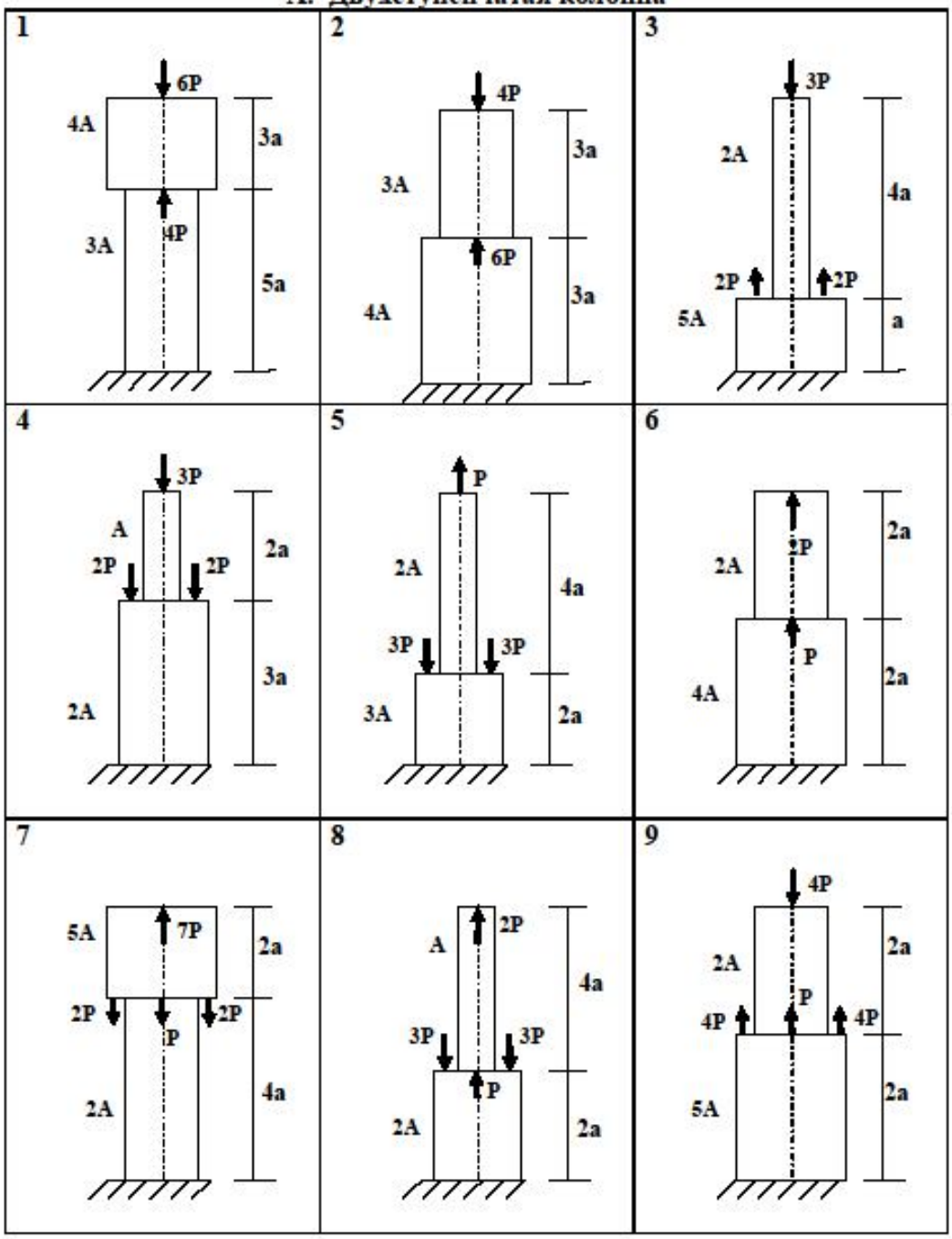
Исходные данные (задача №2)

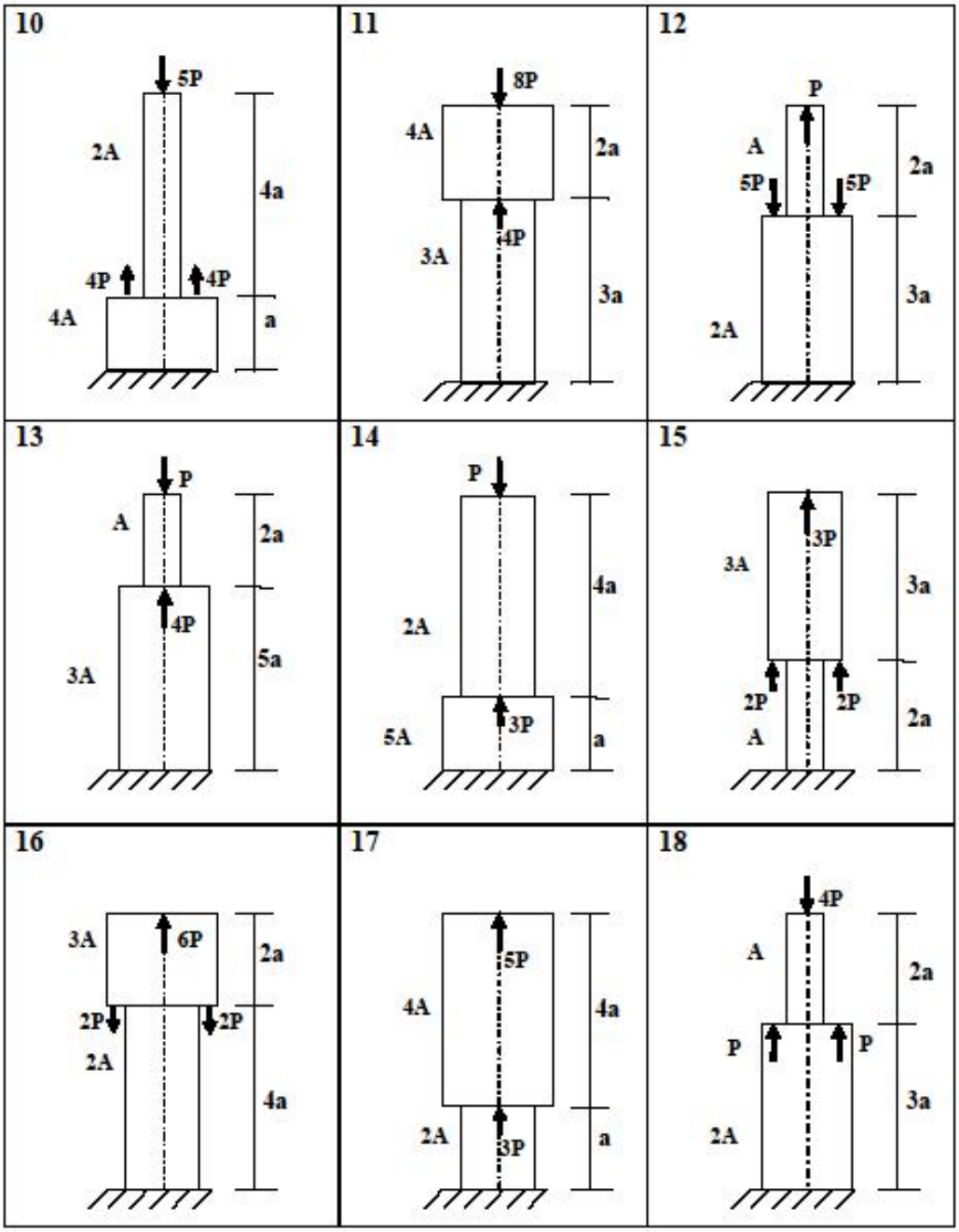
	А	*Б*	*В*	*Г*			*Д*
	Площадь сечения А, см^2	P, кН	Длина a, м	Модуль упругости E*10^4, кН/см^2	R_{bt}, кН/см^2	R_b, кН/см^2	[Δ*l*], см
1	250	60	1.2	0.325	0.12	1.7	0.2
2	390	55	0.9	0.345	0.13	1.95	0.5
3	290	80	1.4	0.36	0.14	2.2	0.3
4	410	50	1.3	0.37	0.15	2.5	0.5
5	340	90	1.1	0.38	0.16	2.75	0.2
6	300	80	0.8	0.39	0.17	3	0.3
7	270	70	1.5	0.395	0.18	3.3	0.1
8	350	65	1.2	0.345	0.13	1.95	0.5
9	390	40	1.2	0.36	0.14	2.2	0.3
0	320	50	1.6	0.37	0.15	2.5	0.5

Таблица № 5

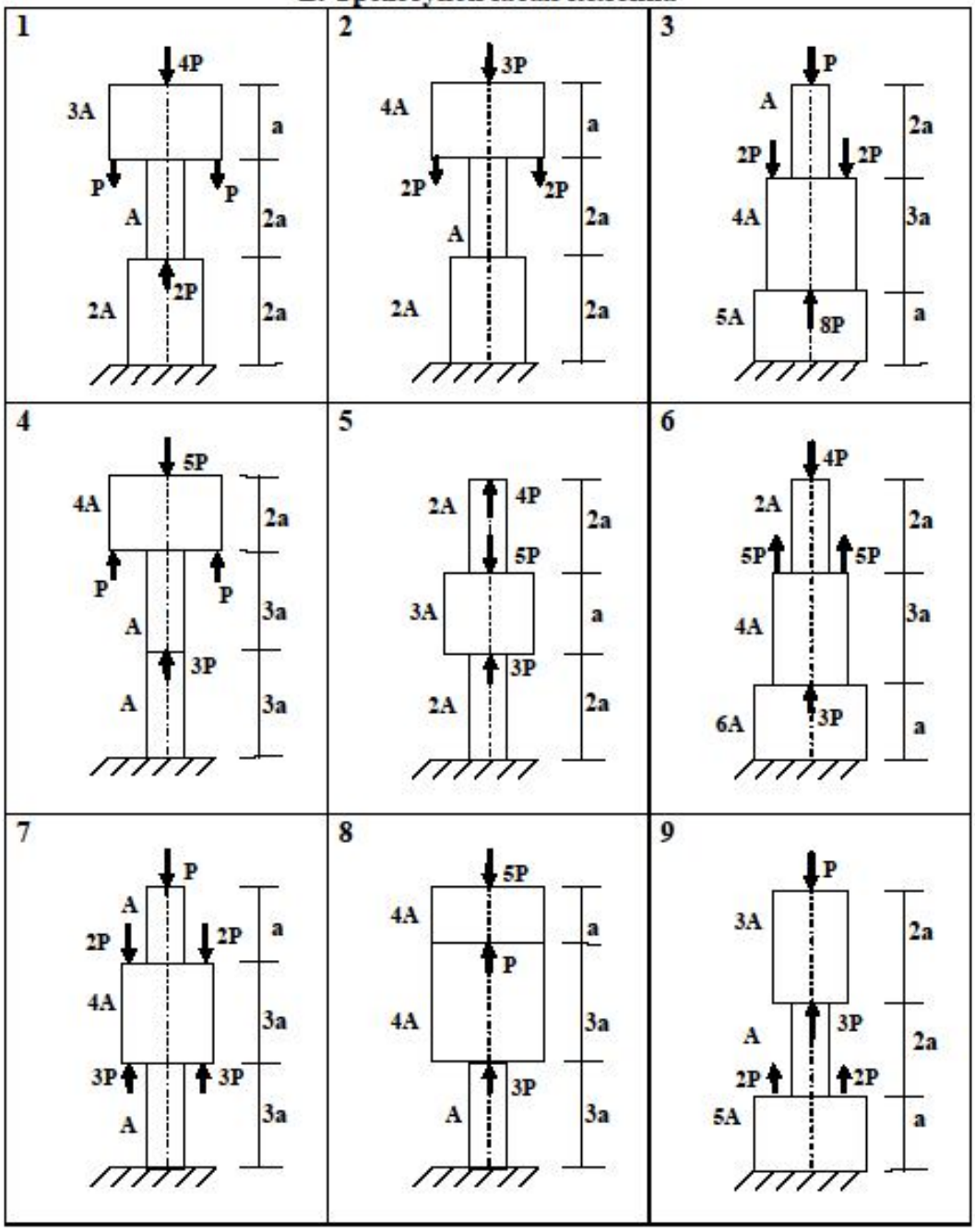
Схемы нагружения колонны (задача № 2)

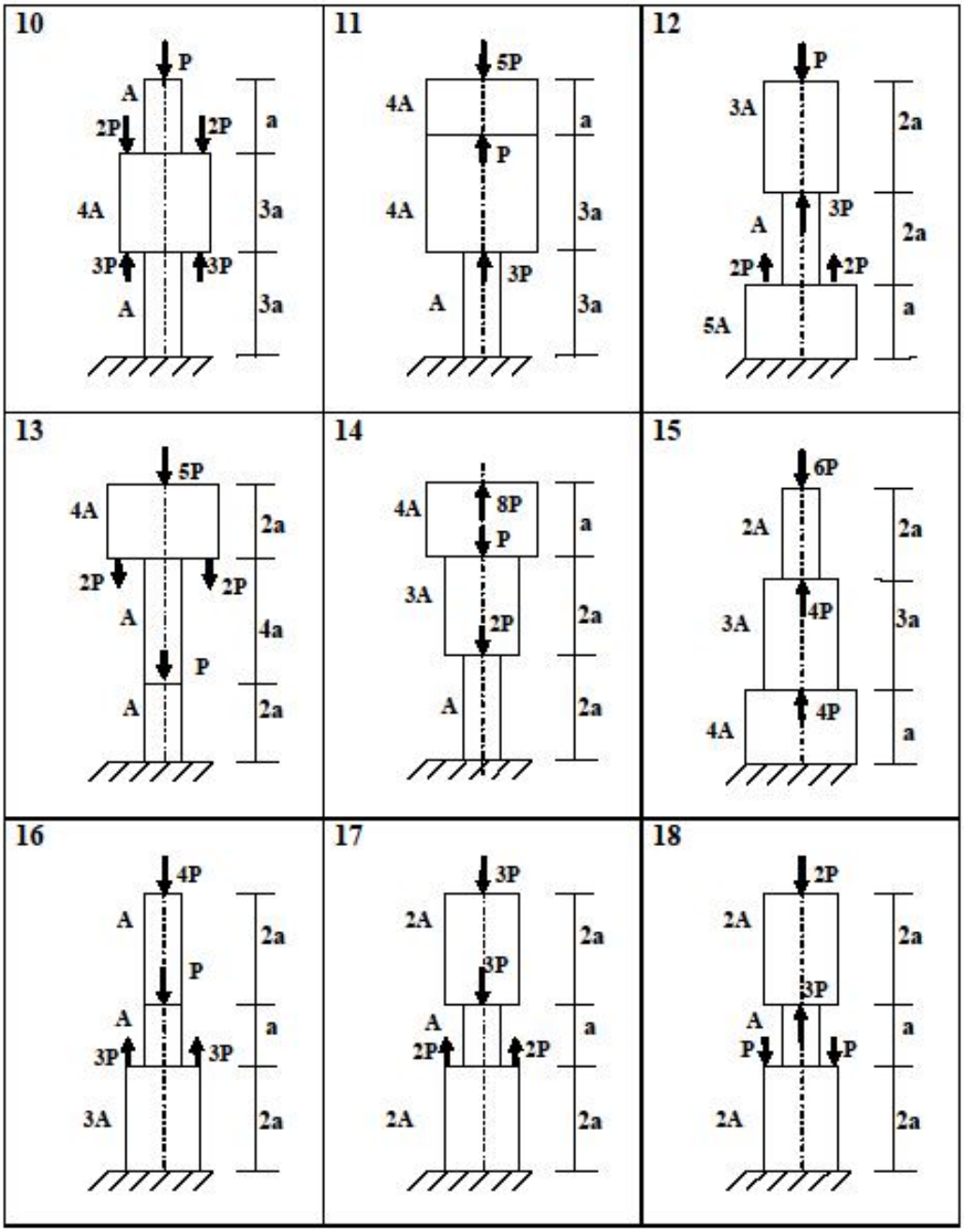
А. Двухступенчатая колонна

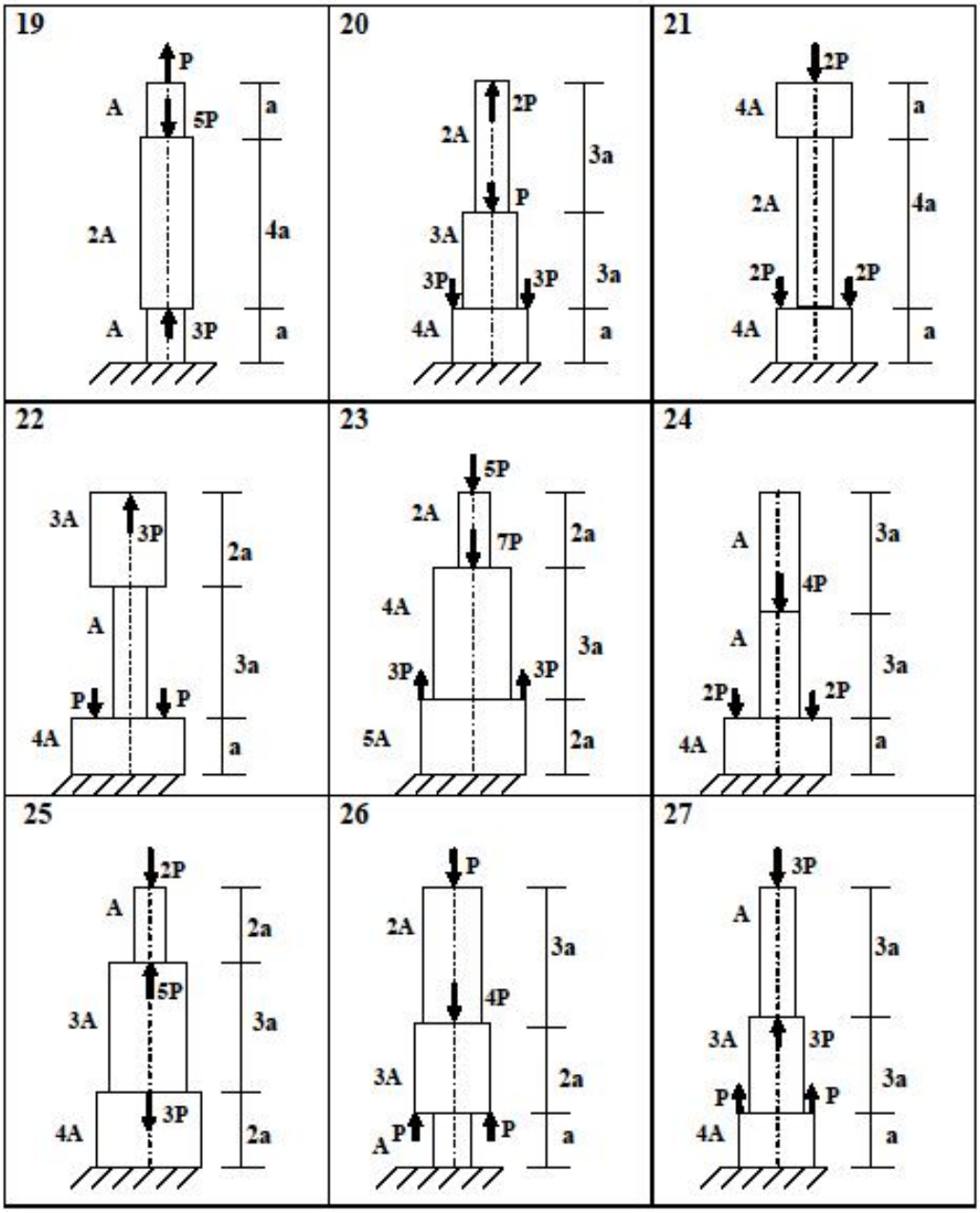


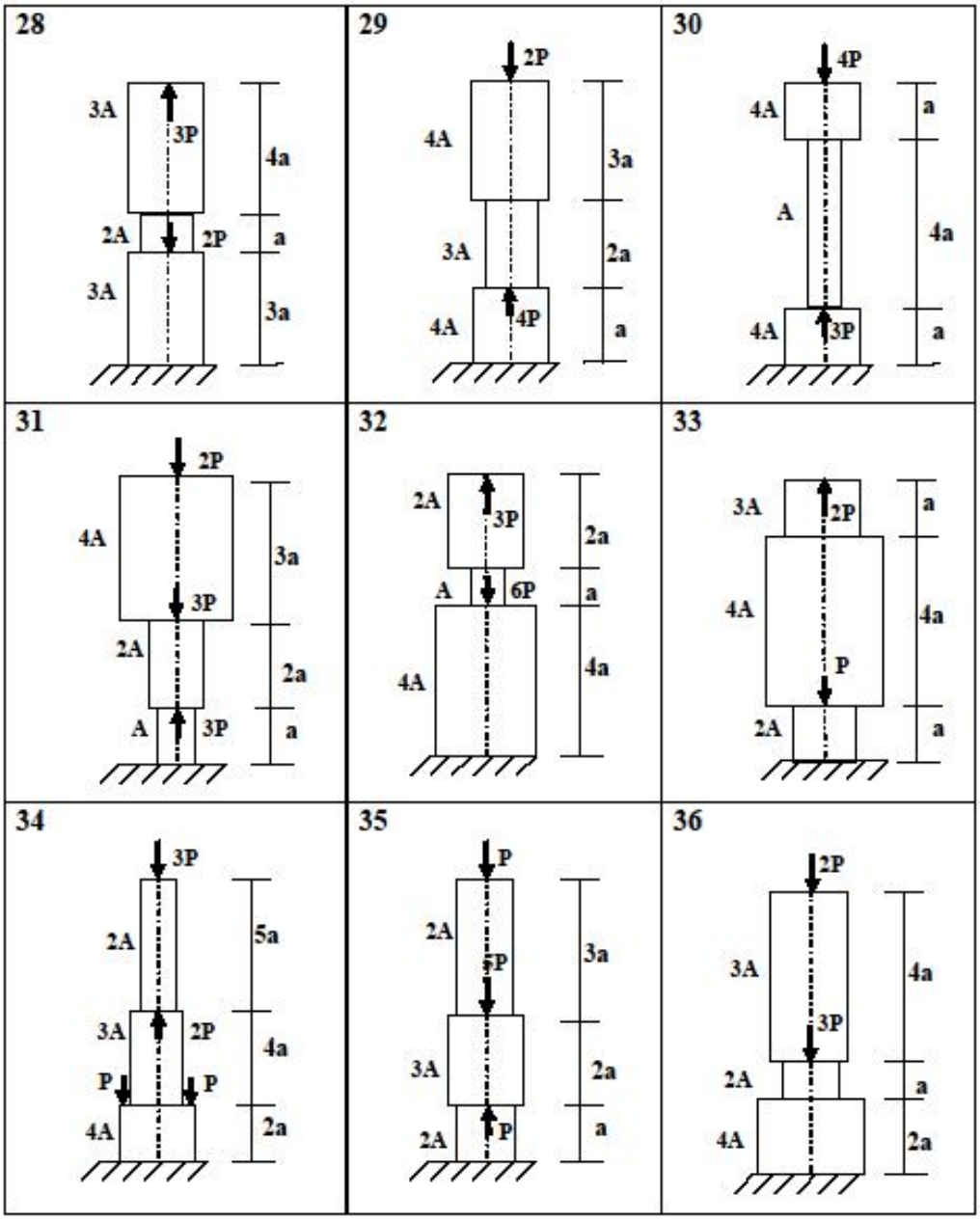

10
5P
2A
4a
4P
4P
4A
a
11
8P
4A
2a
4P
3A
3a
12
P
A
5P
5P
2a
3a
2A
13
P
A
2a
4P
3A
5a
14
P
4a
2A
5A
3P
a
15
3P
3A
3a
2P
2P
2a
A
16
3A
6P
2a
2P
2P
2A
4a
17
5P
4A
4a
2A
3P
a
18
4P
A
2a
P
P
3a
2A

Б. Трехступенчатая колонна




10
P
A
2P
2P
a
4A
3a
3P
3P
A
3a
11
5P
4A
a
P
4A
3a
3P
A
3a
12
P
3A
2a
A
3P
2a
2P
2P
5A
a
13
5P
4A
2a
2P
2P
A
4a
P
A
2a
14
4A
8P
P
a
3A
2P
2a
A
2a
15
6P
2A
2a
3A
4P
3a
4A
4P
a
16
4P
A
2a
P
A
a
3P
3P
3A
2a
17
3P
2A
2a
3P
A
a
2P
2P
2A
2a
18
2P
2A
2a
3P
A
a
P
P
2A
2a


19
P
A
5P
a
2A
4a
A
3P
a
20
2P
2A
3a
P
3A
3P
3P
3a
4A
a
21
2P
4A
a
2A
4a
2P
2P
4A
a
22
3A
3P
2a
A
3a
P
P
4A
a
23
5P
2A
7P
2a
4A
3a
3P
3P
5A
2a
24
A
3a
4P
A
3a
2P
2P
4A
a
25
2P
A
2a
5P
3A
3a
3P
4A
2a
26
P
2A
3a
4P
3A
2a
A
P
P
a
27
3P
A
3a
3A
3P
3a
P
P
4A
a

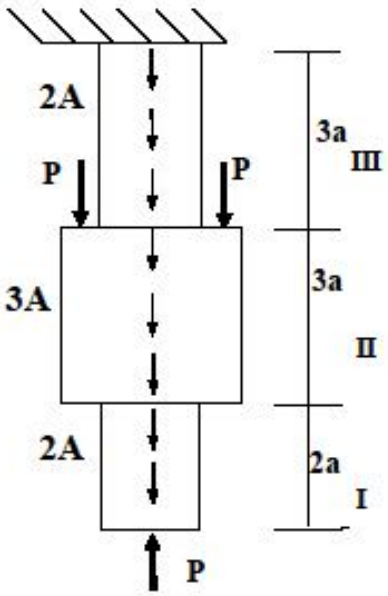

28
3A
3P
4a
2A
2P
a
3A
3a
29
2P
4A
3a
3A
2a
4A
4P
a
30
4P
4A
a
A
4a
4A
3P
a
31
2P
4A
3a
3P
2A
2a
A
3P
a
32
2A
3P
2a
A
6P
a
4A
4a
33
3A
2P
a
4A
4a
P
2A
a
34
3P
2A
5a
3A
2P
4a
P
P
4A
2a
35
P
2A
5P
3a
3A
2a
2A
P
a
36
2P
3A
4a
3P
2A
a
4A
2a

Задача № 3
Расчет стержня на прочность с учетом собственного веса

Пример решения задачи

Для заданной расчетной схемы чугунного стержня требуется:

1) построить эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ.
2) проверить прочность;
3) определить полное удлинение (укорочение).



Исходные данные:

$P = 12\,т;\ a = 2.3\,м;\ R_{раст} = 0.33\,т/см^2;$

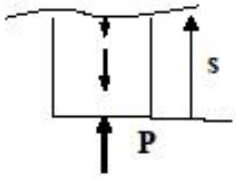
$R_{сж} = 1.45\,т/см^2;\ E = 1.2 \cdot 10^3\ т/см^2;$

$\gamma = 7 \cdot 10^{-5}\,т/см^3;\ A = 30\,см^2.$

Решение

Согласно методу сечений разобьем стержень на три участка. Отсчет участков производим от свободного конца. Для каждого участка находим продольную силу N и нормальные напряжения σ.

I участок $0 \le s \le 4.6м$



$$N_1 = -P + \gamma \cdot 2A \cdot s = -12\,т + 7 \cdot 10^{-5}\,т/см^3 \cdot 2 \cdot 30\,см^2 \cdot s =$$

$$= -12 + 420 \cdot 10^{-5} \cdot s;$$

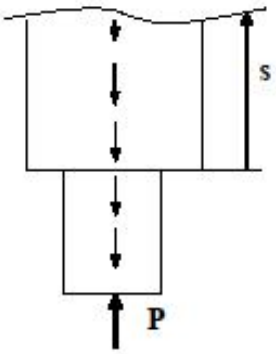
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2 \cdot A} = \frac{-P + \gamma \cdot 2A \cdot s}{2 \cdot A} =$$

$$= \frac{-12 + 420 \cdot 10^{-5} \cdot s}{2 \cdot 30} = -0.2 + 7 \cdot 10^{-5} \cdot s.$$

Выражения для N_1 и σ_1 определяют линейную зависимость, поэтому для построения их эпюр достаточно посчитать значения продольной силы и напряжения в начале и в конце участка, т.е. при s=0 см, и при s=460 см.

s, см	0	4.6м=460 см
N_1,т	-12	-10.068
σ_1 т/см^2	-0.2	-0.17

II участок $0 \le s \le 6.9м$



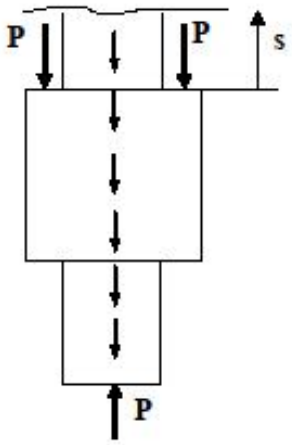
$$N_2 = -P + \gamma \cdot 2A \cdot 2 \cdot a + \gamma \cdot 3A \cdot s =$$
$$= -12т + 7 \cdot 10^{-5} т/см^3 \cdot 2 \cdot 30см^2 \cdot 460см^2 +$$
$$+7 \cdot 10^{-5} т/см^3 \cdot 3 \cdot 30см^2 \cdot s = -10.068 + 630 \cdot 10^{-5} \cdot s;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{3 \cdot A} = \frac{-P + \gamma \cdot 2A \cdot 2 \cdot a + \gamma \cdot 3A \cdot s}{3 \cdot A} =$$
$$= \frac{-10.068 + 630 \cdot 10^{-5} \cdot s}{3 \cdot 30} = -0.11 + 7 \cdot 10^{-5} \cdot s.$$

Аналогично вычисляем значения выражений для продольной силы N_2 и напряжения σ_2 на границах второго участка при s=0 см, и при s=690см.

s, см	0	6.9м=690 см
N_2,т	-10.068	-5.72
σ_2 т/см^2	-0.11	-0.06

III участок $0 \le s \le 6.9м$



$$N_3 = -P + 2 \cdot P + \gamma \cdot 2A \cdot 2 \cdot a + \gamma \cdot 3A \cdot 3 \cdot a + \gamma \cdot 2A \cdot s =$$
$$= 18.279 + 420 \cdot 10^{-5} \cdot s;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2 \cdot A} = \frac{P + \gamma \cdot 2A \cdot 2 \cdot a + \gamma \cdot 3A \cdot 3 \cdot a + \gamma \cdot 2A \cdot s}{2 \cdot A} =$$

$$= \frac{18.28 + 420 \cdot 10^{-5} \cdot s}{2 \cdot 30} = 0.30 + 7 \cdot 10^{-5} \cdot s.$$

s, см	0	6.9м=690 см
N_3,т	18.28	21.18
σ_3 т/см2	0.3	0.35

1. Построение эпюры N и σ

Зависимость нормальной силы N от продольной координаты s есть прямая. Значения этой зависимости на границах участков мы вычислили

выше. По ним строим эпюру N. Аналогично строим эпюру нормального напряжения σ.

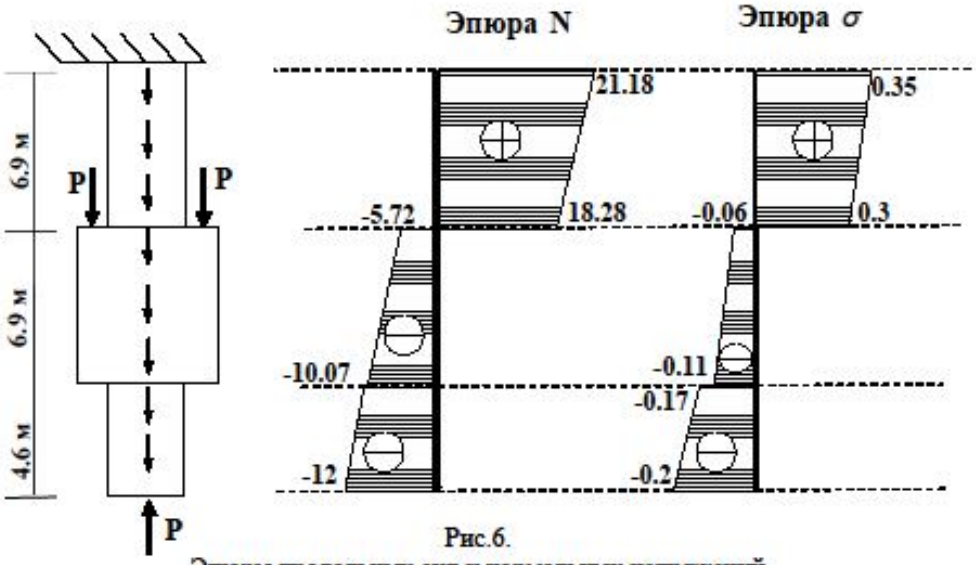


Рис.6.
Эпюры продольных сил и нормальных напряжений

2. Расчеты на прочность

Так как стержень ступенчатый, опасные сечения определяются из эпюры нормальных напряжений σ. Стержень изготовлен из чугуна (хрупкий материал), следовательно, необходимо проводить расчет на прочность и по максимально растянутым и по максимально сжатым сечениям.

$$|\sigma_{сж}|^{max} \le R_{сж} \Rightarrow 0.2\ т/см^2 \le 1.45\ т/см^2;$$
$$\sigma_{раст}{}^{max} \le R_{раст} \Rightarrow 0.35\ т/см^2 \ge 0.33 т/см^2.$$

Условие прочности по растяжению не выполняется, следовательно, стержень не прочный.

3. Определение полного удлинения (укорочения) стержня

Согласно формулам (10) , (11) можно записать для нашего стержня:

$$\Delta l_{полн} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 .$$

Удлинение первого участка с учетом собственного веса примет вид:

$$\Delta l_1 = \frac{-P \cdot l_1}{E \cdot A_1} + \frac{\gamma \cdot (l_1)^2}{2 \cdot E} = \frac{-P \cdot 2 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot A} + \frac{\gamma \cdot (2 \cdot a)^2}{2 \cdot E} =$$

$$= \frac{-12\,\text{т} \cdot 2 \cdot 230\,\text{см}}{1.2 \cdot 10^3\,\text{т/см}^2 \cdot 2 \cdot 30\,\text{см}^2} + \frac{7 \cdot 10^{-5}\,\text{т/см}^3 \cdot (460\,\text{см})^2}{2 \cdot 1.2 \cdot 10^3\,\text{т/см}^2} = -0.07\,\text{см};$$

Обозначим вес 1-го участка за $Q_1 = \gamma \cdot 2A \cdot 2 \cdot a$. Тогда полное удлинение 2-го участка можно вычислить как:

$$\Delta l_2 = \frac{-P \cdot l_2}{E \cdot A_2} + \frac{Q_1 \cdot l_2}{E \cdot A_2} + \frac{\gamma \cdot (l_2)^2}{2 \cdot E} = \frac{-P \cdot 3 \cdot a}{E \cdot 3 \cdot A} + \frac{(\gamma \cdot 2A \cdot 2 \cdot a) \cdot 3 \cdot a}{E \cdot 3 \cdot A} + \frac{\gamma \cdot (3 \cdot a)^2}{2 \cdot E} =$$

$$= \frac{-10.068\,\text{т} \cdot 3 \cdot 230\,\text{см}}{1.2 \cdot 10^3\,\text{т/см}^2 \cdot 3 \cdot 30\,\text{см}^2} + \frac{7 \cdot 10^{-5}\,\text{т/см}^3 \cdot (690\,\text{см})^2}{2 \cdot 1.2 \cdot 10^3\,\text{т/см}^2} = -0.05\,\text{см};$$

Вес 2-го участка примем за $Q_2 = \gamma \cdot 3A \cdot 3 \cdot a$. Далее, можно определить удлинение 3-го участка с учетом собственного веса:

$$\Delta l_3 = \frac{(-P + 2P) \cdot l_3}{E \cdot A_3} + \frac{Q_1 \cdot l_3}{E \cdot A_3} + \frac{Q_2 \cdot l_3}{E \cdot A_3} + \frac{\gamma \cdot (l_3)^2}{2 \cdot E} =$$

$$= \frac{(-P + 2P) \cdot 3 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot A} + \frac{\gamma \cdot 2A \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot A} + \frac{\gamma \cdot 3A \cdot 3 \cdot a \cdot 3 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot A} + \frac{\gamma \cdot (3 \cdot a)^2}{2 \cdot E} =$$

$$= \frac{18.28\,\text{т} \cdot 3 \cdot 230\,\text{см}}{1.2 \cdot 10^3\,\text{т/см}^2 \cdot 2 \cdot 30\,\text{см}^2} + \frac{7 \cdot 10^{-5}\,\text{т/см}^3 \cdot (690\,\text{см})^2}{2 \cdot 1.2 \cdot 10^3\,\text{т/см}^2} = 0.19\,\text{см}.$$

Таким образом, полное удлинение всего стержня примет вид:

$$\Delta l_{полн} = -0.07\,\text{см} + -0.05\,\text{см} + 0.19\,\text{см} = 0.07\,\text{см}.$$

Положительное значение $\Delta l_{полн}$ показывает, что стержень удлинился.

Ответ: Стержень не прочный; $\Delta l_{полн} = 0.07\,\text{см}$.

Задание для самостоятельной работы (задача №3)

Для заданной расчетной схемы чугунного стержня требуется:

1) построить эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ.
2) проверить прочность;
3) определить полное удлинение (укорочение)

Исходные данные задачи и схему нагружения взять согласно шифру из табл. 6 и 7.

Таблица № 6

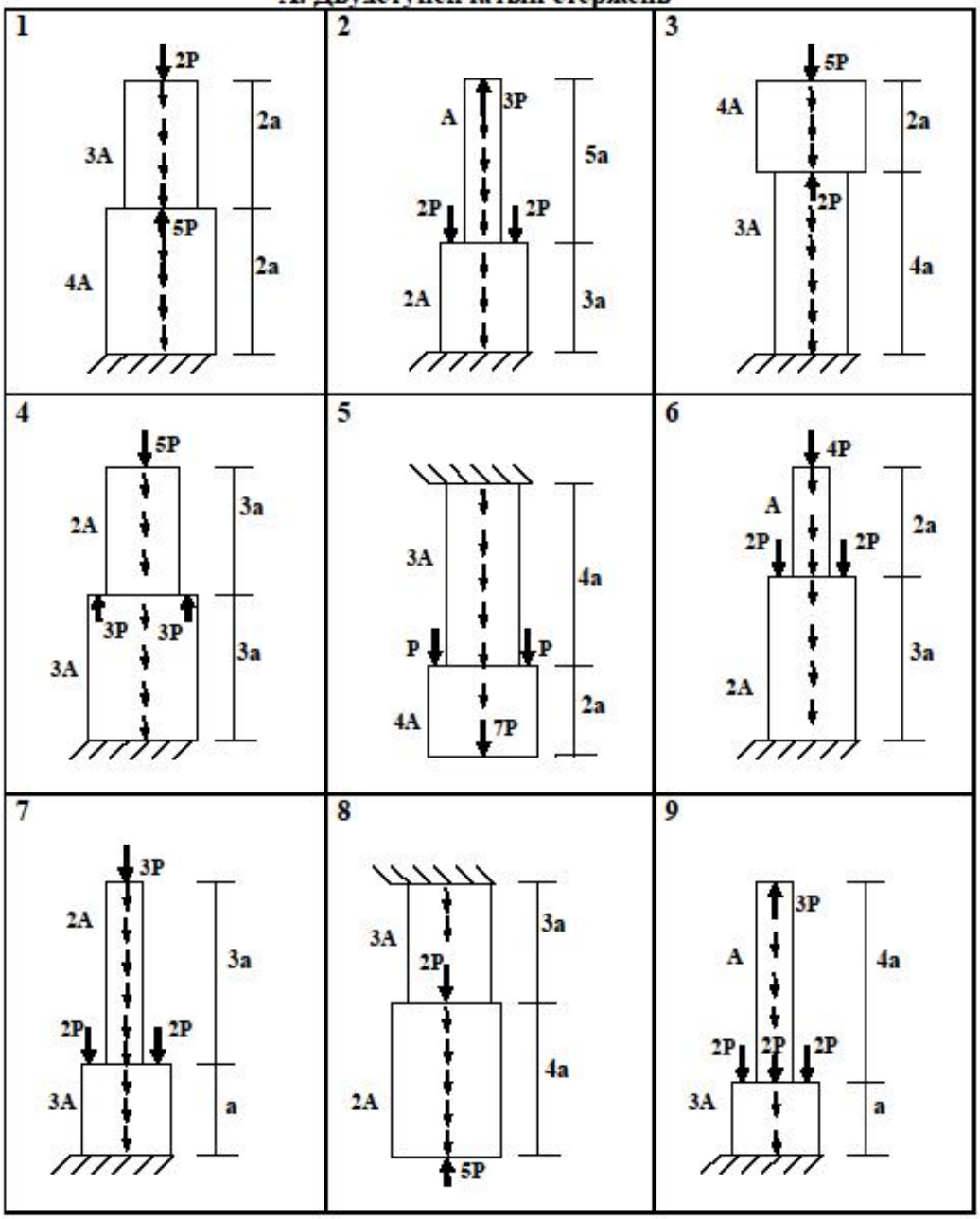
Исходные данные (задача №3)

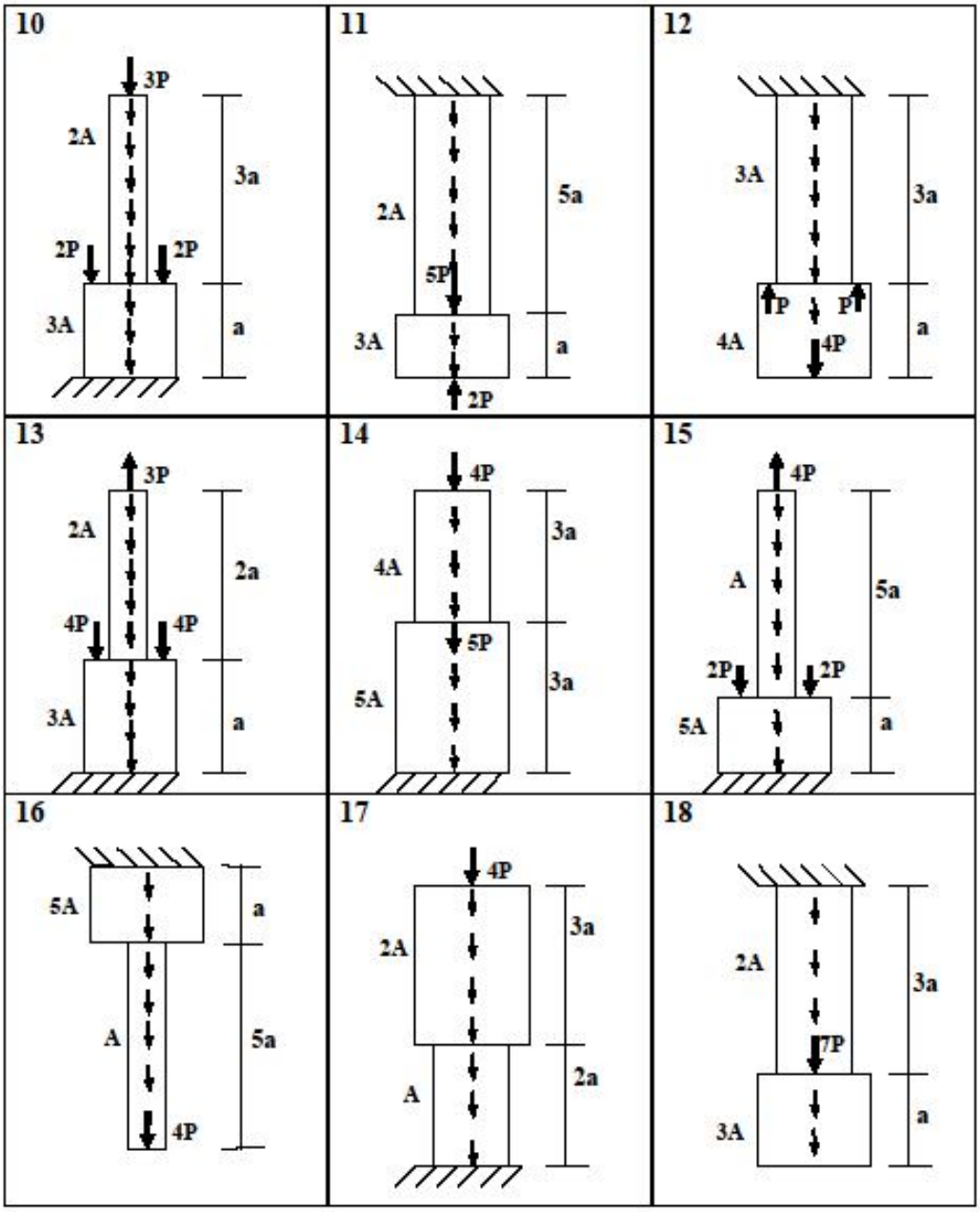
	А	*Б*	*В*	*Г*			*Д*
	Площадь сечения А, см^2	Р, т	Длина а, м	Модуль упругости Е*10^3, т/см^2	$R_{раст}$, т/см^2	$R_{сж}$, т/см^2	Удельный вес $\gamma \cdot 10^{-5}$, т/см^3
1	40	9	3.5	1.2	0.33	1.45	4.7
2	25	6	2.4	1.3	0.45	1.65	7.2
3	35	7	2.6	1.2	0.33	1.45	5.4
4	20	10	3.2	1.3	0.45	1.65	8.3
5	25	6	3.1	1.2	0.33	1.45	4.8
6	45	5	2.8	1.3	0.45	1.65	7.6
7	27	10	2.5	1.2	0.33	1.45	3.2
8	25	8	3.2	1.3	0.45	1.65	9
9	30	9	1.9	1.2	0.33	1.45	6.8
0	35	11	1.5	1.3	0.45	1.65	7.2

Таблица № 7

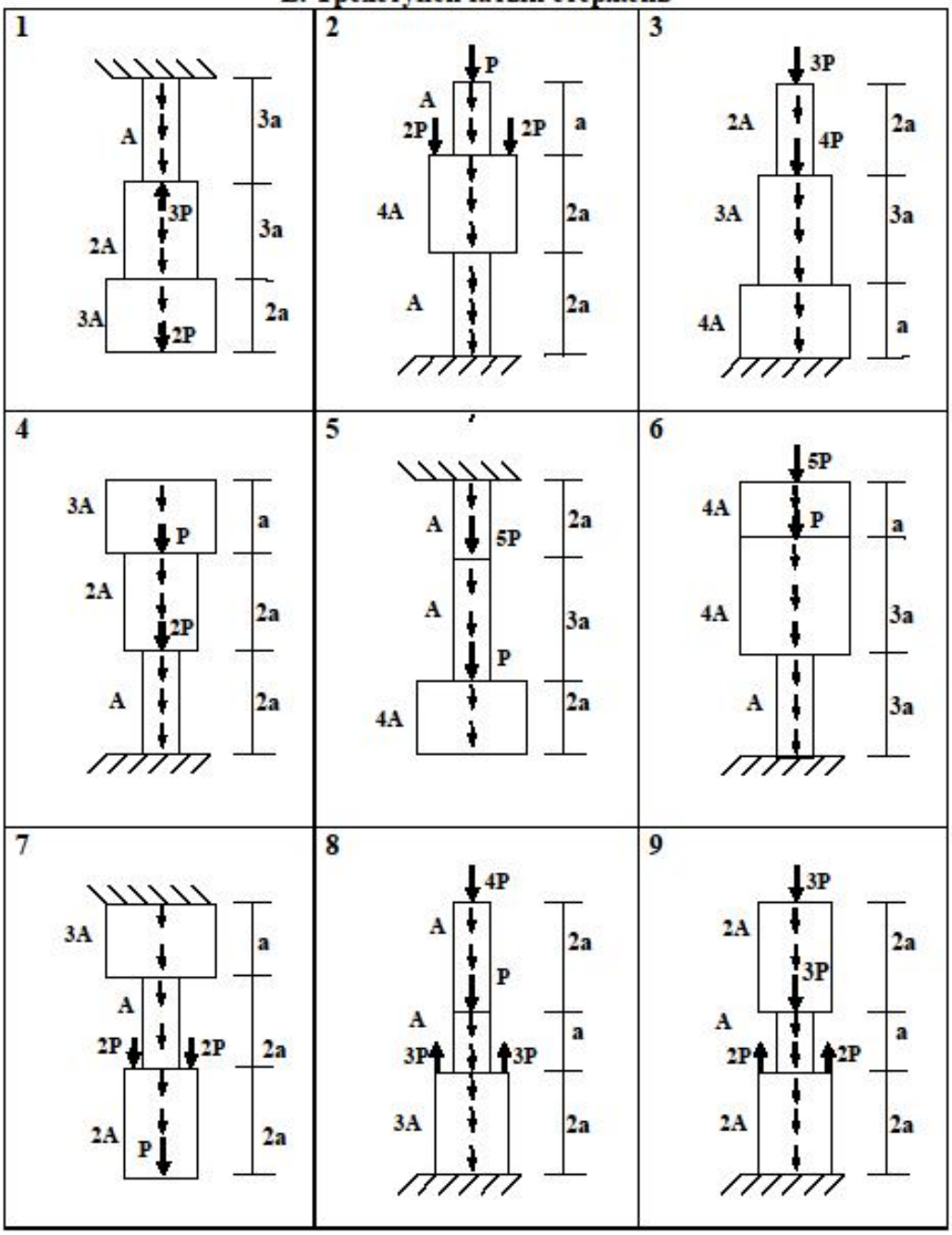
Схемы нагружения (задача № 3)

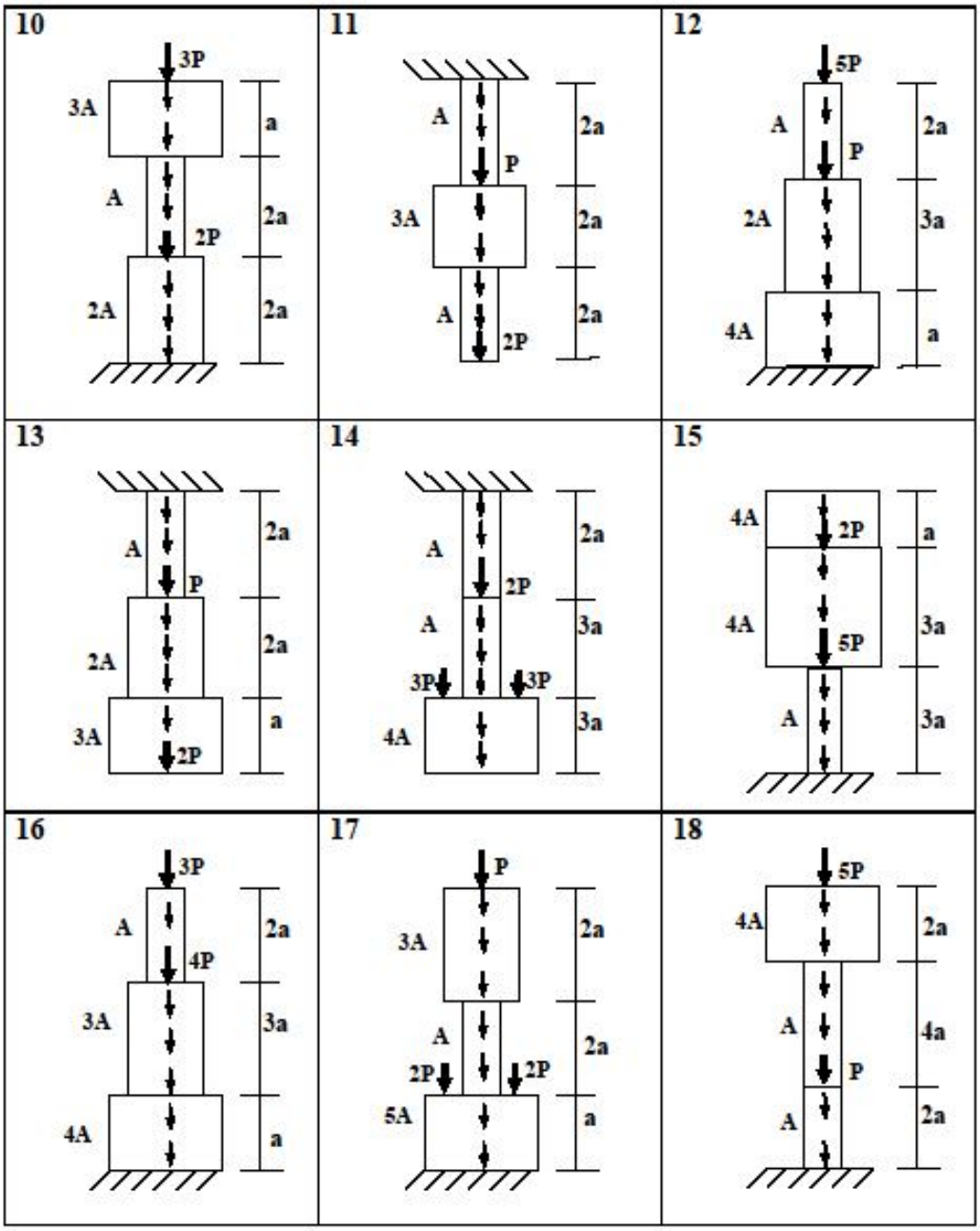
А. Двухступенчатый стержень




10
3P
2A
3a
2P
2P
3A
a
11
2A
5a
5P
3A
a
2P
12
3A
3a
P
P
4A
4P
a
13
3P
2A
2a
4P
4P
3A
a
14
4P
3a
4A
5P
3a
5A
15
4P
A
5a
2P
2P
5A
a
16
5A
a
A
5a
4P
17
4P
3a
2A
2a
A
18
2A
3a
7P
3A
a

Б. Трехступенчатый стержень




10
3P
3A
a
A
2a
2P
2A
2a
11
A
2a
P
3A
2a
A
2a
2P
12
5P
A
2a
P
2A
3a
4A
a
13
A
2a
P
2A
2a
3A
a
2P
14
A
2a
2P
A
3a
3P
3P
4A
3a
15
4A
2P
a
4A
3a
5P
A
3a
16
3P
A
2a
4P
3A
3a
4A
a
17
P
3A
2a
A
2a
2P
2P
5A
a
18
5P
4A
2a
A
4a
P
A
2a

Задача №4
Статически определимая стержневая система

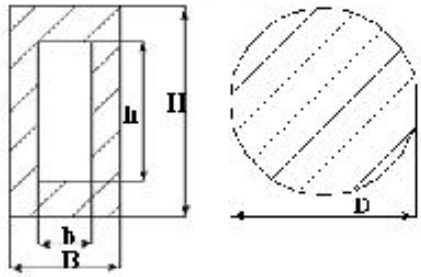
Пример решения задачи

Дана стержневая конструкция. Материал стержней – чугун. Требуется определить допустимую нагрузку [P].

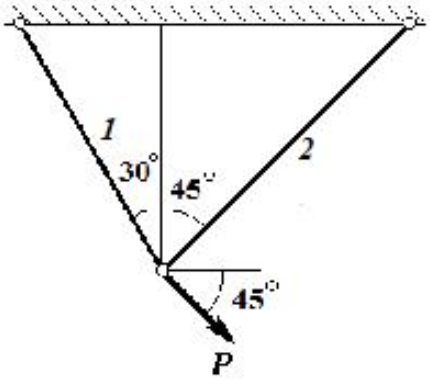
Исходные данные: a=15 мм; **H**=2a; **B**=a; **h**=0.3**H**; **b**=0.3**B**; **D**=1.5a;

$E=1.2\cdot 10^3$ т/см^2; $R_{раст}=0.33\,т/см^2$; $R_{сж}=1.45\,т/см^2$.

Схема сечения стержней



1 стержень **2 стержень**



Решение

1. Определим площади поперечного сечения каждого стержня.

Линейные размеры поперечных сечений примут вид:
a = 15 мм = 1.5 см;
H = 2a = 3 см;
B = a = 1.5 см;
h=0.3**H** = 0.9 см;
b=0.3**B** = 0.45 см;
D = **1.5a** = 2.25см;

Тогда можно вычислить площади сечений стержней:

$A_1 = B\cdot H - b\cdot h = 1.5см\cdot 3см - 0.45см\cdot 0.9см = 4.10см^2$;

$A_2 = \pi\cdot D^2/4 = 3.14\cdot(2.25см)^2/4 = 3.97см^2$;

2. Определим все неизвестные конструкции. Согласно рис.8 в задаче два неизвестных усилия в стержнях N_1, N_2. Так как заранее неизвестно, что испытывают стержни (сжатие или растяжение), то условно будем

считать, что стержни работают на растяжение, поэтому на рис. 8 усилия N_1, N_2 направим от сечения.

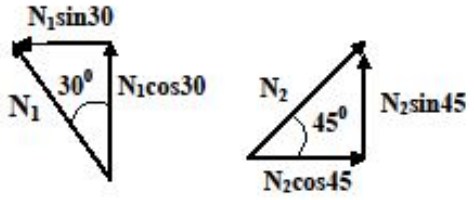


Рис.7.
Проекции усилий N_1, N_2 на оси координат

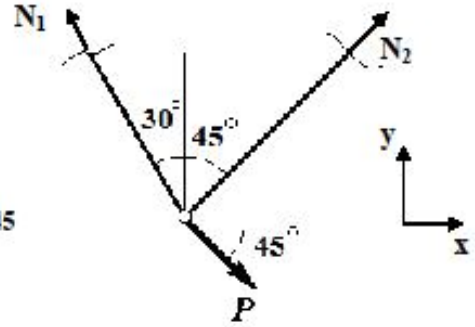


Рис.8.
Направление усилий в стержнях

3. N_1 и N_2 определим из уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_x = -N_1 \sin 30 + N_2 \cos 45 + P \cos 45 = 0; \\ \sum F_y = N_1 \cos 30 + N_2 \sin 45 - P \sin 45 = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

$$\begin{cases} \sum F_x = -N_1 \cdot 0.5 + N_2 \cdot 0.707 + P \cdot 0.707 = 0; \\ \sum F_y = N_1 \cdot 0.866 + N_2 \cdot 0.707 - P \cdot 0.707 = 0; \end{cases}$$

$$N_1 = 1.04P;$$
$$N_2 = -0.27P;$$

$N_2 < 0$, следовательно, второй стержень испытывает деформацию сжатия.

4. Допустимая нагрузка [P] определяется из условия прочности стержней.
Условие прочности для 1-ого стержня:

а). $\sigma_{раст} = \dfrac{N_1}{A_1} \le R_{раст}$; $\Rightarrow \dfrac{1.04 \cdot P}{4.10 см^2} \le 0.33 т/см^2$; $\Rightarrow P \le 1.3 т$.

Таким образом, получено, что из условия прочности по первому стержню нагрузка не может превышать 1.3 т.

Условие прочности для 2-ого стержня:

$$\text{б).}\quad |\sigma_{сж}| = \frac{N_2}{A_2} \le R_{сж}\ ; \quad \Rightarrow \frac{0.27 \cdot P}{3.97\,см^2} \le 1.45\,т/см^2; \quad \Rightarrow P \le 21.3\,т.$$

Из условия прочности по второму стержню нагрузка не может превышать 21.3 т.

Из двух нагрузок за допустимую нагрузку необходимо взять наименьшую для обеспечения прочности в обоих стержнях:

$$[P] = \min(1.3\,т;\ 21.3\,т) = 1.3\,т.$$

Ответ: $[P] = 1.3\,т$.

Задание для самостоятельной работы (задача №4)

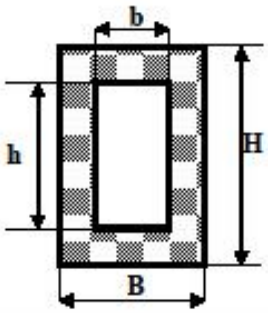
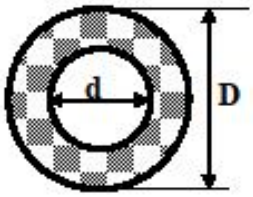
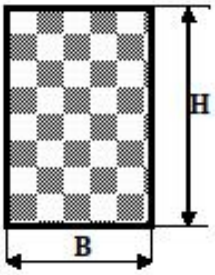
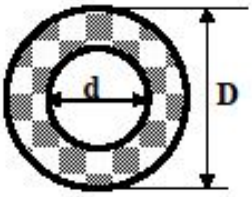
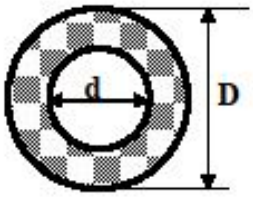
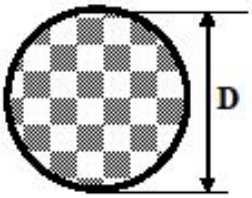
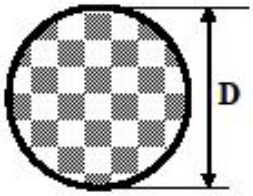
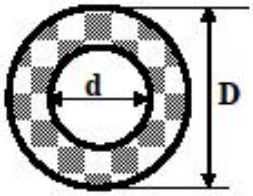
Дана стержневая конструкция. Материал стержней – чугун. Требуется определить допустимую нагрузку [P].
Исходные данные задачи взять согласно шифру из табл. 8, 9 и 10.

Исходные данные (задача №4) **Таблица № 8**

	А		*Б*	*В*		
	Схема поперечного сечения стержней (Таблица №9)	Параметры сечений	a, мм	Модуль упругости $E*10^3$, т/см^2	$R_{раст}$, т/см^2	$R_{сж}$, т/см^2
1	6	H=3a; B=2a; h=0.8H; b=0.8B;	12	1.2	0.33	1.45
2	2	H=a; B=2a; D=B; d=0.9D;	19	1.3	0.45	1.65
3	8	H=2a; B=a; h=0.6H; b=0.6B; D=B;	16	1.2	0.33	1.45
4	1	H=2a; h=0.6H; B=a; b=0.6B; D=B; d=0.7D;	20	1.3	0.45	1.65
5	5	H=a; B=a; h=0.6H; b=0.6B;	11	1.2	0.33	1.45
6	3	D=2a; d=0.7D;	15	1.3	0.45	1.65
7	7	D=a; d=0.5D;	20	1.2	0.33	1.45
8	4	D=3a; d=0.7D;	17	1.3	0.45	1.65
9	1	H=3a; h=0.7H; B=2a; b=0.7B; D=B; d=0.6D;	18	1.2	0.33	1.45
0	8	H=2a; B=2a; h=0.7H; b=0.6B; D=B;	13	1.3	0.45	1.65

Таблица № 9

Схемы поперечных сечений стержней (задача №4)

№	Стержень 1	Стержень 2
1		
2		
3		
4		

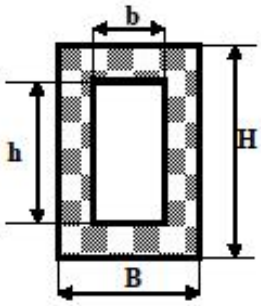
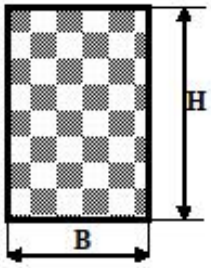
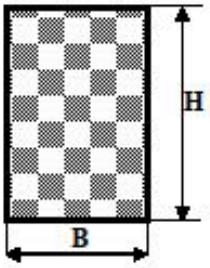
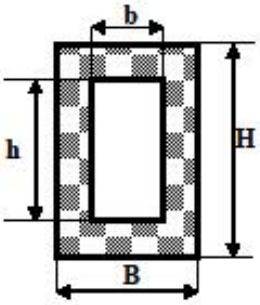
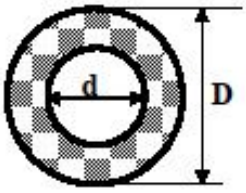
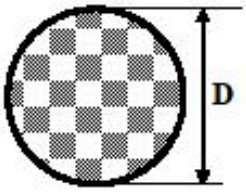
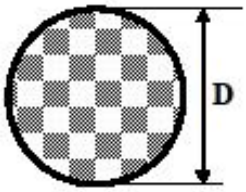
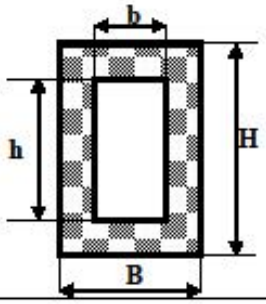
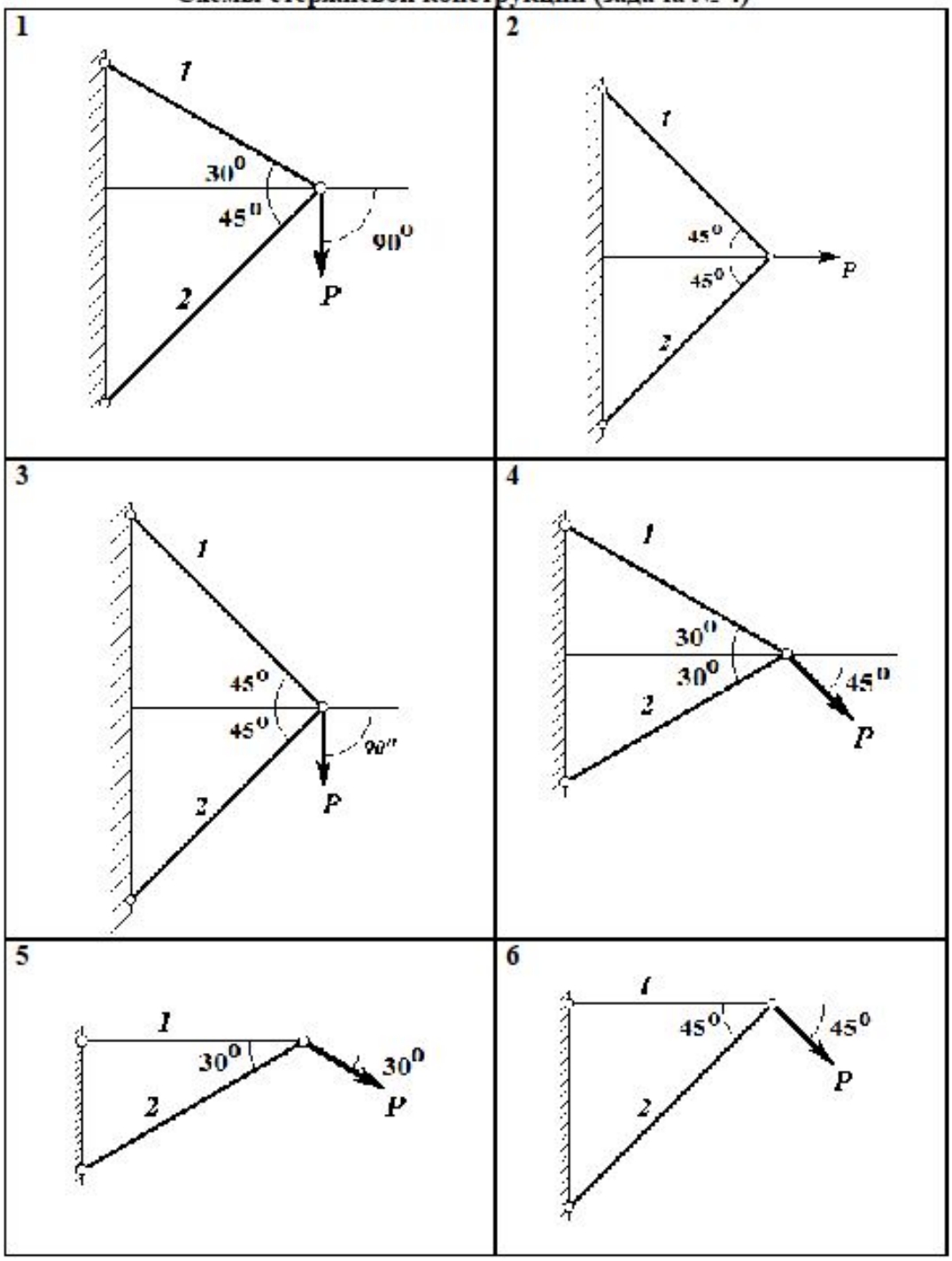
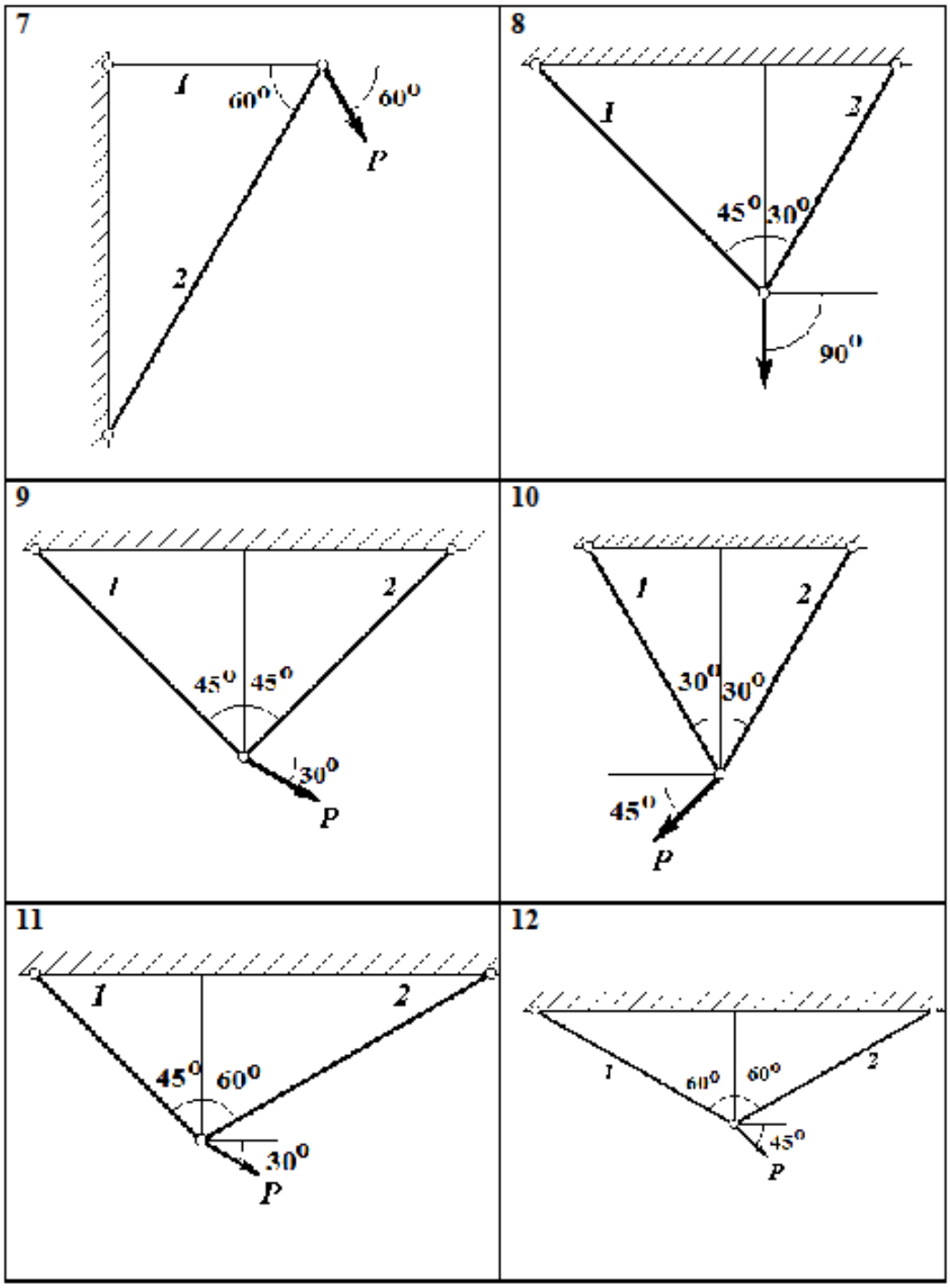
№	Стержень 1	Стержень 2
5		
6		
7		
8		

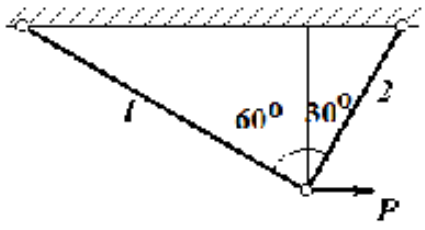
Таблица № 10

Схемы стержневой конструкции (задача № 4)

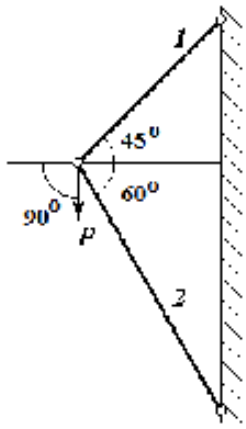



7
1
60⁰
60⁰
P
2
8
1
2
45⁰
30⁰
90⁰
9
1
2
45⁰
45⁰
30⁰
P
10
1
2
30⁰
30⁰
45⁰
P
11
1
2
45⁰
60⁰
30⁰
P
12
1
60⁰
60⁰
2
45⁰
P

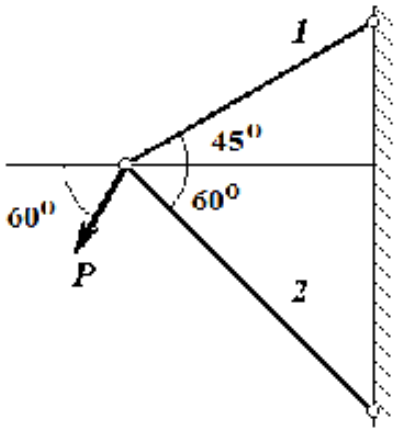
13



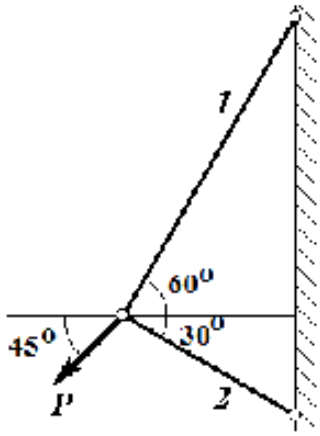
14



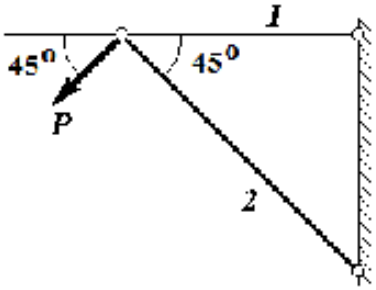
15



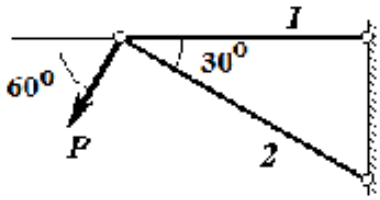
16



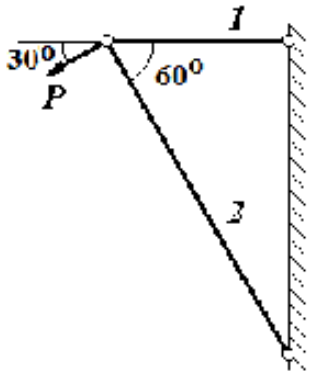
17



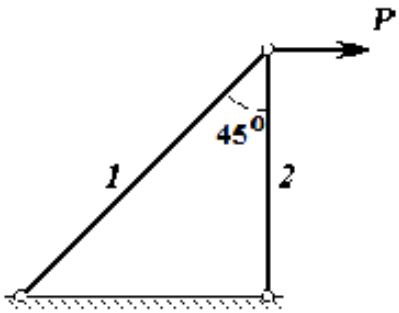
18



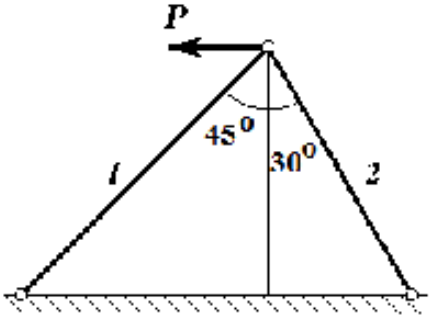
19



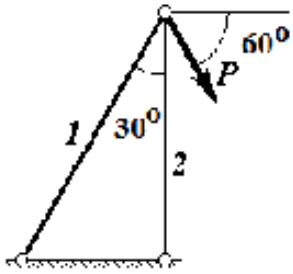
20



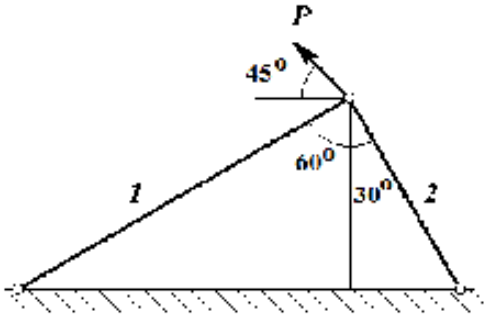
21



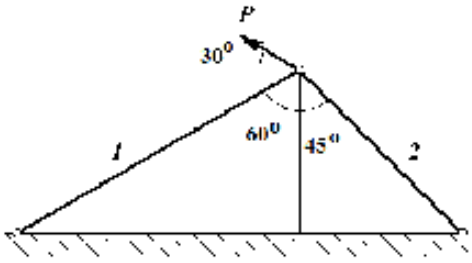
22

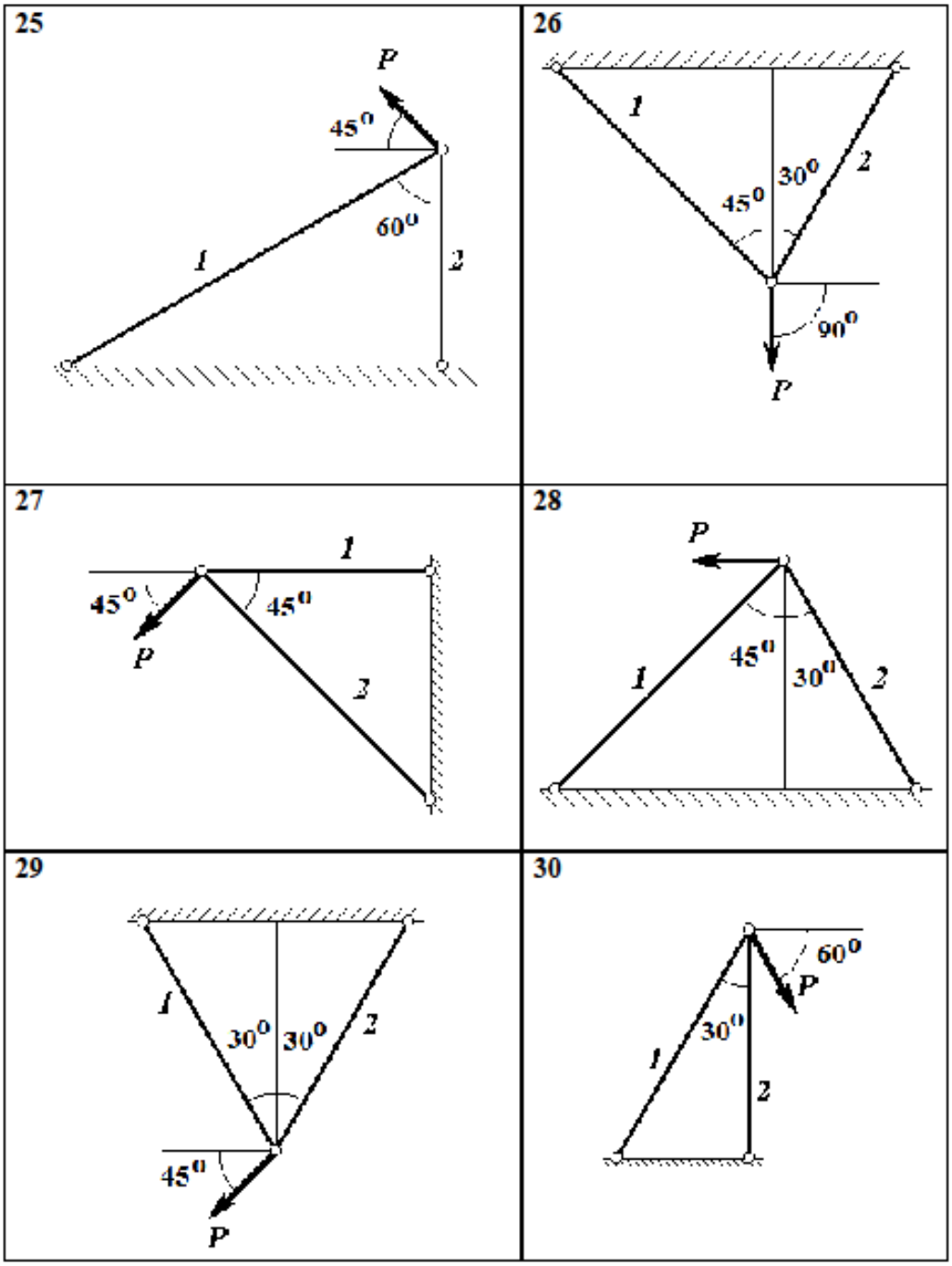


23



24




25
P
45⁰
60⁰
1
2
26
1
30⁰
2
45⁰
90⁰
P
27
1
45⁰
45⁰
P
2
28
P
45⁰
30⁰
1
2
29
1
30⁰
30⁰
2
45⁰
P
30
60⁰
P
30⁰
1
2

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Задача № 5
Задача для случая воздействия только внешней силовой нагрузки

Пример решения задачи

Для заданной расчетной схемы ступенчатой колонны требуется:

1) определить неизвестные продольные силы для каждого участка и реакции опор;
2) построить эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ;
3) подобрать площадь поперечного сечения A из условия прочности.

Исходные данные:

$P=50$ кН; $a=1$м; $E=0{,}36\cdot10^4$кН/см^2;

$R_{bt}=0{,}14\dfrac{кН}{см^2}$; $R_b=2.2\dfrac{кН}{см^2}$.

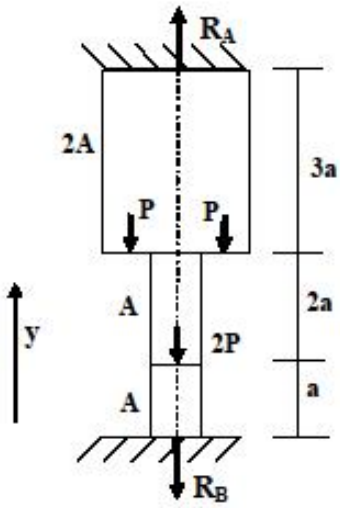


Рис.9

Решение

Верхний и нижний концы колонны жестко защемлены. Определим все неизвестные реакции в опорах.

Как показано на рис. 9 - это две реакции R_A и R_B. Система один раз статически неопределимая, так как для определения двух неизвестных R_A и R_B можно составить лишь одно независимое уравнение статического равновесия, которое имеет вид:

$$\sum P_{iy}=0 \Rightarrow R_A-2\cdot P-P-P-R_B=0 \qquad (16)$$

Известно, что из одного уравнения нельзя однозначно определить два неизвестных. Поэтому рассмотрим геометрическую сторону этой задачи. Составим одно дополнительное уравнение, а именно, *уравнение совместности деформаций.* Так как концы колонны жестко закреплены, то общая длина колонны не меняется. Исходя из этого условия и из условия,

что колонна имеет три участка нагружения, уравнение совместности деформаций можно записать в виде:

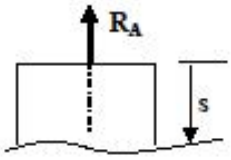
$$\Delta l = 0, \tag{17}$$

отсюда:

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} + \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = 0. \tag{18}$$

1. Определим неизвестные опорные реакции и продольные силы на каждом участке. Рассмотрим колонну по участкам.

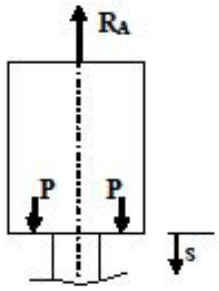
I участок $0 \le s \le 3a$



$$N_1 = R_A;$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{R_A \cdot 3 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot A}.$$

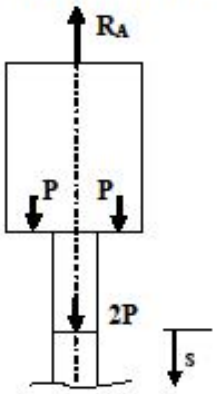
II участок $0 \le s \le 2a$



$$N_2 = R_A - 2 \cdot P;$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{(R_A - 2 \cdot P) \cdot 2 \cdot a}{E \cdot A}.$$

III участок $0 \le s \le a$



$$N_3 = R_A - 4 \cdot P;$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{(R_A - 4 \cdot P) \cdot a}{E \cdot A}.$$

Далее решаем следующую систему уравнений, составленную из уравнения равновесия (16) и уравнения совместности деформаций (18):

$$\begin{cases} R_A - 4\cdot P - R_B = 0; \\ \dfrac{R_A\cdot 3\cdot a}{E\cdot 2\cdot A} + \dfrac{(R_A - 2\cdot P)\cdot 2\cdot a}{E\cdot A} + \dfrac{(R_A - 4\cdot P)\cdot a}{E\cdot A} = 0. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение из системы:

$$R_A\cdot 1.5 + (R_A - 2\cdot P)\cdot 2 + (R_A - 4\cdot P) = 0;$$
$$4.5\cdot R_A - 8\cdot P = 0;$$
$$R_A = 88.89\,\text{кН}.$$

Тогда из первого уравнения получим:

$$88.89 - 4\cdot P - R_B = 0;$$
$$R_B = -111.11\,\text{кН}.$$

Далее можно определить продольные силы **N** нормальные напряжения σ по участкам:

I участок $0 \le s \le 3a$

$N_1 = R_A = 88.89\,\text{кН};$

$\sigma_1 = \dfrac{N_1}{A_1} = \dfrac{88.89}{2\cdot A} = \dfrac{44.45}{A};$ $\Rightarrow \sigma_1 > 0$ участок испытывает растяжение.

II участок $0 \le s \le 2a$

$N_2 = R_A - 2\cdot P = 88.89 - 100 = -11.11\,\text{кН};$

$\sigma_2 = \dfrac{N_2}{A_2} = -\dfrac{11.11}{A};$ $\Rightarrow \sigma_2 < 0$ участок испытывает сжатие.

III участок $0 \le s \le a$

$N_3 = R_A - 4\cdot P = 88.89 - 200 = -111.11\,\text{кН};$

$\sigma_3 = \dfrac{N_3}{A_3} = -\dfrac{111.11}{A};$ $\Rightarrow \sigma_3 < 0$ участок испытывает сжатие.

2. Построим эпюры **N** и σ как показано на рис.10.

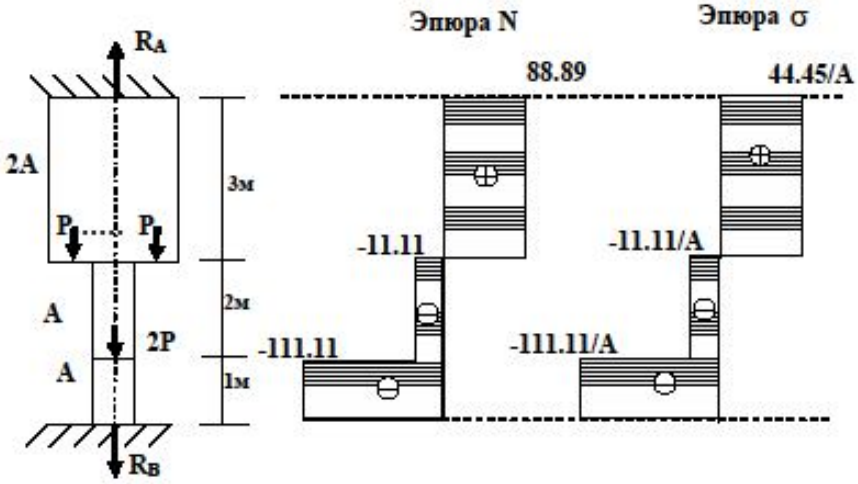


Рис. 10. Эпюры продольных сил и нормальных напряжений

3. Проведем расчет на прочность для определения площади сечения А.

Опасные сечения определяются из эпюры нормальных напряжений σ. Колонна изготовлена из разнопрочного материала, поэтому расчет на прочность проведем по максимально сжатым и растянутым сечениям.

$$|\sigma_{сж}|^{max} \le R_b \Rightarrow \frac{111.11\,кН}{A} \le 2.2\,кН/см^2;\ \Rightarrow A \ge 50.5\,см^2;$$

$$\sigma_{раст}{}^{max} \le R_{bt} \Rightarrow \frac{44.45кН}{A} \ge 0.14кН/см^2;\ \Rightarrow A \ge 317.5см^2.$$

Вывод: Из двух площадей выбираем условие с наибольшей площадью $A \ge 317.5см^2$ для обеспечения прочности на всех участках.

Задание для самостоятельной работы (задача № 5)

Для заданной статически неопределимой расчетной схемы ступенчатой колонны требуется:

1) определить неизвестные продольные силы для каждого участка и реакции опор;
2) построить эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ;
3) подобрать площадь поперечного сечения А из условия прочности.

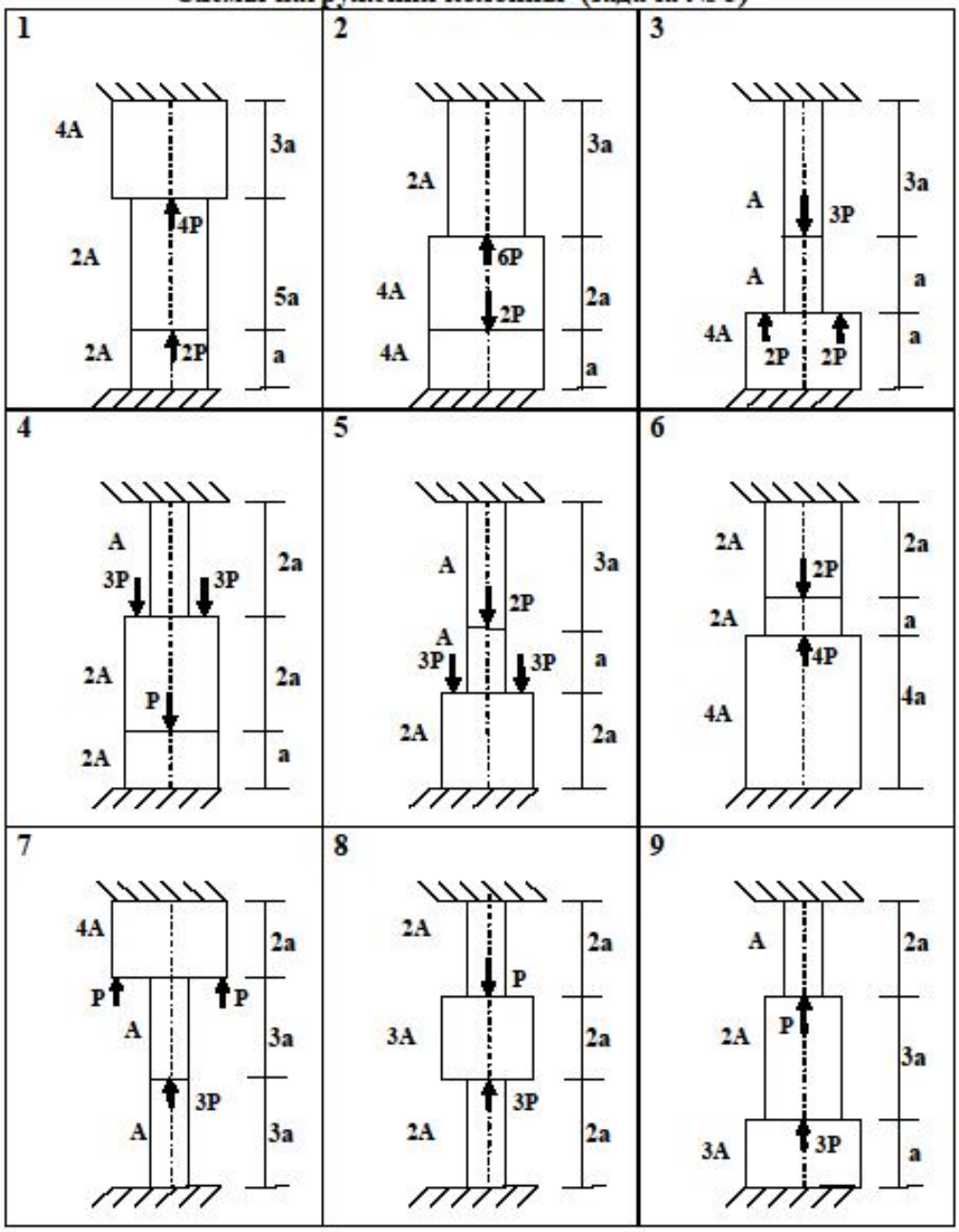
Исходные данные задачи взять согласно шифру из табл. 11 и 12.

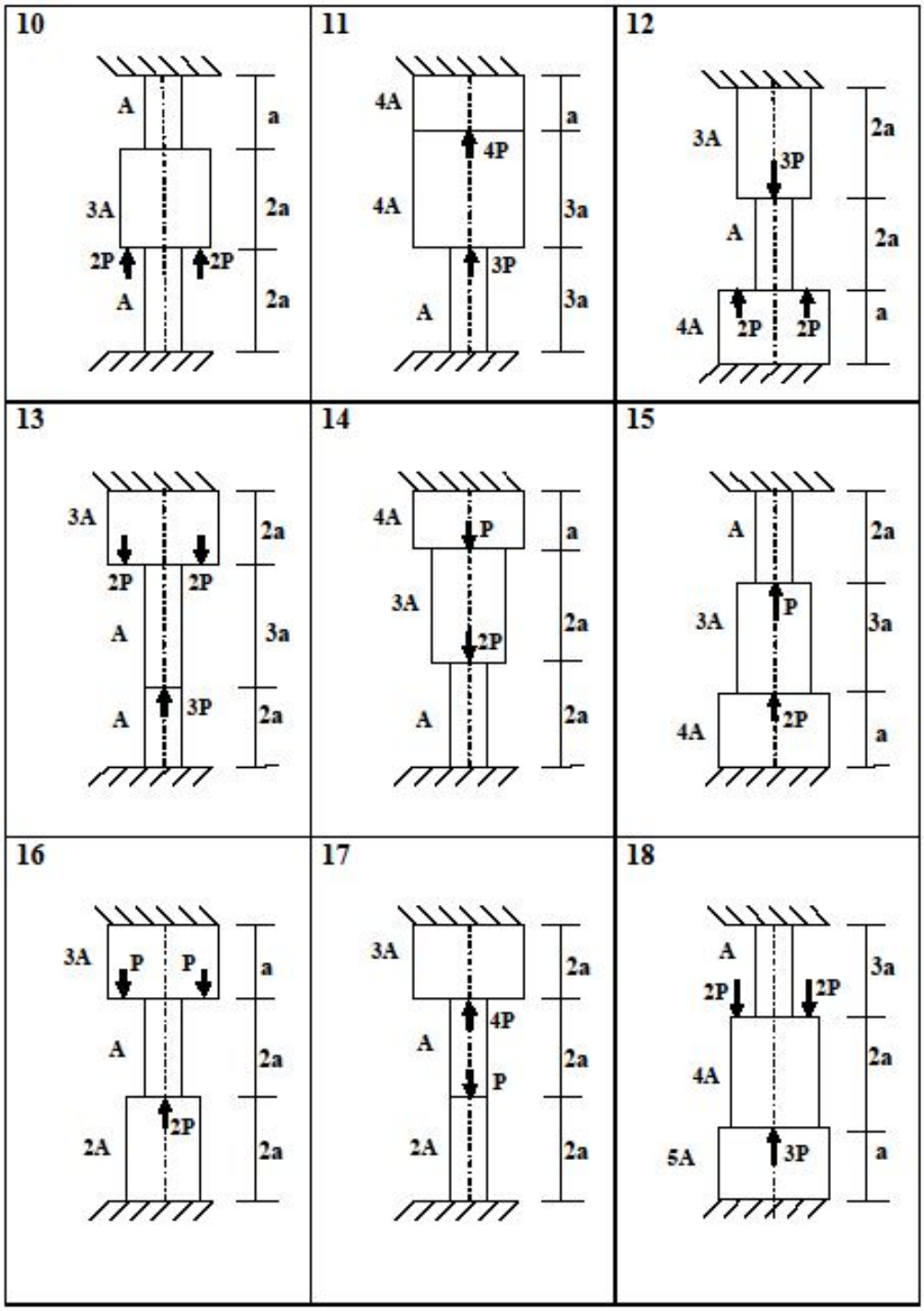
Исходные данные (задача № 5) Таблица № 11

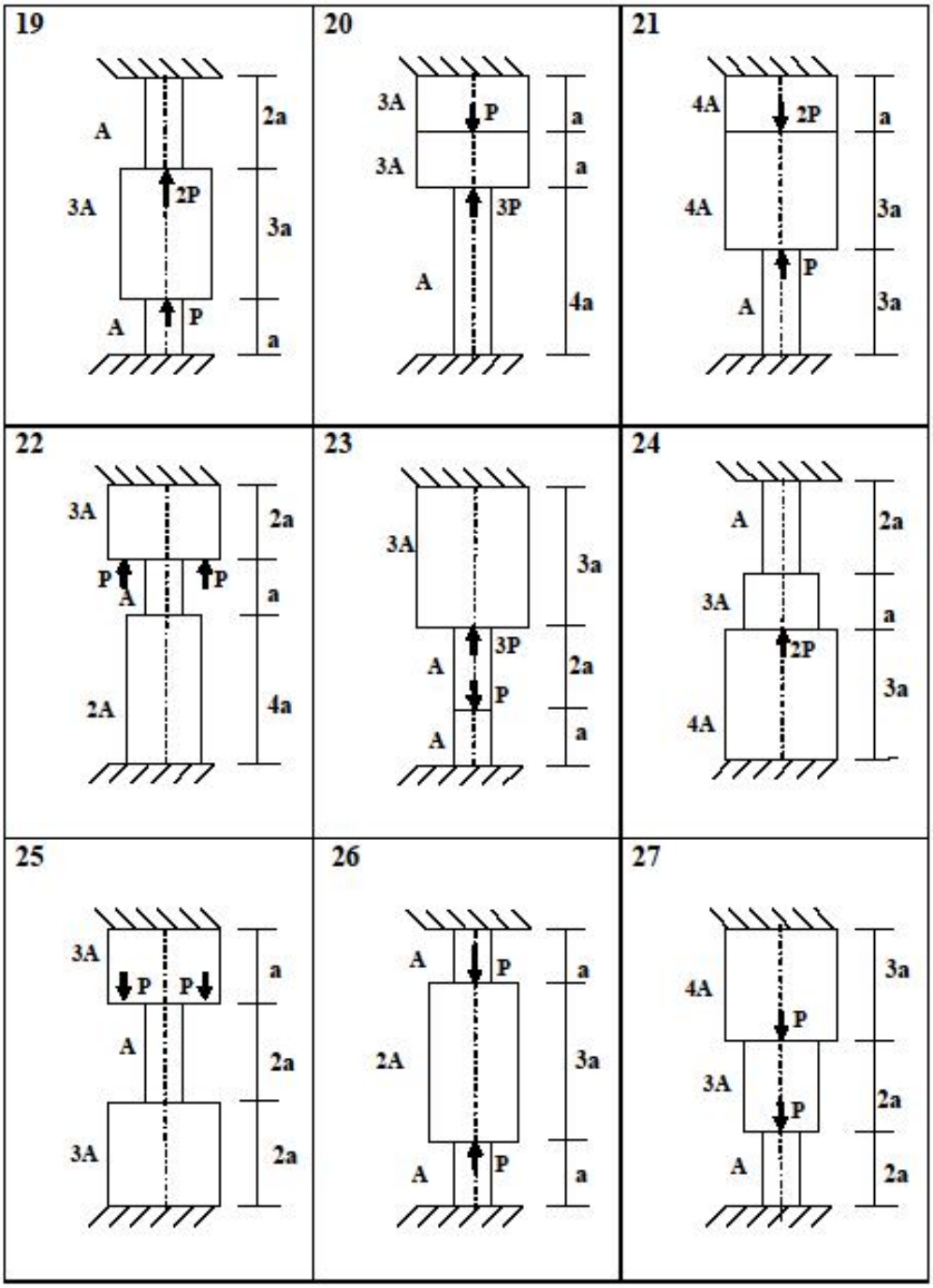
	А	*Б*	*В*		
	P, кН	**Длина a, м**	**Модуль упругости $E*10^4$, кН/см^2**	**R_{bt}, кН/см^2**	**R_b, кН/см^2**
1	90	1.2	0.325	0.115	1.7
2	60	1.5	0.345	0.13	1.95
3	85	0.8	0.36	0.14	2.2
4	70	1.3	0.37	0.15	2.5
5	60	1.1	0.38	0.16	2.75
6	75	1.2	0.39	0.17	3
7	50	0.9	0.395	0.18	3.3
8	80	1.2	0.345	0.13	1.95
9	90	1.1	0.36	0.14	2.2
0	100	1	0.37	0.15	2.5

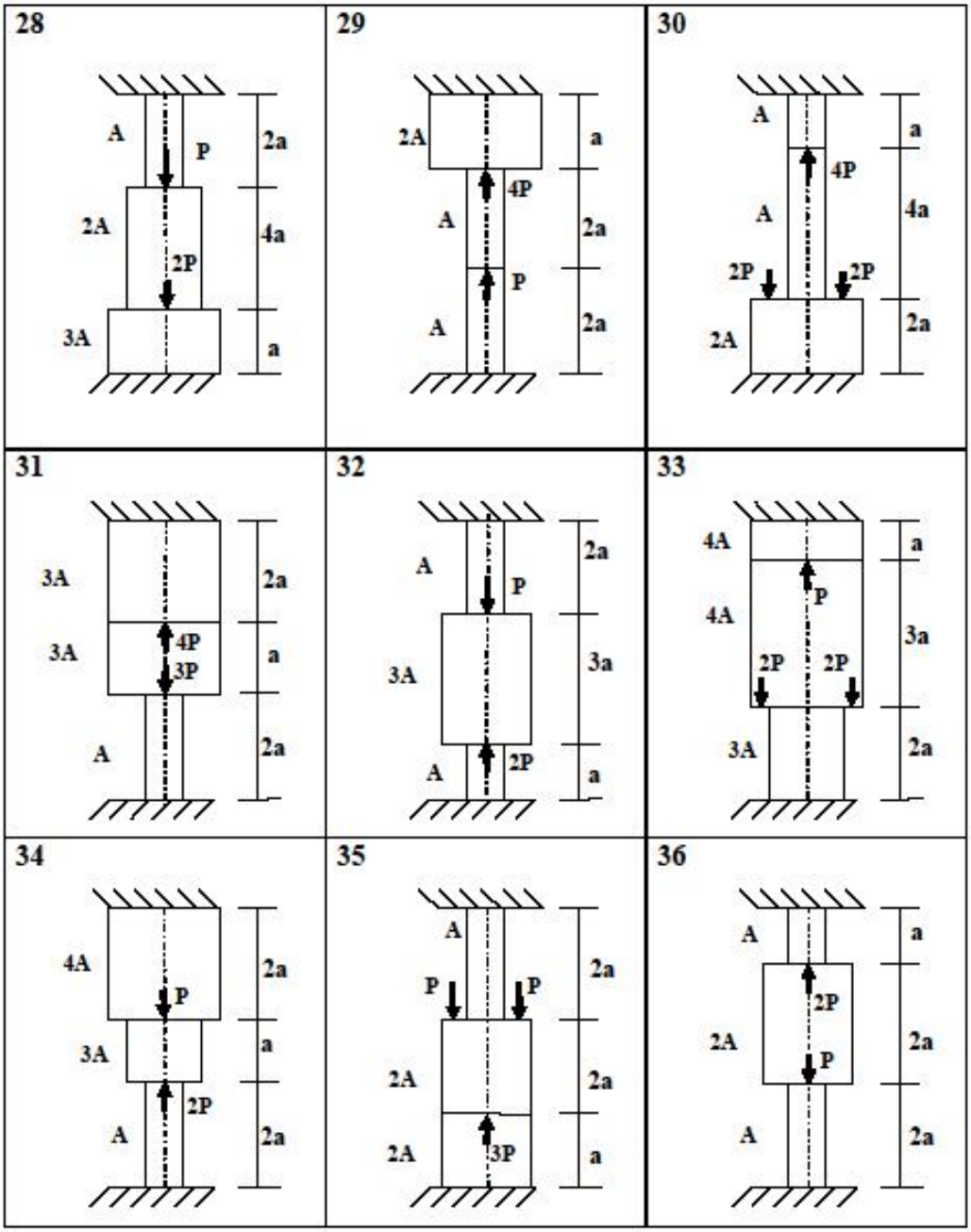
Таблица № 12

Схемы нагружения колонны (задача № 5)




10
A
a
3A
2a
2P
2P
A
2a
11
4A
a
4P
4A
3a
3P
A
3a
12
3A
2a
3P
A
2a
4A
2P
2P
a
13
3A
2a
2P
2P
A
3a
A
3P
2a
14
4A
P
a
3A
2a
2P
A
2a
15
A
2a
P
3A
3a
4A
2P
a
16
3A
P
P
a
A
2a
2A
2P
2a
17
3A
2a
4P
A
2a
P
2A
2a
18
A
3a
2P
2P
4A
2a
5A
3P
a

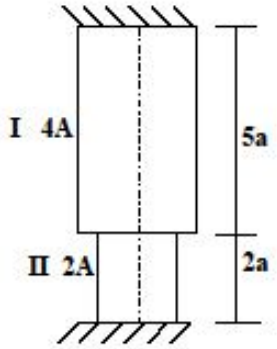

19
A
3A
2P
A
P
2a
3a
a
20
3A
P
3A
3P
A
a
a
4a
21
4A
2P
4A
P
A
a
3a
3a
22
3A
P
A
P
2A
2a
a
4a
23
3A
3P
A
P
A
3a
2a
a
24
A
3A
2P
4A
2a
a
3a
25
3A
P
P
A
3A
a
2a
2a
26
A
P
2A
A
P
a
3a
a
27
4A
P
3A
P
A
3a
2a
2a


28
A
P
2a
2A
4a
2P
3A
a
29
2A
a
4P
A
2a
P
A
2a
30
A
a
4P
A
4a
2P
2P
2A
2a
31
3A
2a
3A
4P
3P
a
A
2a
32
A
2a
P
3A
3a
A
2P
a
33
4A
a
P
4A
3a
2P
2P
3A
2a
34
4A
2a
P
3A
a
2P
A
2a
35
A
2a
P
P
2A
2a
2A
3P
a
36
A
a
2P
2A
2a
P
A
2a

Задача № 6
Учет температурных перепадов в стержневой системе

Пример решения задачи

Дана бетонная ступенчатая колонна, концы которой закреплены между неподвижными основаниями. Колонна на участках испытывает температурные перепады. На первом участке температурный перепад равен Δt_I, на втором – Δt_{II}.



Требуется:

1) определить температурные усилия и температурные напряжения;
2) проверить прочность колонны.

Исходные данные:

$R_{bt} = 0{,}14\frac{кН}{см^2}$; $R_b = 2.2\frac{кН}{см^2}$; а=1.2 м; $A = 200 см^2$;

$\Delta t_I = 20 град$; $\Delta t_{II} = -30 град$; $E = 0.36 \cdot 10^4 кН/см^2$.

Коэффициент линейного температурного расширения бетона $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

Решение

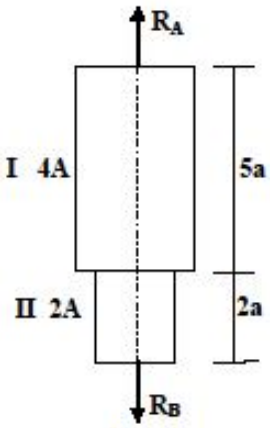


Рис.11

1. Колонна имеет два участка. Определим реакции в опорах колонны (рис. 11). Из-за температурных перепадов колонны эти реакции будут ненулевыми. Запишем одно независимое уравнение равновесия:

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow \quad R_A - R_B = 0 \qquad (19)$$

Из одного уравнения статики нельзя однозначно определить два неизвестных, поэтому задача один раз статически неопределимая.

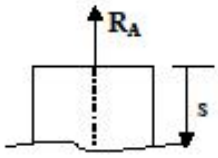
Составим дополнительное уравнение совместности деформаций, исходя из условия,

что общая длина колонны не изменяется:

$$\Delta l_I + \Delta l_{II} = 0. \qquad (20)$$

Рассмотрим колонну по участкам.

I участок $0 \le s \le 5a$

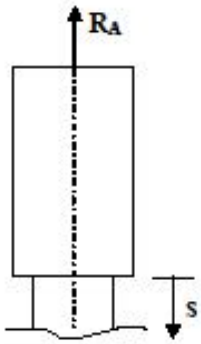


$N_I^t = R_A$;

Полная деформация I участка будет равна:

$$\Delta l_I = \frac{N_I^t \cdot l_I}{E \cdot A_I} + \alpha \cdot 1 \cdot \Delta t_I = \frac{R_A \cdot 5 \cdot a}{E \cdot 4 \cdot A} + \alpha \cdot 5 \cdot a \cdot \Delta t_I.$$

II участок $0 \le s \le 2a$



$N_{II}^t = R_A$

Полная деформация II участка будет равна:

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{II}^t \cdot l_{II}}{E \cdot A_{II}} + \alpha \cdot 1 \cdot \Delta t_{II} = \frac{R_A \cdot 2 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot A} + \alpha \cdot 2 \cdot a \cdot \Delta t_{II}.$$

Тогда уравнение совместности деформаций (20) примет вид:

$$\frac{R_A \cdot 5 \cdot a}{E \cdot 4 \cdot A} + \alpha \cdot 5 \cdot a \cdot \Delta t_I + \frac{R_A \cdot 2 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot A} + \alpha \cdot 2 \cdot a \cdot \Delta t_{II} = 0 \qquad (21)$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} R_A - R_B = 0 \\ \dfrac{R_A \cdot 5 \cdot a}{E \cdot 4 \cdot A} + \alpha \cdot 5 \cdot a \cdot \Delta t_I + \dfrac{R_A \cdot 2 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot A} + \alpha \cdot 2 \cdot a \cdot \Delta t_{II} = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения получим:

$$\frac{R_A \cdot 5 \cdot 120\text{см}}{0.36 \cdot 10^4 \text{кН/см}^2 \cdot 4 \cdot 200\text{см}^2} + 10^{-5} 1/\text{град} \cdot 5 \cdot 120\text{см} \cdot 20\,\text{град} +$$
$$+ \frac{R_A \cdot 2 \cdot 120\text{см}}{0.36 \cdot 10^4 \text{кН/см}^2 \cdot 2 \cdot 200\text{см}^2} + 10^{-5} 1/\text{град} \cdot 2 \cdot 120\text{см} \cdot (-30\,\text{град}) = 0$$

Тогда $R_A = -128\text{кН};\ R_B = -128\text{кН};$

Далее можно определить температурные усилия N^t и температурные напряжения σ^t по участкам.

I участок $0 \le s \le 5a$

$N_I^t = R_A = -128\text{кН};$

$$\sigma_I^t = \frac{N_I^t}{A_I} = -\frac{128\text{кН}}{4 \cdot 200\text{см}^2} = -0.16\ \text{кН/см}^2;$$

II участок $0 \le s \le 2a$

$N_{II}^t = R_A = -128\text{кН};$

$$\sigma_{II}^t = \frac{N_{II}^t}{A_{II}} = -\frac{128\text{кН}}{2 \cdot 200\text{см}^2} = -0.32\ \text{кН/см}^2;$$

2. Проверим колонну на прочность. Оба участка испытывают деформацию сжатия. Выберем максимальное по модулю значение температурного напряжения и запишем условие прочности:

$$\left|\sigma_{сж}^t\right|^{max} \le R_b \Rightarrow \quad 0.32\text{кН/см}^2 \le 2.2\ \text{кН/см}^2;$$

Вывод: Условие прочности выполняется, следовательно, колонна прочная.

Задание для самостоятельной работы (задача № 6)

Дана бетонная ступенчатая колонна, концы которой жестко защемлены. Колонна на участках испытывает температурные перепады: Δt_I, Δt_{II} и Δt_{III}.

Требуется:

1) определить температурные усилия и температурные напряжения;
2) проверить прочность колонны.

Коэффициент линейного температурного расширения бетона $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ 1/град. Исходные данные задачи взять согласно шифру из табл. 13 и 14.

Таблица № 13

Исходные данные (задача № 6)

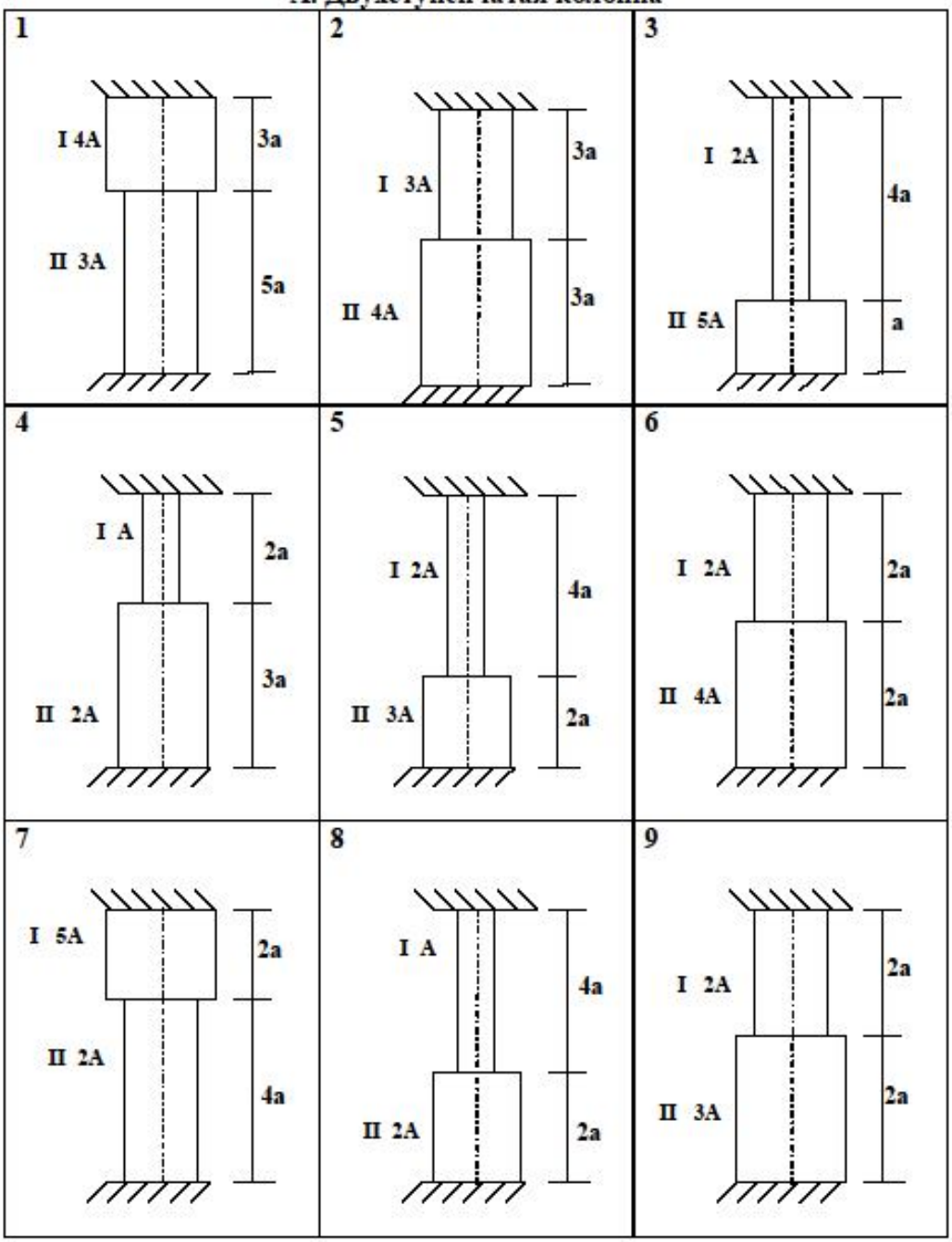
	А	*Б*	*В*			*Г*		
	Площадь сечения А, см^2	Длина а, м	Модуль упругости Е*10^4, кН/см^2	R_{bt}, кН/см^2	R_b, кН/см^2	Температурные перепады на участках, град		
						Δt_I	Δt_{II}	Δt_{III}
1	250	1.3	0.345	0.13	1.95	-20	30	40
2	220	1.2	0.36	0.14	2.2	30	60	-45
3	210	1.4	0.37	0.15	2.5	-20	-30	-20
4	110	1.3	0.38	0.16	2.5	60	-50	-55
5	240	1.1	0.39	0.17	3	-15	20	20
6	200	0.9	0.395	0.18	3.3	15	50	-20
7	170	1.8	0.345	0.13	1.95	25	-30	-20
8	250	1.5	0.36	0.14	2.2	-10	-30	-25
9	230	1.2	0.37	0.15	2.5	20	-50	40
0	180	1.7	0.36	0.14	2.2	-35	25	40

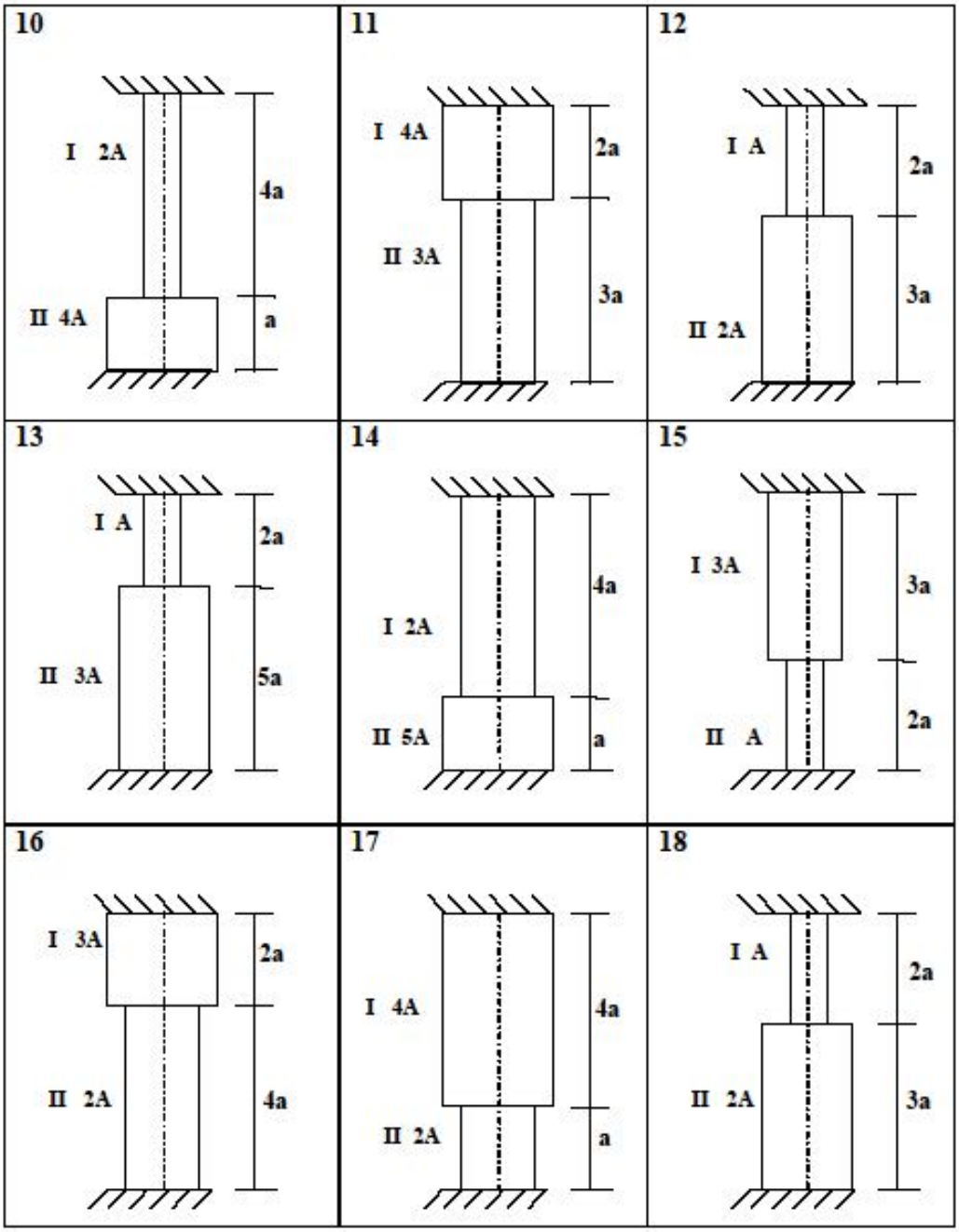
Замечание: Δt_I – температурный перепад для I участка;
Δt_{II} – температурный перепад для II участка;
Δt_{III} – температурный перепад для III участка;

Схемы для колонн (задача № 6)

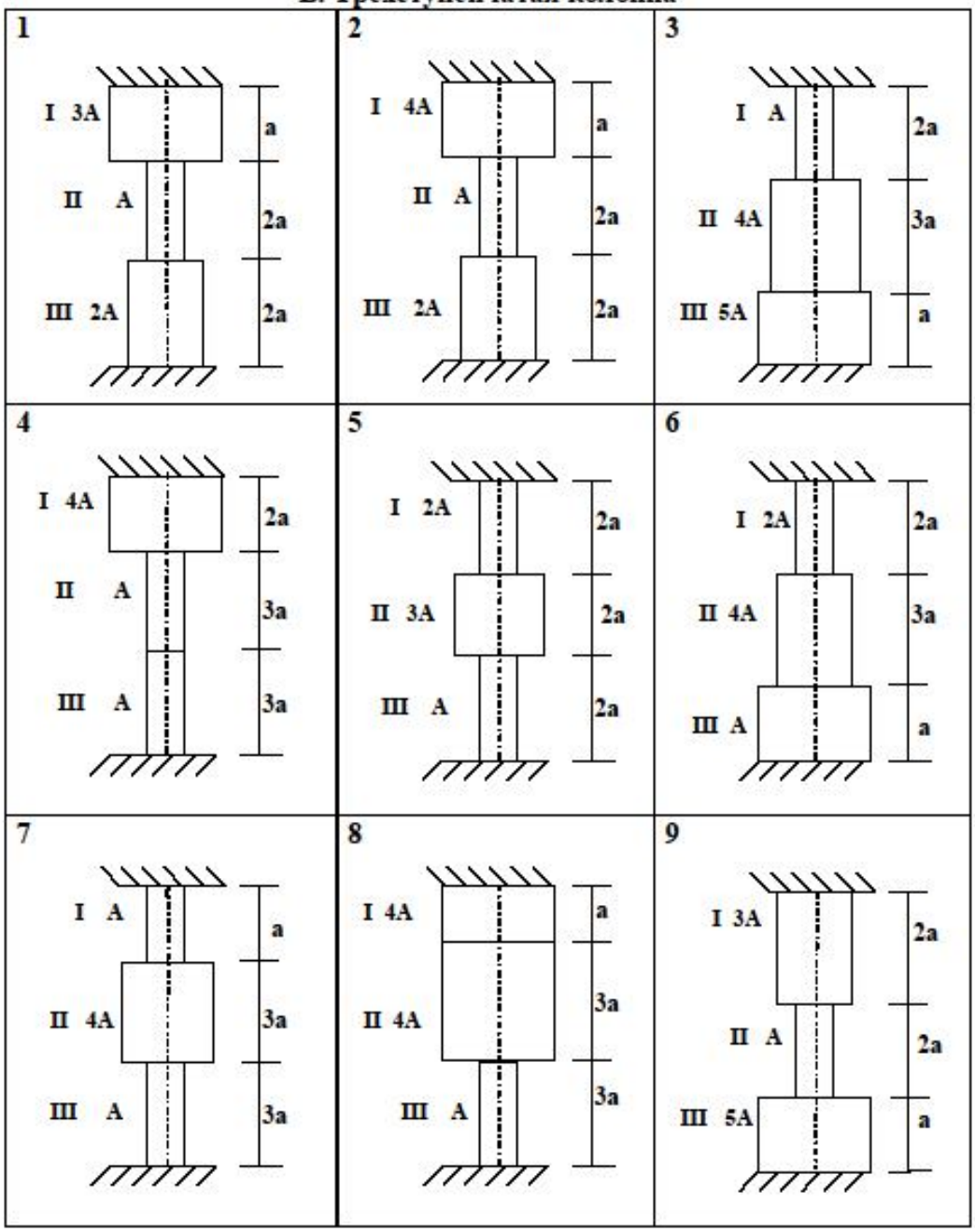
Таблица № 14

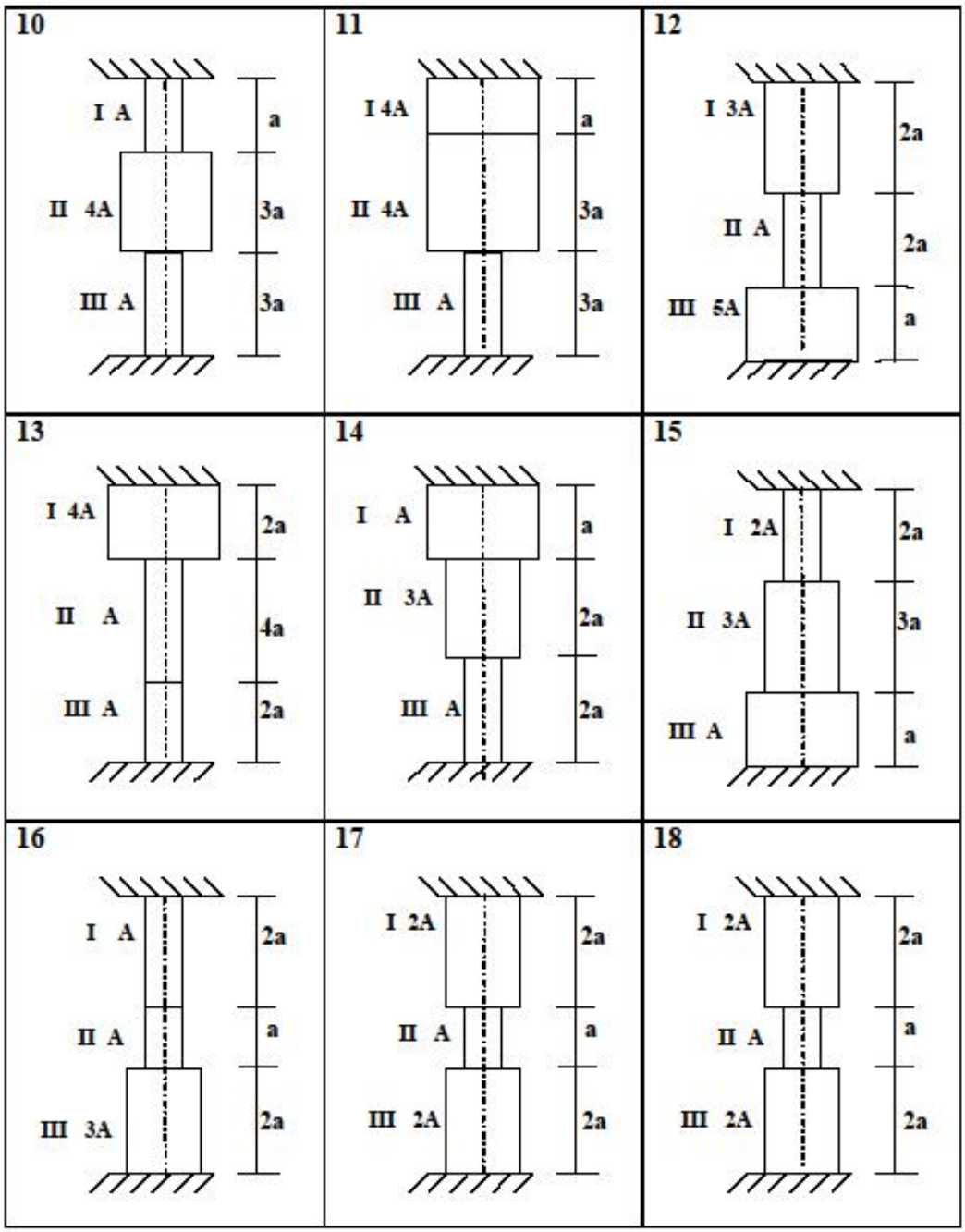
А. Двухступенчатая колонна




10
I 2A
4a
II 4A
a
11
I 4A
2a
II 3A
3a
12
I A
2a
3a
II 2A
13
I A
2a
II 3A
5a
14
4a
I 2A
II 5A
a
15
I 3A
3a
2a
II A
16
I 3A
2a
II 2A
4a
17
I 4A
4a
II 2A
a
18
I A
2a
II 2A
3a

Б. Трехступенчатая колонна




10
I A
II 4A
III A
a
3a
3a
11
I 4A
II 4A
III A
a
3a
3a
12
I 3A
II A
III 5A
2a
2a
a
13
I 4A
II A
III A
2a
4a
2a
14
I A
II 3A
III A
a
2a
2a
15
I 2A
II 3A
III A
2a
3a
a
16
I A
II A
III 3A
2a
a
2a
17
I 2A
II A
III 2A
2a
a
2a
18
I 2A
II A
III 2A
2a
a
2a

Задача № 7
Учет неточности изготовления стержневой системы

Пример решения задачи

Дан чугунный ступенчатый стержень, концы которого закреплены между неподвижными основаниями. Неточность изготовления длины участков стержня определяется следующими параметрами: Δ_I, Δ_{II} и Δ_{III} и показана зазором на рис.12. Если неточность изготовления $\Delta > 0$, значит, стержень сделан длиннее, если $\Delta < 0$ – короче.

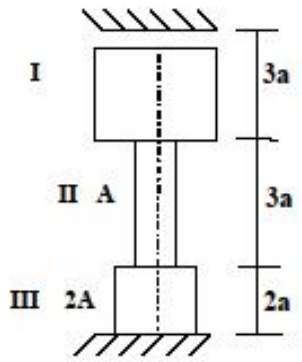


Рис.12

Требуется:

1) определить монтажные усилия и монтажные напряжения;
2) проверить прочность стержня.

Исходные данные:

$R_{раст} = 0.33\,т/см^2$; $R_{сж} = 1.45\,т/см^2$;

$\Delta_I = -0.3мм$; $\Delta_{II} = -0.4мм$; $\Delta_{III} = 0.2мм$;

$E = 1.2 \cdot 10^3\,т/см^2$; $A = 18см^2$; a=1.2 м.

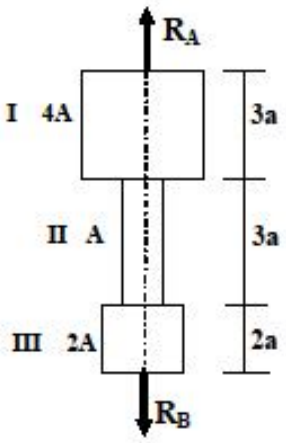


Рис.13

Решение

1. Отметим на рис. 13 реакции в опорах R_A и R_B. Составим независимое уравнение статики:

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow \quad R_A - R_B = 0 \qquad (22)$$

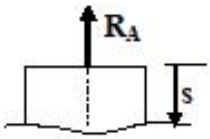
Одно уравнение содержит две неизвестные величины, поэтому задача один раз статически неопределимая.

Составим дополнительное уравнение совместности деформаций, исходя из условия, что общая длина стержня между опорами не изменяется:

$$\Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} = 0 \qquad (23)$$

Рассмотрим стержень по участкам.

I участок $0 \le s \le 3a$

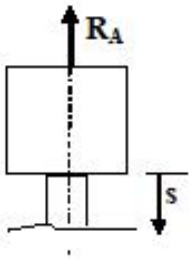


$N_I^{\Delta} = R_A$

Полная деформация на I участке относительно заделки будет равна:

$$\Delta l_I = \frac{N_I^{\Delta} \cdot l_I}{E \cdot A_I} + \Delta_I = \frac{R_A \cdot 3 \cdot a}{E \cdot 4 \cdot A} - 0.03\text{см}.$$

II участок $0 \le s \le 3a$

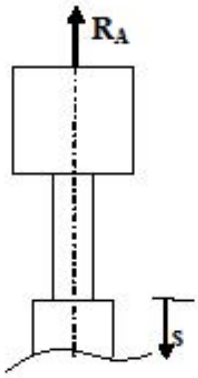


$N_{II}^{\Delta} = R_A$

Полная деформация на II участке относительно заделки будет равна

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{II}^{\Delta} \cdot l_{II}}{E \cdot A_{II}} + \Delta_{II} = \frac{R_A \cdot 3 \cdot a}{E \cdot A} - 0.04\text{см}.$$

III участок $0 \le s \le 2a$



$N_{III}^{\Delta} = R_A$

Полная деформация на III участке относительно заделки будет равна

$$\Delta l_{III} = \frac{N_{III}^{\Delta} \cdot l_{III}}{E \cdot A_{III}} + \Delta_{III} = \frac{R_A \cdot 2 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot A} + 0.02\text{см}.$$

Далее составляем систему из уравнения равновесия (22) и уравнения совместности (23), которая примет вид:

$$\begin{cases} R_A - R_B = 0 \\ \dfrac{N_I^{\Delta} \cdot l_I}{E \cdot A_I} + \Delta_I + \dfrac{N_{II}^{\Delta} \cdot l_{II}}{E \cdot A_{II}} + \Delta_{II} + \dfrac{N_{III}^{\Delta} \cdot l_{III}}{E \cdot A_{III}} + \Delta_{III} = 0 \end{cases}$$

Преобразуем:

$$\begin{cases} R_A = R_B \\ \dfrac{R_A \cdot 3 \cdot a}{E \cdot 4 \cdot A} - 0.03\text{см} + \dfrac{R_A \cdot 3 \cdot a}{E \cdot A} - 0.04\text{см} + \dfrac{R_A \cdot 2 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot A} + 0.02\text{см} = 0 \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$\frac{R_A \cdot 3 \cdot 120\text{см}}{1.2 \cdot 10^3\ \text{т/см}^2 \cdot 4 \cdot 18\text{см}^2} - 0.03\text{см} + \frac{R_A \cdot 3 \cdot 120\text{см}}{1.2 \cdot 10^3\ \text{т/см}^2 \cdot 18\text{см}^2} -$$

$$-0.04\text{см} + \frac{R_A \cdot 2 \cdot 120\text{см}}{1.2 \cdot 10^3\ \text{т/см}^2 \cdot 2 \cdot 18\text{см}^2} + 0.02\text{см} = 0$$

Тогда, получим:

$$R_A = R_B = 1.9\text{т}.$$

Далее определим монтажные усилия N^{Δ} и монтажные напряжения σ^{Δ} по участкам.

I участок $0 \le s \le 3a$

$N_I^{\Delta} = R_A = 1.9\text{т};$

$\sigma_I^{\Delta} = \dfrac{N_I^{\Delta}}{A_I} = \dfrac{1.9\text{т}}{4 \cdot 18\text{см}^2} = 0.03\text{т/см}^2;$

II участок $0 \le s \le 3a$

$N_{II}^{\Delta} = R_A = 1.9\text{т};$

$\sigma_{II}^{\Delta} = \dfrac{N_{II}^{\Delta}}{A_{II}} = \dfrac{1.9\text{т}}{18\text{см}^2} = 0.11\text{т/см}^2;$

III участок $0 \le s \le 2a$

$$N_{III}^{\Delta} = R_A = 1.9\,т;$$

$$\sigma_{III}^{\Delta} = \frac{N_{III}^{\Delta}}{A_{III}} = \frac{1.9\,т}{2 \cdot 18\,см^2} = 0.05\ т/см^2;$$

2. Проверим стержень на прочность. Все участки испытывают деформацию растяжения, так как напряжения положительные. Выберем максимальное по модулю значение монтажного напряжения и запишем условие прочности:

$$\sigma_{раст}^{\Delta\ max} \le R_{раст} \Rightarrow \quad 0.11\,т/см^2 \le 0.33\,т/см^2;$$

Вывод: Условие прочности выполняется, следовательно, стержень прочный.

Задание для самостоятельной работы (задача № 7)

Дан чугунный ступенчатый стержень, концы которого жестко закреплены. До монтажа неточность изготовления длины участков стержня составляла Δ_I, Δ_{II} и Δ_{III}.

Требуется:

1) определить монтажные усилия и монтажные напряжения;
2) проверить прочность стержня.

Исходные данные задачи и схему взять согласно шифру из табл. 15 и 16.

Таблица № 15

Исходные данные (задача № 7)

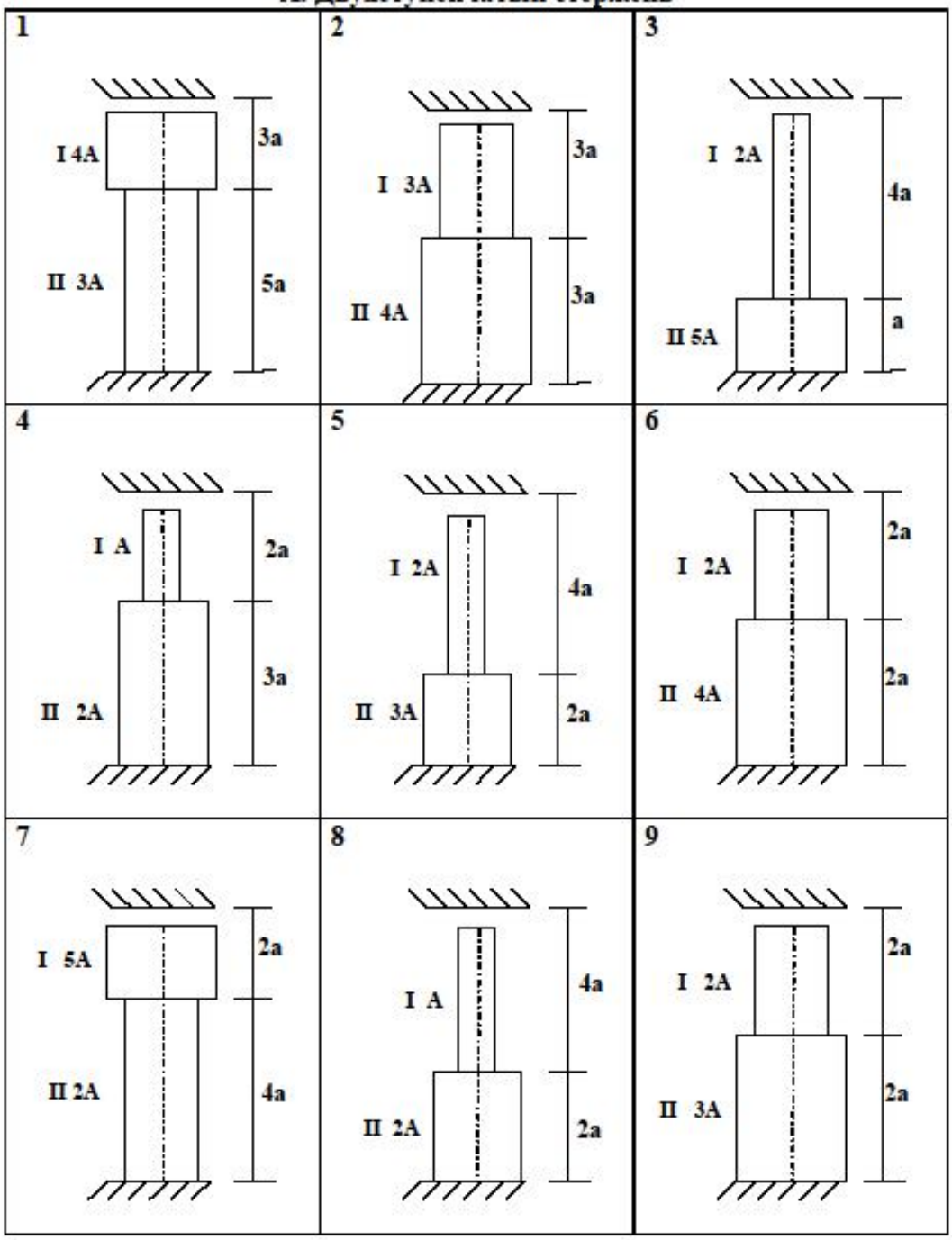
	А	*Б*	*В*			*Г*		
	Площадь сечения А, см^2	Длина а, м	Модуль упругости $E*10^3$, т/см^2	$R_{раст}$, т/см^2	$R_{сж}$, т/см^2	Неточность изготовления длины участков, мм		
						Δ_I	Δ_{II}	Δ_{III}
1	20	1.3	1.3	0.45	1.65	0.2	-0.5	0.9
2	15	1.2	1.2	0.33	1.45	-0.4	0.8	0.7
3	12	1.4	1.3	0.45	1.65	0.5	-0.9	-0.7
4	18	1.3	1.2	0.33	1.45	0.7	-0.9	-0.9
5	25	1.1	1.3	0.45	1.5	-0.3	-0.8	-0.2
6	19	0.9	1.2	0.33	1.45	-0.6	0.7	0.4
7	17	1.8	1.3	0.45	1.65	-0.9	-0.4	0.7
8	30	1.3	1.2	0.33	1.45	0.4	0.5	-0.2
9	14	1.2	1.3	0.45	1.65	0.5	-0.9	-0.7
0	28	1.4	1.2	0.33	1.45	-0.6	-0.7	0.4

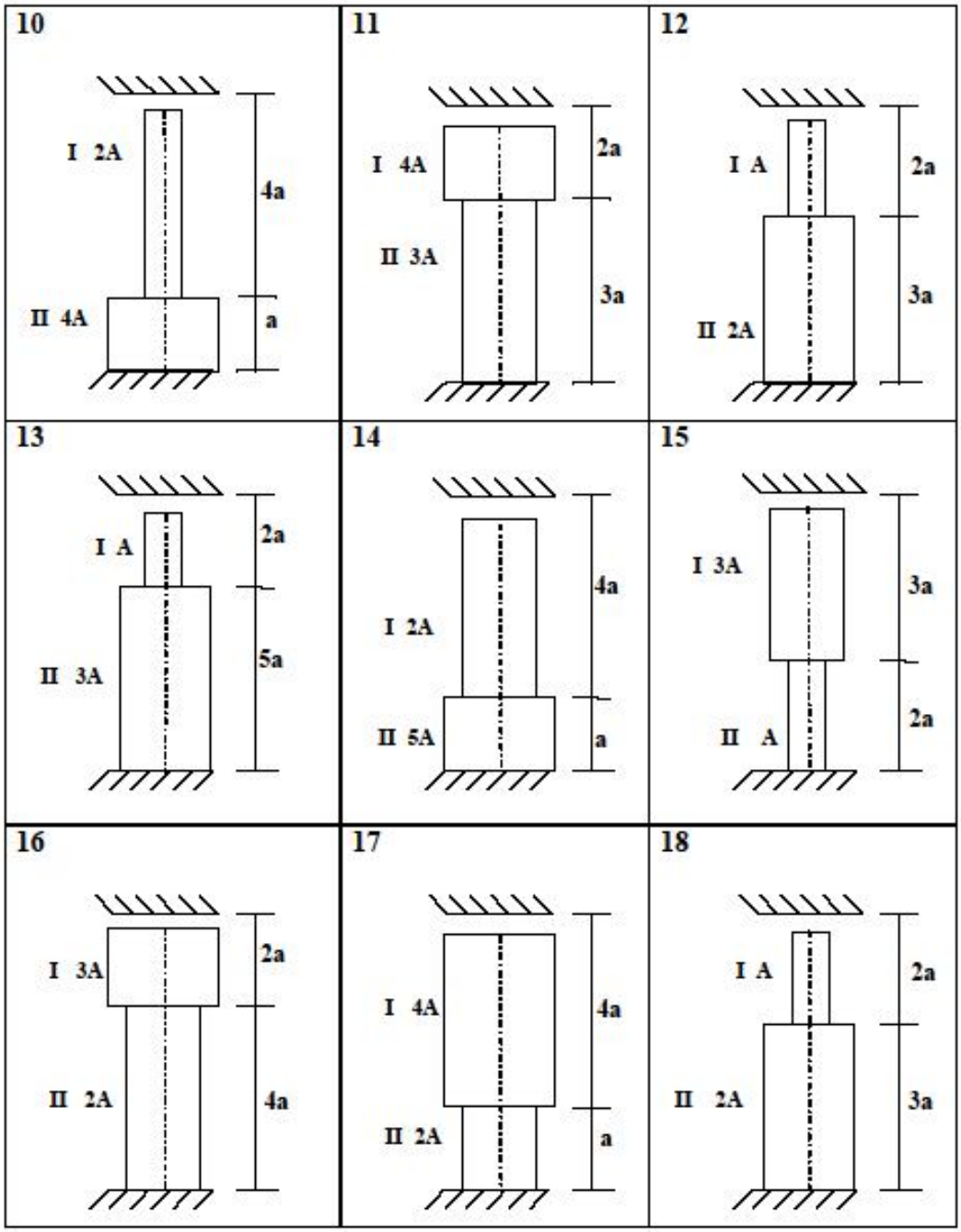
Замечание: Δ_I – неточность изготовления длины I участка;
Δ_{II} – неточность изготовления длины II участка;
Δ_{III} – неточность изготовления длины III участка;

Таблица № 16

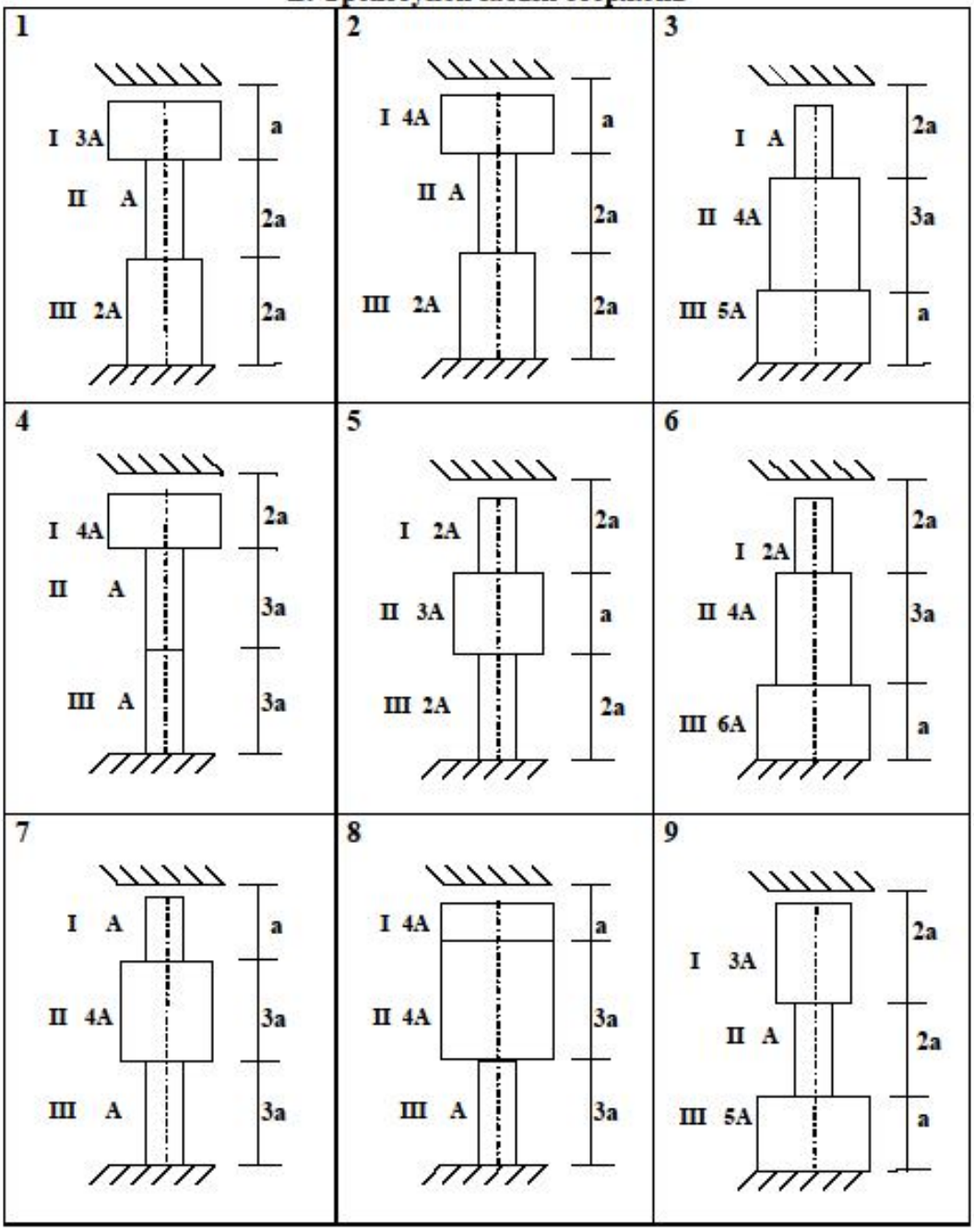
Схемы стержней (задача № 7)

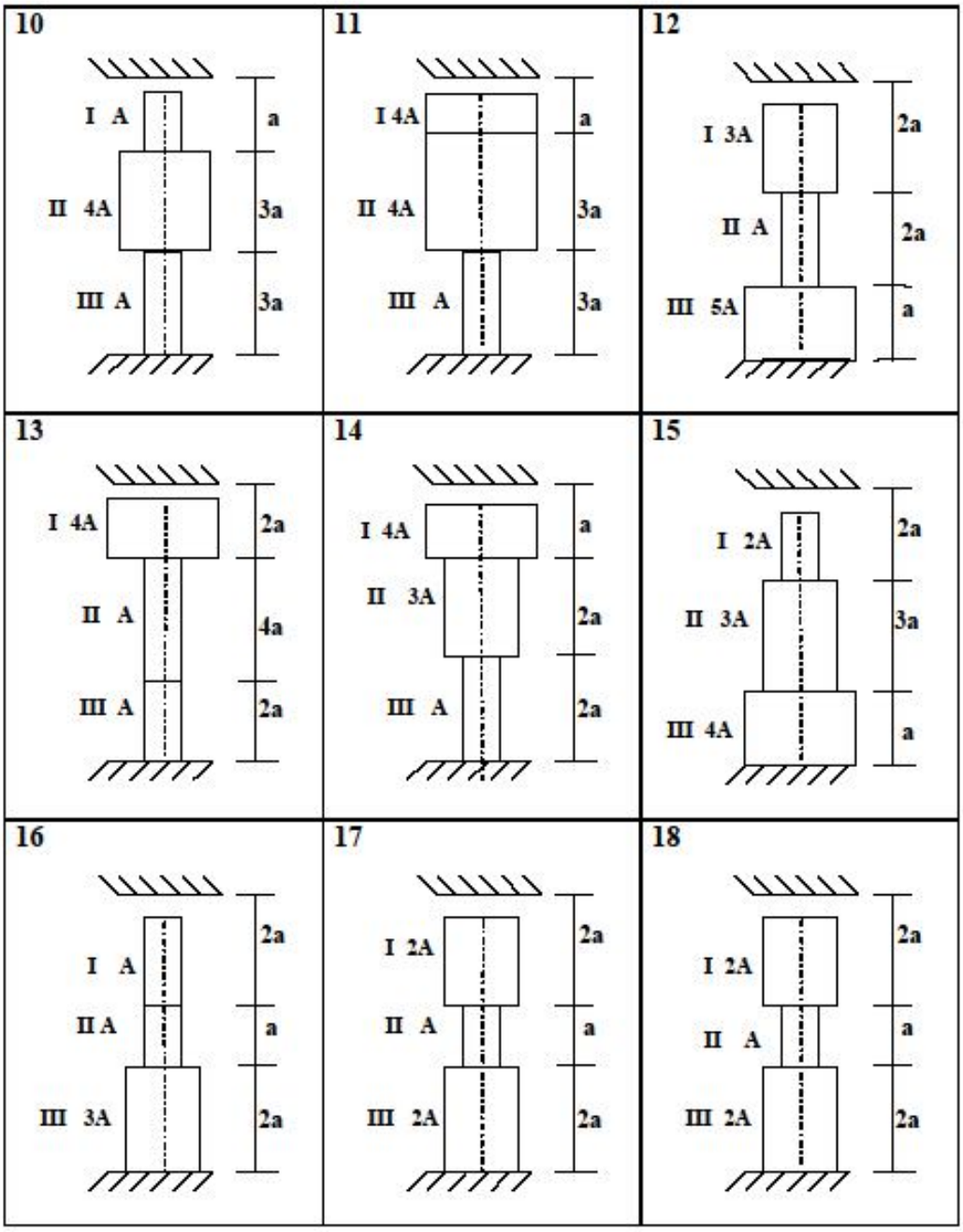
А. Двухступенчатый стержень




10
I 2A
II 4A
4a
a
11
I 4A
II 3A
2a
3a
12
I A
II 2A
2a
3a
13
I A
II 3A
2a
5a
14
I 2A
II 5A
4a
a
15
I 3A
II A
3a
2a
16
I 3A
II 2A
2a
4a
17
I 4A
II 2A
4a
a
18
I A
II 2A
2a
3a

Б. Трехступенчатый стержень

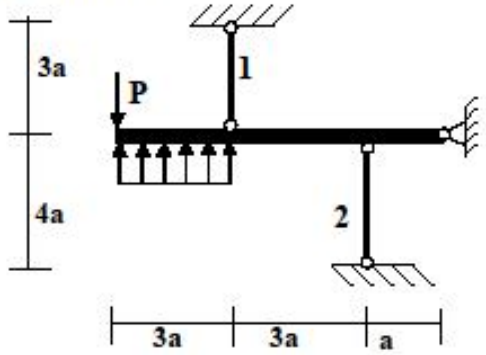



10
I A
II 4A
III A
a
3a
3a
11
I 4A
II 4A
III A
a
3a
3a
12
I 3A
II A
III 5A
2a
2a
a
13
I 4A
II A
III A
2a
4a
2a
14
I 4A
II 3A
III A
a
2a
2a
15
I 2A
II 3A
III 4A
2a
3a
a
16
I A
II A
III 3A
2a
a
2a
17
I 2A
II A
III 2A
2a
a
2a
18
I 2A
II A
III 2A
2a
a
2a

Задача № 8
Статически неопределимая стержневая система, содержащая абсолютно жесткий элемент

Пример решения задачи

Задана стальная шарнирно-стержневая система, состоящая из абсолютно жесткого бруса и упругих стержней с заданными площадями поперечного сечения A_1 и A_2. Материал стержней Сталь 3.



Требуется:

1. Установить степень статической неопределимости.
2. Найти продольные усилия в стержнях N_1 и N_2 и нормальные напряжения σ_1 и σ_2 от приложенной внешней силовой нагрузки.
3. Найти монтажные напряжения в стержнях σ_1^{Δ} и σ_2^{Δ}. Если неточность изготовления $\Delta > 0$, значит, стержень сделан длиннее, если $\Delta < 0$ – короче.
4. Найти температурные напряжения σ_1^t и σ_2^t при изменении температуры в стержнях на Δt_1 и Δt_2 соответственно.
5. Проверить прочность конструкции.

Исходные данные:

$E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^3 \text{т/см}^2$; $R = 2.3\ \text{т/см}^2$; $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ 1/град;

$P = 7\text{т}$; $q = 2\text{т/м}$; $A_1 = 12\text{см}^2$; $A_2 = 24\text{см}^2$;

$a = 1\text{м}$; $\Delta_1 = -0.4\text{мм}$; $\Delta_2 = 0.6\text{мм}$; $\Delta t_1 = 30$ град; $\Delta t_2 = -25$град .

Решение

Данная задача решается на основе принципа независимости действия сил, т.е. мы будем рассматривать три отдельные задачи:

а) задача, где учитывается воздействие на систему только внешней силовой нагрузки;

б) задача, где учитывается только неточность изготовления стержней конструкции;

в) задача, где учитывается только температурный перепад в стержнях конструкции;

1. Брус освобождаем от связей и заменим их реакциями, как показано на рис.14. Методом сечений введем в рассмотрение внутренние продольные усилия в стержнях N_1 и N_2. Условно будем считать, что стержни растянуты, тогда N_1 и N_2 направим от сечения (или по другому, направим их от бруса) как показано на рис.14.

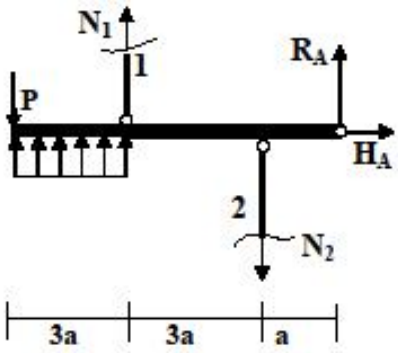


Рис.14

Неизвестных 4: R_A, R_B, N_1, N_2.

Для плоской задачи можно составить следующие три независимых уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum P_{ix} = 0 \\ \sum P_{iy} = 0 \\ \sum mom_A P_i = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ N_1 + R_A - N_2 - P + q \cdot 3a = 0 \\ -N_1 \cdot 4a + N_2 \cdot a + P \cdot 7a - q \cdot 3a \cdot 5.5a = 0 \end{cases} \qquad (24)$$

Таким образом, степень статической неопределимости:

$$m = 4 - 3 = 1.$$

Стержневая система *один раз статически неопределима*.

2. Для определения всех неизвестных R_A, R_B, N_1, N_2 нужно четыре независимых уравнения, а в нашем случае их только три. Дополнительное уравнение, *уравнение совместности деформаций*, получим из *кинематической схемы деформирования конструкции* (рис.15), используя предположение о малости деформаций. При расчете на прочность опорные реакции не используются, поэтому определим только продольные усилия N_1, N_2 в стержнях.

Предположим, что жесткий брус будет поворачиваться относительно шарнира А против часовой стрелки как видно из рис.15.

На основе малости деформаций будем считать, что $BB_1 \perp AB$ и $CC_1 \perp AC$. При составлении уравнения совместности рассмотрим геометрию системы.

$$\Delta ACC_1 \sim \Delta ABB_1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1},$$

$CC_1 = -\Delta l_2$, здесь поставлен знак «–», т.к. второй стержень укорачивается;
$BB_1 = \Delta l_1$, первый стержень удлиняется;

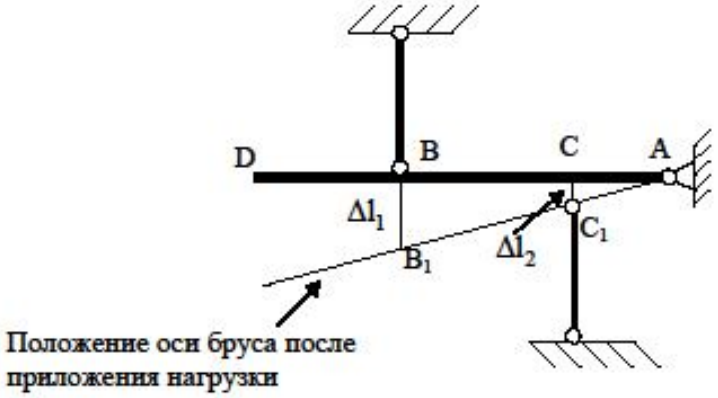


Рис.15. Кинематическая схема деформирования стержневой системы

$$\frac{1м}{4м} = \frac{-\Delta l_2}{\Delta l_1}.$$

Уравнение совместности деформаций примет вид:

$$\Delta l_1 = -4 \cdot \Delta l_2. \qquad (25)$$

Преобразуем это выражение. На основе закона Гука можно записать:

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = -4 \cdot \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2};$$

т.к. $E_1 = E_2 = E$ то $$\frac{N_1 \cdot 300\text{см}}{E \cdot 12\text{см}^2} = -4 \cdot \frac{N_2 \cdot 400\text{см}}{E \cdot 24\text{см}^2};$$

$$N_1 = -2.67 \cdot N_2. \qquad (26)$$

Таким образом, получим искомые усилия в стержнях от приложенной внешней силовой нагрузки решив следующую систему, состоящую из последнего уравнения равновесия в системе (24) и уравнения совместности деформаций (26):

$$\begin{cases} -N_1 \cdot 4a + N_2 \cdot a + P \cdot 7a - q \cdot 3a \cdot 5.5a = 0 \\ N_1 = -2.67 \cdot N_2 \end{cases}$$

Искомые неизвестные:

$$N_1 = 3.66\text{т}; \quad N_2 = -1.37\text{т};$$

Далее, определим напряжения в стержнях от внешней силовой нагрузки:

$$\sigma_1^P = \frac{N_1}{A_1} = \frac{3.66\text{т}}{12\text{см}^2} = 0.31\,\text{т/см}^2;$$

$$\sigma_2^P = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-1.37\text{т}}{24\text{см}^2} = -0.06\,\text{т/см}^2;$$

Вывод: от данной внешней силовой нагрузки в первом стержне возникают растягивающие напряжения, а во втором – сжимающие напряжения.

3. Для нахождения монтажных напряжений $\sigma_1^\Delta, \sigma_2^\Delta$, которые возникают от неточности изготовления стержней (рис.16), необходимо решить статически неопределимую задачу, аналогично пункту 2.

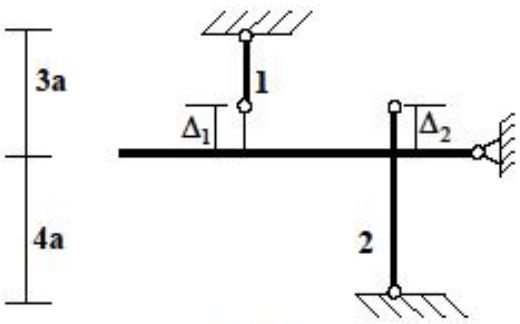


Рис.16

$\Delta_1 = -0.4$мм – стержень сделан короче проектной длины (рис.16);

$\Delta_2 = 0.6$мм – стержень сделан длиннее проектной длины (рис.16);

Можно избежать определения опорных реакции в шарнире А. Для этого запишем только одно уравнение моментов относительно точки А. Так же как и на рис.14 предполагаем, что в стержнях возникают усилия растяжения $N_1^{\Delta}, N_2^{\Delta}$.

$$\sum mom_A: \quad -N_1^{\Delta} \cdot 4a + N_2^{\Delta} \cdot a = 0$$

Уравнение совместности деформации будет таким же как (25):

$$\Delta l_1 = -4 \cdot \Delta l_2.$$

Учитывая неточность изготовления стержней можно записать:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1^{\Delta} \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \Delta_1; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2^{\Delta} \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \Delta_2.$$

Тогда неизвестные монтажные усилия можно определить из системы:

$$\begin{cases} -N_1^{\Delta} \cdot 4a + N_2^{\Delta} \cdot a = 0 \\ \dfrac{N_1^{\Delta} \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \Delta_1 = -4 \cdot (\dfrac{N_2^{\Delta} \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \Delta_2) \end{cases}$$

Подставим исходные данные и решим следующую систему:

$$\begin{cases} -N_1^{\Delta} \cdot 4м + N_2^{\Delta} \cdot 1м = 0 \\ \dfrac{N_1^{\Delta} \cdot 300см}{2000т/см^2 \cdot 12см^2} - 0.04см = -4 \cdot (\dfrac{N_2^{\Delta} \cdot 400см}{2000т/см^2 \cdot 24\,см^2} + 0.06см) \end{cases}$$

Получим монтажные усилия:

$$N_1^{\Delta} = -1.37т;$$

$$N_2^{\Delta} = -5.49т;$$

Далее вычислим монтажные напряжения:

$$\sigma_1^{\Delta} = \frac{N_1^{\Delta}}{A_1} = \frac{-1.37\,т}{12\,см^2} = -0.11\,т/см^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2^{\Delta}}{A_2} = \frac{-5.49\,т}{24\,см^2} = -0.23\,т/см^2.$$

Вывод: от данной неточности изготовления в обоих стержнях возникают сжимающие монтажные напряжения.

4. Определим температурные напряжения σ_1^t, σ_2^t, которые возникают от перепада температур в стержнях (рис.17). Задача статически неопределимая, и решается аналогично задаче о монтажных напряжениях (пункт 3).

Также записываем уравнение моментов:

$$\sum mom_A : -N_1^t \cdot 4a + N_2^t \cdot a = 0$$

Уравнение совместности деформации будет таким же как (25):

$$\Delta l_1 = -4 \cdot \Delta l_2$$

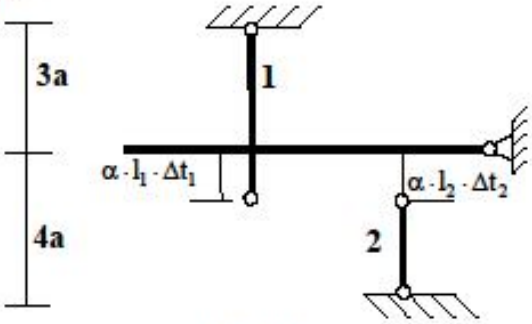


Рис.17

Учитывая перепад температур в стержнях на основе закона Дюамеля-Неймана можно записать деформации в стержнях:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1^t \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t_1; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2^t \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \alpha \cdot l_2 \cdot \Delta t_2;$$

Далее решаем систему:

$$\begin{cases} -N_1^t \cdot 4a + N_2^t \cdot a = 0 \\ \dfrac{N_1^t \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t_1 = -4 \cdot \left(\dfrac{N_2^t \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \alpha \cdot l_2 \cdot \Delta t_2\right) \end{cases}$$

Подставим исходные данные в систему:

$$\begin{cases} -N_1^t \cdot 4м + N_2^t \cdot 1м = 0 \\ \dfrac{N_1^t \cdot 300см}{2000т/см^2 \cdot 12см^2} + 125 \cdot 10^{-7} \dfrac{1}{град} \cdot 300см \cdot 30град = \\ = -4 \cdot (\dfrac{N_2^t \cdot 400см}{2000т/см^2 \cdot 24см^2} + 125 \cdot 10^{-7} \dfrac{1}{град} \cdot 400см \cdot (-25град) \end{cases}$$

Температурные усилия в стержнях примут вид:

$$N_1^t = 2.66т;$$
$$N_2^t = 10.63т.$$

Далее вычислим температурные напряжения:

$$\sigma_1^t = \frac{N_1^t}{A_1} = \frac{2.66т}{12см^2} = 0.22\ т/см^2;$$
$$\sigma_2 = \frac{N_2^t}{A_2} = \frac{10.63т}{24см^2} = 0.44т/см^2.$$

Вывод: От данных перепадов температур в обоих стержнях возникают растягивающие температурные напряжения.

5. Проверим прочность стержневой конструкции. С учетом знаков для напряжений можно записать:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \left|\sigma_1^P + \sigma_1^\Delta + \sigma_1^t\right| \le R \\ \sigma_2 = \left|\sigma_2^P + \sigma_2^\Delta + \sigma_2^t\right| \le R \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \left|0.31\text{т/см}^2 - 0.11\text{т/см}^2 + 0.22\ \text{т/см}^2\right| \le 2.3\text{т/см}^2; \\ \sigma_2 = \left|-0.06\text{т/см}^2 - 0.23\text{т/см}^2 + 0.44\ \text{т/см}^2\right| \le 2.3\text{т/см}^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0.42\ \text{т/см}^2 \le 2.3\text{т/см}^2; \\ \sigma_2 = 0.15\ \text{т/см}^2 \le 2.3\text{т/см}^2. \end{cases}$$

Условие прочности стержневой системы выполняется.

Вывод: Конструкция прочная, так как выдерживает данные в задаче одновременно внешние силовые нагрузки, неточности изготовления и температурные перепады в стержнях.

Задание для самостоятельной работы (задача № 8)

Задана стальная шарнирно-стержневая система, состоящая из абсолютно жесткого бруса и упругих стержней с заданными площадями поперечного сечения A_1 и A_2. Материал стержней Сталь 3.

Требуется:

1. Установить степень статической неопределимости.
2. Найти все неизвестные конструкции: реакции в опорах, продольные усилия в стержнях N_1 и N_2 и нормальные напряжения σ_1 и σ_2 от приложенной внешней силовой нагрузки.
3. Найти монтажные напряжения в стержнях σ_1^{Δ} и σ_2^{Δ} (если неточность изготовления $\Delta > 0$, значит, стержень сделан длиннее, если $\Delta < 0$ – короче).
4. Найти температурные напряжения σ_1^{t} и σ_2^{t} при изменении температуры в стержнях на Δt_1 и Δt_2 соответственно.
5. Проверить прочность конструкции.

Модуль упругости Стали 3 – $E = 2 \cdot 10^3 \text{т/см}^2$; расчетное сопротивление $R = 2.3 \text{т/см}^2$, коэффициент линейного температурного расширения стали $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ 1/град.

Исходные данные задачи и схему взять согласно шифру из табл. 17 и 18.

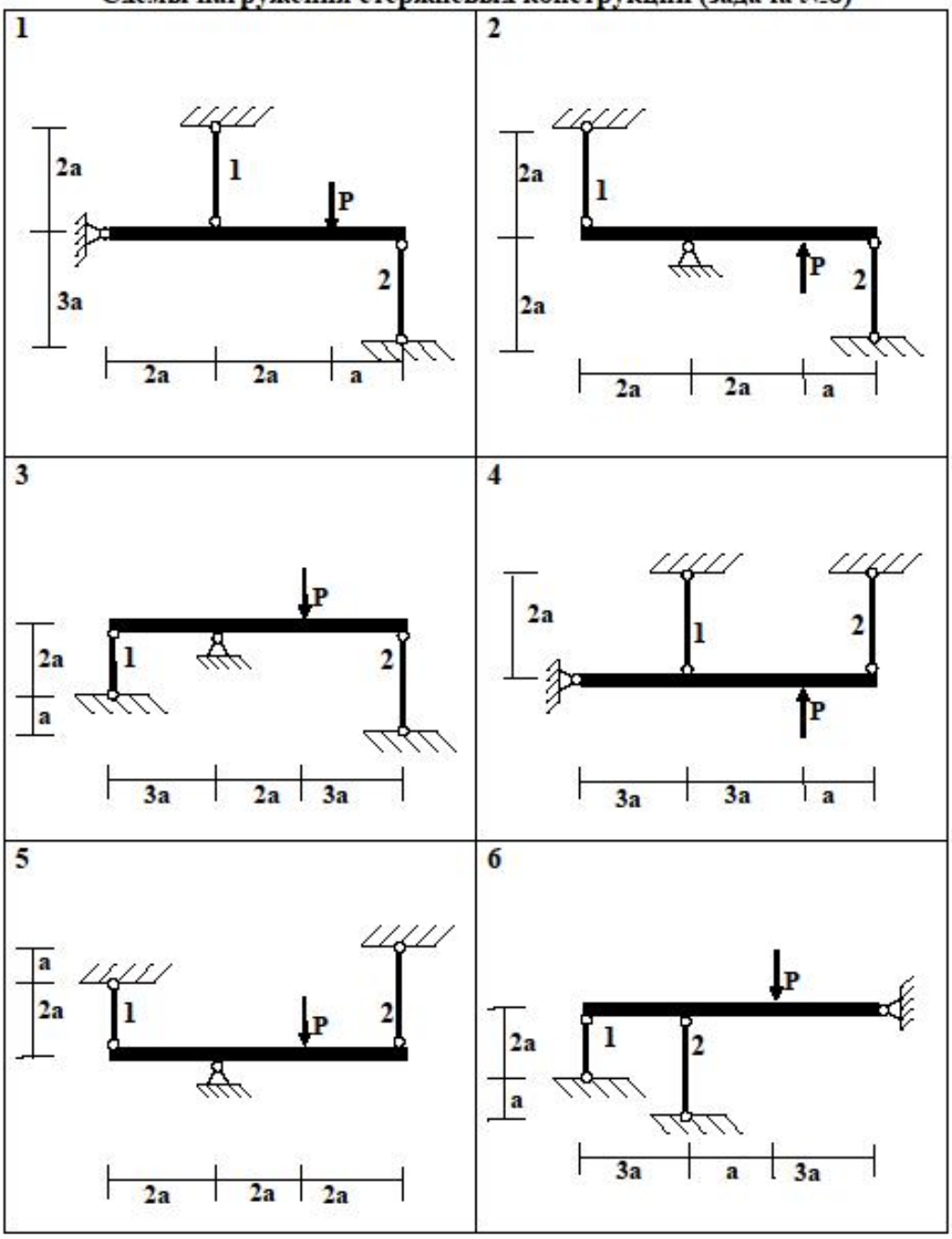
Таблица № 17

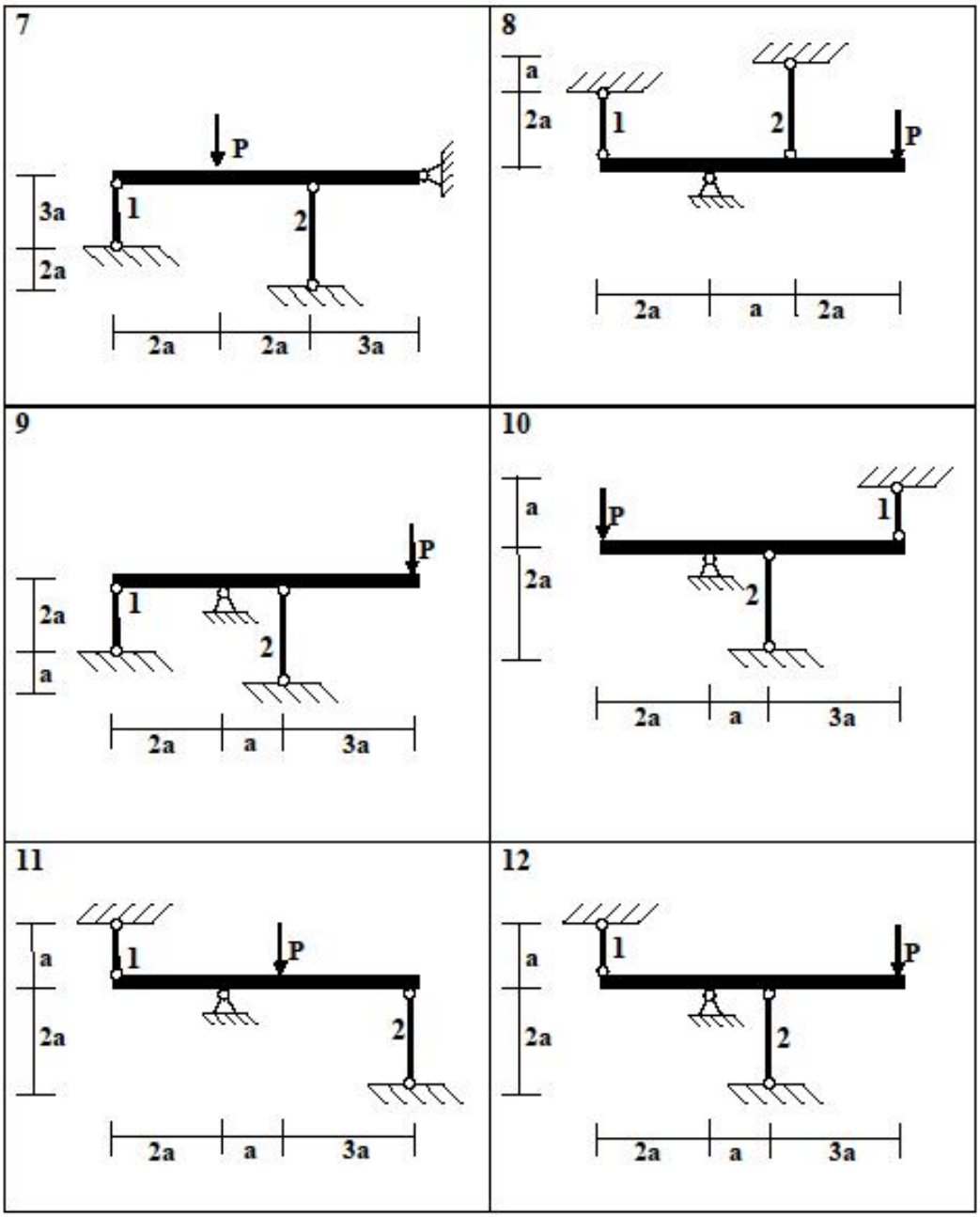
Исходные данные (задача №8)

	А	Б	В		Г	В		Б	
№	q, т/м	P, т	A_1, см^2	A_2, см^2	a, м	Δ_1, мм	Δ_2, мм	Δt_1, град	Δt_2, град
1	2	7	12	20	1.2	-0.4	0.7	-25	40
2	4	10	10	30	1	0.5	0.3	10	-10
3	3	8	20	15	1.1	0.3	-0.6	35	25
4	3	15	20	20	0.9	-0.4	0.5	20	10
5	5	12	15	10	0.7	0.7	-0.4	-25	-25
6	6	8	9	18	0.8	-0.6	-0.3	35	15
7	2	20	22	11	1.3	0.7	-0.5	-20	-20
8	4	15	16	24	1	-0.3	0.6	15	-15
9	2	18	12	18	1.1	0.5	-0.5	40	20
0	3	16	28	14	1.3	-0.2	0.6	-30	-20

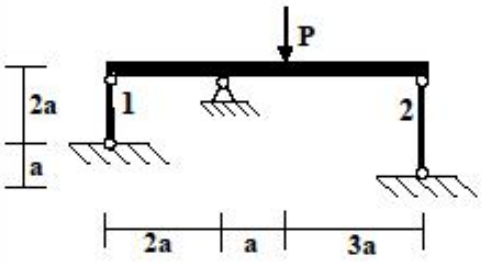
Таблица № 18

Схемы нагружения стержневых конструкций (задача №8)

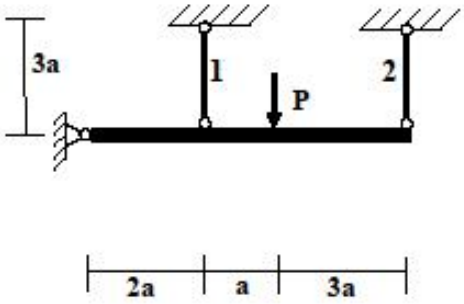



7
P
1
2
3a
2a
2a
2a
3a
8
a
2a
1
2
P
2a
a
2a
9
P
1
2
2a
a
2a
a
3a
10
a
P
1
2
2a
2a
a
3a
11
a
1
P
2
2a
2a
a
3a
12
a
1
P
2
2a
2a
a
3a

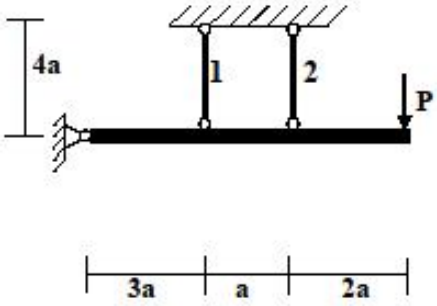
13



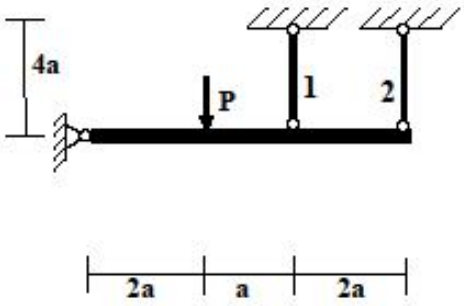
14



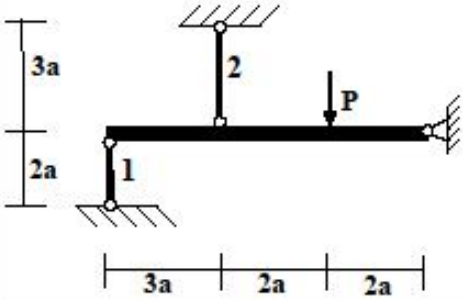
15



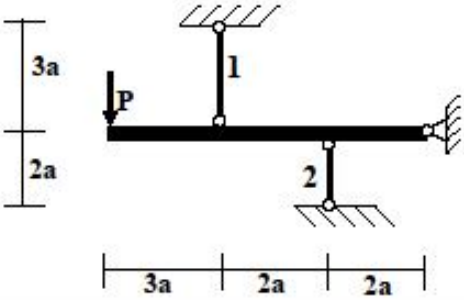
16



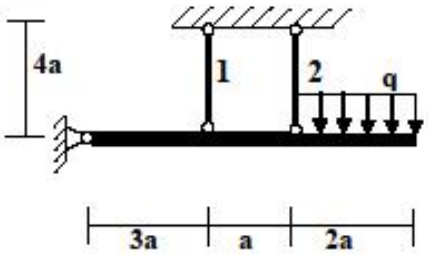
17



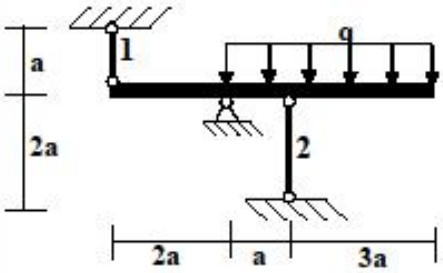
18



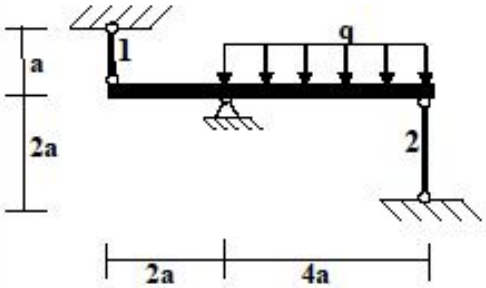
19



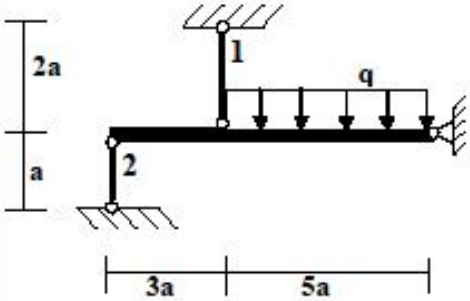
20



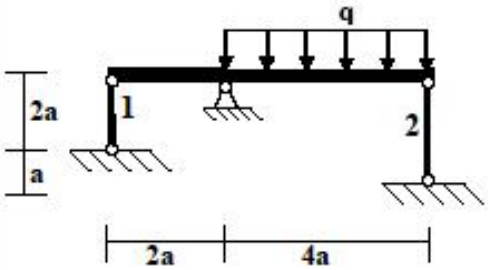
21



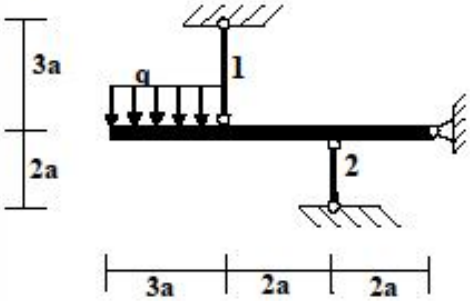
22



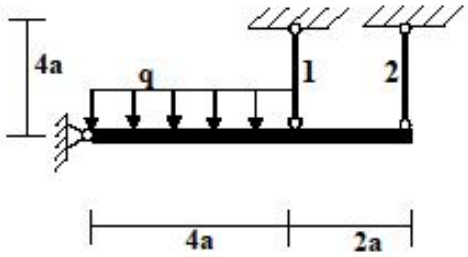
23



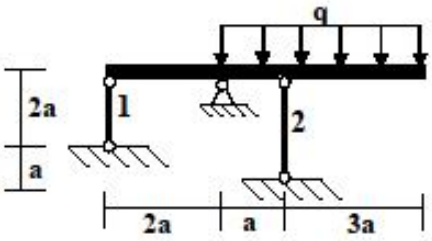
24



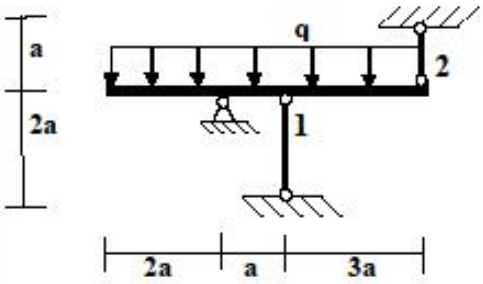
25



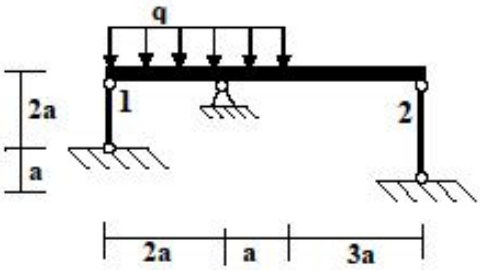
26



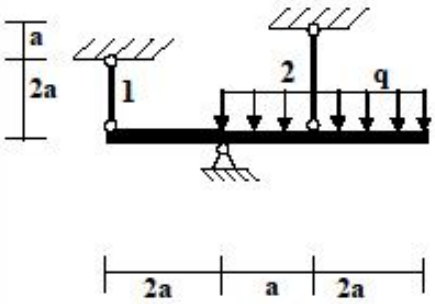
27



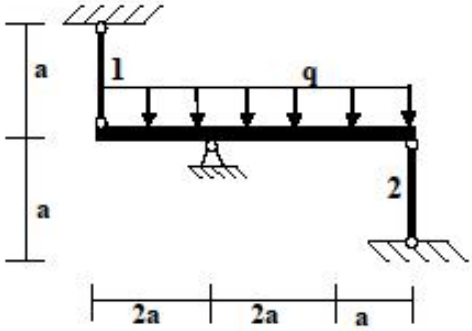
28



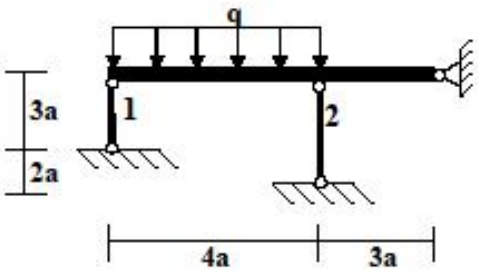
29



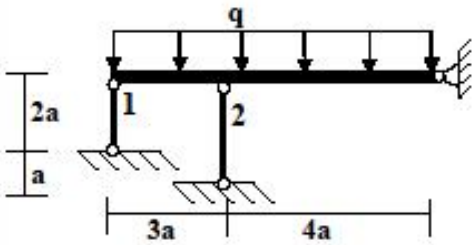
30



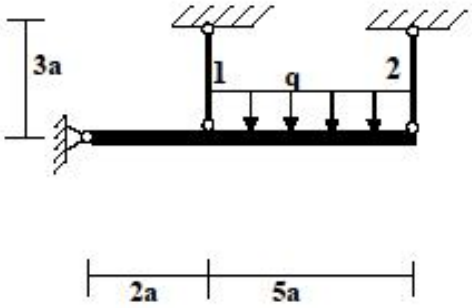
31



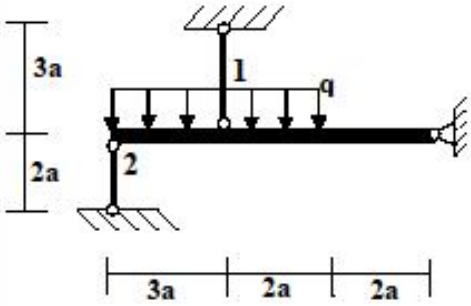
32



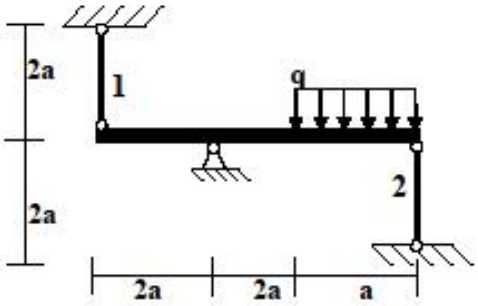
33



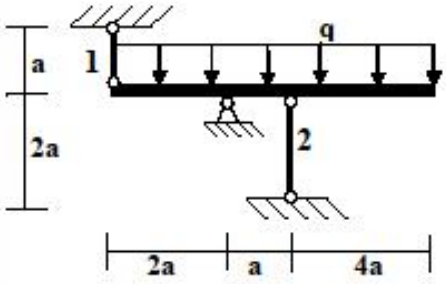
34



35



36



Задача № 9
Статически неопределимая стержневая система с наклонным стержнем, содержащая абсолютно жесткий элемент

Пример решения задачи

Задана стальная шарнирно-стержневая система (рис.18), состоящая из абсолютно жесткого бруса и упругих стержней. Материал стержней Ст 3.

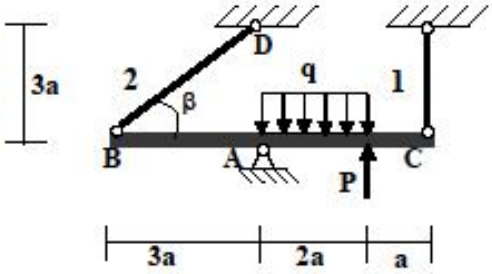


Рис. 18

Требуется:

1. Установить степень статической неопределимости.
2. Найти продольные усилия в стержнях N_1 и N_2 и нормальные напряжения σ_1 и σ_2 от приложенной внешней силовой нагрузки.
3. Найти монтажные напряжения в стержнях σ_1^{Δ} и σ_2^{Δ}.
4. Найти температурные напряжения в стержнях σ_1^{t} и σ_2^{t}.
5. Проверить прочность конструкции;
6. Найти предельную нагрузку по теории предельного равновесия и истинный коэффициент запаса прочности.

Исходные данные:

$E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^3 т/см^2$; $R = 2.3 т/см^2$; $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ 1/град;

$P = 20 т$; $q = 4 т/м$; $A_1 = 5 см^2$; $A_2 = 10 см^2$;

$a = 1 м$; $\Delta_1 = 0.7 мм$; $\Delta_2 = 0.4 мм$; $\Delta t_1 = -20$ град; $\Delta t_2 = -15$ град .

Решение

Определим основные геометрические параметры конструкции.

$$l_1 = 3 м; \; l_2 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4.24 м;$$

$$\mathrm{Sin}\beta = AD/BD = 3/4.24 = 0.71;$$

$$\mathrm{Cos}\beta = AB/BD = 3/4.24 = 0.71;$$

1. Брус освобождаем от связей и заменим их реакциями, как показано на рис.19. Методом сечений введем в рассмотрение внутренние продольные силы в стержнях N_1 и N_2. Будем считать, что стержни растянуты (усилия направим от бруса).

Неизвестных 4: R_A, R_B, N_1, N_2.

Можно составить следующие три независимых уравнения равновесия:

$$\begin{cases} H_A + N_2 \mathrm{Cos}\beta = 0 \\ N_1 + R_A + N_2 \cdot \mathrm{Sin}\beta + P - q \cdot 2a = 0 \\ N_1 \cdot 3a - N_2 \cdot 3a \cdot \mathrm{Sin}\beta + P \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0 \end{cases} \qquad (27)$$

Таким образом, степень статической неопределимости:

$$m = 4 - 3 = 1.$$

Стержневая система *один раз статически неопределима.*

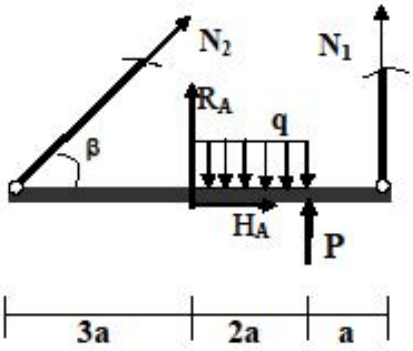


Рис. 19

2. Дополнительное уравнение, *уравнение совместности деформаций*, получим из *кинематической схемы деформирования конструкции* (рис.20), используя предположение о малости деформаций.

Предположим, что жесткий брус будет поворачиваться относительно шарнира А против часовой стрелки.

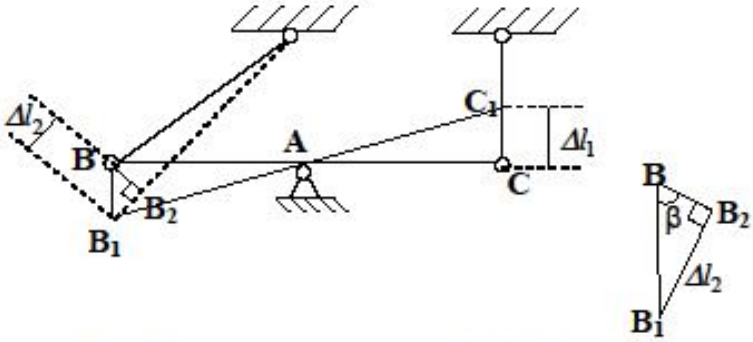


Рис.20 Кинематическая схема деформирования

Ввиду малости деформаций будем считать, что $BB_1 \perp AB$ и $CC_1 \perp AC$.

$CC_1 = -\Delta l_1$, здесь поставлен знак «–» т.к. стержень укорачивается.
$B_1B_2 = \Delta l_2$. Второй стержень удлиняется, следовательно $B_1B_2 > 0$;

При составлении уравнения совместности рассмотрим геометрию деформирования конструкции.

$$\Delta ACC_1 \sim \Delta ABB_1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1};$$

$$\text{Из } \Delta\, BB_1B_2: \quad \sin\beta = \frac{\Delta l_2}{BB_1};$$

$$\frac{3a}{3a} = \frac{-\Delta l_1 \cdot \sin\beta}{\Delta l_2}.$$

Таким образом, уравнение совместности деформаций примет вид:

$$\Delta l_2 = -\Delta l_1 \cdot \sin\beta; \tag{28}$$

На основе закона Гука можно записать:

$$\frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} = -0.71 \cdot \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1}.$$

Так как $E_1 = E_2 = E$, то это выражение можно преобразовать:

$$\frac{N_2 \cdot 424\text{см}}{10\text{см}^2} = -\frac{0.71 \cdot N_1 \cdot 300\text{см}}{5\ \text{см}^2};$$

$$N_2 = -1.005 \cdot N_1. \tag{29}$$

При расчете на прочность опорные реакции не используются, поэтому определим только продольные усилия N_1, N_2 в стержнях. Таким образом, решим систему, состоящую из последнего уравнения системы (27) и соотношения (29):

$$\begin{cases} N_1 \cdot 3a - N_2 \cdot 3a \cdot \mathrm{Sin}\beta + P \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0 \\ N_2 = -1.005 \cdot N_1 \end{cases}$$

Искомые неизвестные продольные силы в стержнях:

$$N_1 = -6.22\,т;\ N_2 = 6.25\,т.$$

Далее определим напряжения в стержнях от внешней силовой нагрузки:

$$\sigma_1^P = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-6.22\,т}{5\,см^2} = -1.24\ т/см^2;$$
$$\sigma_2^P = \frac{N_2}{A_2} = \frac{6.25\,т}{10\,см^2} = 0.63\,т/см^2. \qquad (30)$$

Вывод: от данной внешней силовой нагрузки в первом стержне возникают сжимающие напряжения, а во втором – растягивающие напряжения.

3. Определим монтажные напряжения в стержнях σ_1^Δ и σ_2^Δ. Для нахождения монтажных напряжений $\sigma_1^\Delta, \sigma_2^\Delta$, которые возникают от неточности изготовления стержней (рис.21), необходимо решить статически неопределимую задачу, аналогично пункту 2.

$\Delta_1 = 0.7\,мм$ – первый стержень сделан длинее проектной длины (рис.21);

$\Delta_2 = 0.4\,мм$ – второй стержень сделан длиннее проектной длины (рис.21);

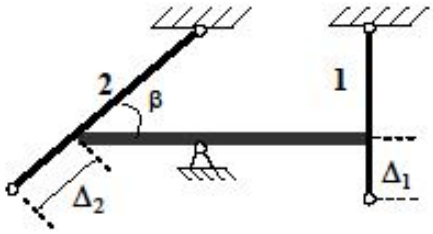


Рис. 21

Как было сказано выше, при расчете на прочность опорные реакции не используются, поэтому запишем уравнение моментов относительно точки А. В стержнях возникают продольные монтажные усилия N_1^Δ, N_2^Δ. Хотя в этой задаче для монтажа требуется сжать стержни, будем изображать N_1^Δ, N_2^Δ растягивающими (рис. 22).

$$\sum mom_A: \quad N_1^{\Delta} \cdot 3a - N_2^{\Delta} \cdot 3a \cdot \mathrm{Sin}\beta = 0.$$

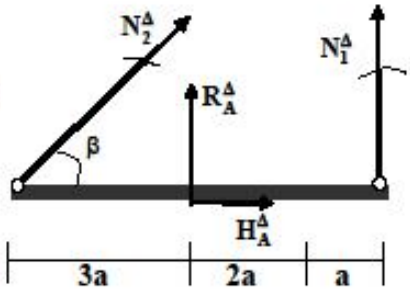


Рис. 22

Уравнение совместности деформации будет таким же как (28):

$$\Delta l_2 = -\Delta l_1 \cdot \sin\beta.$$

Учитывая неточность изготовления стержней можно записать:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1^{\Delta} \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \Delta_1; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2^{\Delta} \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \Delta_2.$$

Тогда неизвестные монтажные усилия можно определить из системы:

$$\begin{cases} N_1^{\Delta} \cdot 3a - N_2^{\Delta} \cdot 3a \cdot \mathrm{Sin}\beta = 0 \\ \dfrac{N_2^{\Delta} \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \Delta_2 = -(\dfrac{N_1^{\Delta} \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \Delta_1) \cdot \mathrm{Sin}\beta \end{cases}$$

Подставим исходные данные и решим следующую систему:

$$\begin{cases} N_1^{\Delta} \cdot 3м - N_2^{\Delta} \cdot 3м \cdot 0.71 = 0 \\ \dfrac{N_2^{\Delta} \cdot 424см}{2000т/см^2 \cdot 10см^2} + 0.04см = -(\dfrac{N_1^{\Delta} \cdot 300см}{2000т/см^2 \cdot 5см^2} + 0.07см) \cdot 0.71 \end{cases}$$

Получим монтажные усилия:

$$N_1^{\Delta} = -1.75т;$$

$$N_2^{\Delta} = -2.47т;$$

Далее вычислим монтажные напряжения:

$$\sigma_1^{\Delta} = \frac{N_1^{\Delta}}{A_1} = \frac{-1.75т}{5см^2} = -0.35\ т/см^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2^{\Delta}}{A_2} = \frac{-2.47т}{10см^2} = -0.25т/см^2.$$

Вывод: от данной неточности изготовления в обоих стержнях возникают сжимающие монтажные напряжения, причем они в пределах допустимого значения $R = 2.3\,т/см^2$.

4. Определим температурные напряжения σ_1^t, σ_2^t, которые возникают от перепада температур в стержнях. Задача статически неопределимая, и решается аналогично задаче о монтажных напряжениях.
Записываем уравнение моментов:

$$\sum mom_A : N_1^t \cdot 3a - N_2^t \cdot 3a \cdot \mathrm{Sin}\beta = 0.$$

Уравнение совместности деформации будет таким же как (28):

$$\Delta l_2 = -\Delta l_1 \cdot \sin\beta.$$

Учитывая перепад температур в стержнях (рис. 23) на основе закона Дюамеля-Неймана можно записать деформации в стержнях:

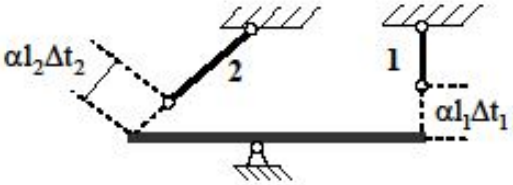


Рис. 23

$$\Delta l_1 = \frac{N_1^t \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t_1; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2^t \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \alpha \cdot l_2 \cdot \Delta t_2;$$

Далее решаем систему:

$$\begin{cases} N_1^t \cdot 3a - N_2^t \cdot 3a \cdot \mathrm{Sin}\beta = 0 \\ \dfrac{N_2^t \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \alpha \cdot l_2 \cdot \Delta t_2 = -(\dfrac{N_1^t \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t_1) \cdot \sin\beta \end{cases}$$

Подставим исходные данные в систему:

$$\begin{cases} N_1^t \cdot 3м - N_2^t \cdot 3м \cdot 0.71 = 0 \\ \dfrac{N_2^\Delta \cdot 424см}{2000\,т/см^2 \cdot 10см^2} + 125 \cdot 10^{-7} \dfrac{1}{град} \cdot 424см \cdot (-15град) = \\ = -[\dfrac{N_1^\Delta \cdot 300см}{2000\,т/см^2 \cdot 5см^2} + 125 \cdot 10^{-7} \dfrac{1}{град} \cdot 300см \cdot (-20град)] \cdot 0.71 \end{cases}$$

Температурные усилия в стержнях примут вид:

$$N_1^t = 2.59\,т;$$
$$N_2^t = 3.65\,т.$$

Далее вычислим температурные напряжения:

$$\sigma_1^t = \frac{N_1^t}{A_1} = \frac{2.59\,т}{5\,см^2} = 0.52\ т/см^2;$$
$$\sigma_2 = \frac{N_2^t}{A_2} = \frac{3.65\,т}{10\,см^2} = 0.37\,т/см^2.$$

Вывод: от данных перепадов температур в обоих стержнях возникают растягивающие температурные напряжения, причем они в пределах допустимого значения $R = 2.3\,т/см^2$.

5. Проверим прочность стержневой конструкции. С учетом знаков для напряжений можно записать:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \left|\sigma_1^P + \sigma_1^\Delta + \sigma_1^t\right| \le R \\ \sigma_2 = \left|\sigma_2^P + \sigma_2^\Delta + \sigma_2^t\right| \le R \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \left|-1.24\,т/см^2 - 0.35\,т/см^2 + 0.52\ т/см^2\right| \le 2.3\,т/см^2 \\ \sigma_2 = \left|0.63\,т/см^2 - 0.25\,т/см^2 + 0.37\ т/см^2\right| \le 2.3\,т/см^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1.07\ т/см^2 \le 2.3\,т/см^2 \\ \sigma_2 = 0.75\ т/см^2 \le 2.3\,т/см^2 \end{cases}$$

Условие прочности стержневой системы выполняется.

Вывод: Конструкция прочная, так как данные в задаче одновременно внешние силовые нагрузки, неточности изготовления и температурные

перепады в стержнях вызывают напряжения в пределах допустимого значения.

6. Расчет предельной нагрузки по теории предельного равновесия и определение истинного коэффициента запаса прочности.

В постановке задачи предполагается, что внешние приложенные нагрузки P и $Q = q \cdot 2a$ увеличиваются пропорционально:

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_{пр}}{Q_{пр}} = 2.5 .$$

В предельном состоянии, когда конструкция превратится в механизм, во всех стержнях напряжения будут равны пределу текучести $\sigma_т$. При этом, не имеет значения, какими были в начале процесса монтажные и температурные напряжения. Достигнутые значения сил в предельном состоянии обозначим величинами $P_{пр}$ и $Q_{пр}$.

Как видно из (30) первый стержень сжат, а второй растянут, поэтому в предельном состоянии:

$$\sigma_1 = \sigma_{1т} = -\sigma_т = -2.4 т/см^2;$$
$$\sigma_2 = \sigma_{2т} = \sigma_т = 2.4 т/см^2;$$

Тогда можно определить предельные усилия в стержнях:

$$N_{1т} = \sigma_{1т} \cdot A_1 = -2.4 т/см^2 \cdot 5 см^2 = -12 т;$$
$$N_{2т} = \sigma_{2т} \cdot A_2 = 2.4 т/см^2 \cdot 10 см^2 = 24 т;$$

Запишем уравнение равновесия в виде равенства нулю момента всех сил относительно шарнира А (последнее уравнение из системы (27)) в начальный момент предельного состояния:

$$N_{1т} \cdot 3a - N_{2т} \cdot 3a \cdot \mathrm{Sin}\beta + P_{пр} \cdot 2a - Q_{пр} \cdot a = 0 . \qquad (31)$$

Подставим числовые значения в соотношение (31):

$$-12 т \cdot 3м - 24 т \cdot 3м \cdot 0.71 + 2.5 \cdot Q_{пр} \cdot 2м - Q_{пр} \cdot 1м = 0 .$$

Решение будет иметь вид:

$$Q_{пр} = 21.78\,т;$$
$$P_{пр} = 54.45\,т;$$

Можно найти допустимые нагрузки, на основе коэффициента запаса $k = 1.5$:

$$[P] = \frac{P_{пр}}{k} = \frac{54.45\,т}{1.5} = 36.3\,т;$$
$$[Q] = \frac{Q_{пр}}{k} = \frac{21.48\,т}{1.5} = 14.32\,т;$$

Истинный коэффициент запаса прочности определится по формуле:

$$k_{ист} = \frac{P_{пр}}{P} = \frac{54\,т}{20\,т} = 2.72.$$

Вывод: Истинный коэффициент запаса будет равен $k_{ист} = 2.72$.

Задание для самостоятельной работы (задача № 9)

Задана стальная шарнирно-стержневая система, состоящая из абсолютно жесткого бруса и упругих стержней с заданными соотношениями площадей поперечного сечения. Материал стержней Ст 3.

Требуется:

1. Установить степень статической неопределимости.
2. Найти продольные усилия в стержнях N_1 и N_2 и нормальные напряжения σ_1 и σ_2 от приложенной внешней силовой нагрузки.
3. Найти монтажные напряжения в стержнях σ_1^{Δ} и σ_2^{Δ}.
4. Найти температурные напряжения в стержнях σ_1^{t} и σ_2^{t}.
5. Проверить прочность конструкции.
6. Найти предельную нагрузку по теории предельного равновесия и истинный коэффициент запаса прочности.

Для Стали 3: $E = 2 \cdot 10^3 \text{т/см}^2$; $R = 2.3 \text{т/см}^2$.

Исходные данные задачи и схему взять согласно шифру из табл. 19 и 20.

Таблица № 19

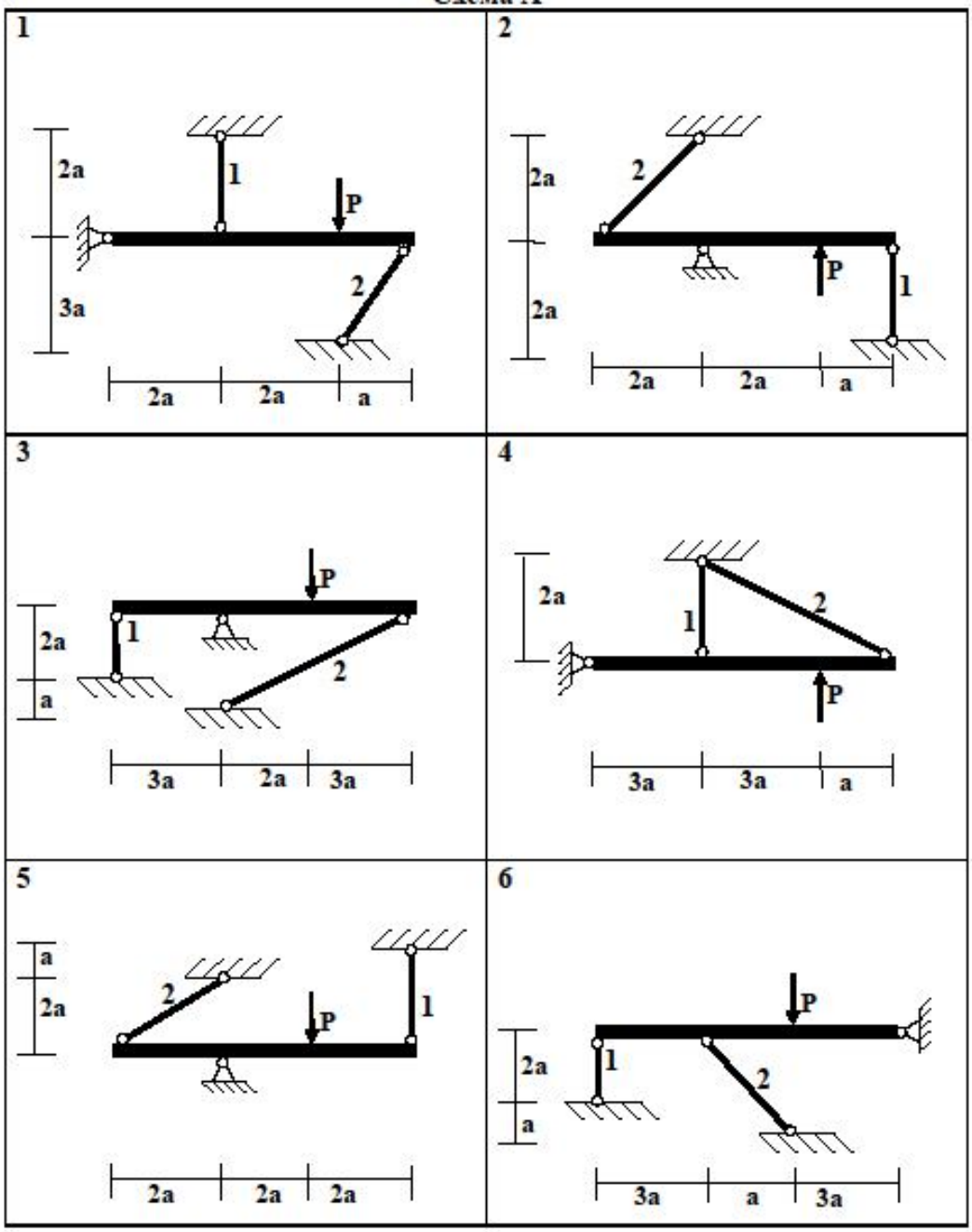
Исходные данные (задача № 9)

	А	*Б*	*В*		*Г*	*Б*		*А*	
№	q, т/м	P, т	A_1, см^2	A_2, см^2	a, м	Δ_1, мм	Δ_2, мм	Δt_1, град	Δt_2, град
1	3	12	12	8	1.1	-0.5	-0.7	-20	-40
2	2	8	10	12	1.2	-0.4	0.3	10	-10
3	4	9	15	5	1.0	0.3	-0.6	-35	25
4	2	11	6	8	0.9	-0.4	0.5	20	-10
5	6	15	11	22	0.8	0.7	-0.4	-25	20
6	4	10	12	14	0.9	-0.6	-0.3	35	-15
7	5	6	9	18	1.3	0.7	-0.5	30	-20
8	4	20	16	9	1.0	-0.3	0.6	15	-15
9	2	15	5	10	1.1	0.5	-0.5	20	20
0	2	7	12	20	1.3	-0.2	0.6	-30	-10

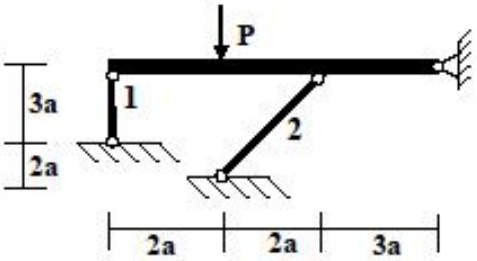
Таблица № 20

Схемы нагружения (задача № 9)

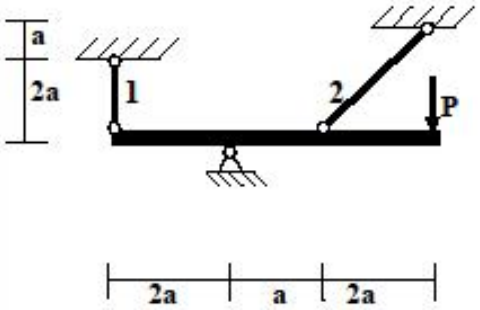
Схема А



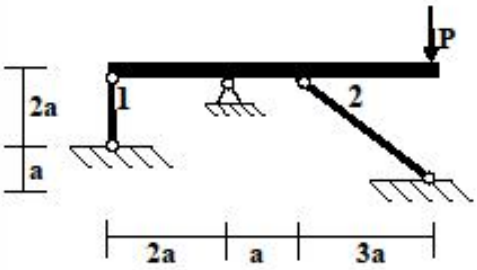
7


P
1
2
3a
2a
2a
2a
3a

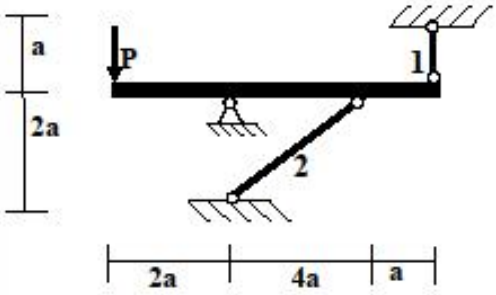
8


a
2a
1
2
P
2a
a
2a

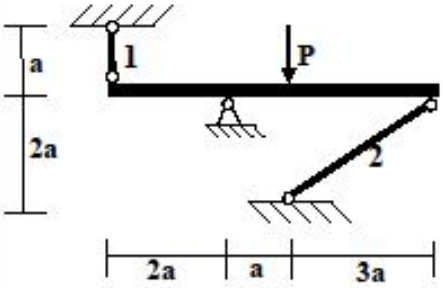
9


P
1
2
2a
a
2a
a
3a

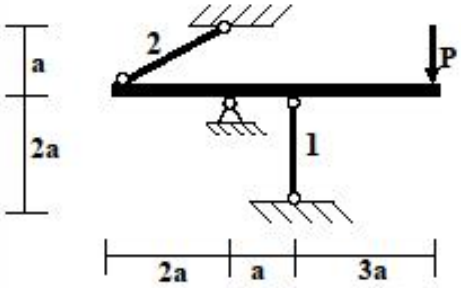
10


a
P
1
2a
2
2a
4a
a

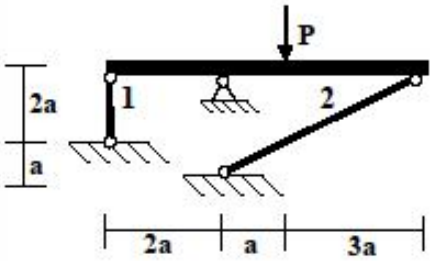
11


a
1
P
2a
2
2a
a
3a

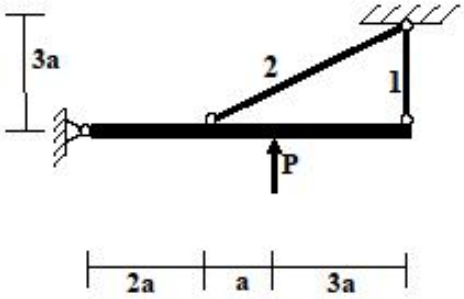
12


2
P
a
2a
1
2a
a
3a

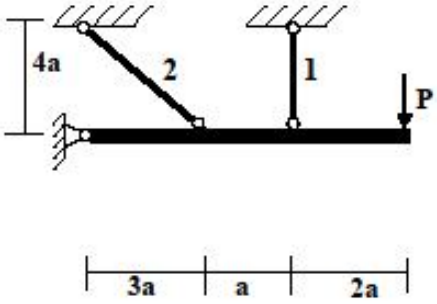
13



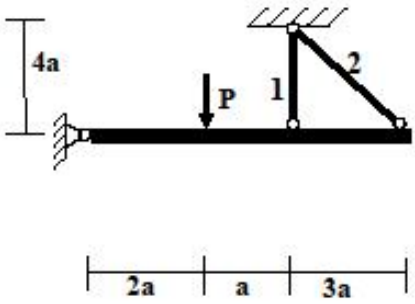
14



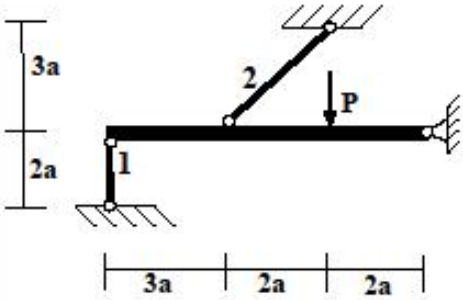
15



16



17



18

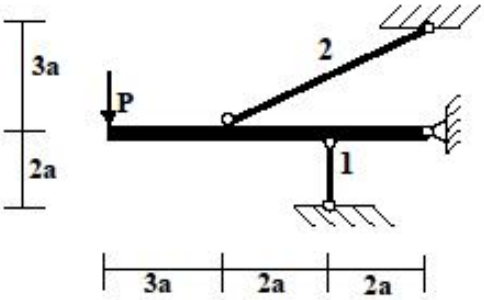
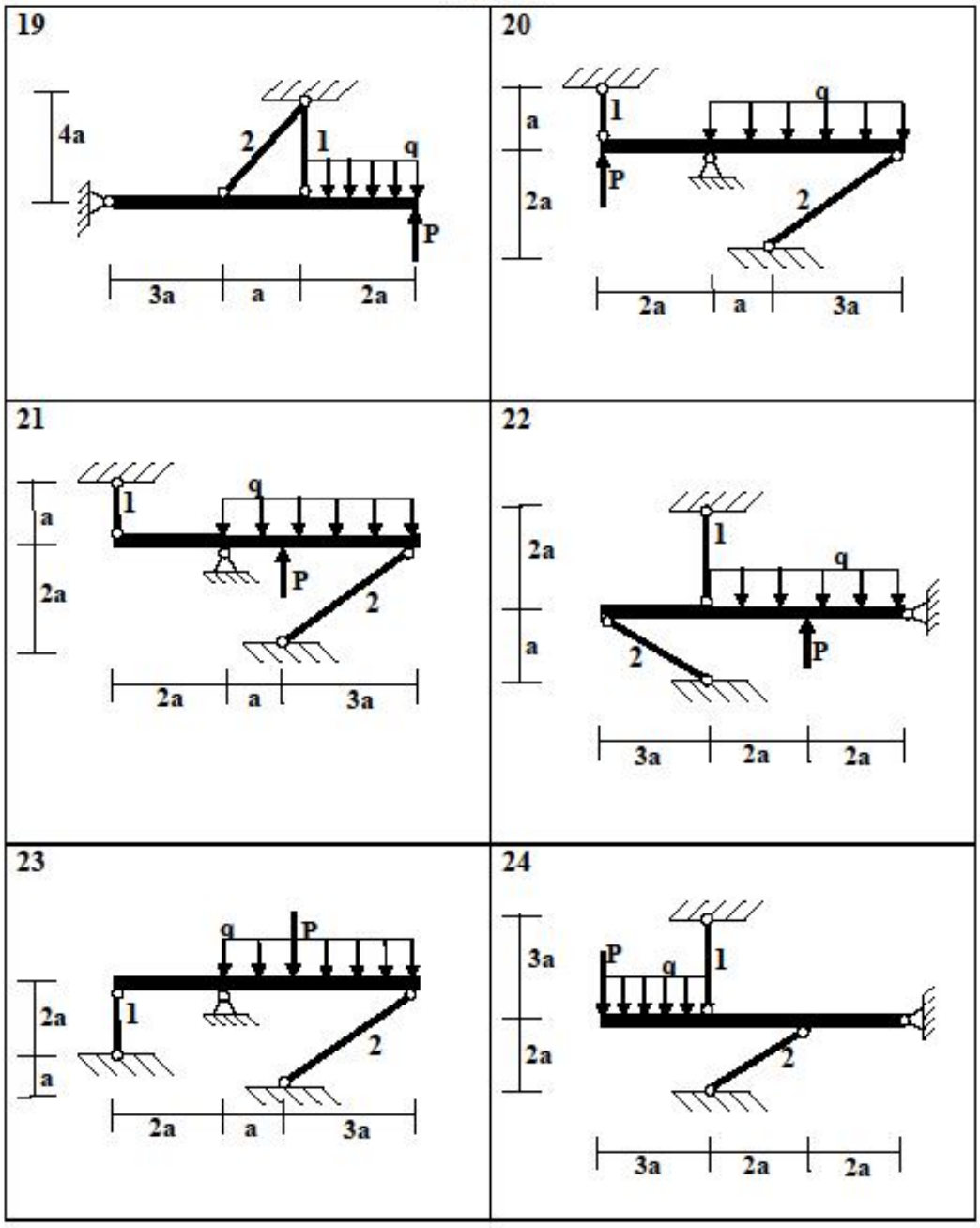
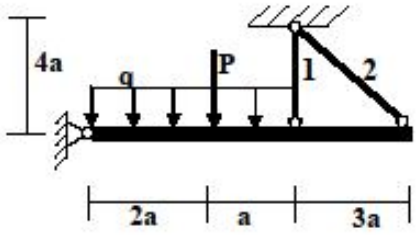


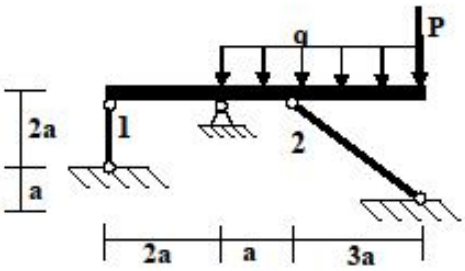
Схема В


19
4a
2
1
q
P
3a
a
2a
20
a
2a
1
q
P
2
2a
a
3a
21
a
2a
1
q
P
2
2a
a
3a
22
2a
a
1
q
2
P
3a
2a
2a
23
2a
a
q
P
1
2
2a
a
3a
24
3a
2a
P
q
1
2
3a
2a
2a

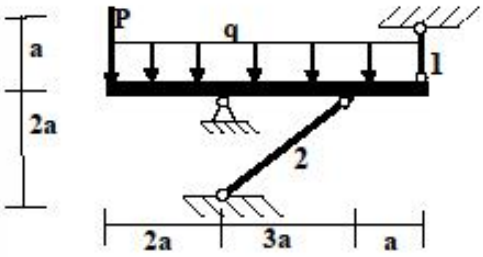
25



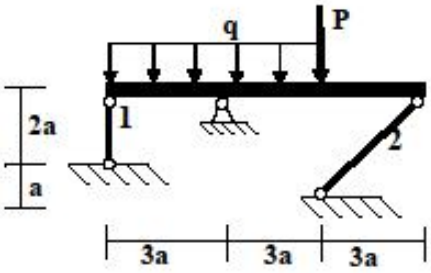
26



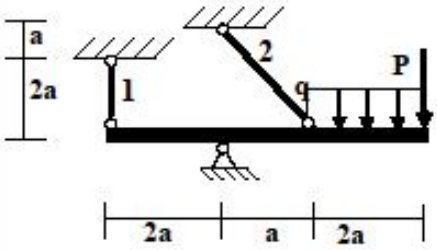
27



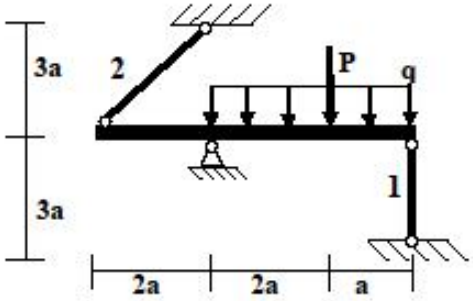
28



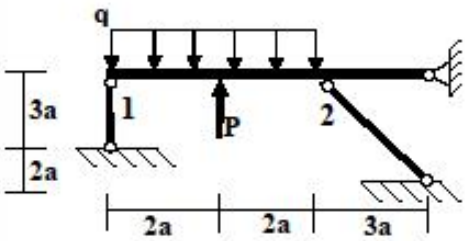
29



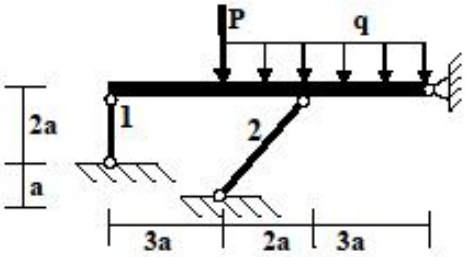
30



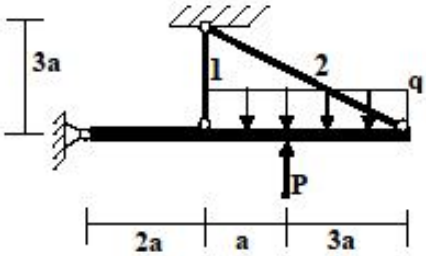
31



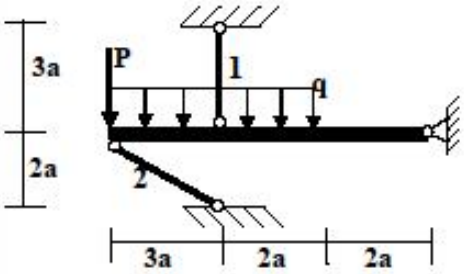
32



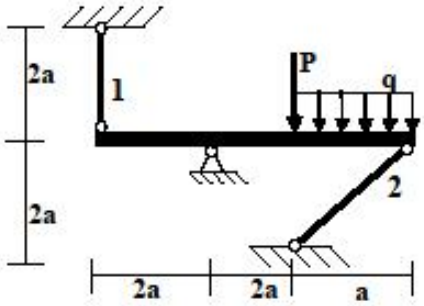
33



34



35



36